

مقاله پژوهشی

ارائه مدل برنامه‌ریزی ریاضی عدد صحیح برای مسئله زمان‌بندی استخراج در معادن روباز تحت شرایط عدم قطعیت عیار و حل آن با استفاده از الگوریتم کرم شب‌تاب

کامیار طلوعی^۱، احسان موسوی^{۲*}، امیرحسین بانگیان تبریزی^۳، پیمان افضل^۴، عباس آقاجانی بزازی^۵

۱. دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی نفت و معدن، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، kamyar.tolouei@gmail.com
 ۲. استادیار، دانشکده مهندسی نفت و معدن، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، se.moosavi@yahoo.com, se_moosavi@azad.ac.ir
 ۳. استادیار، دانشکده مهندسی نفت و معدن، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، ah.bangian@gmail.com
 ۴. دانشیار، دانشکده مهندسی نفت و معدن، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، peymanafzal@yahoo.com
 ۵. استادیار، دانشکده مهندسی معدن، دانشگاه کاشان، a.aghajani.bazzazi@gmail.com

(دریافت: ۱۳۹۸/۰۹/۱۷ - پذیرش: ۱۳۹۹/۱۱/۰۲)

چکیده

برنامه‌ریزی تولید بلندمدت در معادن روباز یک امر بسیار حیاتی در برنامه‌ریزی معدن است و توزیع جریان نقدینگی را در سراسر عمر معدن مشخص می‌کند. هدف برنامه‌ریزی، پیشینه‌کردن ارزش خالص فعلی با در نظر گرفتن همه محدودیت‌های عملیاتی از قبیل شیب، آمیختن عیارهای مختلف، تولید ماده معدنی و ظرفیت استخراج است. عدم قطعیت‌های مرتبط با داده‌های مدل، نقش به‌سزایی در بهینه‌سازی برنامه‌های تولید بلندمدت دارند. در میان عدم قطعیت‌ها، عدم قطعیت عیار، سهم عمده‌ای را ایفا می‌کند. در این مقاله مدل‌های ترکیبی به وسیله روش آزادسازی لاگرانژی (LR)، روش آزادسازی لاگرانژی تعمیم‌یافته (ALR) و الگوریتم کرم شب‌تاب (FA) برای حل مساله برنامه‌ریزی تولید بلند مدت معادن روباز با فرض قطعیت و همچنین، با در نظر گرفتن عدم قطعیت عیار ارایه شده‌اند. الگوریتم کرم شب‌تاب برای به روزرسانی ضرایب لاگرانژ مورد استفاده قرار گرفته شده است. رویکردهای جدید پیشنهاد شده با نتایج روش‌های ترکیبی حاصل از آزادسازی لاگرانژی و آزادسازی لاگرانژی تعمیم‌یافته با الگوریتم ژنتیک (GA) و روش سنتی زیرگردان (SG) مقایسه شده‌اند. برای حل و اعتبارسنجی مدل به دست آمده، معدن سنگ آهن چادرملو به عنوان مورد مطالعاتی مناسب، در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل از مطالعه موردی نشان می‌دهد که استراتژی ترکیبی ALR-FA می‌تواند راه‌حل بهینه را نسبت به روش‌های دیگر ارایه کند؛ به طوری که، در طول یک دوره زمان‌بندی دوازده ساله، میانگین ارزش خالص با استفاده از روش ترکیبی پیشنهادی ۲۰/۱۱ درصد بیشتر از روش سنتی موجود است. همچنین، سرعت CPU از مدل پیشنهادی، ۴/۷ درصد بیشتر از دیگر روش‌ها حاصل شد.

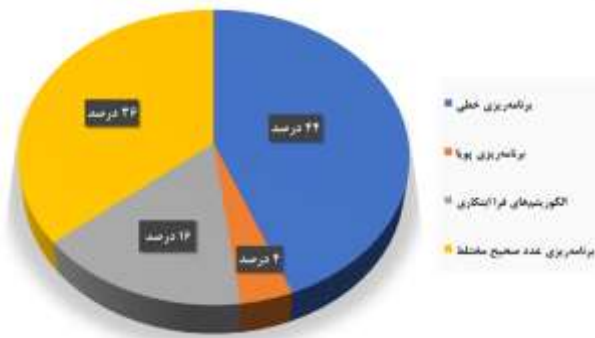
کلمات کلیدی

معادن روباز، برنامه‌ریزی تولید بلندمدت، عدم قطعیت عیار، آزادسازی لاگرانژی، الگوریتم کرم شب‌تاب.

۱- مقدمه

عیار و برنامه‌ریزی پیشنهاد شده است که منجر به تولید یک برنامه جامع‌تر و در نتیجه به یک تولید بهینه و واقعی‌تر منجر شده است.

تعدادی از مدل‌های ارایه شده از سال ۱۹۶۹ تاکنون در جدول ۱ نشان داده شده است. مدل‌های ارایه شده تاکنون، ۴۶ درصد از روش برنامه‌ریزی خطی، ۳۶ درصد از روش برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط، ۱۶ درصد از الگوریتم‌های فرا ابتکاری و ۴ درصد از روش برنامه‌ریزی پویا بهره برده‌اند (شکل ۱).



شکل ۱- نمای کلی از روش‌های حل مدل‌های برنامه‌ریزی تولید بلند مدت در معادن روباز.

با وجود تلاش‌های ارزنده‌ای که تاکنون انجام شده، خلاهای موجود به شرح زیر است:

- عدم توانایی مدل‌های ارایه‌شده به سبب بزرگ‌مقیاس بودن مدل و تلاش مجدانه برای حل مساله.
- عدم لحاظ همه محدودیت‌ها در مدل‌های ارایه‌شده.
- زمان‌بر و پرهزینه بودن فرآیند حل.
- عدم بهینگی جواب نهایی.

صرف نظر از رویکردی که برای مقابله با این مساله مورد استفاده قرار می‌گیرد، مساله اصلی که باید حل شود، بزرگ‌مقیاس بودن مساله برنامه‌ریزی تولید در معادن روباز با توجه به صرف یک زمان معقول است. ذخیره ماده معدنی ممکن است، حاوی میلیون‌ها بلوک باشد که معمولاً در بیش از یک افق برنامه‌ریزی قرار می‌گیرد، در حالی که، محدودیت‌های فیزیکی و عملیاتی سبب بروز عدم قطعیت‌ها در داده‌های ورودی می‌شوند. این امر سبب ایجاد یک مساله بهینه‌سازی ترکیبی می‌شود که حل آن با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی سنتی در دسترس، بسیار مشکل و هزینه‌بر است.

یکی از روش‌های موثر در حل مدل‌های بزرگ‌مقیاس، روش

برنامه‌ریزی تولید بلندمدت در معادن روباز امری بسیار مهم و شناخته شده در صنعت معدن است. رویکردهایی که در مقابله با این مساله مورد استفاده قرار می‌گیرد را به طور گسترده می‌توان به روش‌های مرسوم (قطعی) و رویکردهای بر پایه عدم قطعیت تقسیم کرد. در رویکردهای مرسوم، فرآیند برنامه‌ریزی معمولاً با ساخت یک مدل بلوک زمین‌شناسی شروع می‌شود که به سنگ معدن و سنگ‌های مجاور در داخل یک آرایه سه‌بعدی منظم تقسیم می‌شوند که معمولاً اندازه بلوک‌ها یکسان است. سپس، مجموعه‌ای از ویژگی‌ها مانند عیار، وزن مخصوص و نظایر آن برای هر یک از این بلوک‌ها تعیین و با استفاده از برخی از روش‌های ویژه درون‌یابی مانند کریجینگ، روش فاصله معکوس و نظایر آن تخمین زده می‌شوند و اطلاعات نمونه‌های حاصل از گمانه‌ها ارزیابی می‌شوند. سپس، این ویژگی‌های تخمین‌زده‌شده بلوک برای تعیین ارزش اقتصادی این بلوک‌ها و فرآیندهای معدنکاری نهایی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این مدل‌های بلوکی اقتصادی و زمین‌شناختی به عنوان ورودی‌های پایه برای مساله برنامه‌ریزی تولید بعدی‌اند. یک اشکال مهم و کلیدی این رویکرد این است که فرض می‌شود کلیه پارامترهای ورودی با قطعیت شناخته شده است، در حالی که برعکس، تقریباً همیشه عدم قطعیت به همراه این پارامترها وجود دارد که نادیده گرفتن آن‌ها ممکن است، سبب اتخاذ تصمیمات غیرواقعی و اشتباه در برنامه‌ریزی شود.

عدم قطعیت در پارامترهای ورودی ممکن است به دلیل روش‌های فنی و عوامل زیست‌محیطی یا مالی که به هر نحوی بر روی آن برنامه‌ریزی استخراج از معادن تاثیرگذارند، باشد. عدم قطعیت ناشی از فاکتورهای زمین‌شناسی که معمولاً از آن‌ها به عنوان عدم قطعیت زمین‌شناسی یا عیار یاد می‌شود، مهمترین منبع عدم قطعیت برای فرآیندهای برنامه‌ریزی تولید در معادن روبازند. این عدم قطعیت در عیار به دلیل تخمین مقادیر عیار بلوک‌های انفرادی با استفاده از نمونه داده‌های پراکنده لاگ‌های حفاری است. روش‌های شبیه‌سازی زمین‌آماري، چارچوبی را برای تعیین میزان کمیت عدم قطعیت عیار با توجه به شبیه‌سازی میزان تولید چندگانه کانسنگ، فراهم می‌سازد. در دسترس بودن این روش‌ها، این فرصت را مهیا می‌کند که عدم قطعیت عیار با فرآیند برنامه‌ریزی برای تولید ادغام شده و در این شرایط تولید بهینه و میزان ارزش خالص^۱ (NV) سالانه به حداکثر میزان عملیاتی خود خواهد رسید. در سال‌های اخیر مدل‌های برنامه‌ریزی تصادفی مختلفی برای یکپارچه‌سازی عدم قطعیت

1-Net value

لاگرانژ وابسته به روش مورد استفاده برای تصحیح (به روزرسانی) ضرایب است. از این رو، تصحیح ضرایب لگرانژ باید به دقت انجام شود. معایب الگوریتم‌های مبتنی بر گرادین بدین به شرح زیر است:

- ممکن است الگوریتم در یک بهینه محلی متوقف شود اما مشخص نباشد که آیا جواب به دست آمده یک بهینه محلی است یا یک بهینه سراسری.
- بهینه محلی به دست آمده به جواب اولیه وابسته است.
- به طور معمول نمی‌توان یک حد بالا برای زمان اجرا تعیین کرد.
- برای مسایل با ابعاد کوچک تا متوسط مناسب‌اند.

در سال‌های اخیر رویکرد جدیدی از الگوریتم‌های محاسباتی ارزان تر مانند روش‌های فرا ابتکاری^۳، توجه بیشتر محققان را برای حل مسایل، طراحی‌ها و مشکلات برنامه‌ریزی در تولید، به خود جلب کرده است. اگرچه این روش‌ها، بهینه‌سازی را به عنوان یک راه حل نهایی برای تولید تضمین نمی‌کنند اما می‌توانند راه‌حل‌های مناسب را برای تولید با هزینه محاسباتی کمتر ارائه دهند.

این مقاله بر روی ارائه مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح^۴ در مساله مربوط به برنامه‌ریزی تولید بلندمدت در معادن روباز و حل آن به وسیله روش‌های فرا ابتکاری تمرکز دارد. در این مقاله، یک مدل ترکیبی بهینه به وسیله روش‌های ابتکاری آزادسازی لگرانژی (LR)، آزادسازی لگرانژی تعمیم یافته^۵ (ALR) و الگوریتم فرا ابتکاری کرم شب‌تاب^۶ (FA) برای حل مساله برنامه‌ریزی تولید بلندمدت در معادن روباز ارائه شده که در آن عدم قطعیت عیار نیز لحاظ شده است. رویکرد جدید پیشنهاد روش شده بر اساس بهینه‌سازی ضرایب لگرانژ و مقایسه آن با سنتی است. الگوریتم کرم شب‌تاب برای به روزرسانی ضرایب لگرانژ مورد استفاده قرار گرفته شده است. نتایج حاصل از رویکرد ارائه شده، با رویکرد ترکیبی مبتنی بر روش آزادسازی لگرانژ با الگوریتم ژنتیک^۷ (GA) [۳] و همچنین، روش سنتی زیرگرادیان (SG) [۴] نیز مقایسه شده است. نتایج حاصل از مدل ترکیبی ارائه شده نشان می‌دهد که این روش در حل مسایل بهینه‌سازی خطی سریع تر و با دقت بیشتری در تشخیص بهترین راه‌حل است.

آزادسازی لگرانژی^۱ (LR) است. ایده اصلی روش آزادسازی لگرانژی، آزادسازی محدودیت‌های پیچیده مساله با استفاده از ضرایب لگرانژ است. بدین ترتیب، مساله آزاد شده به چند مساله کوچکتر تبدیل می‌شود [۱]. ضرایب لگرانژ، ضرایب دوگان مساله محسوب می‌شوند که باید جواب دوگان و مساله اولیه طبق شرایط بهینگی نزدیک به هم باشد. در واقع، ضرایب لگرانژ، جواب‌ها را طوری تنظیم می‌کند تا این بهینگی میسر شود. استفاده از روش آزادسازی لگرانژ سبب محدود شدن فضای تعداد نقاط شدنی مساله می‌شود که جواب نهایی را بهتر به دست می‌آورد.

در واقع، مساله برنامه‌ریزی تولید سنتی به عنوان مساله پیچیده و بزرگ مقیاس شناخته می‌شود که حل آن با روش‌های معمول غیرممکن است. از طرفی گنجانند عدم قطعیت عیار به عنوان متغیرهای جدید در مدل برنامه‌ریزی تولید منجر به پیچیده‌تر شدن مدل برنامه‌ریزی تولید خواهد شد. با توجه به محدودیت‌های مدل و پیچیده شدن حل مساله یاد شده، می‌توان محدودیت‌های پیچیده مساله را آزاد کرد. از این رو، می‌توان با استفاده از روش آزادسازی لگرانژی، محدودیت‌های یاد شده را متناسب با بخش‌های تفکیک شده از تابع هدف به تابع هدف اضافه کرد. با ترکیب محدودیت‌های یاد شده بر پایه ضرایب لگرانژ در تابع هدف مدل، امکان تک مولفه‌ای شدن محدودیت‌های پیچیده در حل مهیا می‌شود. بنابراین، جواب مساله برنامه‌ریزی تولید بلندمدت با وجود حل بر مبنای برنامه‌ریزی خطی به صورت عدد صحیح به دست می‌آید. این مهم سبب فایز آمدن بر مشکل استخراج جزیی بلوک‌ها می‌شود. از سوی دیگر، با کاهش محدودیت‌های مدل، نقاط شدنی از فضای مساله کمتر و جواب بهینه بهتر حاصل می‌شود. اما کیفیت حل مساله به شدت بستگی به الگوریتم به کارگرفته شده برای تصحیح ضرایب لگرانژ دارد. به بیان دیگر، کیفیت جواب نهایی آزادسازی یلاگرانژی، وابسته به حساسیت ضرایب لگرانژ است.

برای به حداکثر رساندن تابع لگرانژ با توجه به ضرایب لگرانژ، تنظیم ضرایب لگرانژ باید به دقت انجام شود. برای تنظیم ضرایب لگرانژ، استفاده از روش‌های گرادین^۲ (SG) و الگوریتم‌های مختلف برای رسیدن به یک جواب سریع و بهینه پیشنهاد شده است. به‌طور مرسوم، روش بهینه‌سازی زیرگرادیان در به دست آوردن ضرایب لگرانژ مورد استفاده قرار می‌گیرد [۲]. روش آزادسازی لگرانژی، وابسته به برآورد اولیه از ضرایب لگرانژ است. همچنین، عملکرد محاسباتی روش آزادسازی

5-Augmented Lagrangian relaxation method

6-Firefly algorithm

7-Genetic algorithm

1-Lagrangian relaxation method

2-Sub-gradient method

3-Meta-heuristics

4-Integer programming

جدول ۱- مدل‌های ارائه شده از سال ۱۹۶۹.

سال	نویسندگان	مدل	قطعی	عدم قطعیت	ابتکاری و فرا ابتکاری	منابع
۱۹۶۹	Johnson	برنامه‌ریزی خطی	*			[۵]
۱۹۷۴	Williams	برنامه‌ریزی پویا، برنامه‌ریزی عدد صحیح، برنامه‌ریزی پارامتریک، روش جریان شبکه	*			[۶]
۱۹۸۳	Gershon	برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط	*			[۷]
۱۹۸۶	Dagdelen and Johnson	روش آزادسازی لاگرانژی	*			[۸]
۱۹۹۲	Ravencroft	شبیه‌سازی شرطی		*		[۹]
۱۹۹۴	Dowd	شبیه‌سازی زمین‌آماري		*		[۱۰]
۱۹۹۵	Elevli	هوش مصنوعی، تحقیق در عملیات	*			[۱۱]
۱۹۹۵	Denby and Schofield	الگوریتم ژنتیک		*	*	[۱۲]
۱۹۹۸	Tolwinski	برنامه‌ریزی پویا	*			[۱۳]
۱۹۹۹	Akaike and Dagdelen	آزادسازی شبکه ۴ بعدی	*			[۱۴]
۲۰۰۰	Whittle	میلاوا	*			[۱۵]
۲۰۰۲	Johnson et al.	برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط	*		*	[۱۶]
۲۰۰۲	Dimitrakopoulos et al.	شبیه‌سازی گاوسی متوالی تعمیم‌یافته، شبیه‌سازی بلوک مستقیم		*		[۱۷]
۲۰۰۳	Godoy and Dimitrakopoulos	الگوریتم تبرید شبیه‌سازی شده		*	*	[۱۸]
۲۰۰۴	Dimitrakopoulos and Ramazan	برنامه‌ریزی خطی		*		[۱۹]
۲۰۰۴	Ramazan and Dimitrakopoulos	برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط	*			[۲۰]
۲۰۰۴	Ramazan and Dimitrakopoulos	برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط		*		[۲۱]
۲۰۰۷	Ramazan and Dimitrakopoulos	برنامه‌ریزی عدد صحیح تصادفی	*			[۲۲]
۲۰۱۰	Bley et al.	برنامه‌ریزی عدد صحیح	*			[۲۳]
۲۰۱۲	Lamghari and Dimitrakopoulos	روش جستجوی ممنوع		*	*	[۲۴]
۲۰۱۲	Gholamnejad and Moosavi	برنامه‌ریزی عدد صحیح دودویی		*		[۲۵]
۲۰۱۳	Nanjari and Golosinski	برنامه‌ریزی پویا	*		*	[۲۶]
۲۰۱۳	Goodfellow and Dimitrakopoulos	الگوریتم تبرید شبیه‌سازی شده		*	*	[۲۷]
۲۰۱۳	Dimitrakopoulos and Jewbali	برنامه‌ریزی عدد صحیح تصادفی	*			[۲۸]
۲۰۱۴	Leite and Dimitrakopoulos	برنامه‌ریزی عدد صحیح تصادفی		*		[۲۹]
۲۰۱۴	Moosavi et al.	روش آزادسازی لاگرانژی، الگوریتم ژنتیک	*		*	[۳]
۲۰۱۴	Moosavi et al.	روش آزادسازی لاگرانژی تعمیم‌یافته، الگوریتم ژنتیک	*		*	[۴]
۲۰۱۴	Asad et al.	روش جریان شبکه تصادفی، روش آزادسازی لاگرانژی		*	*	[۳۰]

سال	نویسندگان	مدل	قطعی	عدم قطعیت	ابتکاری و فرا ابتکاری	منابع
۲۰۱۴	Lamghari et al.	الگوریتم نزول همسایگی متغیر		*	*	[۳۱]
۲۰۱۵	Shishvan and Sattarvand	بهینه‌سازی کلونی مورچه	*		*	[۳۲]
۲۰۱۶	Mokhtarian and Sattarvand	الگوریتم رقابت استعماری	*		*	[۳۳]
۲۰۱۶	Mokhtarian and Sattarvand	تابع توزیع قیمت محصول، روش نمونه‌گیری مربع لاتین میانه، برنامه‌ریزی عدد صحیح	*			[۳۴]
۲۰۱۶	Goodfellow and Dimitrakopoulos	الگوریتم تبرید شبیه‌سازی شده، بهینه‌سازی ازدحام ذرات، الگوریتم تکامل تفاضلی		*	*	[۳۵]
۲۰۱۶	Lamghari and Dimitrakopoulos	الگوریتم مصون‌سازی پیش‌رونده راکفلار و وتس		*	*	[۳۶]
۲۰۱۷	Bakhtavar et al.	برنامه‌ریزی تصادفی محدود شده		*		[۳۷]
۲۰۱۸	Khan	بهینه‌سازی ازدحام ذرات، الگوریتم خفاش		*	*	[۳۸]
۲۰۱۸	Rahimi et al.	الگوریتم ریاضی منطقی	*		*	[۳۹]
۲۰۱۸	Tahernejad et al.	روش تئوری تصمیم‌گیری مبتنی بر شکاف اطلاعاتی		*		[۴۰]
۲۰۱۸	Jelvez et al.	الگوریتم ابتکاری افزایشی زمان انتظار	*		*	[۴۱]
۲۰۱۸	Khan and Asad	برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط	*			[۴۲]
۲۰۱۸	Alipour et al.	الگوریتم ژنتیک، بهینه‌سازی خطی همتای استوار		*	*	[۴۳]
۲۰۲۰	Chatterjee and Dimitrakopoulos	روش آزادسازی لاگرانژی، روش زیرگرادیان، الگوریتم شاخه و برش		*	*	[۴۴]
۲۰۲۰	Dimitrakopoulos and Senécal	جستجوی ممنوع همسایگی چندگانه		*	*	[۴۵]

۲- مدل برنامه‌ریزی تولید بلندمدت در معادن روباز

۲-۱- تابع هدف

تابع هدف مرسوم مدل برنامه‌ریزی تولید بلندمدت در معادن روباز به صورت رابطه ۱ است [۲۰ و ۲۱]:

$$\max Z(X) = \sum_{ijk=1}^{\Gamma} \sum_t^T \frac{NV_{ijk}^t}{(1+r)^t} \times X_{ijk}^t \quad (1)$$

که در آن:

ijk : شمارنده بلوک.

Γ : تعداد کل بلوک‌هایی که باید برنامه‌ریزی شوند.

t : شاخص زمانی برنامه‌ریزی.

T : تعداد کل دوره‌های برنامه‌ریزی NV_{ijk}^t ارزش خالصی که به وسیله بلوک معدن n در دوره t تولید می‌شود.

r : نرخ تنزیل در هر دوره.

X_{ijk}^t : متغیر دودویی.

۲-۲- محدودیت‌ها

محدودیت‌های تابع هدف مرسوم عبارتند از [۲۰ و ۲۱]:

۲-۲-۱- محدودیت اختلاط عیار

یکی از مهم‌ترین مسایل در برنامه‌ریزی تولید، عیار کانسنگ است که باید در هنگام ارسال به کارخانه فرآوری، در محدوده مشخصی نگه داشته شود. از این‌رو، عیار کانسنگ که به آسیاب فرستاده می‌شود باید بین دو مرز تعریف شود.

۲-۱-۲-الف- محدودیت مرز بالا

مدنظر در حال استخراج و یا در دوره زمانی t قبلی مورد استخراج قرار گرفته باشند و برای اطمینان از این امر که شیب پایدار رعایت شده است (رابطه ۷).

$$YX_k^t - \sum_{y=1}^l \sum_{r=1}^t X_y^r \leq 0 \quad \forall y = 1, 2, \dots, l, \forall k = 1, 2, \dots, \Gamma, \forall t = 1, 2, \dots, T \quad (7)$$

که در آن:

k نشان‌دهنده یک بلوک در نظر گرفته شده برای استخراج در دوره t

Y : تعداد کل بلوک‌های بالاسر بلوک k .

۲-۳- شاخص عدم قطعیت عیار (PI_{ijk})

فضای فعالیت‌های معدنی، یک فضای احتمال‌پذیر است که از عدم قطعیت حاکم بر این فضا سرچشمه می‌گیرد. در واقع وجود عدم قطعیت در فرآیندهای مهندسی معدن موجب بروز عدم قطعیت در نتایج حاصل از آن می‌شود، از طرفی بر مبنای همین نتایج غیرقطعی باید تصمیم‌گیری کرد. عدم قطعیت‌های مرتبط با داده‌های مدل، نقش بسزایی در بهینه‌سازی برنامه‌های تولید بلندمدت دارند. در میان عدم قطعیت‌ها، عدم قطعیت عیار، سهم عمده‌ای از احتمالات را موجب می‌شود که یکی از مهم‌ترین منابع ریسک و برآورده نشدن انتظارات معدنکاران به ویژه در سال‌های اولیه از عمر معدن است. با دخالت دادن عدم قطعیت عیار به مساله برنامه‌ریزی تولید می‌توان قسمت‌هایی از ذخیره را که ریسک آن بالاست در سال‌های بعدی و قسمت‌هایی از ذخیره با ریسک کم را در سال‌های اولیه عمر معدن برای استخراج انتخاب کرد.

در واقع، در مراحل مختلف معدنکاری همواره درجه‌ای از عدم قطعیت‌ها وجود دارد. برخی از این عدم قطعیت‌ها مانند، میزان ذخیره و عیار کانسار از تغییرات ذاتی کانسار ناشی می‌شوند که به طور مستقیم بر شاخص‌های فنی و اقتصادی کانسار تاثیر می‌گذارند. از سوی دیگر، هزینه‌های سنگین بخش اکتشاف اغلب باعث محدود شدن حجم اطلاعات اکتشافی می‌شود که این خود لزوم به کارگیری روش‌های دقیق تخمین را ایجاب می‌کند. روش‌های زمین‌آماري، روش‌های مبتنی بر انواع کریجینگ‌ها، تخمینی با تضمین به حداقل رساندن خطا انجام می‌دهند. بنابراین، اگر هدف از تخمین، دستیابی به مقادیر میانگین برجای

میانگین عیار مواد ارسالی به کارخانه باید کمتر از مقادیر مشخصی باشد، G_{max} برای هر دوره، t طبق رابطه ۲ است:

$$\sum_{ijk=1}^{\Gamma} (g_{ijk} - G_{max}) \times O_{ijk} \times X_{ijk}^t \leq 0 \quad (2)$$

که در آن:

g_{ijk} : عیار متوسط بلوک ijk

O_{ijk} : تناژ بلوک کانسنگ با شماره‌نده ijk

۲-۱-۲-ب- محدودیت مرز پایین

میانگین عیار مواد ارسال شده به کارخانه باید بیشتر یا برابر مقدار معین باشد، G_{min} برای هر دوره، t طبق رابطه ۳ است:

$$\sum_{ijk=1}^{\Gamma} (g_{ijk} - G_{min}) \times O_{ijk} \times X_{ijk}^t \geq 0 \quad (3)$$

۲-۲-۲- محدودیت ذخیره

محدودیت ذخیره برای هر بلوک نشان می‌دهد که تمام بلوک‌های مورد نظر در مدل باید یک بار استخراج شوند (رابطه ۴).

$$\sum_{t=1}^T X_{ijk}^t \leq 1 \quad \forall jik = 1, 2, 3, \dots, \Gamma \quad (4)$$

۲-۲-۳- محدودیت ظرفیت فرآوری

کل تناژ کانسنگ فرآوری شده در هر دوره t نمی‌تواند بیش از ظرفیت فرآوری (PC_{max}) باشد (رابطه ۵).

$$\sum_{ijk=1}^{\Gamma} (O_{ijk} \times X_{ijk}^t) \leq PC_{max} \quad (5)$$

۲-۲-۴- محدودیت ظرفیت معدنکاری

مقدار کل مواد (کانسنگ و باطله) معدنکاری شده، نمی‌تواند بیش از ظرفیت کل تجهیزات موجود (MC_{max}) برای هر دوره (t) باشد (رابطه ۶).

$$\sum_{ijk=1}^{\Gamma} (O_{ijk} + W_{ijk}) \times X_{ijk}^t \leq MC_{max} \quad (6)$$

که در آن W_{ijk} تناژ بلوک باطله با شماره‌نده ijk است.

۲-۲-۵- محدودیت شیب

این محدودیت بدین منظور مورد استفاده قرار می‌گیرد که این اطمینان حاصل شود، فقط زمانی بلوک k مورد استخراج قرار می‌گیرد که بلوک‌های قبلی یا بلوک‌های واقع در بالای بلوک

کاربردهای اصلی کریجینگ شاخص، تعیین مرز ماده معدنی و باطله در کانسار است [۵۰]. در واقع، کریجینگ شاخص در جدا کردن باطله از کانسنگ کارایی بالاتری دارد؛ برای انجام کریجینگ شاخص ابتدا لازم است داده‌های اولیه به مقادیر شاخص تبدیل شوند. برای این منظور، لازم است عیار حدی در نظر گرفته شود و متغیرهای شاخص از طریق تابع شاخص به دست آید که مطابق رابطه ۸ تعریف می‌شود [۵۰]:

$$I(x; z_k) = \begin{cases} 1 & \text{if } Z(x) \leq z_k \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \quad k = 1, \dots, K \quad (8)$$

که در آن:

$I(x; z_k)$: مقدار شاخص نمونه نام.

z_k : حد آستانه.

K : تعداد کل آستانه‌ها.

بدین صورت که به مقادیر اصلی کوچکتر از حد آستانه منتخب، کد یک و به مقادیر بزرگتر، کد صفر تعلق می‌گیرد. بدین ترتیب کلیه داده‌های موجود به صفر (بزرگتر از عیار حد) و یک (کوچکتر یا مساوی عیار حد) تبدیل شده و سپس، بر اساس داده‌های تبدیل شده به صفر و یک، کلیه مراحل کریجینگ انجام می‌شود. مزیت تخمین‌گر کریجینگ شاخص، آن است که نسبت به داده‌های خارج از ردیف حساس نیست و با تقسیم تابع توزیع تجمعی به قسمت‌های کوچکتر، در آن قسمت‌ها تابع توزیع حالت نرمال به خود گرفته و نیازی به نرمال کردن ندارد [۵۰].

در بخش بعدی، این شاخص احتمال (PI_{ijk}) برای به دست آوردن یک مدل ریاضی مبتنی بر عدم قطعیت برای برنامه‌ریزی تولید بلندمدت در مدل قطعی سنتی ترکیب شده است.

۴-۲- بسط مدل ریاضی با در نظر گرفتن عدم قطعیت عیار

در این بخش، یک مدل ریاضی تعمیم‌یافته برنامه‌ریزی تولید بلندمدت برای معادن روباز برای در نظر گرفتن عدم قطعیت عیار توسعه داده شده است. در این رویکرد، ابتدا با توجه به مطالبی که در بخش پیشین بیان شد، یک احتمال به هر بلوک اختصاص داده شده است (PI_{ijk}) که نشانگر احتمال تولید شده از روش کریجینگ شاخص برای هر بلوک ijk در مدل بلوکی است. سپس، تابع هدف به گونه‌ای بسط داده شده است که بلوک‌های با قطعیت بالاتر در دوره‌های تولید اولیه استخراج شوند و استخراج بلوک‌های غیرقطعی به دوره‌های بعدی، که معمولاً اطلاعات بیشتری در دسترس است، موکول شود. در نتیجه، با توجه به مدل سنتی ارایه شده (رابطه ۱)، تابع هدف تعمیم‌یافته از مدل

یک متغیر باشد، کریجینگ^۱ روش مفیدی خواهد بود. کریجینگ شاخص^۲ یک روش تخمین غیرخطی است که بر اساس تابع شاخص‌گذاری و اریوگرام شاخص انجام می‌شود و مستقل از تابع توزیع است. اولین بار کریجینگ شاخص برای تخمین منابع معدنی و تعیین مرز ماده معدنی از باطله به کار رفته است. در این تحقیق، شاخصی تحت عنوان شاخص عدم قطعیت عیار (PI_{ijk}) به وسیله کریجینگ شاخص تعریف و در مدل ریاضی برنامه‌ریزی تولید بلند مدت معادن روباز اعمال شده است. در واقع، یک احتمال حاصل از کریجینگ شاخص به هر بلوک اختصاص داده شده است (PI_{ijk}) که نشان‌دهنده احتمال ایجاد شده از روش کریجینگ شاخص برای هر بلوک ijk در مدل بلوکی است. این احتمال به عنوان شاخص احتمالی (PI_{ijk}) برای بلوک ijk در نظر گرفته شده است که در فرآیند بهینه‌سازی در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد. بلوک‌هایی که احتمال بالاتری دارند، ریسک پایین‌تری نسبت به بلوک‌های با احتمال پایین دارند. در ادامه، مبانی نظری روش کریجینگ شاخص به اختصار شرح داده شده است.

روش‌های تخمین زمین‌آماري به علت اریب نبودن و داشتن حداقل خطای تخمین در میان تمام روش‌های تخمین ذخیره، دقت بالاتری دارند [۴۶ و ۴۷]. در واقع، در روش‌های زمین‌آماري برای هر یک از نمونه‌های درون و بیرون یک بلوک، وزن آماری مشخص به گونه‌ای در نظر گرفته می‌شود که واریانس تخمین مبتنی بر آن‌ها کمترین باشد. روش‌های تخمین زمین‌آماري نیز خود به دو دسته روش‌های خطی و غیرخطی تقسیم می‌شوند. کریجینگ شاخص یک روش تخمین زمین‌آماري غیرخطی است که در سال ۱۹۸۳ توسط ژورنل^۳ [۴۸] معرفی شده است. هدف اصلی ژورنل، تخمین محلی به وسیله فرآیند تابع توزیع تجمعی محلی است. ویژگی اصلی کریجینگ شاخص، غیرپارامتری بودن آن است و بر فرض مدل توزیع خاصی برای نتایج، استوار نیست. دستگاه معادلات کریجینگ شاخص همانند دستگاه معادلات کریجینگ معمولی است با این تفاوت که در کریجینگ شاخص از مقادیر اریوگرام شاخص به جای اریوگرام معمولی استفاده می‌شود. برای محاسبه اریوگرام شاخص، ابتدا باید داده‌های خام را به متغیرهای شاخص تبدیل کرد. از این روش می‌توان برای تعیین ذخیره کانسار با عیار بالاتر از حد مورد نظر همراه با احتمال رخداد آن استفاده کرد. همچنین، می‌توان نقشه توزیع فضایی احتمال پیدایش بلوک‌هایی از کانسار با عیار بالاتر یا مساوی یک حد آستانه را به راحتی ترسیم کرد [۴۹]. یکی از

روش آزادسازی لاگرانژی، مساله برنامه‌ریزی تولید بلندمدت را با آزادسازی یا به طور موقت نادیده گرفتن محدودیت‌های پیچیده مساله، حل می‌کند (رابطه ۱۰ و ۱۱).

$$j^* = \min_{\lambda, \mu, v} j(\lambda, \mu, v) \quad (10)$$

که:

$$j(\lambda, \mu, v) = \max_X L(X, \lambda, \mu, v) \quad (11)$$

با تخصیص ضرایب غیرمنفی لاگرانژی λ^t و μ^t و محدودیت‌های ۴ تا ۶، تابع لاگرانژ مربوطه تشکیل می‌شود (رابطه ۱۲).

بیشینه‌سازی تابع لاگرانژ با جایگذاری رابطه ۸ در رابطه ۱۲، به صورت رابطه ۱۳ قابل تعمیم است. لازم به ذکر است که تابع هدف یاد شده (رابطه ۱۳) دارای محدودیت‌های ۲، ۳ و ۷ است.

$$\max L(X, \lambda, \mu, v) = Z'(X) - \sum_{t=1}^T \lambda^t \left(\sum_{ijk=1}^{\Gamma} (X_{ijk}^t - 1) \right) + \sum_{t=1}^T \mu^t \left(PC_{max} - \sum_{ijk=1}^{\Gamma} (O_{ijk} \times X_{ijk}^t) \right) + \sum_{t=1}^T v^t \left(MC_{max} - \sum_{ijk=1}^{\Gamma} (O_{ijk} + W_{ijk}) \times X_{ijk}^t \right) \quad (12)$$

$$\max L(X, \lambda, \mu, v) = \sum_{ijk=1}^{\Gamma} \sum_t \frac{NV_{ijk}^t}{(1+r)^t} \times PI_{ijk} \times X_{ijk}^t - \sum_{t=1}^T \lambda^t \left(\sum_{ijk=1}^{\Gamma} (X_{ijk}^t - 1) \right) + \sum_{t=1}^T \mu^t \left(PC_{max} - \sum_{ijk=1}^{\Gamma} (O_{ijk} \times X_{ijk}^t) \right) + \sum_{t=1}^T v^t \left(MC_{max} - \sum_{ijk=1}^{\Gamma} (O_{ijk} + W_{ijk}) \times X_{ijk}^t \right) \quad (13)$$

$$L(x, \lambda, \mu, \sigma) = f(x) + \frac{\sigma}{2} \times \sum_i \left(h_i(x) + \frac{\lambda_i}{\sigma} \right)^2 + \frac{\sigma}{2} \times \sum_j \left(g_j(x) + \frac{\mu_j}{\sigma} \right)^2 \quad (15)$$

مدل پس از آزادسازی محدودیت‌های ۴ تا ۶ به زیرمسائل برای حل تبدیل می‌شود. بیشینه‌سازی تابع هدف اصلی، معادل با کمینه‌سازی تابع هدف تجدید نظر شده است. از این‌رو، تابع هدف به صورت رابطه ۱۶ مشخص می‌شود:

$$\min Z''(X) = -Z'(X) \quad (16)$$

با اعمال محدودیت‌های آزاد شده ۴ تا ۶ مساله آزادسازی لاگرانژی تعمیم‌یافته مطابق رابطه ۱۷ حاصل می‌شود.

برنامه‌ریزی تولید بلندمدت برای معادن روباز با در نظر گرفتن عدم قطعیت عیار مطابق رابطه ۹ ارایه می‌شود.

$$\max Z'(X) = \sum_{ijk=1}^{\Gamma} \sum_t \frac{NV_{ijk}^t}{(1+r)^t} \times PI_{ijk} \times X_{ijk}^t \quad (9)$$

تابع هدف با در نظر گرفتن محدودیت‌های ۲ تا ۷ است.

۳- روش ترکیبی برای حل مساله برنامه‌ریزی تولید بلندمدت

۳-۱- روش آزادسازی لاگرانژی

در حال حاضر یکی از روش‌های بالقوه برای حل مساله، روش آزادسازی لاگرانژی (LR) است. اساس روش آزادسازی لاگرانژی این است که محدودیت‌های سیستم با استفاده از ضرایب لاگرانژ آزاد شود. سپس، این مساله به چند مساله کوچکتر تقسیم می‌شود [۱، ۳ و ۴].

۳-۲- روش آزادسازی لاگرانژی تعمیم‌یافته

روش آزادسازی لاگرانژی تعمیم‌یافته از روش‌های کارآمد ابتکاری است که توسط آندرانی و همکاران^۱ [۵۱] بر اساس توسعه روش آزادسازی لاگرانژی ارایه شده است. برای مساله بهینه‌سازی محدودشده، فرضیه‌های f ، g و h مشتقات اول پیوسته را مطابق رابطه ۱۴ برآورده می‌کند.

$$\min_{s.t. h(x)=0, g(x)=0} f(x) \quad (14)$$

$$x \in \zeta = \{x | H(x) = 0, G(x) \leq 0\}$$

با توجه به روش آزادسازی لاگرانژی تعمیم‌یافته، رابطه ۱۵ حاصل می‌شود:

با جایگذاری رابطه ۹، تابع به صورت رابطه ۱۸ بازنویسی می شود. تابع هدف به دست آمده (رابطه ۱۸) دارای محدودیت‌های ۲، ۳ و ۷ است.

$$L(X, \lambda, \mu, \nu, \sigma) = \min Z''(X) + \frac{\sigma}{2} \times \sum_t \left((X_{ijk}^t - 1) + \frac{\lambda^t}{\sigma} \right)^2 + \frac{\sigma}{2} \times \sum_t \left((O_{ijk} \times X_{ijk}^t) - PC_{max} + \frac{\mu^t}{\sigma} \right)^2 + \frac{\sigma}{2} \times \sum_t \left((O_{ijk} + W_{ijk}) \times X_{ijk}^t - MC_{max} + \frac{\nu^t}{\sigma} \right)^2 \quad (17)$$

$$L(X, \lambda, \mu, \nu, \sigma) = - \sum_{ijk=1}^r \sum_t \frac{NV_{ijk}^t}{(1+r)^t} \times PI_{ijk} \times X_{ijk}^t + \frac{\sigma}{2} \times \sum_t \left((X_{ijk}^t - 1) + \frac{\lambda^t}{\sigma} \right)^2 + \frac{\sigma}{2} \times \sum_t \left((O_{ijk} \times X_{ijk}^t) - PC_{max} + \frac{\mu^t}{\sigma} \right)^2 + \frac{\sigma}{2} \times \sum_t \left((O_{ijk} + W_{ijk}) \times X_{ijk}^t - MC_{max} + \frac{\nu^t}{\sigma} \right)^2 \quad (18)$$

که در آن، β_0 قابلیت جذب‌کنندگی در $r = 0$ است.

- قدرت جذب‌کنندگی هر کرم شبتاب متناسب با میزان درخشندگی آن است، بنابراین برای دو کرم شبتاب درخشان، آنکه درخشندگی کمتری دارد، به سوی کرم شبتاب درخشان‌تر حرکت می‌کند. درخشندگی و جذب‌کنندگی متناسب با فاصله است. به عبارتی دیگر، با افزایش فاصله، درخشندگی کاهش می‌یابد و در نهایت جذابیت هم کم می‌شود. برای محاسبه فاصله بین دو کرم شبتاب i و j که در مکان‌های x_i و x_j اند، از رابطه ۲۱ استفاده می‌شود:

$$r_{ij} = |x_i - x_j| = \sqrt{\sum_{k=1}^d (x_{i,k} - x_{j,k})^2} \quad (21)$$

که در آن:

$x_{i,k}$: آمین مختصات فضایی کرم شبتاب i ام.
 d : تعداد متغیرهای مساله.

- درخشندگی هر کرم شبتاب، متأثر از دورنمای تابع هدفی است که کرم شبتاب برای خود ترسیم کرده است. در نهایت حرکت کرم شبتاب i به سمت کرم شبتاب درخشان‌تر j ، با استفاده از رابطه ۲۲ محاسبه می‌شود:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \beta_0 e^{-\gamma r_{i,j}^2} (x_j^t - x_i^t) + \alpha \varepsilon_i^t \quad (22)$$

که در آن:

عبارت دوم: مکان حاصل از جذب‌شدگی کرم شبتاب
 عبارت سوم: پارامتر تصادفی حرکت کرم شبتاب.
 ضریب α : پارامتر تصادفی‌سازی حرکت.

ε_i^t : یک بردار اتفاقی با توزیع نرمال که در بازه $[0, 1]$ قرار دارد. در بیشتر

سپس، ضرایب لاگرانژ به وسیله روش‌های موجود به‌روزرسانی می‌شوند. برای به‌روزرسانی ضرایب لاگرانژ، از روش سنتی زیرگردیان یا روش‌های فرا ابتکاری استفاده می‌شود. در این مقاله، از الگوریتم فرا ابتکاری کرم شبتاب برای به‌روزرسانی ضرایب لاگرانژ استفاده شده و نتایج حاصل با نتایج حاصل از روش سنتی زیرگردیان و همچنین، الگوریتم ژنتیک مقایسه شده است.

۳-۳- الگوریتم کرم شبتاب

الگوریتم کرم شبتاب یک الگوریتم بهینه‌سازی فرا ابتکاری است که از طبیعت الهام گرفته شده است. در واقع ایده اصلی آن از ارتباط نوری میان کرم‌های شبتاب است. الگوریتم کرم شبتاب توسط یانگ^۱ [۵۲] در سال ۲۰۰۸ با فرضیات زیر معرفی شد [۵۳ و ۵۴]:

- کرم‌های شبتاب از یک گونه‌اند، بنابراین هر کرم شبتاب به کرم‌های شبتاب دیگر، صرف‌نظر از جنس آن کرم شبتاب، جذب می‌شود. رابطه ۱۹ نشان‌دهنده شدت جذب (I) است:

$$I(r) = I_0 e^{-\gamma r^2} \quad (19)$$

که در آن:

I_0 : شدت نور اولیه.

γ : ضریب ثابت جذب نور.

r : فاصله کرم شبتاب‌ها از یکدیگر.

از آنجایی که قابلیت جذب‌کنندگی یک کرم شبتاب متناسب با شدت نور دیده‌شده به وسیله کرم‌های شبتاب دیگر است، بنابراین رابطه قابلیت جذب‌کنندگی $\beta(r)$ به صورت رابطه ۲۰ تعریف می‌شود:

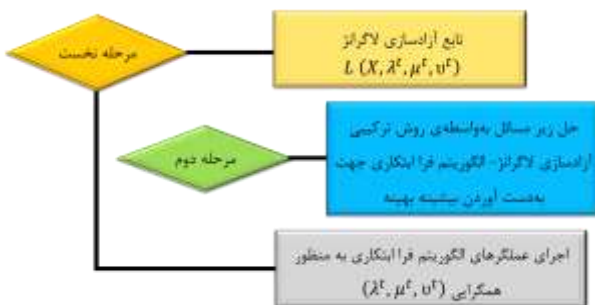
$$\beta(r) = \beta_0 e^{-\gamma r^2} \quad (20)$$

فرا ابتکاری، تنظیم ضرایب لاگرانژ و بهبود عملکرد روش آزادسازی لاگرانژ انجام می‌گیرد.

روش آزادسازی لاگرانژ- الگوریتم فرا ابتکاری برای حل مسئله برنامه‌ریزی تولید بلندمدت معادن روباز، شامل دو فرآیند بهینه‌سازی حل زیر مساله‌های منفرد و تصحیح (به‌روزرسانی) ضرایب لاگرانژ است.

مساله دوگان همیشه دارای مقیاس کوچکتری از مساله اولیه است. بنابراین، مقادیر متفاوت بین تابع اولیه و دوگان منجر به شکاف دوگان می‌شود. تحقیقات بسیاری در روش آزادسازی لاگرانژ به جهت یافتن روشی مناسب برای تصحیح (به‌روزرسانی) ضرایب لاگرانژ که منتج به کمینه کردن شکاف دوگان می‌شوند، متمرکز شده است. به‌طور معمول، ضرایب لاگرانژ با روش زیرگردایان محاسبه می‌شوند؛ اگرچه، این روش به کندی همگرا می‌شود. از این‌رو، عملکرد محاسباتی روش آزادسازی لاگرانژ، بسیار وابسته به روش‌های تصحیح ضرایب لاگرانژ است.

روش آزادسازی لاگرانژ- الگوریتم فرا ابتکاری، ترکیب الگوریتم فرا ابتکاری در روش آزادسازی لاگرانژ برای تصحیح ضرایب لاگرانژ و نیز بهبود عملکرد روش آزادسازی لاگرانژ است. مراحل به‌روزرسانی ضرایب لاگرانژ به صورت نمودار در شکل ۴ نمایش داده شده است.



شکل ۳- چارچوب روش ترکیبی پیشنهادی.

مسائل بهینه‌سازی، $\alpha \in [0, 1]$ و $\beta_0 = 1$ در نظر گرفته می‌شود. مقدار پارامتر γ برای تعیین سرعت هم‌گرایی الگوریتم و رفتار آن نقش مهمی دارد. بنابراین هرچند از لحاظ تئوری $\gamma \in [0, \infty]$ است اما در عمل مقدار آن بین ۰.۱ تا ۱۰ متغیر است. شبه‌کد الگوریتم کرم شب‌تاب [۵۳] در شکل ۲ آورده شده است.

```

Objective function  $f(x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_d)^T$ 
Initialize a population of fireflies  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )
Define light absorption coefficient  $\gamma$ 
While ( $t < \text{MaxGeneration}$ )
  For  $i = 1 : n$  all  $n$  fireflies
    For  $j = 1 : i$  all  $n$  fireflies
      Light intensity  $I_j$  at  $x_j$  is determined by  $f(x_j)$ 
      If ( $I_j > I_i$ )
        Move firefly  $i$  towards  $j$  in all  $d$  dimensions
      end if
      Attractiveness varies with distance  $r$  via  $\exp[-\gamma r]$ 
      Evaluate new solutions and update light intensity
    end for  $j$ 
  end for  $i$ 
  Rank the fireflies and find the current best
end while
Postprocess results and visualization
    
```

شکل ۲- شبه‌کد الگوریتم کرم شب‌تاب.

۳-۴- ساختار روش ترکیبی پیشنهادی

الگوریتم‌های فرا ابتکاری، دارای رویکرد حل بسیار قدرتمند و روش جستجو و بهینه‌سازی تصادفی‌اند. توانمندی، کارایی و کاربرد همراه با موفقیت این روش‌ها در حل مسایل مختلف بهینه‌سازی ترکیباتی که فضای جواب بسیار ساختار نیافته دارند، باعث شده است که در سال‌های اخیر توجه محققان به‌طور قابل ملاحظه‌ای به این روش‌ها جلب شود. الگوریتم‌های فرا ابتکاری، در جستجوی فضای جواب، عملکرد خوبی دارند (ویژگی پراکندگی^۱)؛ بنابراین، ضمن حفظ ویژگی مثبت پراکندگی در جستجوی فضای جواب، ویژگی همگرایی در اطراف جواب‌های خوب نیز در روش آزادسازی لاگرانژی تقویت می‌شود. برای بهره‌مند شدن همزمان از ویژگی‌های یاد شده در مقاله حاضر، روش آزادسازی لاگرانژ با الگوریتم‌های کرم شب‌تاب ترکیب شده است. چارچوب روش ترکیبی آزادسازی لاگرانژ- الگوریتم فرا ابتکاری در شکل ۳ قابل مشاهده است. در واقع با استفاده از الگوریتم



شکل ۵- موقعیت جغرافیایی معدن چادرملو.



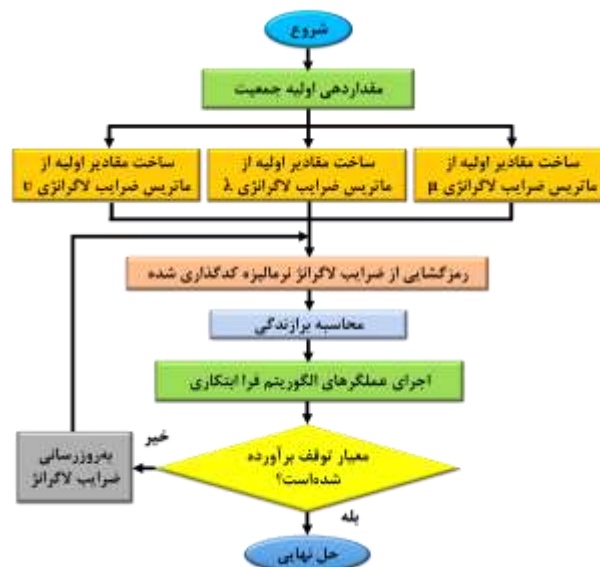
شکل ۶- نمای سه بعدی دومین پیشروی در معدن چادرملو [۲۵].

جدول ۲- پارامترهای فنی و اقتصادی.

۵۸	قیمت سنگ آهن (دلار بر تن)
۶	هزینه معدنکاری کانسنگ (دلار بر مترمکعب)
۵٫۲	هزینه معدنکاری باطله (دلار بر مترمکعب)
۲۶٫۲	هزینه فرآوری (دلار بر مترمکعب)
۱۰	نرخ تنزیل (درصد)
۵۲٫۸	عیار حد (درصد)
۲۵	ظرفیت معدنکاری (میلیون تن بر سال)
۸/۱	ظرفیت فرآوری (میلیون تن بر سال)
۹۰	بازیابی معدنکاری (درصد)
۷۶	عامل بازیابی فرآوری (درصد)
۵۲	شیب کلی (درجه)
۱۲	عمر معدن (سال)

جدول ۳- تعداد متغیرهای مدل.

تعداد	متغیرها
۶۸۵۴	محدودیت ذخیره
۱۲	محدودیت اختلاط عیار
۱۲	محدودیت ظرفیت فرآوری



شکل ۴- روندنمای چگونگی به‌روزرسانی ضرایب لاگراژی.

۴- پیاده‌سازی مدل پیشنهادی بر روی معدن سنگ آهن چادرملو

۴-۱- معرفی مطالعه موردی

معدن سنگ آهن چادرملو در قلب کویر مرکزی ایران، در دامنه شمالی کوه‌های خاکستری رنگ چاه محمد در حاشیه جنوبی نمک‌زار ساغند به فاصله ۱۸۰ کیلومتری شمال شرقی شهر یزد و ۳۰۰ کیلومتری جنوب طبس قرار گرفته است (شکل ۵). برای معدن چادرملو، چهار پیشروی طراحی شده است.

مدل ریاضی ارائه شده در این مقاله، در محدوده دومین پیشروی پیاده شده است. شکل ۶ نمای سه‌بعدی دومین پیشروی را نشان می‌دهد. این پیشروی شامل ۶۸۵۴ بلوک که ۲۷۵۴ بلوک آن کانسنگ و ۴۱۰۰ بلوک آن باطله است. تناژ کانسنگ و باطله موجود در پیشروی مزبور به ترتیب ۱۰۳/۸ و ۱۱۰/۲ میلیون تن (با نسبت باطله‌برداری ۰/۹۴) است. پارامترهای فنی و اقتصادی مربوطه [۵۵] و تعداد متغیرهای مدل در جدول‌های ۲ و ۳ آورده شده‌اند.

نتایج حاصل از پیاده‌سازی مدل‌های پیشنهادی بر روی مطالعه موردی در ادامه ارائه شده‌اند. حل مدل‌های یاد شده و نیز نتایج حاصل در فضای برنامه MATLAB R2019a [۵۶] مهیا شده است. هر یک از مراحل یاد شده بر روی رایانه‌ای با مشخصات Intel Core i7-3770K-3.9 GHz و MS Windows 7 و 16.0 GB RAM انجام شده است.

ارزش خالص و متوسط عیار کانسنگ بهینه است.

۴-۳- نتایج عددی با در نظر گرفتن عدم قطعیت عیار

مدل با در نظر گرفتن عدم قطعیت عیار برای مجموعه داده‌های پیشروی کانسنگ آهن شامل دوازده دوره زمان‌بندی پیاده‌سازی شد که نتایج عددی ارزش خالص حاصل از روش‌های مختلف ارایه شده، در جدول ۶ نشان داده شده‌اند. با توجه به جدول ۶، در طول دوره ۱، مقدار ارزش خالص با استفاده از روش‌های LR-GA، ALR-GA، LR-SG و ALR-SG به ترتیب برابر با ۵/۱۶۱، ۴/۹۹۱، ۴/۵۲۱، ۴/۲۸۵، ۴/۳۶۹ و ۴/۱۱۷ میلیون دلار است. همچنین نتایج عددی متوسط عیار کانسنگ آهن نیز در دوره زمان‌بندی ۱۲ سال، با در نظر گرفتن عدم قطعیت عیار به وسیله روش‌های پیشنهادی، در جدول ۷ آورده شده‌اند. طبق نتایج جدول ۷، در طول دوره ۱، مقدار متوسط عیار کانسنگ آهن با استفاده از روش‌های LR-GA، ALR-GA، LR-SG و ALR-SG به ترتیب برابر با ۵۶/۹۲، ۵۶/۲۵، ۵۵/۵۵، ۵۵/۲۷، ۵۵/۳۹ و ۵۵/۱۳ درصد است. نتایج حاصل نشان می‌دهند، عملکرد روش ترکیبی ALR-GA بهتر از بقیه روش‌ها از نظر ارزش خالص و متوسط عیار کانسنگ بهینه است.

جدول ۴- نتایج ارزش خالص برای مطالعه موردی با استفاده از مدل‌های پیشنهادی با فرض قطعیت داده‌ها.

ارزش خالص (NV) (میلیون دلار)						سال
ALR-FA	LR-FA	ALR-GA	LR-GA	ALR-SG	LR-SG	
۵/۱۷۵	۵/۰۷۶	۴/۶۰۶	۴/۳۱۵	۴/۳۸۲	۴/۱۳۹	۱
۴/۹۵۱	۴/۷۰۱	۴/۴۹۴	۴/۲۴۳	۴/۳۴۶	۴/۱۷۱	۲
۴/۸۰۲	۴/۵۱۶	۴/۳۱۵	۴/۱۳۶	۴/۱۲۵	۴/۱۰۲	۳
۴/۶۱۵	۴/۳۱۵	۳/۹۸۱	۳/۷۱۱	۳/۷۶۳	۳/۴۲۱	۴
۴/۳۳۹	۴/۱۱۲	۳/۸۶۹	۳/۶۷۳	۳/۷۲۱	۳/۵۴۶	۵
۴/۲۹۲	۳/۹۲۵	۳/۸۱۲	۳/۷۲۳	۳/۸۰۵	۳/۷۲۳	۶
۴/۱۱۷	۴/۰۴۷	۳/۹۲۷	۳/۷۴۸	۳/۶۵۲	۳/۵۱۶	۷
۴/۰۲۲	۳/۹۱۶	۳/۵۰۲	۳/۴۴۱	۳/۴۷۶	۳/۲۶۶	۸
۳/۸۸۱	۳/۷۹۳	۳/۴۹۲	۳/۴۵۱	۳/۴۷۴	۳/۴۳۸	۹
۳/۷۶۱	۳/۶۴۳	۳/۴۳۱	۳/۳۳۲	۳/۳۸۲	۳/۲۲۱	۱۰
۳/۶۸۲	۳/۵۵۱	۳/۳۳۲	۳/۱۸۴	۳/۲۸۱	۳/۱۰۴	۱۱
۳/۵۳۹	۳/۴۰۸	۳/۲۹۲	۳/۱۲۳	۳/۲۸۱	۳/۰۳۵	۱۲

جدول ۵- نتایج متوسط عیار کانسنگ برای مطالعه موردی با استفاده از مدل‌های پیشنهادی با فرض قطعیت داده‌ها.

متوسط عیار کانسنگ (Fe) (درصد)						سال
ALR-FA	LR-FA	ALR-GA	LR-GA	ALR-SG	LR-SG	
۵۶/۹۸	۵۶/۳۱	۵۵/۶۱	۵۵/۳۴	۵۵/۴۱	۵۵/۱۷	۱
۵۶/۷۱	۵۶/۱۶	۵۵/۵۲	۵۵/۲۳	۵۵/۲۹	۵۵/۰۹	۲
۵۶/۴۱	۵۵/۹۲	۵۴/۹۸	۵۴/۷۱	۵۴/۹۲	۵۴/۴۲	۳
۵۶/۲۱	۵۵/۷۵	۵۴/۶۳	۵۴/۴۱	۵۴/۵۲	۵۴/۱۹	۴

متوسط عیار کانسنگ (Fe) (درصد)						سال
ALR-FA	LR-FA	ALR-GA	LR-GA	ALR-SG	LR-SG	
۵۵/۸۱	۵۵/۳۲	۵۴/۴۵	۵۴/۱۸	۵۴/۳۱	۵۴/۱۳	۵
۵۵/۵۱	۵۴/۸۲	۵۴/۲۷	۵۳/۹۲	۵۴/۱۱	۵۳/۸۲	۶
۵۵/۳۲	۵۴/۷۲	۵۳/۹۸	۵۳/۶۱	۵۳/۹۳	۵۳/۵۱	۷
۵۵/۲۵	۵۴/۵۱	۵۳/۸۲	۵۳/۴۴	۵۳/۵۷	۵۳/۳۲	۸
۵۴/۷۵	۵۴/۱۶	۵۳/۴۹	۵۳/۲۸	۵۳/۳۵	۵۳/۱۲	۹
۵۴/۴۵	۵۳/۶۳	۵۳/۲۳	۵۲/۷۴	۵۳/۱۵	۵۲/۴۲	۱۰
۵۴/۲۷	۵۳/۱۸	۵۳/۰۲	۵۲/۵۲	۵۲/۷۱	۵۲/۳۶	۱۱
۵۳/۶۱	۵۲/۹۲	۵۲/۵۱	۵۲/۳۴	۵۲/۴۲	۵۲/۱۲	۱۲

جدول ۶- نتایج ارزش خالص برای مطالعه موردی با استفاده از مدل‌های پیشنهادی با در نظر گرفتن عدم قطعیت عیار.

ارزش خالص (NV) (میلیون دلار)						سال
ALR-FA	LR-FA	ALR-GA	LR-GA	ALR-SG	LR-SG	
۵/۱۶۱	۴/۹۹۱	۴/۵۲۱	۴/۲۸۵	۴/۳۶۹	۴/۱۱۷	۱
۴/۹۲۸	۴/۶۷۷	۴/۴۵۲	۴/۲۲۵	۴/۳۱۵	۴/۱۶۲	۲
۴/۷۱۲	۴/۴۸۱	۴/۲۱۹	۴/۱۰۲	۴/۱۱۶	۴/۰۵۲	۳
۴/۵۷۱	۴/۲۱۹	۳/۹۴۷	۳/۶۵۵	۳/۷۲۸	۳/۴۰۷	۴
۴/۳۲۸	۴/۰۲۷	۳/۸۱۶	۳/۶۴۸	۳/۷۰۵	۳/۵۲۵	۵
۴/۲۶۳	۳/۸۱۱	۳/۷۸۴	۳/۶۲۹	۳/۷۴۱	۳/۵۳۸	۶
۳/۹۷۶	۳/۷۵۹	۳/۶۷۷	۳/۵۶۹	۳/۶۳۱	۳/۵۰۲	۷
۳/۹۳۷	۳/۷۲۶	۳/۴۹۶	۳/۴۳۸	۳/۴۷۱	۳/۲۵۸	۸
۳/۸۷۵	۳/۷۸۹	۳/۴۸۶	۳/۴۴۵	۳/۴۶۸	۳/۴۳۳	۹
۳/۷۵۲	۳/۶۳۷	۳/۴۲۳	۳/۳۲۳	۳/۳۷۵	۳/۲۱۵	۱۰
۳/۶۷۱	۳/۵۳۹	۳/۳۱۵	۳/۱۷۶	۳/۳۷۵	۳/۰۱۹	۱۱
۳/۵۲۵	۳/۳۹۲	۳/۲۸۷	۳/۱۱۴	۳/۲۶۰	۲/۹۸۱	۱۲

جدول ۷- نتایج متوسط عیار کانسنگ برای مطالعه موردی با استفاده از مدل‌های پیشنهادی با در نظر گرفتن عدم قطعیت عیار.

متوسط عیار کانسنگ (Fe) (درصد)						سال
ALR-FA	LR-FA	ALR-GA	LR-GA	ALR-SG	LR-SG	
۵۶/۹۲	۵۶/۲۵	۵۵/۵۵	۵۵/۲۷	۵۵/۳۹	۵۵/۱۳	۱
۵۶/۶۷	۵۵/۹۶	۵۵/۴۵	۵۵/۱۲	۵۵/۲۵	۵۵/۰۲	۲
۵۶/۳۵	۵۵/۸۹	۵۴/۹۷	۵۴/۶۶	۵۴/۸۷	۵۴/۳۵	۳
۵۶/۱۲	۵۵/۷۳	۵۴/۶۱	۵۴/۳۲	۵۴/۴۹	۵۴/۱۴	۴
۵۵/۷۵	۵۵/۲۶	۵۴/۴۱	۵۴/۱۵	۵۴/۲۹	۵۴/۰۲	۵
۵۵/۴۵	۵۴/۷۴	۵۴/۱۵	۵۳/۸۷	۵۴/۰۵	۵۳/۷۱	۶
۵۵/۲۲	۵۴/۶۱	۵۳/۹۱	۵۳/۵۴	۵۳/۸۷	۵۳/۴۵	۷
۵۵/۱۱	۵۴/۴۲	۵۳/۷۳	۵۳/۳۲	۵۳/۴۹	۵۳/۲۱	۸
۵۴/۶۹	۵۴/۰۵	۵۳/۴۱	۵۳/۲۱	۵۳/۲۹	۵۳/۰۹	۹
۵۴/۳۹	۵۳/۵۷	۵۳/۱۶	۵۲/۶۶	۵۳/۰۷	۵۲/۳۹	۱۰
۵۴/۱۹	۵۳/۰۹	۵۲/۸۱	۵۲/۴۶	۵۲/۶۱	۵۲/۲۸	۱۱
۵۳/۵۲	۵۲/۸۷	۵۲/۴۲	۵۲/۲۱	۵۲/۳۱	۵۲/۰۴	۱۲

۴-۴- مقایسه نتایج قطعیت و در نظر گرفتن عدم قطعیت عیار را نشان می‌دهد.

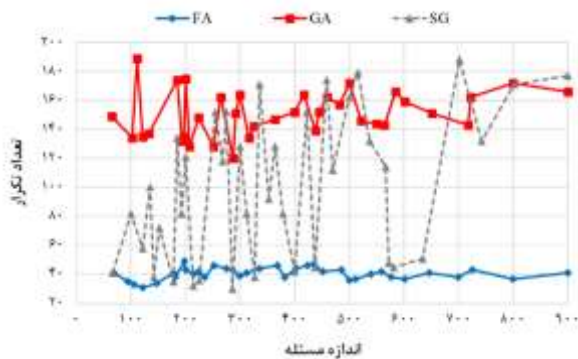
شکل ۷، مقایسه میانگین ارزش خالص در کل دوازده دوره

مقایسه میانگین عیار کانسنگ آهن (Fe) در کل دوازده دوره زمان‌بندی با استفاده از مدل‌های ترکیبی پیشنهادی در شرایط

زمان‌بندی با استفاده از مدل‌های ترکیبی پیشنهادی در شرایط

همگرایی کند انجام می‌گیرد. به بیان دیگر، روش زیرگردان باعث ایجاد مسیر زیگزاگ برای دستیابی به ضرایب حاصل می‌شود که منتج به ایجاد لبه‌های مرزی متعدد در کران‌های بالا و پایین می‌شود. به‌روزرسانی ضرایب لاگرانژ با الگوریتم‌های فرا ابتکاری، موجبات هموار شدن مسیر را با استفاده از شیب‌های سطوح مجاور مهیا خواهد کرد که این مهم نوسانات و زیگزگی شدن را به طور قابل توجهی کاهش می‌دهد.

اطلاعات حاصل از راه‌حل‌های یافت‌شده به‌وسیله نرم‌افزار متلب در جدول ۸ ارایه شده است. مطابق نتایج به دست آمده، روش ترکیبی آزادسازی لاگرانژی تعمیم‌یافته الگوریتم کرم شب‌تاب دارای شکاف بهینگی و زمان محاسباتی بهتری نسبت به سایر روش‌های مورد مطالعه دارد.



شکل ۹- مقایسه تعداد تکرار با استفاده از روش‌های پیشنهادی.

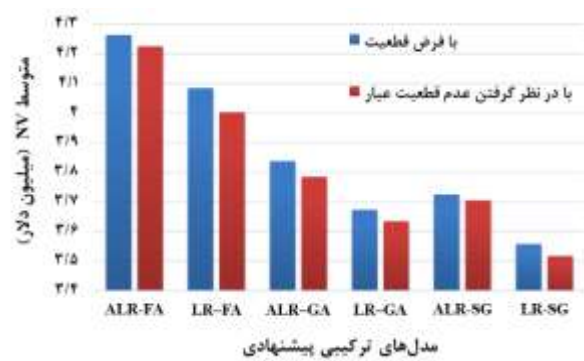
جدول ۸- اطلاعات حاصل از راه‌حل‌های یافت‌شده به‌وسیله نرم‌افزار متلب.

روش‌ها	تعداد بلوک‌ها (N)	تعداد دوره‌ها (T)	شکاف بهینگی (درصد)	زمان محاسباتی (دقیقه)
ALR-FA	۶۸۵۴	۱۲	۰٫۰۴۱	۳۷٫۳۶
LR-FA	۶۸۵۴	۱۲	۰٫۱۱۲	۳۹٫۱۲
ALR-GA	۶۸۵۴	۱۲	۰٫۰۶۷	۳۲٫۳۷
LR-GA	۶۸۵۴	۱۲	۰٫۱۸۳	۴۴٫۱۲
ALR-SG	۶۸۵۴	۱۲	۰٫۲۱۶	۵۷٫۲۹
LR-SG	۶۸۵۴	۱۲	۰٫۳۸۴	۷۳٫۱۱

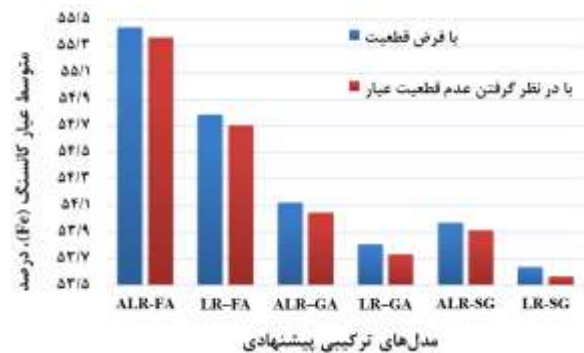
۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک مدل ریاضی برای برنامه‌ریزی تولید بلندمدت در معادن روباز با در نظر گرفتن عدم قطعیت عیار ارایه شد. عدم قطعیت عیار ماده معدنی به عنوان یک پارامتر ورودی به مدل ریاضی برنامه‌ریزی تولید، در تهیه توالی استخراج بلندمدت تولید در نظر گرفته شد. همچنین با استفاده از مدل

قطعیت و در نظر گرفتن عدم قطعیت عیار در شکل ۸ نشان داده شده است.



شکل ۷- مقایسه میانگین ارزش خالص در کل دوازده دوره زمان‌بندی با استفاده از مدل‌های ترکیبی پیشنهادی در شرایط قطعیت و در نظر گرفتن عدم قطعیت عیار.



شکل ۸- مقایسه میانگین عیار کانسنگ آهن در کل دوازده دوره زمان‌بندی با استفاده از مدل‌های ترکیبی پیشنهادی در شرایط قطعیت و در نظر گرفتن عدم قطعیت عیار.

نتایج حاصل از مدل پیشنهادی ALR-FA، با در نظر گرفتن عدم قطعیت عیار و نیز با فرض قطعیت عیار از لحاظ میانگین ارزش خالص به ترتیب ۴٫۲۲ و ۴٫۲۶ میلیون دلار است. از این‌رو، ارزش خالص به دست‌آمده از مدل تحت شرایط عدم قطعیت عیار قابل حصول است. از سویی دیگر، میانگین عیار منتج از مدل یاد شده، با در نظر گرفتن عدم قطعیت عیار و نیز با فرض قطعیت عیار به ترتیب ۵۵٫۳۶ و ۵۵٫۴۴ درصد است. بنابراین، میانگین عیار حاصل از مدل دارای عدم قطعیت عیار، عملیاتی است. به بیان دیگر، بلوک‌های استخراجی که به جهت کانسنگ یا باطله مقاصد ارسالی متفاوتی را شامل می‌شوند، از دقت انتخاب بهینه برخوردار خواهند شد.

شکل ۹ تعداد تکرارها بر اساس اندازه مساله را برای الگوریتم‌های پیشنهادی نشان می‌دهد. نتایج بیانگر همگرایی با ثبات و برتری الگوریتم کرم شب‌تاب نسبت به سایر روش‌ها دارد. همچنین، روش سنتی زیرگردان در مسایل بزرگ‌مقیاس با توجه به پدیده زیگزگ و گام‌های کوچک برای رسیدن جواب نهایی، بسیار آهسته و

- pit mines constrained long-term production scheduling problem*”, J. Cent. South Univ., 21, 2848–2856.
4. Moosavi, E.; Gholamnejad, J.; Ataee-Pour, M. and Khorram. E.; 2014; “*A hybrid augmented Lagrangian multiplier method for the open pit mines long-term production scheduling problem optimization*”, J. Min. Sci., 50, 1047-1060.
 5. Johnson, T.B.; 1969; “*Optimum production scheduling*”, In Proceedings of the 8th International Symposium on Computers and Operations research, Salt Lake City, 539-562.
 6. Williams, C.E.; 1974; “*Computerized year-by-year open pit mine scheduling*”, Trans. Soc. Min. Eng. AIME, 256, 45-52.
 7. Gershon, M.E.; 1983; “*Optimal mine production scheduling: evaluation of large scale mathematical programming approaches*”, Int. J. Min. Eng., 1(4), 315-329.
 8. Dagdelen K. and Johnson, T.B.; 1986; “*Optimum open pit mine production scheduling by Lagrangian parametrization*”, In Proceeding of the 19th International Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry, Pennsylvania State University, University Park, Pennsylvania, 13, 127-142.
 9. Ravenscroft, P.J.; 1992; “*Risk analysis for mine planning by conditional simulation*”, Trans. Inst. Min. Metall. (Sect. A: Min. Ind.), 101, 82-88.
 10. Dowd, P.A.; 1994; “*Risk assessment in reserve estimation and open-pit planning*”, Trans. Inst. Min. Metall. (Sect. A: Min. Ind.), 103, 148-154.
 11. Eleveli, B.; 1995; “*Open pit mine design and extraction sequencing by use of OR and AI concept*”, Int. J. Min. Reclam. Env. 9, 149-153.
 12. Denby, B. and Schofield, D.; 1995; “*Inclusion of risk assessment in open-pit design and planning*”, Trans. Inst. Min. Metall. (Sect. A: Min. Ind.), 104, 67-71.
 13. Tolwinski, B.; 1998; “*Scheduling production for open-pit mines*”, In Proceedings of the APCOM’98, 19-23.
 14. Akaike, A. and Dagdelen, K.; 1999; “*A strategic production scheduling method for an open-pit mine*”, In Proceedings of the 28th Application of Computers and Operation Research in the Mineral Industry, 729-738.
- ریاضی عدد صحیح صفر و یک، مدل بهینه‌سازی برنامه‌ریزی تولید بلندمدت با در نظر گرفتن عدم قطعیت عیار به صورت خطی ارائه شد. در ابتدا شاخص احتمالی برای هر بلوک کانسنگ تعیین شد که مبین عدم قطعیت عیار است. سپس، تابع هدف با بهینه‌سازی ارزش خالص با احتساب محدودیت‌های فیزیکی و عملیاتی مدل‌سازی شد. هدف از بهینه‌سازی، انتخاب قسمت‌هایی از ذخیره با احتمال عیار بالا در سال‌های اولیه و قسمت‌هایی از ذخیره با احتمال عیار کم در سال‌های بعدی عمر معدن برای استخراج است. توسعه مدل پیشنهادی بیانگر تاثیر عدم قطعیت عیار در توالی استخراج بلوک‌ها است. مدل پیشنهادی برنامه‌ای را برای تولید ارائه می‌کند که ضمن بهینه‌سازی سود در فضای عدم قطعیت عیار، ارزش خالص به دست‌آمده از آن قابل حصول باشد. از آنجایی که مدل‌های برنامه‌ریزی تولید در معادن روباز به لحاظ ابعاد، بزرگ مقیاس بوده و حل چنین مسایلی دشوار بوده است؛ در این مقاله استفاده از روش‌های ترکیبی آزادسازی لاگرانژی- الگوریتم کرم شب‌تاب و آزادسازی لاگرانژی تعمیم‌یافته- الگوریتم کرم شب‌تاب برای حل مساله برنامه‌ریزی تولید بلندمدت در معادن روباز پیشنهاد شده است. یک رویکرد جدید مبتنی بر بهینه‌سازی ضرایب لاگرانژ و مقایسه عملکرد آن با روش متداول تقریبی سنتی ارائه شد. نتایج حاصل از مطالعه موردی نشان می‌دهد که روش آزادسازی لاگرانژی می‌تواند راه‌حلی مناسب برای مساله اصلی ارائه کند و استراتژی ترکیبی می‌تواند راه‌حل موثرتری از روش تقریبی سنتی برای رسیدن به جواب بهینه تولید کند. روش پیشنهادی دارای مزیت‌هایی، از جمله ویژگی همگرایی با ثبات و جلوگیری از همگرایی زود هنگام است. در مدل با در نظر گرفتن عدم قطعیت، میانگین ارزش خالص به وسیله روش ALR-FA به ترتیب ۵/۵۲، ۱۱/۶۱، ۱۶/۲۶، ۱۴/۰۵ و ۲۰/۱۱ درصد بالاتر از روش‌های LR-FA، LR-GA، ALR-GA، LR-SG و ALR-SG است. همچنین، سرعت CPU از مدل پیشنهادی، ۴/۷ درصد بیشتر از دیگر روش‌ها حاصل شد.
- ### منابع
1. Fisher, M.L.; 1981; “*The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems*”, Manage. Sci., 27(1), 1–18.
 2. Held, M.; Wolfe, P. and Crowder, H.D.; 1974; “*Validation of subgradient optimization*”, Math. Program., 6, 62-88.
 3. Moosavi, E.; Gholamnejad, J.; Ataee-Pour, M. and Khorram, E.; 2014; “*Improvement of Lagrangian relaxation performance for open*

25. Gholamnejad, J. and Moosavi, E.; 2012; "A new mathematical programming model for long-term production scheduling considering geological uncertainty", J. S. Afr. I. Min. Metall., 112(2), 77-81.
26. Nanjari, E.L. and Golosinski, T.S.; 2013; "Optimising open pit mine scheduling taking into consideration time value of money and mining restrictions", Int. J. Min. Reclam. Env. 27(3), 156-165.
27. Goodfellow, R. and Dimitrakopoulos, R.; 2013; "Algorithmic integration of geological uncertainty in push back designs for complex multi-process open pit mines", Min. Technol., 122(2), 67-77.
28. Dimitrakopoulos, R. and Jewbali, A.; 2013; "Joint stochastic optimization of short and long term mine production planning: Method and application in a large operating gold mine", IMM Trans. Min. Technol., 122(2), 110-123.
29. Leite, A. and Dimitrakopoulos, R.; 2014; "Stochastic optimization of mine production scheduling with uncertain ore/metal/waste supply", Int. J. Min. Sci. Technol.
30. Asad, M.W.A.; Dimitrakopoulos, R. and Eldert, J.V.; 2014; "Stochastic production phase design for an open pit mining complex with multiple processing streams", Eng. Opti., 46(8), 1139-1152.
31. Lamghari, A.; Dimitrakopoulos, R. and Ferland, A.J.; 2014; "A variable neighbourhood descent algorithm for the open-pit mine production scheduling problem with metal uncertainty", J. Oper. Res. Soc., 65, 1305-1314.
32. Shishvan, M.S. and Sattarvand, J.; 2015; "Long term production planning of open pit mines by ant colony optimization", Eur. J. Oper. Res., 240(3), 825-836.
33. Mokhtarian, M. and Sattarvand, J.; 2016; "An Imperialist Competitive Algorithm for Solving the Production Scheduling Problem in Open Pit Mine", Int. J. Min. Geo-Eng., 50(1), 131-143.
34. Mokhtarian, M. and Sattarvand, J.; 2016; "Commodity price uncertainty propagation in open-pit mine production planning by Latin hypercube sampling method", J. M. E., 7(2), 215-227.
35. Goodfellow, R. and Dimitrakopoulos, R.; 2016; "Global optimization of open pit mining complexes with uncertainty", Appl. Soft
15. Whittle, D.; 2000; "Proteus environment: sensitivity analysis made easy", Whittle North American Strategic Mine Planning Conference, Colorado.
16. Johnson, T.B.; Dagdelen, K. and Ramazan, S.; 2002; "Open pit mine scheduling based on fundamental tree algorithm", In Proceeding of the 30th International Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry, SME: Littleton, 147-159.
17. Dimitrakopoulos, R.; Farrelly, C.T. and Godoy, M.; 2002; "Moving forward from traditional optimization: grade uncertainty and risk effects in open pit design", Trans. Inst. Mining Metall. A Mining Technol., 111, 82-88.
18. Godoy, M. and Dimitrakopoulos, R.; 2004; "Managing risk and waste mining in long-term production scheduling of open-pit mines", SME Transactions, 316, 43-50.
19. Dimitrakopoulos, R. and Ramazan, S.; 2004; "Uncertainty based production scheduling in open pit mining", SME Transactions. 316, 106-112.
20. Ramazan, S. and Dimitrakopoulos, R.; 2004; "Recent application of operations research in open pit mining", SME Transactions. 316, 73-78.
21. Ramazan, S. and Dimitrakopoulos, R.; 2004; "Traditional and new MIP models for production planning with in-situ grade variability", Int. J. Min. Reclam. Env. 18(2), 85-98.
22. Ramazan, S. and Dimitrakopoulos, R.; 2007; "Stochastic optimization of long-term production scheduling for open pit mines with a new integer programming formulation, Orebody Modelling and Strategic Mine Planning", The Australasian Institute of Mining and Metallurgy, Spectrum Series, 14(2), 385-392.
23. Bley, A.; Boland, N.; Fricke, C. and Froyland, G.; 2010; "A strengthened formulation and cutting planes for the open pit mine production scheduling problem", Comput. Oper. Res., 37(9), 1641-1647.
24. Lamghari, A. and Dimitrakopoulos, R.; 2012; "A diversified Tabu search approach for the open-pit mine production scheduling problem with metal uncertainty", Eur. J. Oper. Res., 222(3), 642-652.

- “Long-term mine production scheduling with multiple processing destinations under mineral supply uncertainty, based on multi-neighbourhood Tabu search”, *Int. J. Min. Reclam. Env.*, 34(7), 459-475.
46. Annels, A.E.; 1991; “Mineral deposit evaluation: A practical approach”, Chapman & Hall, London, XV, 436 P.
 47. Rendu, J.M.; 1981; “An introduction to geostatistical methods of mineral evaluation”, *J. South. Afr. Inst. Min. Metall. monograph series*, Johannesburg, 84 P.
 48. Journel, A.G.; 1983; “Non-parametric estimation of spatial distributions”, *Math. Geol.* 15 (3), 445-468.
 49. Hassani-Pak, A.A.; 2003; “Error and risk management in exploration”, Tehran university press, 272 P.
 50. Gossage, B.; 1998; “The application of indicator kriging in the modeling of geological data”, *Beyond Ordinary Kriging*, 40.
 51. Andreani, R.; Birgin, E. G.; Martinez, J. M. and Schuverdt, M. L.; 2008; “On augmented Lagrangian methods with general lower-level constraints”, *SIAM J. Optim.*, 18(4), 1286-1309.
 52. Yang, X.S.; 2008; “Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms”, Luniver Press, UK.
 53. Yang, X.S.; 2009; “Firefly algorithms for multimodal optimization”, In: *Stochastic Algorithms: Foundations and Applications* (Eds O. Watanabe and T. Zeugmann), SAGA2009, Lecture Notes in Computer Science, 5792, Springer-Verlag, Berlin, 169-178.
 54. Yang, X.S.; 2010; “Firefly Algorithm, Stochastic Test Functions and Design Optimisation”, *Int. J. Bio-Inspired Computation*, 2(2), 78-84.
 55. Tolouei, K.; 2020; “Optimization of the mathematical model of long-term production scheduling in open-pit mining method considering the grade uncertainty and using hybrid algorithms”, Ph.D. Dissertation, Department of Petroleum and Mining Engineering, South Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.
 56. Matlab R2019a; 2019; The Matlab works. *Comput.*, 40, 292-304.
 36. Lamghari, A. and Dimitrakopoulos, R.; 2016; “Progressive hedging applied as a metaheuristic to schedule production in open-pit mines accounting for reserve uncertainty”, *Eur. J. Oper. Res.*, 253(3), 843-855.
 37. Bakhtavar, E.; Jafarpour, A. and Yousefi, S.; 2017; “Optimal production strategy of bimetallic deposits under technical and economic uncertainties using stochastic chance-constrained programming”, *J. M. E.*, 8(3), 475-485.
 38. Khan, A.; 2018; “Long-term production scheduling of open pit mines using particle swarm and bat algorithms under grade uncertainty”, *J. S. Afr. I. Min. Metall.*, 118, 361-368.
 39. Rahimi, E.; Moosavi, E.; Shirinabadi, R. and Gholinejad, M.; 2018; “Optimized algorithm in mine production planning, mined material destination, and ultimate pit limit”, *J. Cent. South Univ.*, 25(6), 1475-1488.
 40. Tahernejad, M.M.; Ataei, M. and Khalokakie, R.; 2018; “A practical approach to open-pit mine planning under price uncertainty using information gap decision theory”, *J. M. E.*, 9(2), 527-537.
 41. Jelvez, E.; Morales, N. and Nancel-Penard, P.; 2018; “Open-Pit Mine Production Scheduling: Improvements to MineLib Library Problems”, In *Proceedings of the 27th International Symposium on Mine Planning and Equipment Selection (MPES)*, 223-232.
 42. Khan, A. and Asad, M.W.A.; 2018; “A mathematical programming model for optimal cut-off grade policy in open pit mining operations with multiple processing streams”, *Int. J. Min. Reclam. Env.*
 43. Alipour, A.; Khodaiari, A.A.; Jafari, A. and Tavakkoli-Moghaddam, R.; 2018; “Uncertain production scheduling optimization in open-pit mines and its ellipsoidal robust counterpart”, *Int. J. Manage. Sci. Eng. Manage.*
 44. Chatterjee, S. and Dimitrakopoulos, R.; 2020; “Production scheduling under uncertainty of an open-pit mine using Lagrangian relaxation and branch-and-cut algorithm”, *Int. J. Min. Reclam. Env.*, 34(5), 343-361.
 45. Dimitrakopoulos, R. and Senécal, R.; 2020;