کنفرانس فیزیک ریاضی ایران
۷ دی ماه ۱۳۹۶ – دانشگاه صنعتی قم
Iranian Conference on Mathematical Physics

به‌سازی کم‌کردن بی‌دررو جریان فرمیونی بی‌جِرم در فضازمان دوسیته ۳ بُعدی

باورساد، احسان؛ بت شکنان فرد، منیژه

دانشکده فیزیک، دانشگاه کاشان، کاشان

چکیده

در این مقاله، یک میدان فرمیونی بی‌جرم در یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه در فضازمان دوسیته ۳ بُعدی درنظر می‌گیریم. چشم‌داشتی خلأ ورودی عملگر جریان را به‌دست می‌آوریم. با به‌کار بردن روش به‌سازی کم‌کردن بی‌دررو، نشان می‌دهیم که واگرایی فرابنفش خطی حذف می‌شود و یک عبارت متناهی به‌دست می‌آید.

کلید واژه‌ها: *میدان فرمیون، فضازمان دوسیته، میدان الکتریکی زمینه، چشم‌داشتی عملگر جریان، به‌سازی کم‌کردن بی‌دررو*

Adiabatic subtraction regularization of massless fermionic current in 3D de Sitter spacetime

Bavarsad, Ehsan; Botshekananfard, Manizheh

Department of Physics, University of Kashan, Kashan

Abstract

In this paper, we consider a massless fermion field in a uniform electric field background in a 3 dimensional de Sitter spacetime. We obtain the in-vacuum expectation value of the current operator. Appling the adiabatic subtraction regularization scheme, we show that the linear ultraviolet divergence is removed and a finite expression obtain.

Keywords: *Fermion field, de Sitter spacetime, Electric field background, Expectation value of the current operator, Adiabatic subtraction regularization*

PACS No. 4,11,98

مقدمه

مساله بازبهنجارش در فضازمان تخت به‌خوبی دانسته شده است. اما در فضازمان خمیده به‌دلیل برهم‌کنش‌های گرانشی، واگرایی‌های جدیدی در محاسبه مقدار چشم‌داشتی کمیت‌های فیزیکی نمایان می‌شود. برای به‌سازی و بازبهنجارش کمیت‌های فیزیکی در فضای خمیده روش‌های گوناگونی توسعه داده شده است، برای آشنایی [۱] را ببینید. یکی از این روش‌ها کم‌کردن بی‌دررو است. در کارهای [۲] روش کم‌کردن بی‌دررو برای یک میدان فرمیون بدون برهم‌کنش الکترومغناطیسی در فضازمان‌های از نوع فریدمان–لومتر–رابرتسون–والکر توسعه داده شده است. در مرجع‌های [۳،٤] برای به‌سازی عملگر جریان رسانندگی میدان اسکالر جفت‌شده به یک میدان الکترومغناطیسی زمینه در فضازمان‌های دوسیته به‌ترتیب ٤ و ۳ بُعدی از این روش استفاده شده است. عملگر جریان میدان اسکالر در فضازمان دوسیته ۲ بُعدی به روش پائولی–ویلارز به‌سازی شده است [۵]. از به‌سازی کم‌کردن بی‌دررو برای حذف واگرایی فرابنفش و به دست آوردن یک عبارت متناهی برای مقدار چشم‌داشتی خلأ ورودی عملگر جریان رسانندگی الکتریکی یک میدان فرمیونی در فضازمان‌های دوسیته ۲ [٦] و ٤ [۷] بُعدی استفاده شده است. در این مقاله با هدف مطالعه بیشتر روش به‌سازی کم‌کردن بی‌دررو برای مورد میدان‌های فرمیونی، ما می‌خواهیم چشم‌داشتی خلأ ورودی عملگر یک میدان فرمیونی بی‌جِرم جفت‌شده به یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه در تکه پوانکاره فضازمان دوسیته ۳ بُعدی را محاسبه کرده و به روش کم‌کردن بی‌دررو به‌سازی کنیم.

چشم‌داشتی خلأ عملگر جریان

کنش یک میدان فرمیون $\psi(x)$ بی‌جرم جفت‌شده به یک میدان الکترومغناطیسی $A_\mu(x)$ در فضازمان دوسیته ۳ بُعدی را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$S=\int d^3x\sqrt{|g|}\,\bar{\psi}\,\Gamma^\mu i\left(\partial_\mu+B_\mu+ieA_\mu\right)\psi, \tag{۱}$$

به‌گونه‌ای که e بار الکتریکی است. ما میدان‌های گرانشی و الکترومغناطیسی را به‌صورت میدان‌های زمینه درنظر می‌گیریم و تنها میدان فرمیون را کوانتیده خواهیم کرد. متریک فضازمان دوسیته ۳ بُعدی در مختصات همدیس تخت را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم

$$\begin{gathered}ds^2=\Omega^2(\tau)\left(d\tau^2-d\mathbf{x}^2\right),\\ \tau\in(-\infty,0),\quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2,\quad \Omega(\tau)=\frac{-1}{\tau H},\end{gathered} \tag{۲}$$

به‌گونه‌ای که H ثابت هابل است. ماتریس‌های دیراک و هم‌وستارهای اسپینی در مختصات (۲) به‌صورت زیر داده می‌شوند

$$\begin{gathered}\Gamma^0=\Omega^{-1}\sigma_1,\quad \Gamma^1=i\,\Omega^{-1}\sigma_2,\quad \Gamma^2=i\,\Omega^{-1}\sigma_3,\\ B_\mu=\frac{1}{2}H\,\Omega\left(\sigma_2\delta_\mu^2-\sigma_3\delta_\mu^1\right),\end{gathered} \tag{۳}$$

به‌گونه‌ای که $\sigma_{1,2,3}$ ماتریس‌های پائولی هستند. برای توصیف یک میدان الکتریکی یکنواخت در مختصات همدیس تخت (۲) پتانسیل برداری الکترومغناطیسی را در پیمانه زیر می‌نویسیم

$$A_\mu(x)=-\frac{E}{H^2\tau}\delta_\mu^1, \tag{٤}$$

به‌گونه‌ای که E یک مقدار ثابت است. معادله دیراک از کنش (۱) خوانده می‌شود. مُد اسپینورهای معادله دیراک که در زمان‌های آغازی $\tau\to-\infty$ دارای رفتاری مجانبی موج تخت هستند و خلأ هادامارد ورودی را توصیف می‌کنند، برای اسپینورهای فرکانس مثبت با تکانه همراه $\mathbf{k}$ به‌صورت زیر داده می‌شوند [۸]

$$\begin{gathered}\eta_1=e^{+i\mathbf{k}.\mathbf{x}}e^{\frac{i\kappa\pi}{2}}\sqrt{\frac{\gamma+\kappa}{2\gamma}}W_{\kappa,\gamma-\frac{1}{2}}(\mathrm{z}),\\ \eta_2=e^{+i\mathbf{k}.\mathbf{x}}e^{\frac{i\kappa\pi}{2}}\sqrt{\frac{\gamma-\kappa}{2\gamma}}W_{\kappa,\gamma+\frac{1}{2}}(\mathrm{z}),\end{gathered} \tag{۵}$$

به‌گونه‌ای که W تابع ویتاکر و زیرنویس $1,2$ نشان دهنده شاخص مولفه اسپینوری است. کمیت‌های بی‌بُعد به‌صورت زیر تعریف شده‌اند

$$\begin{gathered}k=|\mathbf{k}|,\quad z=+2ik\tau,\quad r=\frac{k_x}{k},\\ \lambda=\frac{eE}{H^2},\quad \kappa=i\lambda r,\quad \gamma=i\lambda.\end{gathered} \tag{٦}$$

با استفاده از مُد اسپینورهای (۵) می‌توان نشان داد که تنها چشم‌داشتی مولفه جریان رسانندگی فرمیونی در راستای میدان الکتریکی زمینه، غیرصفر است و به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$J=e\,\Omega(\tau)^{-2}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\left(\eta_1\eta_1^*-\eta_2\eta_2^*\right). \tag{۷}$$

اکنون به محاسبه جمله شامل $\eta_1\eta_1^*$ می‌پردازیم جمله دیگر نیز به‌طور مشابه محاسبه می‌شود. با جای‌گذاری از معادله (۵) در معادله (۷) خواهیم داشت

$$J=\frac{eH^2}{4\pi^2}\int_{-1}^{+1}\frac{(1+\mathrm{r})dr}{\sqrt{1-r^2}}e^{-\pi\lambda r}\int_0^\Lambda dp\,p\,|W_{\kappa,\gamma-\frac{1}{2}}(-2ip)|^2, \tag{۸}$$

به‌گونه‌ای که تعریف کرده‌ایم $p=-k\tau$ و Λ یک قطع‌بالا تکانه و برای مناسب بودن آن تعریف شده است. برای محاسبه انتگرال (۸) از روشی که در ارجاع‌های [۳،۵] برای محاسبه جریان رسانندگی میدان اسکالر در فضازمان‌های دوسیته به‌ترتیب ٤ و ۲ بُعدی معرفی شده است استفاده می کنیم. با استفاده از نمایش انتگرالی ملین–برنز توابع ویتاکر انتگرال سمت راست معادله (۸) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$J=\frac{eH^2}{4\pi^2}\int_{-1}^{+1}\frac{(1+r)dr}{\sqrt{1-r^2}}\mathcal{I}, \tag{۹}$$

به‌گونه‌ای

$$\begin{gathered}\mathcal{I}=C\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{ds}{(2\pi i)}\{\Gamma(i\lambda+s)\Gamma(1-i\lambda+s)\\ \times\Gamma(-i\lambda r-s)\}\times\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{dt}{(2\pi i)}f(t),\end{gathered} \tag{۱۰}$$

به‌گونه‌ای که C یک ضریب وابسته به پارامترهای λ,r و تابع $f(t)$ داده می‌شود

$$\begin{gathered}f(t)=e^{\frac{i\pi}{2}(s-t)}\Gamma(-\mathrm{i}\lambda+t)\Gamma(1+\mathrm{i}\lambda+t)\Gamma(\mathrm{i}\lambda r-t)\\ \times2^{-s-t}\times\int_0^\Lambda p^{-s-t+1}dp,\end{gathered} \tag{۱۱}$$

برای صفر شدن جواب انتگرال p در حد $p\to0$ فرض می‌کنیم که پربندها همواره شرط $\mathrm{Re}(s)<1, \mathrm{Re}(t)<1$، را برآورده کنند. با درنظر گرفتن تابع $f(t)$، می‌توان نشان داد که $\Gamma(1+i\lambda+t)\Gamma(-i\lambda+t)$ قطب‌های $t_L=-n+i\lambda,-n-1-i\lambda$

و $t_R = n + i\lambda r$ قطب‌های $\Gamma(\mathrm{i}\lambda r - t)$ هستند، به‌گونه‌ای که $n = 0,1,2,\ldots$. پربند انتگرال گیری قطب‌های t_R را از قطب‌های t_L جدا می‌کند. اکنون فرض می‌کنیم که پربند انتگرال s افزون‌بر شرط $\mathrm{Re}(s) < 1$، شرط $\mathrm{Re}(s) > -1$ را نیز برآورده کند. ازاین‌رو، تنها قطب‌های ساده $t_R = i\lambda r, 1+i\lambda r, 2+i\lambda r, 2-s,$ دارای مانده غیرصفر در حد $\Lambda \to \infty$ هستند. ما انتخاب می‌کنیم که پربند انتگرال t را در نیم‌صفحه راست ببندیم. پس از کمی محاسبه جبری به‌دست خواهیم آورد

$$\mathcal{I} = C\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{ds}{(2\pi i)}\Gamma(i\lambda+s)\Gamma(1-i\lambda+s)\Gamma(-i\lambda r-s) \times\left(\mathcal{I}_{\mathrm{dep}}(r,s,\Lambda)+\mathcal{I}_{\mathrm{ind}}(r,s)\right), \qquad (۱۲)$$

به‌گونه‌ای که $\mathcal{I}_{\mathrm{dep}}$ سهم مانده‌هایی است که مقدار آنها به قطع‌تکانه Λ وابسته است و $\mathcal{I}_{\mathrm{ind}}$ سهم مانده‌هایی است که مقدار آنها به قطع‌تکانه Λ وابسته نیست. می‌توان نشان داد که $s_L = -n - i\lambda, -n-1+i\lambda$ قطب‌های $\Gamma(i\lambda+s)\Gamma(1-i\lambda+s)$ و $s_R = n - i\lambda r$ قطب‌های $\Gamma(-i\lambda r - s)$ هستند، به‌گونه‌ای که $n = 0,1,2,\ldots$. پربند انتگرال‌گیری قطب‌های s_R را از قطب‌های s_L جدا می‌کند. برای محاسبه جمله شامل $\mathcal{I}_{\mathrm{dep}}$ در معادله (۱۲) انتخاب می‌کنیم که پربند انتگرال s را در نیم‌صفحه راست ببندیم. از این‌رو تنها قطب‌های $s_R = -i\lambda r, 1-i\lambda r, 2-i\lambda r,$ دارای مانده غیرصفر در حد $\Lambda \to \infty$ هستند. برای محاسبه جمله $\mathcal{I}_{\mathrm{ind}}$ در معادله (۱۲) انتخاب می‌کنیم که پربند انتگرال‌گیری در نیم‌صفحه چپ بسته شود. پس از کمی محاسبه جبری و محاسبه انتگرال r در معادله (۹) سرانجام مقدار چشم‌داشتی به‌سازی نشده عملگر جریان به‌دست می‌آید

$$J = \frac{eH^2}{4\pi^2}\left(\pi\lambda\Lambda + \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2\right), \qquad (۱۳)$$

به‌گونه‌ای که

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_1 &= \frac{\pi}{4}[-3i\lambda - 2(\lambda^2+1)\coth(2\pi\lambda) \\ &+ 2(-2\lambda^2+1)\mathrm{csch}(2\pi\lambda)I_0(2\pi\lambda) \\ &+ 6(\frac{1}{\pi}+i)\lambda\,\mathrm{csch}(2\pi\lambda)I_1(2\pi\lambda)],\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_2 &= \frac{3\lambda^2}{2\sinh(2\pi\lambda)}\int_{-1}^{1}dr\,r\sqrt{1-r^2}\{(\mathrm{e}^{-2\pi\lambda r}-\mathrm{e}^{-2\pi\lambda}) \\ &\times\psi(i\lambda - i\lambda\mathrm{r}) + (\mathrm{e}^{2\pi\lambda}-\mathrm{e}^{-2\pi\lambda r})\psi(-i\lambda - i\lambda\mathrm{r})\},\end{aligned}$$

به‌گونه‌ای که I_0, I_1 تابع‌های بِسل تعدیل یافته به‌ترتیب مرتبه صفر و یک هستند و ψ تابع دیگاما است.

به‌سازی کم‌کردن بی‌دررو

چون خلأ ورودی هادامارد است [۵] انتظار داشتیم که یک واگرایی فرابنفش خطی در مقدار چشم‌داشتی جریان فرمیونی نمایان شود. برای حذف این واگرایی از به‌سازی کم‌کردن بی‌دررو استفاده می‌کنیم. از این روش پیش از این برای به‌سازی مسئله‌های هم‌ارز مسئله ما در فضازمان‌های دوسیته ۲ [۶] و ٤ [۷] بُعدی استفاده شده است. ما برای به‌سازی جریان (۱۳) فرآیندی مانند آنچه در مرجع‌های [٦،۷] استفاده شده است را پیش می‌گیریم. از معادله دیراک برای مُد اسپینورهای فرکانس مثبت که از کنش (۱) به‌دست می‌آید، آغاز می‌کنیم

$$\begin{aligned}&[\partial_0^2 + \omega^2 - i(-1)^s\sigma]\chi_s(x) = 0, \\ &\omega = +\sqrt{k^2 + 2\lambda H\Omega kr + \lambda^2H^2\Omega^2}, \\ &\sigma = \lambda H^2\Omega^2,\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

به‌گونه‌ای که $s = 1,2$ شاخص مولفه اسپینوری است. جواب معادله دیراک (۱۵) را به‌صورت یک جواب از نوع WKB درنظر می‌گیریم

$$\chi_s(\tau) = \exp\left(-i\int d\tau(X_s + Y_s)\right), \qquad (۱۶)$$

به‌گونه‌ای که X_s, Y_s تابع‌هایی حقیقی از زمان همدیس τ هستند. با جای‌گذاری جواب (۱٦) در معادله دیراک (۱۵) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&X_s^2 - Y_s^2 - \dot{Y}_s - \omega^2 = 0, \\ &\dot{X}_s + 2X_sY_s + (-1)^s\sigma = 0.\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

با حل معادله (۱۷) به‌دست می‌آوریم

$$\chi_s = N_s X_s^{\frac{-1}{2}}\exp\left(-i\int d\tau(X_s - i(-1)^s\frac{\sigma}{2X_s}\right), \qquad (۱۸)$$

به‌گونه‌ای که N_s یک ضریب بهنجارش است. در شرایط بی‌دررو فرض می‌کنیم که میدان‌های گرانشی و الکترومغناطیسی زمینه کُندتغییر باشند. از این‌رو بسط بی‌دررو، یک بسط برحسب درجه مشتق‌های متریک است. در مرتبه صفر بی‌دررو، از جمله‌های مشتق در معادله (۱۷) چشم‌پوشی می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$Y_s = \frac{(-1)^{s+1}\sigma}{2X_s}, \quad X_s = \omega\left(1 + \mathcal{O}(\omega^{-2})\right). \qquad (۱۹)$$

اکنون تابع کمکی $F_k(\tau)=\omega\dot{\omega}/\sigma$ را تعریف می‌کنیم. می‌توان نشان داد که این تابع رابطه زیر را برآورده می‌کند

$$\frac{d}{d\tau}\left[\log\left(\omega+F_k\right)\right]=\frac{\sigma}{\omega}. \qquad (۲۰)$$

با جای‌گذاری معادله‌های (۱۹) و (۲۰) در معادله (۱۸) به‌دست می‌آوریم

$$\chi_s=N_s\omega^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{\omega(\sigma+\dot{\omega})}{\sigma}\right)^{\frac{(-1)^{s+1}}{2}}\exp\left(-i\int d\tau\omega(\tau)\right). \qquad (۲۱)$$

برای محاسبه کانترترم، نیاز داریم ضریب‌های بهنجارش N_s در معادله (۲۱) مشخص باشند. ما شرط بهنجارش را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم

$$\chi_1\chi_1^*+\chi_2\chi_2^*=1. \qquad (۲۲)$$

در ادامه خواهیم دید که برای محاسبه کانترترم تنها به نسبت χ_2/χ_1 نیاز داریم که از ضریب‌های بهنجارش مستقل است. برای به‌دست آوردن این نسبت جواب مرتبه صفر بسط بی‌دررو که در معادله (۲۱) داده شده است را در معادله دیراک جای‌گذاری می‌کنیم

$$\left[\sigma_1\partial_0-\sigma_2(\lambda H\Omega+k_x)-\sigma_3k_y\right]\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix}=0, \qquad (۲۳)$$

و خواهیم داشت

$$\mathcal{K}\equiv\frac{\chi_2}{\chi_1}=\frac{i(\omega+kr+\lambda H\Omega)}{k\sqrt{1-r^2}}. \qquad (۲۴)$$

با استفاده از مُد اسپینورهای (۲۱) می‌توان مقدار چشم‌داشتی عملگر جریان را تا مرتبه صفر بسط بی‌دررو به‌صورت زیر نوشت

$$J_{\text{adi}}=e\Omega(\tau)^{-2}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\left(\chi_1\chi_1^*-\chi_2\chi_2^*\right). \qquad (۲۵)$$

با استفاده از رابطه بهنجارش اسپینورها که در معادله (۲۲) داده شده است و معادله (۲۴)، می‌توان انتگرال معادله (۲۵) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$J_{\text{adi}}=\frac{eH^2}{2\pi^2}\int_{-1}^{+1}\frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}\int_0^{\Lambda}p\left(\frac{1-\mathcal{K}\mathcal{K}^*}{1+\mathcal{K}\mathcal{K}^*}\right)dp. \qquad (۲۶)$$

پس از جای‌گذاری شکل صریح $\mathcal{K}$ از سمت راست معادله (۲۴) به‌دست می‌آوریم

$$J_{\text{adi}}=\frac{eH^2}{4\pi}\lambda\Lambda. \qquad (۲۷)$$

بنابر روش به‌سازی کم‌کردن بی‌دررو، باید کانترترم (۲۷) را از مقدار چشم‌داشتی به‌سازی نشده (۱۳) کم کنیم. سرانجام یک عبارت متناهی فیزیکی برای مقدار چشم‌داشتی جریان فرمیونی به‌دست می‌آوریم

$$J_{\text{reg}}=J-J_{\text{adi}}=\frac{eH^2}{4\pi^2}(\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2). \qquad (۲۸)$$

نتیجه گیری

در این مقاله یک میدان فرمیون بی‌جِرم باردار در یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه را در تِکه پوانکاره فضازمان دوسیته ۳ بُعدی درنظر گرفتیم. چشم‌داشتی عملگر جریان رسانندگی الکتریکی را در حالت خلأ ورودی که هادامارد است محاسبه کردیم، معادله (۱۳) را ببینید. برای به‌سازی مقدار چشم‌داشتی جریان از روش کم‌کردن بی‌دررو استفاده کردیم. ما نشان دادیم که بسط مرتبه صفر بی‌دررو چشم‌داشتی جریان برای حذف واگرایی فرابنفش خطی کافی است و یک عبارت متناهی فیزیکی برای جریان رسانندگی فرمیون به‌دست می‌آید، معادله (۲۸) را ببینید.

مرجع ها

1. L. E. Parker and D. J. Toms, "*Quantum Field in curved space*," Cambridge University Press, Cambridge, UK (2009).
2. S. Ghosh, *Phys. Rev. D* **91**, 124075 (2015); S. Ghosh, *Phys. Rev. D* **93**, 044032 (2016); A. Landete, J. Navarro-Salas and F. Torrenti, *Phys. Rev. D* **88**, 061501 (2013); A.Landete, J. Navarro-Salas and F. Torrenti, *Phys. Rev. D* **89**, 044030 (2014).
3. T. Kobayashi and N. Afshordi, *JHEP* **1410**, 166 (2014).
4. E. Bavarsad, C. Stahl and S. S. Xue, *Physics .Rev. D* **94**, 104011 (2016).
5. M. B. Frob, J. Garriga, S. Kanno, M. Sasaki, J. Soda, T. Tanaka and A. Vilenkin, *JCAP* **1404**, 009 (2014).
6. C. Stahl, E. Strobel, and S. S. Xue, *Phys. Rev. D* **93**, 025004 (2016).
7. T. Hayashinka, T. Fujita and J. Yokoyama, *JCAP* **1607**, 010 (2016).
8. طیبه سعیدی، *"مطالعه اثر شوینگر در فضازمان دوسیته ۳-بُعدی،"* پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه کاشان، کاشان (۱۳۹۵).