# طوقه ها، گروه های چرخشی و ارتباط آن ها با نظریه نسبیت خاص

**علی رضا اشرفی***

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

**سهیلا مهدوی**

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

**چکیده.** نظریه گروه های چرخشی یکی از جدیدترین نظریاتی است که طی پنجاه سال اخیر در جبر کاربردی مورد بررسی قرار گرفته است. انگیزه اصلی پیدایش این نظریه، تعریف خاصی است که آلبرت اینشتین فیزیک دان نابغه آلمانی برای جمع بردارها در فضای سه بعدی طرح و بر اساس آن به تظریه نسبیت خاص رسید. این تعریف به ساختار جبری خاصی روی فضای سه بعدی حقیقی منجر شد که مطالعه این ساختارها با کار خلاقانه آبراهام اونگار هندسه دان بزرگ آمریکایی به نظریه گروه های چرخشی و فضاهای برداری چرخشی منجر شد. اونگار با وارد کردن ایده هایی مشابه ترکیب فضاهای برداری و هندسه اقلیدسی که به هندسه تحلیلی منجر شد، راه را برای هندسه هذلولوی تحلیلی گشود. دامنه تاثیر نظریه ای که اونگار توسعه داد حتی به فلسفه علم نیز کشیده شد. این سخنرانی به مروری تاریخی از این نظریه می پردازد.

**واژه‌هاي كليدي:** گروه چرخشی، فضای برداری چرخشی، جمع اینشتین.

**طبقه بندي موضوعي [2010]:** 20N05، 15A66، 83A05.

## 1. مقدمه

* سخنران سید علی رضا اشرفی

آدرس ایمیل نویسندگان: ashrafi@kashanu.ac.ir و s.mahdavi@grad.kashanu.ac.ir

تصور می شود که اولین مدل ریاضی طبیعت در دوران مدرن توسط گالیله ارائه شده است. در واقع گالیله به جای نظریه ارسطو در مورد مرکزیت زمین در جهان، به دنبال ایجاد نظریه ای در مورد طبیعت بود که در آن مسائل فیزیکی با زبان ریاضی بیان می شوند. ارسطو معتقد بود که ریاضیات در دنیای فیزیکی واقعی قابل اجرا نیست، در حالی که گالیله به دنبال ایجاد فیزیکی مبتنی بر ریاضیات بود. برای مثال، گالیله با تغییر نگاه بر «چگونه» به جای «چرا» و با توجه به رخ دادهای طبیعی، توانست نشان دهد که سقوط اجسام به زمین را می‌توان به صورت ریاضی بر حسب رابطه ای نسبتا دقیق بین فاصله و زمان سقوط بیان کرد، در حالی که ارسطو بر این باور بود که اجسام تمایل دارند در فرآیند حرکت به مکان طبیعی خود بازگردند. این مقاله در واقع به یکی از نظریاتی می پردازد که به نوعی با یکی از اندیشه های گالیله سر و کار دارد.

این مقاله به بستر تاریخی توسعه گروه های چرخشی می پردازد و از آنجا که این نظریه با نظریه طوقه ها که به طور مستقل توسعه یافته است، اشتراکات زیادی دارد، ما ناگزیر خواهیم بود تا نگاهی نیز به توسعه تاریخی نظریه طوقه ها داشته باشیم. بدین دلیل بخش دوم از این مقاله به تاریخچه ای از نظریه طوقه ها اختصاص دارد که پرداختن به آن از این جهت اهمیت دارد که برخی اکتشافات نظریه گروه های چرخشی تکرار یافته هایی است که قبلا در نظریه طوقه ها بررسی شده اند، با این تفاوت که گروه های چرخشی و سپس فضاهای برداری چرخشی در بستری هندسی و با الهام از نظریه نسبت توسعه یافتند، در حالی که نظریه طوقه ها با ایده هایی جبری آغاز شد. در بخش سوم از این مقاله تاریخچه‌اي از گروه هاي چرخشی و در بخش چهارم تاریخچه‌ای از فضاهای برداری چرخشی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که در ادامه توسعه نظریه گروه های چرخشی ظاهر شده اند.

## 2. آغاز و تکامل نظریه طوقه ها

وقتی کسی می پرسد که طوقه چیست، ساده ترین راه برای توضیح آن این است که بگوییم طوقه گروهی غیر شرکت پذیر است. این درست است، اما تمام حقیقت نیست. تاکید بر این نکته ضروری است که نظریه طوقه فقط تعمیم نظریه گروه نیست، بلکه رشته ای است که از چهار حوزه تحقیقاتی اساسی جبر، هندسه، توپولوژی و ترکیبیات سرچشمه می‌گیرد و همچنان در آن حرکت می‌کند. با نگاهی به پنجاه سال اغازین تاریخ طوقه ها، می توان دریافت که هر دهه یک مرحله جدید و مهم را در توسعه آن آغاز می کند.

طی پنجاه سال اول توسعه نظریه طوقه ها سه کتاب را می توان نام برد که علاوه بر نقش آن ها در پیشرفت نظریه طوقه ها تا به امروز به عنوان یک منبع اصلی مرجع در حوزه مربوطه خود باقی مانده اند. اولین این کتاب ها، کتاب هندسه وب نوشته ویلهلم بلاشکه و گریت بل است که به زبان آلمانی در سال 1938 توسط انتشارات اشپرینگر به چاپ رسیده است. منشاء نگارش این کتاب را می توان توسعه هندسه دیفرانسیل تصویری سطوح در قرن نوزدهم و مکتب ریاضی هامبورگ طی سال های 1927 تا 1936 دانست که تحت تاثیر ریاضی دانانی چون بلاشکه، بل، چرن، کاهلر، زاریسکی و رایدمایستر قرار داشت. کتاب کلاسیک دوم که معرف توسعه نظریه طوقه ها در دهه های پنجم تا هفتم از قرن بیستم میلادی است، با عنوان بررسی دستگاه های دوتایی توسط ریچارد هوبرت بروک در سال 1958 توسط انتشارات اشپرینگر به چاپ

رسید. سومین کتاب کلاسیک که به زبان روسی است و باعث پیشرفت این رشته در شوروی سابق شد کتاب مبانی نظریه شبه گروه ها و طوقه ها است که در سال 1967 در مسکو منتشر شد.

بدون تردید بل [1]، بروك [2] و موفانگ سه رياضي داني هستند كه پيدايش نظريه طوقه ها در نيمه اول قرن بيستم مرهون ايده هاي انقلابي آن هاست. لذا قبا از آن كه وارد جرئيات تاريخي اين نظريه شويم بد نيست مروري بر زندگي اين سه رياضي دان داشته باشيم.

گریت بل هندسه دانی هلندی بود که در بیست و نهم ماه می سال 1906 در شهر آمستردام متولد و در اول نوامبر سال 1989 در همین شهر درگذشت. وی دکترای خود را از دانشگاه لیدن تحت نظر ویلم وان در وود اخذ کرد. شهرت او به خاطر معرفی طوقه های بل در سال 1937 و حدس بل در مورد نقاط شش مماس است. او یکی از اساتیدی بود که در سال 1933 نامه ی سوگند وفاداری به آدولف هیتلر و دولت ناسیونال سوسیالیست را امضا کرد. بل در دهه 1930 میلادی در دانشگاه هامبورگ و در زمینه هندسه وب و بعدها هندسه دیفرانسل تصویری تحت نظر ویلهلم بلاشکه کار کرد. در سال 1931 ، وی موفق به کسب بالاترین درجه علمی در دانشگاه هامبورگ شد. در جریان جنگ جهانی دوم، او برای هلند می جنگید و اسیر شد و بعدها با پی گیری بلاشکه آزاد شد. بعد از جنگ، بل تا زمان بازنشستگی اش در سال 1971 استاد دانشگاه آلبرت-لودویگز فرایبورگ بود. مهمترین نقش بل در جبر متناهی، معرفی طوقه های بل است که بعدها با کارهایی از بروک و اونگار ترکیب شد و به خلق ساختارهایی انجامید که تفسیری جبری از نظریه نسبیت ارائه می کنند.

ریچارد هوبرت بروک ریاضیدانی آمریکایی بود که در 26 دسامبر 1914 متولد و در سال 1991 درگذشت. او در دانشگاه تورنتو تحصیل کرد جایی که دکترای خود را در سال 1940 با عنوان گروه خطی عام در میدان با مشخصه p و تحت نظر ریچارد بروئر تنظیم کرد. در آن زمان بروئر ریاضی دانی بسیار معروف بود که به تازگی نظریه نمایش های پیمانه ای یک گروه را بنیاد گذاشته بود. بروک بیشتر دوران حرفه ای خود را به عنوان استاد در دانشگاه ویسکانسین - مدیسون گذراند و حداقل 31 دانشجوی دکتری تربیت کرد که شاید بزرگترین آنها مایکل اشباخر باشد. بروک بیشتر بخاطر کارهایش در جبر و به ویژه در رابطه با هندسه تصویری و ترکیبات شناخته می شود. مهمترین اثر علمی او مقاله ای است که در سال 1949 با همکاری رایزر نوشت که نتیجه ی اصلی آن به مرتبه های ممکن صفحه های تصویری متناهی می پردازد. این نتیجه در نوشته های کلاسیک تحت نام قضیه بروک–رایزر آمده است. امروزه شکل کلی این قضیه با نام قضیه بروک–رایزر–چولا شناخته می شود که به مسئله ی عدم وجود طرح های ترکیبیاتی از مرتبه های خاصی می پردازد. او در سال 1956 جایزه شونت را از جامعه ریاضی آمریکا به خاطر چاپ مقاله ای توصیفی با عنوان پیشرفت های اخیر در مبانی هندسه صفحه ی اقلیدسی در ژورنال Amer. Math. Monthly دریافت کرد. مهمترین کار جبری بروک معرفی طوقه های بروک است که دسته هایی از گروه های چرخشی جابجایی–چرخشی را ایجاد می کند و ما در ادامه این نوشته به آن ها خواهیم پرداخت. ریچارد اشتاینبرگ و دونالد پاسمن بزرگترین ریاضی دانانی بودند که دکتری خود را تحت راهنمایی ریچارد بروک دریافت کردند. بروک جوایز زیادی دریافت کرد؛ ولی شاید مهمترین موفقیت علمی او انتخاب بعنوان سخنران مدعو کنگره بین المللی ریاضیدانان در استکهلم و درسال 1962 باشد. او در سال 1963، مدرس فولبرایت در دانشگاه کانبرا بود و در سال 1965 یک کنفرانس گروه ها و هندسه به افتخار بازنشستگی بروک در دانشگاه ویسکانسین برگزار شد. روث موفانگ دهم ژانویه 1905 ميلادي در شهر دارمشتات از ايالت هسن در كشور آلمان ديده به جهان گشود. بسياري از مورخين معتقدند،

مریم میرزاخاني، روث موفانگ، سوفیا کووالفسکایا و امی نوتر چهار رياضي دان زن بسیار درخشان دو قرن اخیر جهان بوده اند. از این رو موفانگ یکی از چهار زنی است که نام خود را در تاریخ ریاضیات مطرح کردند.

موفانگ که هندسه دان بود در دانشگاه فرانکفورت و بعداً در کونیگزبرگ تحصیل کرده بود، جایی که به شدت تحت تأثیر رایدمایستر قرار گرفت. قبل از انتشار مقاله خود در مورد شبه گروه ها، او 14 مقاله در موضوعات مرتبط با هندسه منتشر کرده بود. موفانگ پس از اخذ دکتری خود از کونیگزبرگ به فرانکفورت بازگشت و قصد داشت یک حرفه آکادمیک را دنبال کند. با این حال، وزارت آموزش رایش سوم خیلي زود به او اطلاع داد که به عنوان یک زن، اجازه تدریس در یک دانشگاه عمدتاً مردانه را ندارد و او فقط مجاز به انجام کار تحقیقاتی است. بنابراین، موفانگ از سال 1937 به عنوان یک ریاضیدان صنعتی در شرکت کروپ استخدام شد. تحقیقات موفانگ در هندسه تصویری بر اساس کار دیوید هیلبرت است. او کارهای پیشگامانه اي بر روی ساختارهای جبری غیر شرکت پذیر از جمله طوقه هايي که به نام خود او طوقه موفانگ نامیده شد، انجام داده است. در سال 1933، موفانگ نشان داد که قضیه دزارگ در صفحه کیلی برقرار نیست. صفحه کیلی از مختصات اکتونیوني استفاده می کند که براي قانون شرکت پذیري را برآورده نمی کند. چنین پیوندهایی بین هندسه و جبر قبلاً توسط کارل فون اشتات و دیوید هیلبرت ذکر شده بود. او پس از جنگ به دانشگاه فرانکفورت بازگشت و اولین استاد زن ریاضیات در آلمان شد. موفانگ غیر از اینها چیز دیگري منتشر نکرد، اما خوشبختانه به اندازهای زنده ماند که شاهد بسیاری از ثمرات کارهای اولیهاش باشد. براي قدرداني از کارهاي تاثیر گذارش، نام او بر روي طوقه ها و صفحاتي که امروزه طوقه هاي موفانگ و صفحات موفانگ نامیده مي شوند، قرار داده شد. البته امروزه شاخههای جدید بیشتری مانند تقارنهای موفانگ، چند ضلعیهای موفانگ و ساختمانهای موفانگ وجود دارند که نه تنها در جبر و هندسه، بلکه در زمینههای دیگر، از جمله ریاضی فیزیک، اندیشه هاي درخشان موفانگ را به تصویر مي کشند. روث موفانگ پس از هفتاد و دو سال زندگي، سرانجام در بیست و ششم نوامبر 1977 در شهر فرانکفورت درگذشت.

در تاریخ علم، موارد زیادی را میشناسیم که در زمانهای معینی ایدههای انقلابی، به اصطلاح در هوا بودند و سپس در مکانهای مختلف، گاه بهطور مستقل و به اشکال مختلف، خود را نشان دادند. در طول دو قرن اخیر، دو مورد از این قبیل در ریاضیات و فیزیک رخ داده است. هندسه هذلولولی تقریباً به طور همزمان توسط لوباچفسکی و بولیایی در سال های نزدیک 1820 میلادی کشف شد و متعاقباً با هندسه ریمانی که در سال 1866 اعلام گشت، ترکیب شد و هندسه نااقلیدسی را تشکیل داد. به طور مشابه در اواخر قرن نوزدهم مفهوم کاملاً جدیدی از فضا-زمان از روی تبدیلات لورنتس در سال 1895 پدیدار شد که جایگزین مفاهیم پیشین گالیله و منجر به نسبیت خاص اینشتین در سال 1905 شد. اکنون می دانیم که این دو ایده، هندسه غیراقلیدسی و فضا-زمان منحنی، خیلی بی ربط نیستند و هر دو به فراهم کردن زمینه های لازم برای مفهوم عدم شرکت پذیری کمک کردند.

قدیمی ترین عملیات غیر شرکت پذیر که بشر استفاده کرده است، تفریق ساده اعداد طبیعی است؛ اما اولین نمونه از یک دستگاه غیر شرکت پذیر مجرد، اعداد کیلی بود که توسط آرتور کیلی در سال 1845 ساخته شد. بعداً آنها توسط دیکسون به آنچه ما به عنوان جبرهای کیلی-دیکسون می شناسیم تعمیم یافتند. آنها به دلیل نقش برجسته ای که در ساختار حلقه های متناوب داشتند، در دهه 1920 موضوع مطالعه جدی قرار گرفتند. در اینجا منظور از یک حلقه متناوب،

ساختاری جبری با دو عمل دوتایی است که در آن همه اصول موضوع یک میدان به جز جابجایی و شرکت پذیری ضرب برقرار بوده و برای هر دو عضو a و b، a(ba)=(ab)a و (aa)b=a(ab) به طور مشابه یک جبر A را متناوب نامیم هرگاه حلقه متناظر با A حلقه ای متناوب باشد. معروف ترین جبر متناوب، جبر اوکتونیون ها روی اعداد حقیقی است.

رده دیگری از ساختارهای غیر شرکت پذیر، دستگاه هایی با یک عملیات دوتایی هستند که در برخی خواص جبری صدق می کنند. یکی از اولین کارهای علمی که به دستگاه های دوتایی غیر شرکت پذیر می پردازد، مقاله ریاضی دان روسی و استاد دانشگاه ایالتی ورونژ آنتون سوشکویچ درباره تعمیم قانون شرکت پذیری است که در سال 1929 به چاپ رسید. سوشکویچ در مقاله خود مشاهده می کند که در اثبات قضیه لاگرانژ برای گروه ها، هیچ استفاده ای از قانون شرکت پذیری نمی شود. بنابراین او به درستی حدس می‌زند که می‌توان دستگاه های دوتایی غیر شرکت پذیری داشت که خاصیت لاگرانژ را برآورده کند. او دو نوع از این دستگاه های جبری که آن ها را گروه های عمومی A و B نامید، ارائه نمود. در رویکرد سوشکویچ می‌توان برخی از تلاش‌های اولیه را در جهت نظریه طوقه ها به عنوان تعمیم مفاهیم گروهی تشخیص داد. به نظر می رسد گروه های عمومی در معنی سوشکویچ انواع خاصی از شبه گروه های هستند. شایسته است تا در اینجا از ارنست شرودر ریاضی دان آلمانی نام ببریم که در کتاب خود با عنوان "کتاب درسی حساب و جبر" که در سال 1873 به چاپ رسید از مفهوم شبه گروه و خواص مقدماتی آن صحبت کرده است. متأسفانه، ایده های سوشکویچ در آن زمان در کشور او ریشه نگرفت. در دهه 1930، دوره بی رحمانه سرکوب های سیاسی در اتحاد جماهیر شوروی آغاز شد و مقامات دولتی در آن زمان سوشکویچ را از نظر سیاسی قابل اعتماد نمی دانستند. او از اشراف کوچک روسیه بود. بدتر از آن، او قبل از انقلاب در برلین ریاضی خوانده بود و مقاله خود را در سال 1929 در یک مجله آمریکایی منتشر کرد. سوشکویچ در طول دوره بعدی تدریس خود در خارکف، اجازه نظارت بر پایان نامه ها و رسالات دانشجویان را نداشت - شرایطی که مانع از توسعه یا انتشار بیشتر ایده های او شد. اواخر دهه 1930 میلادی، مرداک در آمریکا، و در دهه 1960 میلادی، بلوسوف در روسیه، آثار سوشکویچ را بار دیگر مورد توجه قرار دادند.

## ۳. پیدایش گروه‌های چرخشی

گروه هاي چرخشي حاصل نظريات انقلابي آبراهام اونگار [3,4] در رياضي فيزيك و فلسفه علم است. اونگار استاد گروه ریاضیات در دانشگاه ایالتی داکوتای شمالی است. او مدارک کارشناسی و کارشناسی ارشد خود را در ریاضیات محض به ترتیب در سال های 1965 و 1967 از دانشگاه عبری و دکتری خود را در ریاضیات کاربردی از دانشگاه تل آویو در سال 1973 دریافت کرد. وی یک سال برای دوره ی پسادکتری در دانشگاه تورنتو بود و سپس سال های 1975 تا 1977 را به عنوان محقق ارشد در انستیتوی ملی تحقیقات علوم ریاضی در پرتوریا گذراند. او طی سال های 1978 تا 1983 به دانشگاه رودز در شهر گراهام تاون آفریقای جنوبی نقل مکان کرد استاد دانشگاه انستیتوی ملی تحقیقات علوم ریاضی شورای تحقیقات علمی و صنعتی (CSIR) داشت. اونگار از گراهام تاون به ونکوور رفت و در آنجا شغل استادیار مدعو را در دانشگاه سیمون فریزر (1983-1984) بدست آورد و سرانجام در سال 1984، اونگار مقام استادیار در دانشگاه ایالتی داکوتای شمالی در فارگو را پذیرفت، جایی که وی در حال حاضر سمت استاد را دارد.

زمینه های تحقیقاتی مورد علاقه اونگار مربوط به هندسه هذلولی و کاربردهای آن در فیزیک نسبیت است. هنگامی که او دانشجوی مقطع کارشناسی بود، مجذوب تناظر دوسویی بین اعداد مختلط و گروه تبدیلات لورنتز روی زمان در نظریه نسبیت خاص شد. او از این نتیجه آگاه بود که میدان اعداد مختلط به میدانی با ابعاد بالاتر روی اعدا حقیقی توسعه نمی یابد در حالی که در مقابل، گروه لورنتز می تواند به ابعاد بالاتر گسترش یابد. بنابراین، اونگار احساس کرد که گسترش گروه لورنتس از یک بعد زمانی و یک بعد فضایی، که در آن ارتباط تنگاتنگی با حوزه اعداد مختلط وجود دارد، به یک بعد زمان و دو بعد فضا، معمایی است که باید فتح شود. بعدها دانش آموز جوان به پدیده جدیدی در انتقال گروه لورنتز رسید که توجه عمیق او را به خود جلب کرد. بعدها معلوم شد که این انتقال چرخش فضایی عجیب و غریبی است که در نظریه نسبیت خاص به عنوان تغییر جهت توماس شناخته می شود.

بسیاری از کاشفان شیفته رابطه نسبی گرای توماس بودند، با این حال، ساختار ظریفی که تغییر جهت توماس ایجاد می کند، برای مدت طولانی نمی توانست رمزگشایی شود. در واقع، وضعیت ناامیدکننده تغییر جهت توماس که قبل از کشف اونگار در سال 1988 وجود داشت، توسط هربرت گلدشتاین در کتاب مکانیک کلاسیک به خوبی توصیف شده است. در سال 1988، اونگار در مقاله ای گروه تبدیلات لورنتز را به صورت پارامتریک از نظر سرعت و جهت های نسبی قابل قبول بیان کرد. ساختار گروهی حاصل از واقعی سازی پارامتریک گروه لورنتز همراه با قانون جمع سرعت انیشتین، او را قادر ساخت تا ارتباط ساختاری عمیق تغییر جهت توماس و قانون جمع اینشتین را کشف کند. اونگار تغییر جهت توماس را به صورت مجرد گسترش داده شکل تعمیم یافته ی آن را تغییر جهت چرخشی توماس نامید و نشان داد که چرخش ها خودریختی هایی هستند که به جمع انیشتین ویژگی هایی گروه مانند می‌دهند که او آنها را گروه چرخشی نامید. بدین ترتیب، جوجه اردک زشت فیزیک نسبیت و گردش توماس تبدیل به قوی زیبایی شد که در زبان چرخشی، چرخنده نامیده شد.

اینشتین در سال 1905 با در نظر گرفتن تبدیلات لورنتز، نظریه نسبیت خاص را مطرح نمود. او در نظریه‌اش جمع دیگری تعریف کرد که علی رغم وابستگی به تقارن، ساختاری گروهی ایجاد نمی‌کند. در واقع جمع اینشتین خاصیت شرکت‌پذیری را نداشت. در این نظریه همان گونه که ترکیب فضاهاي برداري و هندسه اقليدسي به پيدايش هندسه تحليلي منجر شد، ترکیب فضاهاي برداري چرخشي و هندسه هذلولوي به پيدايش هندسه هذلولوي تحليلي منجر شده است که کاربردهاي فراواني در نظریه نسبیت خاص دارد.

هر فرد آشنا با مقدمات جبرخطی می‌داند که تناظری بین یک شکل هندسی و مجموعه‌ای مناسب از بردارها در یک فضای‌برداری n بعدی حقیقی وجود دارد. این تناظر به ما اجازه می‌دهد که اشیاء هندسی را مانند ناحیه هایی ساخته شده از تعدادی تابع حقیقی روی $R^n$ در نظر بگیریم. حال این سوال مطرح می‌شود که آیا در هندسه هذلولوی هم چنین چیزی امکان پذیر است؟ در واقع هندسه تحلیلی تصویری جبری از هندسه اقلیدسی بوسیله‌ی مفهوم فضای برداری است. لذا این سوال به طور طبیعی مطرح می‌شود که کدام نظریه‌ی جبری نقش فضاهای برداری در هندسه‌ی هذلولوی را ایفا می‌کنند؟ ما در بخش های بعد به این سوال خواهیم پرداخت ولی در اینجا مایل هستیم کمی تاریخ این مسئله را مرور کنیم.

در سال‌های ۱۹۰۸ تا ۱۹۱۴، دوره‌ای که یک شکوفایی در نظریه‌ی نسبیت خاص تجربه شد، فیزیک‌دان و ریاضی‌دان کروات ولادیمیر واریچاک (۱۸۶۲ تا ۱۹۴۲)، استاد و رئیس دانشگاه زاگرب، نشان داد این نظریه یک تعبیر طبیعی در هندسه‌ی هذلولوی دارد. او در سال ۱۹۲۴ ادعا کرد که جبر برداری در هندسه‌ی هذلولوی امکان‌پذیر نیست. آبراهام اونگار

حدود ۸۰ سال بعد از واریچاک، نظریه ی فضاهای برداری چرخشی را در هندسه ی هذلولوی بعنوان جایگزینی برای نظریه فضاهای برداری در هندسه ی تحلیلی طرح نمود. اکنون با استفاده از نظریه ی فضاهای برداری چرخشی، به طور موثری هندسه‌ی هذلولوی بولیایی و لباچفسکی توسط بردارهای چرخشی تنظیم شده است همان گونه که هندسه اقلیدسی با فضاهای برداری تنظیم شده بود. این باید در این‌جا مورد اشاره قرار بگیرد که در کاربردهای نظریه‌ی نسبیت خاص، بردارهای چرخشی سرعت کاملاً شبیهِ بردارهای سرعت نیوتنی، بردارهای چرخشی سه‌بعدی هستند.

به طریقی مشابه فضاهای برداری که گروه‌های جابجایی از بردارها هستند که اجازه‌ی ضرب اسکالر را می‌دهند، فضاهای برداری چرخشی گروه‌های چرخشیِ چرخشی- جابجایی از بردارهای چرخشی هستند که ضرب اسکالر را می‌پذیرند. بر این اساس، جبر غیر شرکت‌پذیر فضاهای برداری چرخشی چارچوب ما برای هندسه‌ی تحلیلی هذلولوی است، دقیقاً مانند جبر شرکت‌پذیر فضاهای اقلیدسی که چارچوب هندسه‌ی تحلیلی اقلیدسی است. از طرف دیگر، فضاهای برداری چرخشی شامل فضاهای برداری به عنوان یک مورد خاص، تباهیده مطابق خودریختی‌های چرخشی بدیهی است. بنابراین رویکرد فضای برداری چرخشی، در واقع چارچوب نظریه‌ای برای متحد ساختن هندسه اقلیدسی و هذلولوی است.

هندسه‌ی تحلیلی اقلیدسی در بعد n، نقاط را با n- تایی‌های اعداد مدل می‌کند که یک فضای برداری n بعدی همراه با یک حاصل ضرب داخلی است که تابع فاصله‌ی اقلیدسی را شکل می‌دهد. به زبانی ساده، فضاهای برداری به طور جبری هندسه‌ی تحلیلی اقلیدسی را تنظیم می‌کند و به اصول جبر (شرکت‌پذیر) ساخته شده روی نقاط اجازه می‌دهد که اشیای هندسی اقلیدسی را اداره کند. به طور مشابه هندسه‌ی تحلیلی هذلولوی در ابعاد n، نقاط را با n- تایی‌های اعداد مدل می‌کند که یک فضای برداری چرخشیn- بعدی همراه با یک حاصل ضرب داخلی است که یک تابع فاصله‌ی هذلولوی را پدید می آورد. بر این اساس، فضاهای برداری چرخشی به طور جبری هندسه‌ی تحلیلی هذلولوی را تنظیم می‌کند و به اصول جبر (غیر شرکت‌پذیر) ساخته شده اجازه می‌دهد تا اشیای هندسه هذلولوی را اداره کند.

در حالی که هندسه‌ی اقلیدسی یک مدل استاندارد منحصربفرد دارد، هندسه‌ی هذلولوی با چند مدل استاندارد مطالعه شده‌است. ما در اینجا، هندسه‌ی تحلیلی هذلولوی را در سه مدل دو به دو یکریخت مطالعه می‌کنیم. هر کدام از این مدل ها مزایا و معایب خودش را دارد و برای مسئله های متفاوت می توان یکی از این مدل ها را انتخاب کرد. این سه مدل عبارتند از مدل گوی پوانکاره، مدل گوی بلترامی–کلاین و مدل فضای سرعت سره که به صورت خلاصه با PV نشان داده می شود. مدل فضای PV از هندسه‌ی هذلولوی همچنین به عنوان مدل فضای اونگار نیز شناخته می‌شود؛ زیرا فضاهای برداری چرخشی و گروه‌های چرخشی اونگار می‌توانند برای توصیف ساختارهای جبری سرعت سره نسبی نیز به کار روند.

یکی از وظایف هندسه‌دانی که علاقه‌مند به هندسه‌ی تحلیلی هذلولوی است، ساختن مدل‌های ریاضی و نظریه‌ای است که مطابق اصول دنیای فیزیک کوانتوم و نسبیت باشد و معیار برای قضاوت موفقیت هندسه‌ی تحلیلی هذلولوی در عامیت، سادگی، و زیبایی است.

## مراجع

1. G. Bol, Gewebe und Gruppen. (Topologische Fragen der Differentialgeometrie 65), *Math. Ann.* **114** (1937) 414-431.
2. R. H. Bruck, *A Survey of Binary Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1958.
3. A. A. Ungar, The relativistic velocity composition paradox and the Thomas rotation, *Found. Phys.* **19** (11) (1989) 1385-1396.
4. A. A. Ungar, Thomas rotation and the parametrization of the Lorentz transformation group, *Found. Phys. Lett.* **1** (1) (1988) 57-89.