فصل ۳
توابع چند متغیره

۱.۳ فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$

در جهان پیرامون ما، بسیاری از کمیت های مورد مطالعه وابسته به چندین پارامتر مختلف (مانند مکان، زمان، طول، عرض و ...) هستند. بدیهی ترین پیامد این امر آن است که تغییر هر یک از این پارامترها روی کمیت مذکور اثر متفاوتی برجا می گذارد. از این رو این فصل و فصل های آینده را به مطالعه رفتارهای توابع چند متغیره اختصاص می دهیم.

ما پیش از این با فضاهای $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ و خصوصیات هندسی آن ها آشنا شده ایم. در این فصل برای سادگی در تعاریف، ابتدا مفهوم فضای n- بعدی اقلیدسی، که با $\mathbb{R}^n$ نشان داده می شود، را معرفی می کنیم.

تعریف ۱.۱.۳. فضای n- بعدی $\mathbb{R}^n$ عبارت است از مجموعه همه n-تایی‌های مرتب $(x_1, \cdots, x_n)$ که $x_i \in \mathbb{R}$. به عبارت دیگر:

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$$

یکی از مفاهیم کلیدی در مطالعه فضاهای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$، مفهوم گوی n-بعدی است.

تعریف ۲.۱.۳. فرض کنید $p = (a_۱, \cdots, a_n)$ یک نقطه در فضای $\mathbb{R}^n$ و r یک عدد حقیقی مثبت است. در این صورت مکان هندسی همه نقاطی از $\mathbb{R}^n$ که در رابطه

$$(x_۱ - a_۱)^۲ + \cdots + (x_n - a_n)^۲ = r^۲$$

صدق می‌کنند را یک گوی n-بعدی با مرکز p و شعاع r می‌نامیم.

دقت کنید که در حالت خاص $n = ۲$ و $n = ۳$، مفهوم گوی n-بعدی همان دایره و کره است.

تعریف ۳.۱.۳. فرض کنید $p = (a_۱, ..., a_n)$ یک نقطه در فضای $\mathbb{R}^n$ است. یک همسایگی از نقطه p با شعاع r عبارت است از مجموعه همه نقاط $(x_۱, ..., x_n)$ که در رابطه $(x_۱ - a_۱)^۲ + ... + (x_n - a_n)^۲ < r^۲$ صدق می کنند. برای سادگی این همسایگی را با نماد $N_r(p)$ نشان می دهیم.

در حالت خاص $n = ۲$ ، $N_r(p)$ درون یک دایره با مرکز p و شعاع r است. همچنین برای $n = ۳$ ، $N_r(p)$ درون یک کره با مرکز p و شعاع r خواهد بود.

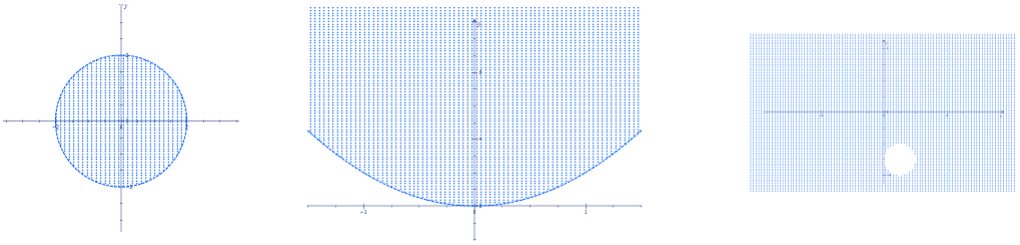
مجموعه $N_r(p) - \{p\}$ را یک همسایگی محذوف از نقطه p با شعاع r می نامیم و آن را با نماد $N_r^*(p)$ نشان می دهیم.

تعریف ۴.۱.۳. فرض کنید U یک زیرمجموعه ناتهی از فضای $\mathbb{R}^n$ است. U را یک مجموعه باز در $\mathbb{R}^n$ گوییم هرگاه برای هر $p \in U$، عدد حقیقی $r > ۰$ موجود باشد به طوری که $N_r(p) \subseteq U$.

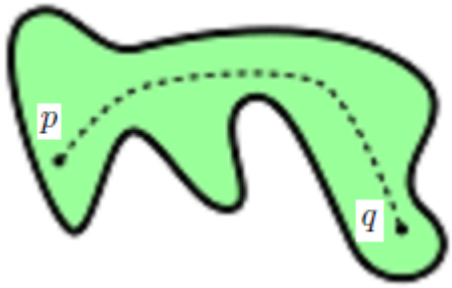
مثال ۵.۱.۳. هر یک از مجموعه‌های زیر یک مجموعه باز در $\mathbb{R}^۲$ است:

$$\begin{aligned}
U_۱ &= \{(x, y) \mid x^۲ + y^۲ < ۴\} \\
U_۲ &= \{(x, y) \mid ۳x^۲ + y^۲ < ۵\} \\
U_۳ &= \{(x, y) \mid y > ۲x^۲\} \\
U_۴ &= \{(x, y) \mid (x - ۱)^۲ + (y + ۳)^۲ > ۱\} \\
U_۵ &= \{(x, y) \mid y > ۰\}
\end{aligned}$$

در تصویر زیر، مجموعه‌های $U_۱$، $U_۳$ و $U_۴$ را می‌بینید.



تعریف ۶.۱.۳. فرض کنید U یک زیرمجموعه از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ است. U را یک مجموعه همبند گوییم هرگاه هر دو نقطه از U را بتوان توسط مسیری در U به هم وصل کرد.



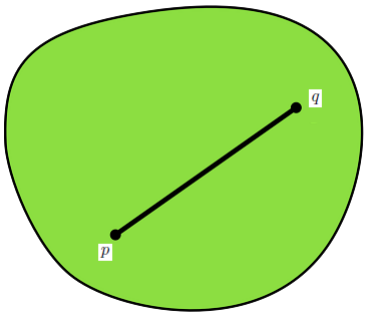
به عنوان مثال، هر یک از مجموعه‌های زیر یک زیرمجموعه همبند از $\mathbb{R}^۲$ است:

$$\begin{aligned} U_۱ &= = \{(x,y) \mid -۱ < x < ۳,\ ۰ < y < ۵\}, \\ U_۲ &= \{(x,y) \mid x^۲ + y^۲ < ۵\}, \\ U_۳ &= \{(x,y) \mid y > x^۲\} \end{aligned}$$

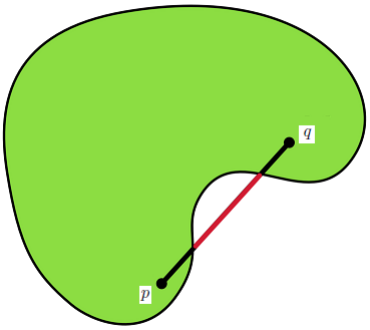
تعریف ۷.۱.۳. زیرمجموعه U از فضای $\mathbb{R}^n$ را یک مجموعه کوژ (محدب) گوییم هرگاه برای هر دو نقطه $p = (a_۱, \cdots, a_n)$ و $q = (b_۱, \cdots, b_n)$ از U و هر $۰ \leq t \leq ۱$ داشته باشیم

$$(۱-t)p + tq = ((۱-t)a_۱ + tb_۱, \cdots, (۱-t)a_n + tb_n) \in U$$

به تعبیر دیگر، U یک مجموعه کوژ است هرگاه برای هر دو نقطه $p, q \in U$، پاره‌خط واصل بین p و q در U قرار گیرد.



تصویر زیر یک مجموعه غیر کوژ را نشان می‌دهد:



این بخش را با تعریف زیر به پایان می‌بریم.

تعریف ۸.۱.۳. هر زیرمجموعه باز و همبند از $\mathbb{R}^n$ را یک ناحیه گوییم.

۲.۳ توابع چندمتغیره

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید D یک زیرمجموعه ناتهی از فضای $\mathbb{R}^n$ است. یک تابع $n-$ متغیره مانند f روی مجموعه D عبارت است از ضابطه ای که به هر $n-$ تایی $(x_1, ..., x_n) \in D$، یک و تنها یک عدد حقیقی نظیر می کند. این عدد منحصربفرد را با $f(x_1, ..., x_n)$ نشان داده و می نویسیم:

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

مجموعه Dرا دامنه تابع f نامیده و معمولا آن را با نماد D_f نشان می دهیم. در حالت کلی، D_f مجموعه همه n- تایی های $(x_1, ..., x_n)$ است بطوریکه $f(x_1, ...x_n)$ تعریف شده باشد. مجموعه

$$Im(f) = \{f(x_1, ..., x_n)|(x_1, ..., x_n) \in D_f\} \subseteq \mathbb{R}$$

را نیز برد تابع f گوییم.

مثال ۲.۲.۳. دامنه تابع دو متغیره $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}} + \ln(x^2 + y^2 - 1)$ را تعیین کنید.

حل: داریم:

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0, x^2 + y^2 - 1 > 0\}$$

به تعبیر هندسی، دامنه تابع f بخشی از صفحه مختصات است که خارج از دایره به مرکز مبدا و شعاع واحد بوده و محور x-ها را شامل نمی شود.

مثال ۳.۲.۳. دامنه تابع سه متغیره $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2} + 2x^2yz^3$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به ضابطه تابع f داریم:

$$\begin{aligned} D_f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 4 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} \end{aligned}$$

از نظر هندسی، دامنه تابع f بخشی از فضاست که روی کره به مرکز مبدا و شعاع ۲ و درون آن قرار دارد.

تعریف ۴.۲.۳. فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R}^n$ و $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع n- متغیره است. نمودار تابع f به صورت زیر تعریف می شود:

$$G_f := \{(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | (x_1, ..., x_n) \in D_f, x_{n+1} = f(x_1, ..., x_n)\}$$

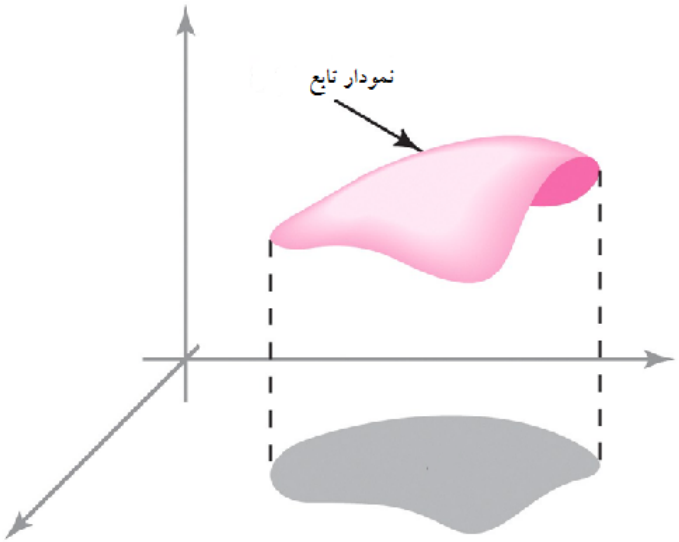
دقت کنید که نمودار یک تابع n- متغیره در حقیقت یک زیر مجموعه از فضای $\mathbb{R}^{n+1}$ است.

درحقیقت آنچه شما پیش از این به عنوان نمودار یک تابع حقیقی می شناختید، نمایش هندسی نمودار است نه خود نمودار. به بیان دیگر، هرگاه $f(x)$ یک تابع حقیقی باشد آنگاه نمودار $f(x)$ زیرمجموعه ای از صفحه مختصات است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$G_f := \{(x, y) | x \in D_f, y = f(x)\}$$

و دارای یک نمایش هندسی به صورت یک منحنی شامل همه نقاط $(x, f(x))$، $x \in D_f$، است.

پس نمودار یک تابع دومتغیره زیرمجموعه ای از فضای $\mathbb{R}^3$ است که دارای یک نمایش هندسی در فضای $\mathbb{R}^3$ خواهد بود. بدیهی است که هرگاه $n \geq 3$ و f یک تابع n- متغیره باشد آنگاه تجسم یک نمایش هندسی برای نمودار f غیرممکن است.



پیش از آنکه مثال هایی از نمودار توابع دومتغیره ارائه دهیم به یک مفهوم مهم به نام رویه نیازمندیم.

۳.۳ رویه ها در فضا

تعریف ۱.۳.۳. یک رویه (سطح، پوسته) مانند S در فضای $\mathbb{R}^n$ عبارت است از مجموعه همه نقاطی مانند $(x_1, \cdots, x_n)$ که در یک معادله ضمنی مثل $F(x_1, \cdots, x_n) = 0$ صدق می کنند. رابطه $F(x_1, \cdots, x_n) = 0$ را معادله رویه S نامیده و می نویسیم:

$$S : F(x_1, \cdots, x_n) = 0$$

مثال ۲.۳.۳. هر یک از رابطه های زیر یک رویه در فضای $\mathbb{R}^3$ است:

$$S_1 \quad : x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \sqrt{5}$$

$$S_2 \quad : x^2 + yz = z^2$$

$$S_3 \quad : 2x - y + 3z = 4$$

دسته بندی رویه ها در فضای $\mathbb{R}^3$ در حالت کلی بسیار سخت و پیچیده است. ما در اینجا به سه دسته از رویه های مهم در فضا اشاره می کنیم.

۱.۳.۳ رویه های دوار

فرض کنید C یک منحنی، l یک خط و π یک صفحه در فضا است که شامل منحنی C و خط l است. به علاوه فرض کنید خط l منحنی C را قطع نمی کند. با دوران C حول خط l یک رویه در فضا حاصل می شود که آن را یک رویه دوار می نامیم. C را منحنی مولد این رویه و l را محور دوران آن می گویند.

در حالت خاص، اگر منحنی C در صفحه xy بوده و خط l یکی از محورهای مختصات باشد آنگاه می توان معادله رویه دوار را به سادگی به دست آورد.

اگر منحنی $C : f(x, y) = 0$ $(y > 0)$ را حول محور x-ها دوران دهیم آنگاه معادله رویه حاصل به صورت $S : f(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ خواهد بود. مشابها اگر $y < 0$ آنگاه معادله رویه حاصل به صورت

$S : f(x, -\sqrt{y^۲ + z^۲}) = ۰$ است. به همین ترتیب اگر منحنی $C : f(x, y) = ۰$ $(x > ۰)$ را حول محور y-ها دوران دهیم آنگاه معادله رویه دوار به فرم $S : f(\sqrt{x^۲ + z^۲}, y) = ۰$ و در حالت $x < ۰$ به فرم $S : f(-\sqrt{x^۲ + z^۲}, y) = ۰$ است.

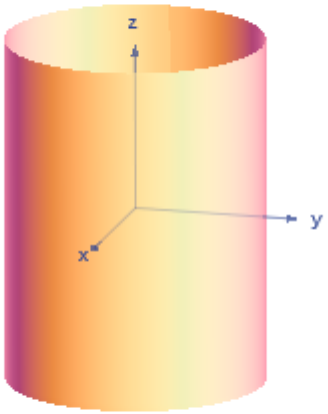
قواعد مشابه برای دوران $f(y, z) = ۰$ یا $f(x, z) = ۰$ حول محورهای مختصات وجود دارد.

مثال ۳.۳.۳. منحنی $۴x^۲ + y^۲ = ۱$ $(y > ۰)$ را حول محور x دوران داده ایم. معادله رویه حاصل را بنویسید.

حل: داریم $f(x, y) = ۴x^۲ + y^۲ - ۱$. پس معادله رویه حاصل به صورت $f(x, \sqrt{y^۲ + z^۲}) = ۰$ است. در نتیجه:

$$S : ۴x^۲ + (\sqrt{y^۲ + z^۲})^۲ - ۱ = ۰ \Longrightarrow S : ۴x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$$

تصویر این رویه را در شکل زیر ملاحظه می کنید.

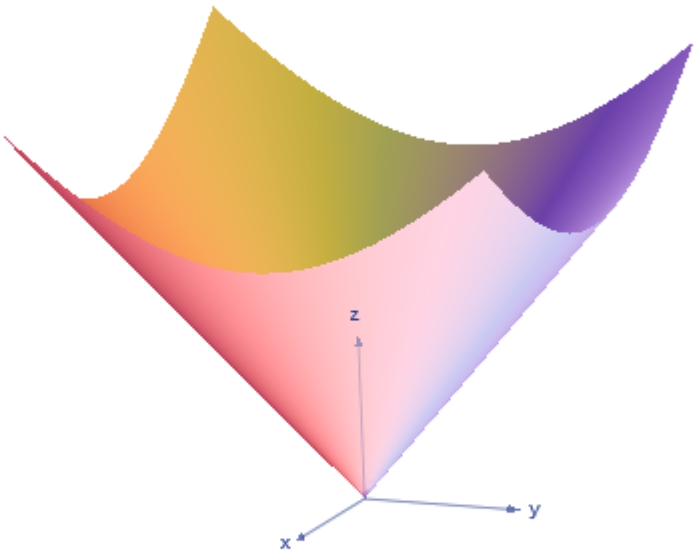


مثال ۴.۳.۳. خط $z = ۲x$ $(x > ۰)$ را حول محور z-ها دوران داده ایم. معادله رویه حاصل را بنویسید.

حل: داریم: $f(x,z) = z - ۲x$. پس:

$$S : z - ۲\sqrt{x^۲ + y^۲} = ۰ \Longrightarrow S : z = ۲\sqrt{x^۲ + y^۲}$$

تصویر این رویه را در شکل زیر می‌بینید.

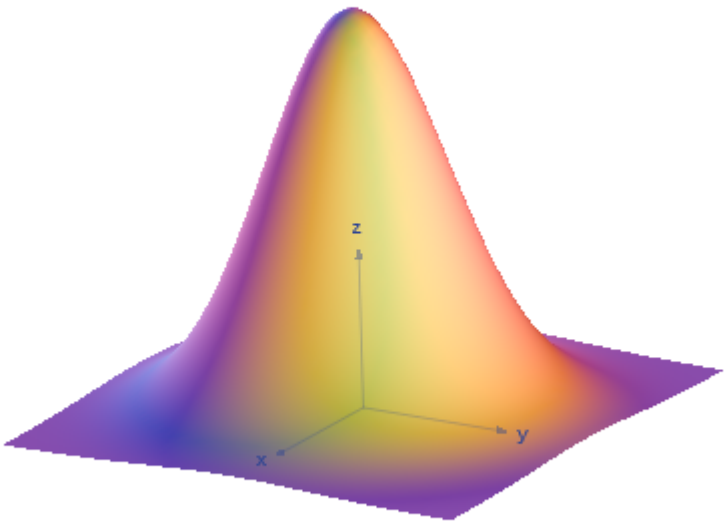


مثال ۵.۳.۳. نمودار تابع $f(x,y) = e^{-(x^۲+y^۲)}$ را توصیف کنید.

حل: نمودار تابع f از همه نقاطی همچون (x,y,z) در فضا تشکیل شده است که در رابطه

$$z = e^{-(x^۲+y^۲)}$$

صدق می کنند. این رابطه درحقیقت معادله یک رویه دوار است که از دوران منحنی $z = e^{-x^2}$ حول محور z حاصل شده است. پس نمایش هندسی نمودار f به صورت زیر است:



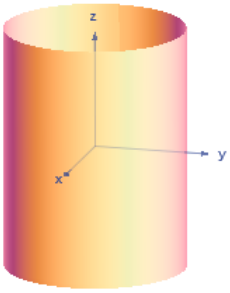
۲.۳.۳ رویه های استوانه ای

فرض کنید C یک منحنی در صفحه π است و l خطی است که با صفحه π موازی نیست. مکان هندسی همه نقاطی در فضا که روی خط گذرا از خم C و موازی با خط l قرار دارند را یک رویه استوانه ای گویند. خم Cمنحنی هادی استوانه و به خطوط موازی l که استوانه به کمک آن ها ساخته می شود مولد گفته می شود.

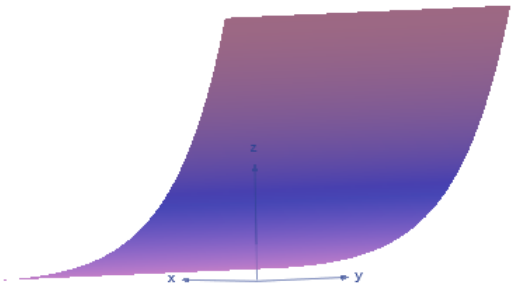
در حالت خاصی که خط l موازی با یکی از محورهای مختصات و خم C در صفحه عمود بر l واقع باشد، استوانه معادله ای ساده به صورت $f(x,y) = ۰$ (استوانه ای با محور موازی z-ها) ، $f(x,z) = ۰$

«استوانه ای با محور موازی y-ها» یا $f(y,z)=0$ «استوانه ای با محور موازی x-ها» خواهد داشت.

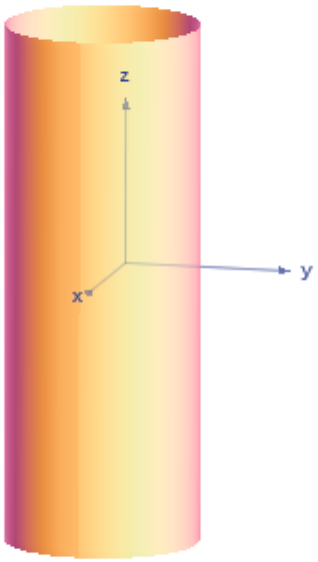
مثال ۶.۳.۳. استوانه $x^2+4y^2=1$ را در زیر ملاحظه می کنید:



مثال ۷.۳.۳. استوانه $z=e^{-x}$ را در زیر ملاحظه می کنید:



مثال ۸.۳.۳. استوانه $x^۲ + y^۲ = ۳x$ را در نظر بگیرید. درحقیقت مقطع این استوانه دایره ای است به مرکز $(\frac{۳}{۲}, ۰)$ و شعاع $\frac{۳}{۲}$. تصویر این استوانه در شکل زیر آمده است:



۳.۳.۳ رویه های درجه دو

یک رویه درجه دو در فضای $\mathbb{R}^۳$ رویه ای است دارای معادله به فرم:

$$a_۱x^۲ + a_۲y^۲ + a_۳z^۲ + a_۴xy + a_۵xz + a_۶yz + a_۷x + a_۸y + a_۹z + a_{۱۰} = ۰$$

که در اینجا a_i ها اعداد حقیقی هستند و حداقل یکی از $a_۱$ ، $a_۲$ و $a_۳$ ناصفر است. توصیف رویه های درجه دو در حالت کلی بحث گسترده ای است که از آن صرفنظر نموده و تنها به بررسی شش رویه مهم درجه دو می پردازیم.

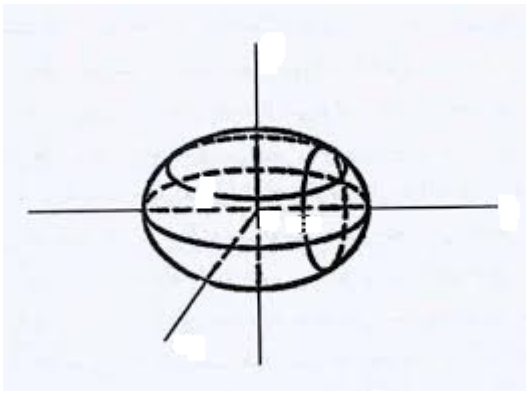
۱) بیضی گون

یک بیضی گون در حالت کلی دارای معادله ای به فرم:

$$\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲}+\frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲}+\frac{(z-z_۰)^۲}{c^۲}=۱$$

است که $x_۰$ ، $y_۰$ و $z_۰$ اعداد حقیقی ثابت و a ، b و c اعداد حقیقی مثبت هستند. نقطه $(x_۰,y_۰,z_۰)$ را مرکز بیضی گون می نامیم.

در شکل زیر نمای یک بیضی گون با مرکز مبدا را ملاحظه می کنید:



دقت کنید که هرگاه بیضی گون را با یکی از صفحات $x=\alpha$ $(-a<\alpha<a)$ ، $y=\beta$ $(-b<\beta<b)$ یا $z=\gamma$ $(-c<\gamma<c)$ برخورد دهیم حاصل یک بیضی است. به علاوه بدیهی است که در حالت خاص $a=b=c$، بیضی گون یک کره خواهد بود.

۲) هذلولیگون یکپارچه

هذلولیگون یکپارچه در حالت کلی دارای معادله ای به فرم:

$$\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲}+\frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲}-\frac{(z-z_۰)^۲}{c^۲}=۱$$

یا

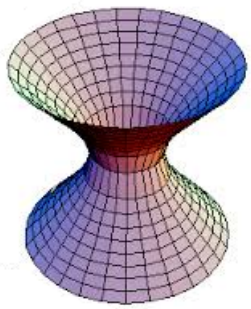
$$\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲}-\frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲}+\frac{(z-z_۰)^۲}{c^۲}=۱$$

یا

$$-\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲}+\frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲}+\frac{(z-z_۰)^۲}{c^۲}=۱$$

است که در آن a ، b و c اعداد حقیقی مثبت هستند. نقطه $(x_۰,y_۰,z_۰)$ را مرکز تقارن هذلولیگون می نامند.

هرگاه هذلولیگون $\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲}+\frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲}-\frac{(z-z_۰)^۲}{c^۲}=۱$ را با صفحات موازی xz و yz برش دهیم حاصل یک هذلولی و اگر آن را با صفحات موازی xy قطع کنیم حاصل یک بیضی است. این بیضی ها با دور شدن از صفحه xy بزرگ و بزرگتر خواهند شد. بحث مشابه در مورد دو معادله دیگر نیز وجود دارد. در شکل زیر یک هذلولیگون یکپارچه با مرکز تقارن مبدا را ملاحظه می کنید:



۳) هذلولیگون دوپارچه

این رویه دارای معادله ای به فرم:

$$\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲}+\frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲}-\frac{(z-z_۰)^۲}{c^۲}=-۱$$

یا

$$\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲}-\frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲}+\frac{(z-z_۰)^۲}{c^۲}=-۱$$

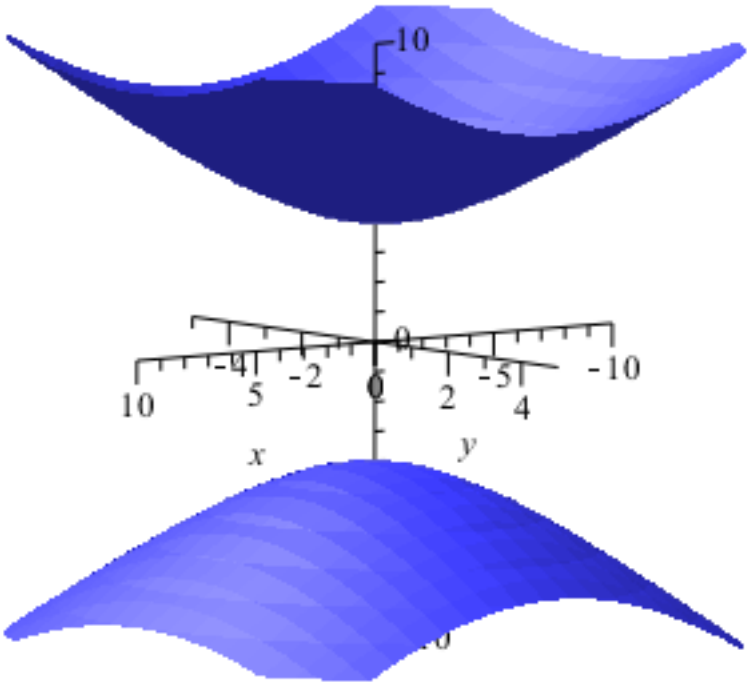
یا

$$-\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲}+\frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲}+\frac{(z-z_۰)^۲}{c^۲}=-۱$$

است که در آن a ، b و c اعداد حقیقی مثبت هستند.

هرگاه هذلولیگون $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$ را با صفحات موازی xz یا yz برش دهیم حاصل یک هذلولی است درحالیکه اگر این رویه را با صفحه $z=\alpha$ $(|\alpha-z_0|>c)$ برخورد دهیم حاصل یک بیضی و در حالت $|\alpha-z_0|<c$ تهی خواهد بود. در حالت خاص، اگر $\alpha=z_0\pm c$، حاصل برخورد یک نقطه است که آن را راس هذلولیگون می نامیم.

در شکل زیر یک هذلولیگون دو پارچه با معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ را ملاحظه می کنید:



۴) مخروط بیضوی

یک مخروط بیضوی دارای معادله

$$\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲}+\frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲}-\frac{(z-z_۰)^۲}{c^۲}=۰$$

یا

$$\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲}-\frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲}+\frac{(z-z_۰)^۲}{c^۲}=۰$$

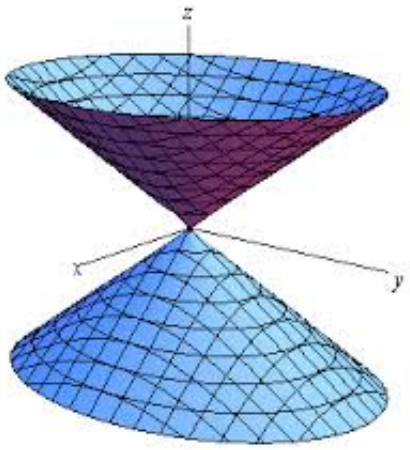
یا

$$-\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲}+\frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲}+\frac{(z-z_۰)^۲}{c^۲}=۰$$

است که a ، b و c اعداد حقیقی مثبت هستند. نقطه $(x_۰,y_۰,z_۰)$ را راس مخروط می نامند.

هرگاه مخروط $\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲}+\frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲}-\frac{(z-z_۰)^۲}{c^۲}=۰$ را با صفحات موازی xz و yz برخورد دهیم حاصل یک هذلولی و اگر آن را با صفحات افقی (موازی xy) برخورد دهیم حاصل یک بیضی است. (البته حاصل برخورد صفحه $z=z_۰$ با این مخروط همان راس مخروط خواهد بود).

در شکل زیر یک مخروط بیضوی با معادله $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}-\frac{z^۲}{c^۲}=۰$ را نشان داده ایم:



۵) سهمیگون بیضوی

معادله این رویه در حالت کلی به فرم

$$\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲}+\frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲}=\frac{(z-z_۰)}{c}$$

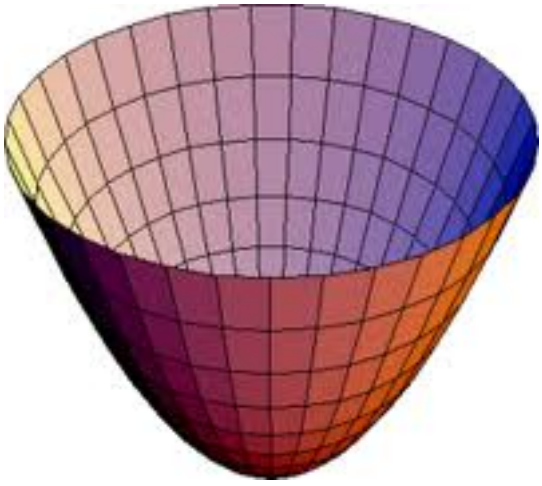
یا

$$\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲}+\frac{(z-z_۰)^۲}{b^۲}=\frac{(y-y_۰)}{c}$$

یا

$$\frac{(y-y_۰)^۲}{a^۲}+\frac{(z-z_۰)^۲}{b^۲}=\frac{(x-x_۰)}{c}$$

است که a ، b و c اعداد حقیقی مثبت و c یک عدد حقیقی ناصفر است.صفحات موازی با صفحه xz و yz ، سهمیگون $\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲}+\frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲}=\frac{z-z_۰}{c}$ را در مقاطع سهمی شکل برش می دهند. درحالیکه منحنی برخورد صفحه $z=\alpha$ ($\alpha>z_۰, c>۰$) با سهمیگون یک بیضی خواهد بود. نقطه $(x_۰,y_۰,z_۰)$ نیز راس سهمیگون نامیده می شود. در حالتیکه $c>۰$ دهانه سهمیگون روبه بالا و در حالت $c<۰$ رو به پایین خواهد بود. شکل زیر یک سهمیگون با معادله $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=\frac{z}{c}$ ($c>۰$) را نشان می دهد.



۶) سهمیگون هذلولوی(رویه زین اسبی)

این رویه دارای معادله ای به فرم

$$\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲} - \frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲} = \frac{z-z_۰}{c}$$

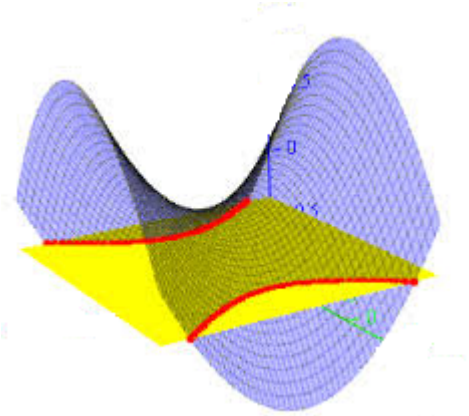
یا

$$\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲} + \frac{(z-z_۰)^۲}{b^۲} = \frac{y-y_۰}{c}$$

یا

$$\frac{(y-y_۰)^۲}{a^۲} + \frac{(z-z_۰)^۲}{b^۲} = \frac{x-x_۰}{c}$$

است که a و b اعداد حقیقی مثبت و c یک عدد حقیقی ناصفر است. صفحات موازی صفحه xz یا yz ، سهمیگون هذلولوی $\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲} - \frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲} = \frac{z-z_۰}{c}$ را در مقاطع سهمی شکل برش می دهند در حالیکه صفحات موازی با صفحه xy ، دارای مقطع هذلولی شکل با این رویه هستند. نقطه $(x_۰, y_۰, z_۰)$ را نقطه زینی این رویه می نامند. در مورد این نقاط در آینده بیشتر صحبت خواهیم کرد.

دهانه رویه در حالتیکه $c > ۰$ رویه محور x و در حالت $c < ۰$ رویه محور y خواهد بود.

شکل زیر یک رویه زین اسبی با معادله $\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} = \frac{z}{c}$ را نشان می دهد.