کنفرانس فیزیک ریاضی ایران
۷ دی ماه ۱۳۹۶ – دانشگاه صنعتی قم
Iranian Conference on Mathematical Physics

تریس تانسور انرژی–تکانه میدان اسکالر در یک میدان الکتریکی در فضازمان دوسیته ۲ بُعدی

باورساد، احسان؛ سجادی‌نیا، زهرا

دانشکده فیزیک، دانشگاه کاشان، کاشان

چکیده

در این مقاله تریس تانسور انرژی–تکانه میدان اسکالر در یک میدان الکتریکی زمینه در فضازمان دوسیته ۲ بُعدی بررسی می‌شود. با به‌کاربردن روش به‌سازی کم‌کردن بی-دررو واگرایی فرابنفش لگاریتمی حذف می‌شود و یک نتیجه متناهی به‌دست می‌آید. ما یافته‌ایم که برای ذرات اسکالر سبک تریس تغییر علامت می‌دهد. ما رفتار تریس را برای قلمروهای حدی گوناگون جرم اسکالر و میدان الکتریکی زمینه بررسی می‌کنیم.

کلید واژه‌ها: فضازمان دوسیته، میدان اسکالر، میدان الکتریکی زمینه، تریس تانسور–انرژی تکانه، به‌سازی کم‌کردن بی‌دررو

Trace of energy-momentum tensor of scalar field in an electric field in 2D de Sitter spacetime

Bavarsad, Ehsan; Sajadi Nia, Zahra

Department of Physics, University of Kashan, Kashan

Abstract

In this paper, the trace of the energy-momentum tensor of scalar field in an electric field background in a 2 dimensional de Sitter spacetime is investigated. Applying adiabatic subtraction regularization scheme the logarithmic ultraviolet divergence is removed and a finite result will be obtained. We find that for the light scalar field case the trace changes the sign. We investigate the behavior of the trace in the limiting regimes of the scalar field mass and the electric field background intensities.

Keywords: de Sitter spacetime, Scalar field, Electric field background, Trace of energy-momentum tensor, Adiabatic subtraction regularization
PACS No. 4,11,98

مقدمه

فرآیند تولید ذره در فضازمان دوسیته، به‌عنوان یک جهان فریدمان–لومتر–رابرتسون–والکر در حال انبساط، در چند دهه گذشته به‌خوبی مطالعه شده است، برای نمونه تانسور انرژی–تکانه ذرات خلق شده در مرجع [۱] مطالعه شده است. می‌دانیم که در دوره تورم میدان‌های الکترومغناطیسی قوی تولید شدند [۲]. از این‌رو، مطالعه تولید زوج در یک میدان الکتریکی زمینه در فضازمان دوسیته، به‌دلیل کاربردهای آن در حل و فهم مسایل کیهانشناسی، در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. در مرجع‌های [۳،۴،۵] جریان رسانندگی الکتریکی میدان اسکالر در فضازمان‌های دوسیته به‌ترتیب ۲، ۳ و ۴ بُعدی مطالعه شده است. در آن کارها نویسندگان نشان داده‌اند که برای مورد یک میدان اسکالر سبُک در حد میدان الکتریکی ضعیف با کاهش میدان الکتریکی جریان افزایش می‌یابد که به نام پدیده فَرارسانندگی فروسرخ شناخته شده است. مشاهده چنین پدیده‌های نویی در رفتار جریان، ما را تشویق کرده است که در این زمینه، رفتار دیگر کمیت‌های فیزیکی را نیز مطالعه کنیم. در این مقاله، ما می‌خواهیم رفتار تریس تانسور انرژی–تکانه را مطالعه کنیم. در مرجع [۴]

تانسور انرژی–تکانه زوج‌های اسکالر خلق شده در یک میدان الکتریکی زمینه در فضازمان دوسیته در شرایط شبه‌کلاسیک که رابطه زیر برقرار است مطالعه شده است

$$\frac{m^2}{H^2}+\frac{(eE)^2}{H^4}\gg 1, \qquad (۱)$$

به گونه‌ای که m جرم میدان اسکالر، e بار الکتریکی آن، E میدان الکتریکی زمینه و H ثابت هابل است. به‌طور روشن‌تر، در این مقاله ما می‌خواهیم چشم‌داشتی به‌سازی‌شده خلأ ورودی تریس تانسور انرژی–تکانه میدان اسکالر در یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه در فضازمان دوسیته ۲ بُعدی را بدون درنظرگرفتن فرض (۱) محاسبه کنیم. در مرجع [۶] تریس تانسور انرژی–تکانه میدان اسکالر در یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه در فضازمان دوسیته ۳ بُعدی، بدون درنظرگرفتن فرض (۱) محاسبه شده است.

چشم‌داشتی به‌سازی‌شده تریس تانسور انرژی–تکانه

کنش میدان اسکالر جفت‌شده به یک میدان الکترومغناطیسی در فضازمان دوسیته ۲ بُعدی را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$S=\int d^2x\sqrt{|g|}\{g^{\mu\nu}(\partial_\mu+ieA_\mu)\varphi \times(\partial_\nu-ieA_\nu)\varphi^*-(m^2+\xi R)\varphi\varphi^*\}, \qquad (۲)$$

به‌گونه‌ای که متریک فضازمان دوسیته ۲ بُعدی خوانده می‌شود

$$ds^2=\Omega^2(\tau)(d\tau^2-d\mathrm{x}^2), \quad \tau\in(-\infty,0), \quad \mathrm{x}\in\mathbb{R}, \quad \Omega(\tau):=-\frac{1}{H\tau}, \qquad (۳)$$

به‌گونه‌ای که ξ یک ثابت جفت‌شدگی بی‌بُعد میدان اسکالر به خمش اسکالر فضازمان دوسیته ۲ بُعدی $R=2H^2$ است. ما در این مقاله برای سادگی فرض می‌کنیم $\xi=0$ باشد. برای توصیف یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه پتانسیل برداری را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$A_\mu=-\frac{E}{H^2\tau}\delta^1_\mu. \qquad (۴)$$

معادله کلاین–گردُون از کنش (۲) خوانده می‌شود. می‌توان نشان داد که توابع مُد دارای رفتار موج تخت در زمان‌های آغازی $\tau\to-\infty$، به‌ترتیب برای فرکانس‌های مثبت و منفی داده می‌شوند

$$U_{\mathrm{in}}(x)=(2k)^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{i\pi\kappa}{2}}e^{ik_x\mathrm{x}}W_{\kappa,\gamma}(z),$$
$$V_{\mathrm{in}}(x)=(2k)^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{-i\pi\kappa}{2}}e^{-ik_x\mathrm{x}}W_{\kappa,\gamma}(-z), \qquad (۵)$$

به‌گونه‌ای که W تابع ویتاکر است و کمیت‌های بی‌بُعد به‌صورت زیر تعریف شده‌اند

$$k=|k_x|, \quad z=2ik\tau, \quad r=\frac{k_x}{k}, \quad \lambda=-\frac{eE}{H^2}, \quad \mu=\frac{m}{H}, \quad \kappa=-i\lambda r, \quad \gamma=\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda^2-\mu^2}. \qquad (۶)$$

عملگر میدان اسکالر برحسب مجموعه کامل توابع مُد متعامدبهنجار (۵) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk_x}{(2\pi)}\left[U_{\mathrm{in}}(x)a_{\mathrm{in}k_x}+V_{\mathrm{in}}(x)b^\dagger_{\mathrm{in}k_x}\right], \qquad (۷)$$

به‌گونه‌ای که عملگرهای خلق $b^\dagger$ و فنا a در رابطه‌های جابجایی زیر صدق می‌کنند

$$[a_{\mathrm{in},k_x},a^\dagger_{\mathrm{in},k_x}]=[b_{\mathrm{in},k_x},b^\dagger_{\mathrm{in},k_x}]=(2\pi)\delta(k_x-k_x^{'}), \qquad (۸)$$

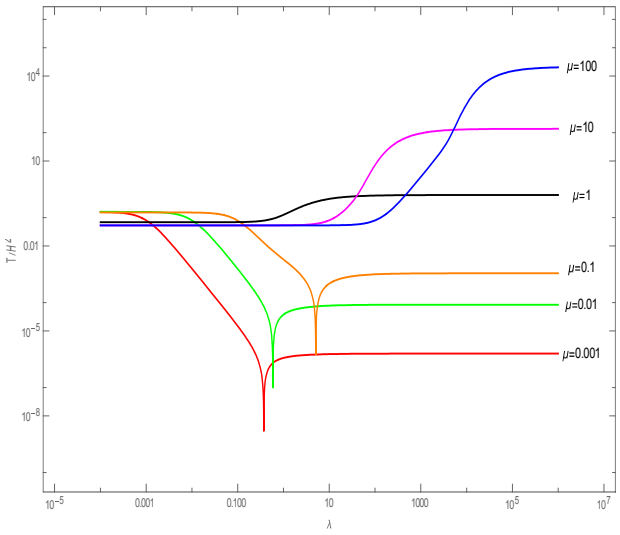
و حالت خلأ ورودی نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$a_{\mathrm{in},k_x}|\mathrm{in}\rangle=0, \quad \forall k_x. \qquad (۹)$$

با استفاده از کنش (۲) برای تعریف تانسور انرژی–تکانه و پس از جای‌گذاری عملگر میدان اسکالر (۷) و استفاده از معادله‌های (۸،۹) می‌توان نشان داد که چشم‌داشتی خلأ ورودی تریس تانسور انرژی–تکانه با عبارت انتگرالی زیر داده می‌شود

$$\langle\mathrm{in}|T|\mathrm{in}\rangle=\frac{H^2\mu^2}{2\pi}\sum_{r=\pm1}\int_0^\Lambda\frac{dp}{p}e^{\pi\lambda r}\left|W_{\kappa,\gamma}(-2ip)\right|^2, \qquad (۱۰)$$

به‌گونه‌ای که $p=-k\tau$ و Λ یک قطع‌بالا تکانه است که به‌دلیل مناسب بودن آن تعریف شده است. با استفاده از روشی که در مرجع‌های [۳،۵] برای محاسبه انتگرال تکانه جریان رسانندگی در فضازمان‌های دوسیته به‌ترتیب ۲ و ۴ بُعدی معرفی شده است، انتگرال تکانه سمت راست معادله (۱۰) محاسبه می‌شود. به‌طور مشخص اگر از نمایش ملین–برنز تابع ویتاکر استفاده کنیم و پربند انتگرال‌گیری را مانند مرجع [۵] درنظر بگیریم، به‌دست خواهیم آورد



شکل۱: تریس بهسازی شده تانسور انرژی-تکانه T/H^2 بهصورت تابعی از میدان الکتریکی λ برای مقدارهای گوناگون جرم میدان اسکالر μ رسم شده است.

$$\langle \text{in}|T|\text{in}\rangle = \frac{H^2\mu^2}{4\pi}[4\log(2\Lambda) - 2i\pi + i\csc(2\pi\gamma)\sum_{r=\pm1}\{(e^{2\pi i\gamma}+e^{2\pi\lambda r})\psi(\frac{1}{2}+\gamma+i\lambda r) - (e^{-2\pi i\gamma}+e^{2\pi\lambda r})\psi(\frac{1}{2}-\gamma+i\lambda r)\}], \quad (۱۱)$$

به‌گونه‌ای که ψ تابع دیگاما است. جزییات محاسبه برای بهدست آوردن نتیجه (۱۱) در مرجع [۷] آورده شده است. برای بهدست آوردن نتیجه (۱۱) فرض شبه‌کلاسیک (۱) درنظر گرفته نشده است، بنابراین بسته به مقدار پارامترهای μ,λ، در عبارت (۱۱) پارمتر γ می‌تواند حقیقی یا موهومی محض باشد، معادله (۶) را ببینید. چشم‌داشتی خلأ ورودی تریس، دارای یک واگرایی لگاریتمی است. برای حذف این واگرایی لگاریتمی از روش به‌سازی کم‌کردن بی‌دررو استفاده می‌کنیم. برای این منظور توابع مُد را به‌صورت یک جواب از نوع WKB درنظر می‌گیریم

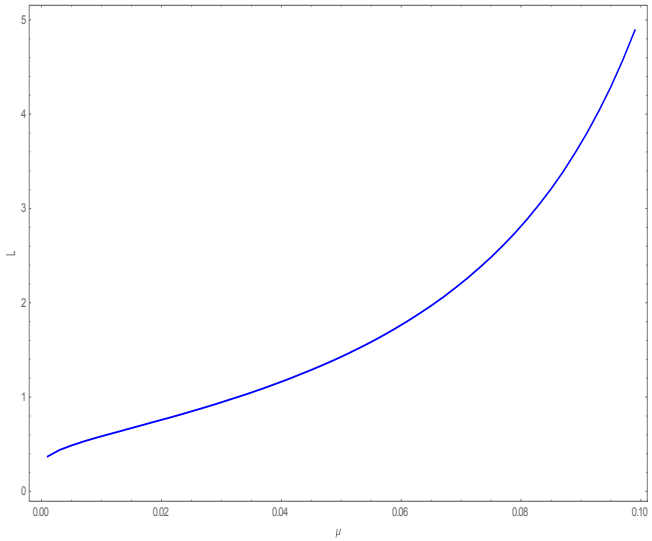
$$U_A = (2\omega_0(\tau))^{\frac{-1}{2}}\exp[ik_x x - i\int d\tau\omega_0(\tau)], \quad (۱۲)$$

به‌گونه‌ای که فرکانس وابسته به زمان همدیس داده می‌شود با

$$\omega_0(\tau) = -\tau^{-1}\sqrt{k^2\tau^2 + 2\lambda k_x\tau + \mu^2 + \lambda^2}. \quad (۱۳)$$

با استفاده از توابع مُد (۱۲)، چشم‌داشتی تریس را بهدست می‌آوریم

$$T_A = 2m^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk_x}{(2\pi)}|U_A|^2 = \frac{H^2\mu^2}{\pi}\log\left(\frac{2\Lambda}{\mu}\right). \quad (۱۴)$$



شکل۲: اندازه میدان الکتریکی L که به‌ازای آن تریس تغییر علامت می‌دهد به‌صورت تابعی از جرم میدان اسکالر μ رسم شده است.

بنابر روش به‌سازی کم‌کردن بی‌دررو، پس از کم کردن معادله (۱۴) از معادله (۱۱) عبارت به‌سازی شده و متناهی زیر را برای تریس بهدست می‌آوریم

$$T = \langle \text{in}|T|\text{in}\rangle - T_A = \frac{H^2\mu^2}{4\pi}\sum_{r=\pm1}[-2i\pi + 2\log(\mu^2) + i\csc(2\pi\gamma)\{(e^{2\pi i\gamma}+e^{2\pi\lambda r})\psi(\frac{1}{2}+\gamma+i\lambda r) - (e^{-2\pi i\gamma}+e^{2\pi\lambda r})\psi(\frac{1}{2}-\gamma+i\lambda r)\}], \quad (۱۵)$$

تأکید می‌کنیم که وجود جمله $-2i\pi$ در سمت راست معادله (۱۵) برای بهدست آمدن یک مقدار حقیقی برای T لازم است. در شکل ۱ عبارت تریس بهسازی شده (۱۵) بهصورت تابعی از میدان الکتریکی برای مقدارهای گوناگون جرم میدان اسکالر رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد که برای ذرات اسکالر سبُک $\mu \ll 1$، تریس تغییر علامت می‌دهد اما برای ذرات اسکالر سنگین $\mu \gg 1$ تغییر علامت تریس رخ نمی‌دهد. در شکل ۲ اندازه میدان الکتریکی L که در آن تغییر علامت تریس رخ می‌دهد بهصورت تابعی از جرم میدان اسکالر رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش جرم میدان اسکالر اندازه میدان الکتریکی L نیز افزایش می‌یابد.

شکل ۱ نشان می‌دهد در قلمرو میدان الکتریکی قوی که رابطه $\lambda \gg \max(1,\mu)$ برقرار است، تریس از میدان الکتریکی مستقل می‌شود و برای اسکالرهای سنگین‌تر، بزرگتر است. رفتار تریس در این قلمرو، با گرفتن حد $\lambda \to \infty$ در عبارت تریس (۱۵) مشخص می‌شود. می‌توان نشان داد که در این قلمرو جمله پیشتاز به‌دست می‌آید

$$T \simeq \frac{\mu^2 H^2}{\pi}[\log(\mu) - \psi(\frac{1}{2}) + \frac{\pi}{8\lambda}\log(2\lambda)], \qquad (۱۶)$$

که با رفتار نشان داه شده در شکل ۱ سازگار است. در حد میدان اسکالر سبُک $\mu \ll 1$ و میدان الکتریکی ضعیف $\lambda \ll 1$، که قلمرو فروسرخ نامیده می‌شود، ما نشان داده‌ایم که رفتار تریس (۱۵) به‌صورت زیر داده می‌شود

$$T \simeq \frac{H^2\mu^2}{2\pi(\mu^2+\lambda^2)}, \qquad (۱۷)$$

بنابراین در این قلمرو، با کاهش میدان الکتریکی تریس افزایش می‌یابد. این پدیده در جریان رسانندگی الکتریکی نیز رخ می‌دهد و فرارسانندگی فروسرخ نامیده شده است. شکل ۱ نشان می‌دهد که در حد میدان الکتریکی صفر تریس به یک مقدار ناصفر که برای اسکالر سنگین‌تر کوچکتر است، میل می‌کند. با گرفتن حد $\lambda \to 0$ در عبارت تریس (۱۵) می‌توان نشان داد که جمله پیشتاز برای مورد اسکالر سنگین $\mu \gg 1$ به‌دست می‌آید

$$T \simeq \frac{H^2}{6\pi}, \qquad (۱۸)$$

و برای مورد اسکالر سبُک $\mu \ll 1$ می‌شود

$$T \simeq \frac{H^2}{2\pi}. \qquad (۱۹)$$

نتیجه‌گیری

در این مقاله چشم‌داشتی خلأ ورودی میدان اسکالر در یک میدان الکتریکی زمینه در فضازمان دوسیته ۲ بُعدی محاسبه شده است که دارای یک واگرایی فرابنفش لگاریتمی است، معادله (۱۱) را ببینید. با بکاربردن روش به‌سازی کم‌کردن بی‌دررو، یک مقدار متناهی برای تریس به‌دست آورده‌ایم که در معادله (۱۵) داده شده است. در شکل ۱ تریس به‌سازی شده (۱۵) به‌صورت تابعی از میدان الکتریکی برای مقدارهای گوناگون جرم میدان اسکالر رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد که برای ذرات اسکالر سبُک تریس تغییر علامت می‌دهد. در شکل ۲ اندازه میدان الکتریکی که در آن تغییر علامت تریس رخ می‌دهد را به‌صورت تابعی از جرم میدان اسکالر رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش جرم میدان اسکالر اندازه میدان الکتریکی نیز افزایش می‌یابد. در قلمرو میدان الکتریکی قوی تریس از میدان الکتریکی مستقل می‌شود و برای اسکالرهای سنگین‌تر، بزرگتر است، معادله (۱۶) را ببینید. ما نشان داده‌ایم که برای مورد میدان اسکالر سبُک در میدان الکتریکی ضعیف، که قلمرو فروسرخ نامیده می‌شود، با کاهش میدان الکتریکی تریس افزایش می‌یابد، معادله (۱۷) را ببینید. نتیجه‌های به‌دست آمده در این مقاله برای مطالعه اثر پسزنی تولید زوج روی میدان گرانشی زمینه مهم خواهند بود.

مرجع‌ها

1. E. Mottola, *Phys. Rev. D* **31**, 754 (1985).
2. R. Durrer and A. Neronov, *Astron. Astrophys. Rev.* **21**, 62 (2013).
3. M. B. Fröb, J. Garriga, S. Kanno, M. Sasaki, J. Soda, T. Tanaka and A. Vilenkin, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **04**, 009 (2014).
4. E. Bavarsad, C. Stahl, and S.-S Xue, *Phys. Rev. D* **94**, 104011 (2016).
5. T. Kobayashi and N. Afshordi, *J. High Energy Phys.* **10**, 166 (2014).
۶. م. مرتضی‌زاده، *بررسی تریس تانسور انرژی-تکانه میدان اسکالر در حضور میدان الکتریکی زمینه در فضازمان دوسیتر ۳ بُعدی*، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه کاشان، کاشان (۱۳۹۶).
۷. ز. سجادی‌نیا، *تریس بازبهنجارشده تانسور انرژی-تکانه اسکالرهای شوینگر در فضازمان دوسیته ۲-بُعدی*، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه کاشان، کاشان (۱۳۹۶).