جفت‌شدگی غیرکمینه اسکالرهای شوینگر به گرانش در فضازمان دوسیته ۲ بُعدی

باورساد، احسان؛ جعفری رباط ترکی، لیلا

دانشکده فیزیک دانشگاه کاشان، کاشان

چکیده

در این مقاله، چشم‌داشتی به‌سازی شده خلأ ورودی تریس تانسور انرژی-تکانه میدان اسکالر جرم‌دار باردار را در یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه با جفت‌شدگی غیرکمینه به خمش اسکالر فضازمان دوسیته ۲ بُعدی محاسبه می‌کنیم. ما یافته‌ایم که، برای مورد یک میدان اسکالر بی‌جرم، تریس به میدان الکتریکی بستگی ندارد. برای مورد یک میدان اسکالر جرم‌دار، برای مقدارهای مثبت و کوچک ثابت جفت‌شدگی غیرکمینه علامت تریس تغییر می‌کند. درحالی‌که برای مقدارهای به اندازه کافی بزرگ منفی ثابت جفت‌شدگی غیرکمینه، تریس همواره مثبت است.

کلید واژه‌ها: *فضازمان دوسیته، میدان اسکالر، اثر شوینگر، تریس تانسور انرژی-تکانه، جفت‌شدگی غیرکمینه*

Nonminimal coupling of Schwinger scalars to gravity in 2D de Sitter spacetime

Bavarsad, Ehsan; Jafari Robattorki, Leila

Department of Physics, University of Kashan, Kashan

Abstract

In this paper, we compute the regularized in-vacuum expectation value of the trace of the energy-momentum tensor of a massive charged scalar field in a uniform electric field background with a nonminimal coupling to the scalar curvature of a 2 dimensional de Sitter spacetime. We find that, in the case of a massless scalar field the trace is independent of the electric field. In the case of a massive scalar field, for the small positive values of the nonminimal coupling the sign of the trace changes. Whereas, for the large enough negative values of the nonminimal coupling the trace is positive.

Keywords: *de Sitter spacetime, Scalar field, Schwinger effect, Trace of energy-momentum tensor, Nonminimal coupling*
PACS No. 4,11,98

مقدمه

پدیده تولید زوج در یک میدان الکتریکی قوی زمینه در فضازمان تخت، اثر شوینگر [۱] نامیده می‌شود. این پدیده یک اثر غیراختلالی در نظریه میدان‌های کوانتمی است. در کار [۲] بدون در نظر گرفتن میدان الکتریکی زمینه تولید ذره در فضازمان دوسیته مطالعه شده است و نشان داده شده است که تولید ذره به واپاشی ثابت هابل می‌انجامد. در کار [۳] هر دو اثر باهم، یعنی تولید زوج اسکالرهای شوینگر در یک فضازمان دوسیته ۲ بُعدی مطالعه شده است؛ نویسندگان نشان داده‌اند که جریان رسانندگی الکتریکی، کمیت مناسبی برای توصیف اثر شوینگر در فضازمان دوسیته است. اثر شوینگر و جریان رسانندگی الکتریکی میدان اسکالر در فضازمان‌های دوسیته ۳ و ٤ بُعدی به‌ترتیب در مرجع‌های [٤،٥] مطالعه شده است. در مرجع [٤] تانسور انرژی-تکانه زوج‌های اسکالر شبه‌کلاسیک شوینگر در فضازمان دوسیته محاسبه شده و نویسندگان نشان داده‌اند که تولید زوج شوینگر به واپاشی ثابت هابل می‌انجامد. به‌تازگی، اثرهای کوانتمی ثابت جفت‌شدگی غیرکمینه میدان اسکالر به گرانش در مرجع [٦] مطالعه شده است. در این مقاله ما می‌خواهیم اثرهای کوانتمی ثابت جفت‌شدگی غیرکمینه اسکالرهای شوینگر به گرانش را در یک فضازمان دوسیته مطالعه کنیم. به‌طور مشخص، یک میدان اسکالر جرم‌دار باردار را در یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه با ثابت جفت‌شدگی غیرصفر به خمش اسکالر فضازمان دوسیته ۲ بُعدی، درنظر می‌گیریم؛ ما می‌خواهیم چشم‌داشتی تریس تانسور انرژی-تکانه این میدان اسکالر را در حالت خلأ ورودی محاسبه کنیم.

چشم‌داشتی تریس تانسور انرژی-تکانه

کنش میدان اسکالر مختلط φ جفت‌شده به پتانسیل برداری الکترومغناطیس A_μ را در فضازمان دوسیته ۲ بُعدی به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$S=\int d^2x\sqrt{|g|}\{g^{\mu\nu}(\partial_\nu-ieA_\nu)\varphi^*(\partial_\mu+ieA_\mu)\varphi \\ -(m^2+\xi R)\varphi^*\varphi\}, \tag{۱}$$

به‌گونه‌ای که m جرم و e بار الکتریکی میدان اسکالر است؛ ξ ثابت جفت‌شدگی غیرکمینه میدان اسکالر به خمش اسکالر R فضازمان دوسیته ۲ بُعدی است. تکه پوانکاره فضازمان دوسیته ۲ بُعدی را درنظر می‌گیریم که متریک آن به‌صورت زیر داده می‌شود

$$ds^2=\Omega^2(\tau)\left(d\tau^2-dx^2\right), \\ \tau\in(-\infty,0),\quad x\in\mathbb{R},\qquad \Omega(\tau)=\frac{-1}{\tau H}, \tag{۲}$$

به‌گونه‌ای که τ زمان همدیس و H ثابت هابل هستند. پس، قدر مطلق دترمینان متریک (۲) می‌شود $|g|=\Omega^4$ و خمش اسکالر $R=2H^2$ به‌دست می‌آید. برای توصیف یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه با چگالی انرژی ثابت در هندسه (۲)، پتانسیل برداری را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم

$$A_\mu=-\frac{E}{H^2\tau}\delta_\mu^1, \tag{۳}$$

به‌گونه‌ای که E یک مقدار ثابت است. تابع مُد میدان اسکالر را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم

$$\varphi(x)=e^{\pm ikx}f^\pm(\tau), \tag{٤}$$

به‌گونه‌ای که بالانویس $\pm$ به‌ترتیب نشان دهنده مُدهای فرکانس مثبت و منفی است. می‌توان نشان داد که تابع $f^\pm$ از معادله کلاین-گوردُون زیر پیروی می‌کند

$$\frac{d^2f^\pm}{dz_\pm^2}+\left(\frac{-1}{4}+\frac{\kappa}{z_\pm}+\frac{1-4\gamma^2}{4z_\pm^2}\right)f^\pm=0, \tag{۵}$$

به‌گونه‌ای که متغیرهای بی‌بُعد تعریف شده‌اند

$$z_\pm=\pm 2i|k|\tau,\quad r=\frac{k}{|k|}=\pm 1, \\ \mu=\frac{m}{H},\quad \lambda=-\frac{eE}{H^2},\quad \kappa=-i\lambda r, \\ \lambda_m=\sqrt{2\xi+\mu^2},\quad \gamma=\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda_m^2-\lambda^2}. \tag{٦}$$

معادله کلاین-گوردُون (۵)، معادله دیفرانسیل ویتاکر [۷] است که جواب‌های آن برحسب توابع ویتاکر M و W داده می‌شوند. با استفاده از رفتار مجانبی تابع ویتاکر $W(z)$ در حد $z\to\infty$، می‌توان نشان داد که اگر درخواست کنیم توابع مُد در زمان‌های آغازی $\tau\to-\infty$، دارای رفتار مجانبی موج تخت در فضازمان مینکوفسکی $f^\pm\sim e^{\mp i|k|\tau}$ باشند، آنگاه توابع مُد فرکانس مثبت و منفی به‌ترتیب به‌صورت زیر داده می‌شوند

$$U_k=|2k|^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{i\pi\kappa}{2}}e^{+ikx}W_{\kappa,\gamma}(z_+), \\ V_k=|2k|^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{-i\pi\kappa}{2}}e^{-ikx}W_{\kappa,-\gamma}(z_-). \tag{۷}$$

توابع مُد (۷) در زمان‌های آغازی به‌طور مجانبی به‌صورت موج تخت رفتار می‌کنند. از این‌رو توصیف کننده حالت خلأ ورودی هستند که هادامارد است [۳]. با داشتن مجموعه کامل توابع مُد راست‌هنجار (۷) حالت خلأ ورودی و کوانتش کانونیک انجام می‌شود. می‌توان نشان داد که چشم‌داشتی عملگر تریس تانسور انرژی-تکانه در حالت خلأ ورودی به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\langle T\rangle=\frac{H^2\xi}{\pi}\mathrm{Re}\sum_{r=\pm1}e^{\pi\lambda r}\int_0^\Lambda\frac{dp}{p}\{|W_{\kappa+1,\gamma}(-2ip)|^2 \\ -\lambda_m^2|W_{\kappa,\gamma}(-2ip)|^2+2\kappa W_{\kappa,\gamma}(-2ip)W_{1-\kappa,\gamma}(+2ip) \\ +2ipW_{\kappa,\gamma}(-2ip)W_{1-\kappa,\gamma}(+2ip)\} \\ +\frac{H^2\mu^2}{2\pi}\sum_{r=\pm1}e^{\pi\lambda r}\int_0^\Lambda\frac{dp}{p}|W_{\kappa,\gamma}(-2ip)|^2, \tag{۸}$$

به‌گونه‌ای که تکانه بی‌بُعد $p=-|k|\tau$ تعریف شده است و Λ یک قطع‌بالا تکانه است که به‌دلیل مناسب بودن آن برای به‌سازی انتگرال‌های تکانه تعریف شده است. ما برای محاسبه انتگرال‌های تکانه p در معادله (۸) از روش انتگرال‌گیری که در مرجع‌های [۳،۵] معرفی شده است استفاده می‌کنیم. از این‌رو، نمایش ملین-برنز تابع ویتاکر را در انتگرال‌های (۸) جای‌گذاری می‌کنیم

$$W_{\kappa,\gamma}(z)=e^{\frac{-z}{2}}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{ds}{2\pi i}z^{-s}\Gamma(-\kappa-s) \\ \times\frac{\Gamma(1/2+\gamma+s)\Gamma(1/2-\gamma+s)}{\Gamma(1/2+\gamma-\kappa)\Gamma(1/2-\gamma-\kappa)}, \tag{۹}$$

به‌گونه‌ای که پربند انتگرال‌گیری قطب‌های $\Gamma(-\kappa-s)$ را از قطب‌های $\Gamma(1/2+\gamma+s)\Gamma(1/2-\gamma+s)$ جدا می‌کند [۷]. پربند انتگرال‌گیری را همانند مرجع [۵] انتخاب می‌کنیم، پس از محاسبه‌های جبری به‌دست می‌آوریم

$$\langle T\rangle = -\frac{H^2\xi}{\pi} - \frac{H^2\mu^2}{4\pi}[4\log(2\Lambda) - 2i\pi + i\csc(2\pi\gamma)\sum_{r=\pm1}\{(e^{2\pi i\gamma}+e^{2\pi\lambda r})\psi\left(\frac{1}{2}+\gamma+i\lambda r\right) - (e^{-2\pi i\gamma}+e^{2\pi\lambda r})\psi\left(\frac{1}{2}-\gamma+i\lambda r\right)\}], \quad (۱۰)$$

دیده می‌شود که در مقدار چشم‌داشتی خلأ ورودی تریس یک واگرایی فرابنفش لگاریتمی پدیدار شده است. برای حذف این واگرایی و به‌دست آوردن یک عبارت متناهی فیزیکی از روش به‌سازی کم‌کردن بی‌دررو استفاده می‌کنیم. از بازنویسی معادله کلاین-گوردُون (۵) برای مورد فرکانس مثبت آغاز می‌کنیم

$$\frac{d^2 f_A}{d\tau^2} + \omega^2(\tau) f_A(\tau) = 0, \qquad \omega^2(\tau) = k^2 + \frac{2\lambda k}{\tau} + \frac{\mu^2+\lambda^2}{\tau^2} + \frac{2\xi}{\tau^2}. \quad (۱۱)$$

برای معادله (۱۱) یک جواب از نوع WKB درنظر می‌گیریم

$$f_A(\tau) = \left(2W(\tau)\right)^{\frac{-1}{2}} \exp\left(-i\int d\tau\omega(\tau)\right), \quad (۱۲)$$

به‌گونه‌ای که تابع $W(\tau)$ معادله زیر را برآورده می‌کند

$$W^2(\tau) = \omega^2(\tau) + \frac{3\dot{W}^2}{4W^2} - \frac{\ddot{W}}{2W}, \quad (۱۳)$$

به‌گونه‌ای که نقطه روی تابع نشان دهنده مشتق نسبت به زمان همدیس τ است. چون بسط بی‌دررو یک بسط برحسب درجه مشتق نسبت به متریک است در مرتبه صفرم بسط تابع W (۱۳) از جمله‌های مشتق چشم‌پوشی می‌کنیم. جمله آخر ω^2 در معادله (۱۱) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{2\xi}{\tau^2} = 2\xi\frac{\dot{\Omega}^2}{\Omega^2}, \quad (۱٤)$$

بنابراین این جمله از مرتبه دوم بی‌دررو است و در مرتبه صفرم از آن چشم‌پوشی می‌کنیم. از این‌رو، در مرتبه صفرم بی‌دررو خواهیم داشت

$$W^{(0)}(\tau) = \omega_0(\tau), \qquad \omega_0(\tau) = +\sqrt{k^2 + \frac{2\lambda k}{\tau} + \frac{\mu^2+\lambda^2}{\tau^2}}. \quad (۱٥)$$

با استفاده از معادله‌های (٤)، (۱۲) و (۱٥) بسط مرتبه صفرم بی‌دررو تابع مُد فرکانس مثبت به‌دست می‌آید

$$U_A(x) = \left(2\omega_0(\tau)\right)^{\frac{-1}{2}} e^{+ikx} \exp\left(-i\int \omega_0(\tau)d\tau\right). \quad (۱٦)$$

با استفاده از تابع مُد (۱٦) چشم‌داشتی تریس تانسور انرژی-تکانه تا مرتبه صفرم بسط بی‌دررو به‌دست می‌آید

$$T_A = \frac{H^2\mu^2}{2\pi}\left(2\log(2\Lambda) - \log\mu^2\right). \quad (۱۷)$$

بنابر روش به‌سازی کم‌کردن بی‌دررو، پادجمله (۱۷) را از چشم‌داشتی تریس (۱۰) کم می‌کنیم

$$T = \langle T\rangle - T_A, \quad (۱۸)$$

و به‌دست می‌آوریم

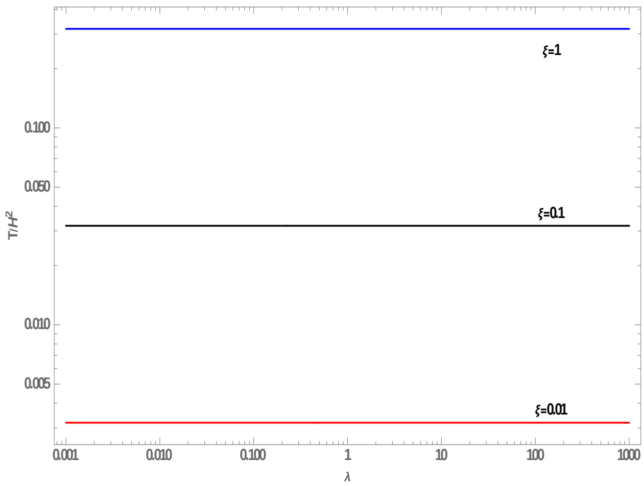
$$T = -\frac{H^2\xi}{\pi} - \frac{H^2\mu^2}{4\pi}[-2\log(\mu^2) - 2i\pi + i\csc(2\pi\gamma)\sum_{r=\pm1}\{(e^{2\pi i\gamma}+e^{2\pi\lambda r})\psi\left(\frac{1}{2}+\gamma+i\lambda r\right) - (e^{-2\pi i\gamma}+e^{2\pi\lambda r})\psi\left(\frac{1}{2}-\gamma+i\lambda r\right)\}]. \quad (۱۹)$$

به‌روشنی دیده می‌شود که واگرایی حذف می‌شود و تریس به‌سازی شده T متناهی است.

نتیجه گیری

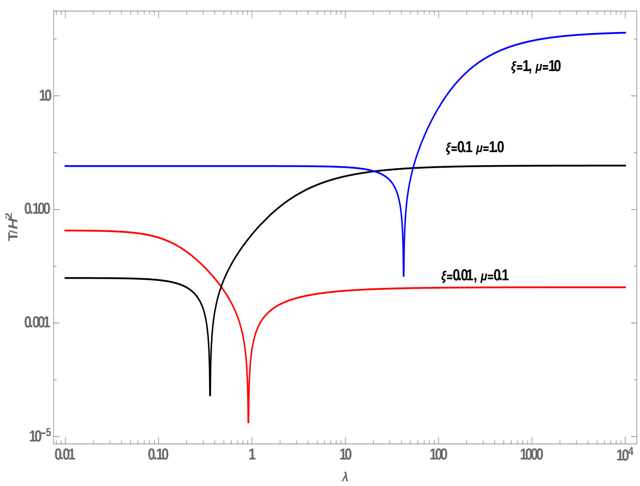
در این مقاله، یک میدان اسکالر جرم‌دار باردار را در یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه در فضازمان دوسیته ۲ بُعدی درنظر گرفته‌ایم. مقدار ثابت جفت‌شدگی غیرکمینه میدان اسکالر به خمش اسکالر فضازمان دوسیته ۲ بُعدی را غیرصفر درنظر گرفته‌ایم. چشم‌داشتی خلأ ورودی تریس تانسور انرژی-تکانه میدان اسکالر را محاسبه کرده‌ایم و با استفاده از روش به‌سازی کم‌کردن بی‌دررو یک عبارت متناهی فیزیکی برای تریس به‌دست آورده‌ایم؛ نتیجه را در معادله (۱۹) ببینید.

در شکل ۱، تریس (۱۹) برای مورد میدان اسکالر بی‌جرم $\mu = 0$، برای مقدارهای گوناگون ثابت جفت‌شدگی غیرکمینه ξ به‌صورت تابعی از میدان الکتریکی، رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد برای مورد میدان اسکالر بی‌جرم تریس به میدان الکتریکی بستگی ندارد. تحلیل عددی نشان می‌دهد برای این مورد علامت تریس (۱۹) مخالف علامت ξ است.



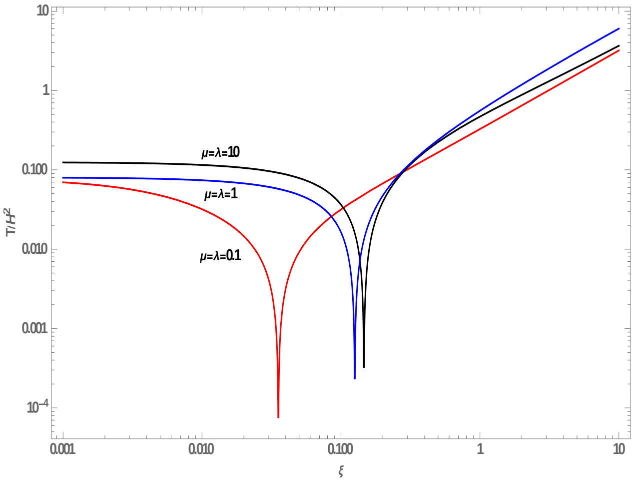
شکل ۱: برای مورد میدان اسکالر بی‌جرم $\mu = 0$، تریس به‌سازی شده T / H^2 به‌صورت تابعی از میدان الکتریکی λ، برای مقدارهای‌گوناگون ثابت جفت‌شدگی غیرکمینه ξ رسم شده است.

در شکل ۲، تریس (۱۹) برای مقدارهای گوناگون جرم μ و ثابت جفت‌شدگی غیرکمینه ξ مثبت، به‌صورت تابعی از میدان الکتریکی، رسم شده است. شکل نشان می‌دهد که در این قلمرو، در یک مقدار وابسته به μ, ξ تریس تغییر علامت می‌دهد. اندازه میدان الکتریکی که در آن تغییر علامت تریس رخ می‌دهد را با L نشان می‌دهیم. تحلیل عددی نشان می‌دهد که برای $\lambda < L$ تریس منفی و برای $\lambda > L$ تریس مثبت است.



شکل ۲: تریس به‌سازی شده T / H^2 به‌صورت تابعی از میدان الکتریکی λ، برای مقدارهای‌گوناگون جرم میدان اسکالر μ و ثابت جفت‌شدگی غیرکمینه ξ مثبت، رسم شده است.

در شکل ۳، تریس به‌سازی شده (۱۹) برای مقدارهای گوناگون جرم μ و میدان الکتریکی λ، به‌صورت تابعی از ثابت جفت‌شدگی غیرکمینه ξ، رسم شده است. شکل نشان می‌دهد که



شکل۳: تریس به‌سازی شده T / H^2 به‌صورت تابعی از ثابت جفت‌شدگی غیرکمینه ξ، برای مقدارهای‌گوناگون جرم میدان اسکالر μ و میدان الکتریکی λ، رسم شده است.

در این قلمرو تریس تغییر علامت می‌دهد. اگر مقدار ثابت جفت-شدگی غیرکمینه که به‌ازای آن تریس تغییر علامت می‌دهد را با ξ_* نشان دهیم؛ تحلیل عددی نشان می‌دهد که برای $\xi < \xi_*$ تریس مثبت و برای $\xi > \xi_*$ تریس منفی است.

بنابراین برای مورد میدان اسکالر بی‌جرم، تریس (۱۹) به میدان الکتریکی بستگی ندارد، و مقدار آن $T \propto -\xi$ است. برای مقدار مثبت و کوچک ثابت جفت‌شدگی غیر کمینه $0 < \xi < 1$ در قلمرو شبه‌کلاسیک $\mu^2 + \lambda^2 > 1$، تریس مثبت و در قلمرو فروسرخ $\mu^2 + \lambda^2 < 1$ تریس منفی است. مطالعه عددی تریس (۱۹) نشان می‌دهد برای ثابت جفت‌شدگی کمینه به اندازه کافی بزرگ منفی $|\xi| \gg 1$، تریس همواره مثبت است. این نتیجه‌ها برای تریس تانسور انرژی–تکانه زوج‌های خلق شده شوینگر، برای بحث درباره اثر پس‌زنی تولید زوج روی میدان گرانشی در جهان آغازی مهم هستند.

مرجع ها

1. J. S. Schwinger, *Phys. Rev*. **82**, 664 (1951).
2. E. Mottola, *Phys. Rev. D* **31**, 754 (1985).
3. M. B. Fröb, J. Garriga, S. Kanno, M. Sasaki, J. Soda, T. Tanaka, and A. Vilenkin, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **04** (2014) 009.
4. E. Bavarsad, C. Stahl and S. S. Xue, *Phys. Rev. D* **94**, 104011 (2016).
5. T. Kobayashi and N. Afshordi, *J. High Energy Phys.* **10** (2014) 166.
6. T. Markkanen, T. Tenkanen, V. Vaskonen and H. Veermäe, [arXiv:1712.04874[gr-qc]].
7. F.W. J. Olver, D.W. Lozier, R. F. Boisvert, and C.W. Clark, *"NIST Handbook of Mathematical Functions,"* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2010).