بازبهنجارش تانسور انرژی–تکانه الکترودینامیک کوانتمی دوسیته دو بُعدی

باورساد، احسان؛ بت شکنان فرد، منیژه

دانشکده فیزیک، دانشگاه کاشان، کاشان

چکیده

در این مقاله، بازبهنجارش تانسور انرژی–تکانه الکترودینامیک کوانتمی در فضازمان دوسیته دو بُعدی مطالعه می‌شود. ما نشان می‌دهیم که واگرایی فرابنفش لگاریتمی با استفاده از روش کم‌کردن بی‌دررو حذف می‌شود و یک عبارت متناهی به‌دست می‌آید. برای به‌دست آوردن تانسور، شرط بازبهنجارش را در نقطه جفت‌شدگی همدیس درنظر می‌گیریم و مقدار رَد بازبهنجار شده را در حد فرمیون بیجرم و میدان الکترومغناطیسی صفر برابر با مقدار ناهنجاری همدیس تعریف می‌کنیم.

کلیدواژه‌ها: *الکترودینامیک کوانتمی، فضازمان دوسیته، تانسور انرژی–تکانه، کم‌کردن بی‌دررو، ناهنجاری همدیس*

Renormalization of the energy-momentum tensor in 2D de Sitter QED

Bavarsad, Ehsan; Botshekananfard, Manizheh

Department of Physics, University of Kashan, Kashan

Abstract

In this paper, renormalization of the energy-momentum tensor in the 2D de Sitter QED is investigated. We show that the logarithmic ultraviolet divergence is removed and a finite expression has been obtained using adiabatic subtraction scheme. To obtain the tensor, we consider the renormalization condition at the conformal coupling point, and define the value of the renormalized trace equal to the conformal anomaly in the limit of the massless fermion and zero electromagnetic filed.

Keywords: *QED, de Sitter spacetime, Energy-momentum tensor, Adiabatic subtraction, Conformal anomaly*
PACS No. 4,11,98

مقدمه

هدف اصلی ما در این مقاله مطالعه بازبهنجارش نظریه الکترودینامیک کوانتمی در فضازمان دوسیته است. برای آسان‌تر به‌دست آوردن نتیجه‌ها و کاستن از پیچیدگی‌های محاسبه در فضازمان خمیده، بُعد فضازمان را ۲ درنظر گرفته‌ایم. اهمیت محاسبه و مطالعه تانسور انرژی–تکانه به این دلیل است که چشمه گرانش در معادله میدان انیشتین است. در کاربردهای کیهانشناسی و اخترفیزیکی از تانسور انرژی–تکانه برای مطالعه اثر پسزنی گرانشی تولید ذره در میدان گرانشی استفاده می‌شود [۱]. در مقاله‌های [۲]، تانسور انرژی–تکانه میدان فرمیونی در فضازمان‌های از نوع فریدمان–لومتر–رابرتسون–واکر به‌طور فضایی تخت، محاسبه شده و نظریه بازبهنجارش برای میدان فرمیونی در فضازمان خمیده توسعه داده شده است. در آن مقاله‌ها میدان فرمیونی در حضور تنها میدان گرانشی زمینه درنظر گرفته شده است. در این مقاله ما، افزون‌بر میدان گرانشی زمینه یک میدان الکترومغناطیسی یکنواخت زمینه را نیز درنظر می‌گیریم. ما فرض می‌کنیم که میدان‌های گرانشی و الکترومغناطیسی زمینه هستند و از اثر پسزنی تولید زوج فرمیونی روی آنها چشم‌پوشی می‌کنیم. در مقاله‌های [۳،٤] با در نظرگرفتن یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه، جریان القایی فرمیونی در فضازمان‌های دوسیته به‌ترتیب ۲ و ٤ بُعدی مطالعه شده است. در مقاله [٤] یافته شده است که برای هر مقدار دلخواه جرم

فرمیون، جریان القایی در میدان الکتریکی ضعیف تغییر علامت می‌دهد. در مقاله [۵] برای پرهیز از این تغییر علامت یا دقیق‌تر بگوییم منفی شدن جریان القایی، شرایط بازبهنجارش جدیدی معرفی شده است. در این مقاله ما می‌خواهیم چشم‌داشتی خلأ ورودی تانسور انرژی–تکانه میدان فرمیونی را محاسبه کنیم سپس با استفاده از روش بهسازی کم‌کردن بی‌دررو واگرایی فرابنفش آن را حذف کرده و یک عبارت متناهی به دست بیاوریم. برای بازبهنجارش مانند مقاله [۵] شرایط بازبهنجارش را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که مقدار ناهنجاری همدیس به‌درستی به‌دست بیاید.

چشم‌داشتی خلأ تانسور انرژی–تکانه

کنش الکترودینامیک کوانتمی در فضازمان دوسیته ۲ بُعدی را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$S=\int d^2x\sqrt{|g|}\,\bar{\psi}\,\Gamma^{\mu}i\left(\nabla_{\mu}+ieA_{\mu}\right)\psi, \qquad (۱)$$

به‌گونه‌ای که m و e به‌ترتیب جرم و بار الکتریکی میدان فرمیونی $\psi(x)$ هستند، $|g|$ قدر مطلق دترمینان متریک و Γ^{μ} ماتریس‌های دیراک هستند. متریک فضازمان دوسیته را در نیم‌فضای همدیس تخت پوانکاره که یک جهان در حال انبساط را توصیف می‌کند، درنظر می‌گیریم

$$ds^2=\Omega^2(\tau)\left(d\tau^2-d\mathbf{x}^2\right),\ \tau\in(-\infty,0),\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2,$$
$$\Omega(\tau)=\frac{-1}{\tau H}, \qquad (۲)$$

به‌گونه‌ای که τ زمان همدیس و H ثابت هابل است. در مختصات همدیس تخت (۲) یک میدان الکتریکی یکنواخت با چگالی انرژی ثابت را می‌توان با پتانسیل برداری زیر توصیف کرد

$$A_{\mu}(\tau)=\frac{E}{H^2\tau}\delta^1_{\mu}, \qquad (۳)$$

به‌گونه‌ای که E یک مقدار ثابت است. تانسور انرژی–تکانه از وردش کنش (۱) برحسب وردش متریک تعریف می‌شود

$$T^{\mu\nu}=-\frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}. \qquad (۴)$$

می‌توان نشان داد که تانسور معادله پیوستگی را برآورده می‌کند

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu}=0. \qquad (۵)$$

چون فضازمان دوسیته بردار کلینگ زمان‌گونه ندارد، نمی‌توان برای آن یک خلأ یکتا تعریف کرد. توابع مُد کنش دیراک (۱) که خلأ ورودی و خروجی را توصیف می‌کنند در مقاله [۳] به‌دست آمده‌اند. ما چشم‌داشتی تانسور انرژی–تکانه را در حالت خلأ ورودی محاسبه می‌کنیم زیرا این حالت هادامارد است [۶]. می‌توان نشان داد که تنها چشم‌داشتی مولفه‌های قطری تانسور (۴) غیرصفر هستند، به‌دیگر سخن، $T_{01}=0$. با دانستن این خاصیت و استفاده از معادله پیوستگی (۵) می‌توان مولفه‌های تانسور را برحسب رَد تانسور T نوشت

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}. \qquad (۶)$$

پس، نیاز داریم تنها رَد تانسور را محاسبه کنیم، مولفه‌های تانسور از معادله (۶) خوانده می‌شوند. چشم‌داشتی رَد در حالت خلأ ورودی به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$T=-\frac{H^2\mu^2}{\pi}\sum_{r=\pm1}\int_0^{\Lambda}\frac{dp}{p}e^{\pi\lambda r}\Re\left\{iW_{\kappa,\gamma}(-2ip)W_{-\kappa,\gamma}(2ip)\right\}, \qquad (۷)$$

به‌گونه‌ای که p تکانه و Λ یک قطع‌بالا تکانه است که به‌دلیل مناسب بودن آن برای بهسازی واگرایی فرابنفش تعریف شده است. W تابع ویتاکر است و کمیت‌های بیبُعد به‌صورت زیر تعریف شده‌اند

$$\mu=\frac{m}{H},\ \lambda=\frac{eE}{H^2},\ \kappa=-i\lambda r-\frac{1}{2},\ \gamma=i\sqrt{\mu^2+\lambda^2}. \qquad (۸)$$

روش انجام انتگرال تکانه توابع ویتاکر در مرجع‌های [۶،۷] برای به‌دست آوردن جریان القایی اسکالر در فضازمان دوسیته به‌ترتیب ۲ و ٤ بُعدی توضیح داده شده است. ما برای محاسبه انتگرال معادله (۷) از روش مرجع [۷] استفاده می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$T=\pi^{-1}H^2\mu^2[2\log(2\Lambda)-\Re\{\psi(1+\gamma+i\lambda)$$
$$+\psi(1+\gamma-i\lambda)+\mathrm{Sinh}(2\pi\lambda)\,\mathrm{Csch}(2\pi|\gamma|)$$
$$\times(\psi(1+\gamma+i\lambda)-\psi(1+\gamma-i\lambda))\}], \qquad (۹)$$

به‌گونه‌ای که ψ تابع دیگاما است.

پادجمله بی‌دررو رَد تانسور انرژی–تکانه

همان گونه که انتظار هم داشتیم در عبارت چشم‌داشتی خلأ ورودی رَد (۹) یک واگرایی فرابنفش لگاریتمی رخ داده است. برای حذف این واگرایی از روش کم‌کردن بی‌دررو استفاده می‌کنیم

که در مقاله‌های [۲] توسعه داده شده است. برای به‌دست آوردن پادجمله[۱] از معادله مُد برای اسپینورهای بسامد مثبت آغاز می‌کنیم

$$\left[\partial_0{}^2+\omega^2-iq\left(\frac{\dot q}{q}-\frac{\dot\Omega}{\Omega}\right)\right]\chi_1^+(\tau)=0, \qquad (۱۰)$$
$$q=k+eA_1,\quad \omega=\sqrt{q^2+m^2\Omega^2},$$

به‌گونه‌ای که نقطه نشادن دهنده مشتق نسبت به زمان همدیس τ است و اسپینور بسامد مثبت به‌صورت زیر تعریف شده است

$$\psi_A^+(x)=e^{ikx}\begin{pmatrix}\chi_1^+(\tau)\\ \chi_2^+(\tau)\end{pmatrix}. \qquad (۱۱)$$

برای معادله مُد (۱۰) یک جواب از نوع WKB درنظر می‌گیریم

$$\chi_1^+(\tau)=\exp\left(-i\int d\tau\,(X+iY)\right), \qquad (۱۲)$$

به‌گونه‌ای که X , Y توابعی حقیقی از زمان همدیس τ هستند [۲]. پس از جای‌گذاری معادله (۱۲) در معادله (۱۱) رابطه‌های زیر را به‌دست می‌آوریم

$$Y^2-X^2+\dot Y+\omega^2=0,\ 2XY+\dot X+q\left(\frac{\dot q}{q}-\frac{\dot\Omega}{\Omega}\right)=0. \qquad (۱۳)$$

از دومین معادله (۱۳) مشخص می‌شود که مرتبه بی‌دررو Y یک مرتبه بالاتر از مرتبه بی‌دررو X است بنابراین از اولین معادله (۱۳) نتیجه می‌گیریم که در مرتبه صفر بی‌دررو $X=\omega$ است و اسپینور (۱۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\chi_1^+=N\,\omega^{\frac{-1}{2}}\exp\left[-\int\left(i\,\omega+\frac{q}{2X}\left(\frac{\dot q}{q}-\frac{\dot\Omega}{\Omega}\right)\right)d\tau\right], \qquad (۱٤)$$

به‌گونه‌ای که N ضریب بهنجارش است. چشم‌داشتی خلأ بی‌دررو رَد تانسور انرژی–تکانه به‌صورت زیر داده می‌شود

$$T_A=-2m\int\frac{dk}{2\pi}\left(\chi_1^+\chi_2^{+*}+\chi_2^+\chi_1^{+*}\right). \qquad (۱۵)$$

با درنظر گرفتن شرط بهنجارش اسپینورها به‌صورت

$$\chi_1^+\chi_1^{+*}+\chi_2^+\chi_2^{+*}=\Omega^{-1}, \qquad (۱٦)$$

و استفاده از معادله دیراک می‌توان نشان داد که معادله (۱۵) به‌صورت

$$T_A=-2m\Omega^{-1}\int\frac{dk}{2\pi}\left(\frac{\mathcal R+\mathcal R^*}{1+\mathcal R\mathcal R^*}\right), \qquad (۱۷)$$

نوشته می‌شود، به‌گونه‌ای که [۳]

$$\mathcal R=\frac{\chi_2^+}{\chi_1^+}=\frac{\omega+q}{m\Omega}-\frac{i}{2m\Omega}\left(\frac{\dot\omega+\dot q}{\omega}-\frac{\dot\Omega}{\Omega}\left(1+\frac{q}{\omega}\right)\right). \qquad (۱۸)$$

سرانجام، با جای‌گذاری معادله (۱۸) در معادله (۱۷) و محاسبه انتگرال تکانه، رَد تانسور انرژی–تکانه در مرتبه صفر بسط بی‌دررو به‌دست می‌آید

$$T_A=\pi^{-1}H^2\mu^2\left(2\log(2\Lambda)-2\log\mu\right). \qquad (۱۹)$$

بازبهنجارش تانسور انرژی–تکانه

برای به‌دست آوردن یک عبارت متناهی و خوش تعریف برای تانسور انرژی–تکانه، گام بعدی روش بهسازی کم‌کردن بی‌دررو این‌گونه پیش می‌رود که پادجمله بی‌دررو (۱۹) را از عبارت (۹) کم کنیم که خواهیم داشت

$$\begin{aligned}T_{\rm reg}&=T-T_A\\&=-\pi^{-1}H^2\mu^2[\log(\mu^2)+\Re\{\psi(1+\gamma+i\,\lambda)\\&+\psi(1+\gamma-i\,\lambda)+\mathrm{Sinh}(2\pi\lambda)\,\mathrm{Csch}(2\pi|\gamma|)\\&\times(\psi(1+\gamma+i\,\lambda)-\psi(1+\gamma-i\,\lambda))\}].\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

بنابراین بسط مرتبه صفر بی‌دررو پادجمله برای حذف واگرایی لگاریتمی فرابنفش رَد (۹) کافی است. جمله‌های مرتبه بالاتر از صفر بسط بی‌دررو پادجمله مقدارهای متناهی هستند که می‌توانند رفتار رَد بهسازی شده (۲۰) را تغییر دهند. اما؛ در روش بهسازی کم‌کردن بی‌دررو تنها تا مرتبه‌ای بسط را درنظر می‌گیریم که برای حذف واگرایی فرابنفش لازم باشد [۸]. چون مقدار ناهنجاری همدیس در فضازمان خمیده به خوبی شناخته شده است رفتار رَد بهسازی شده (۲۰) را برای مورد جفت‌شدگی همدیس، به‌دیگر سخن، در حد $\mu=0,\lambda=0$ مطالعه می‌کنیم. در این حد رفتار رَد بهسازی شده (۲۰) به‌صورت زیر داده می‌شود

$$T_{\rm reg}\approx\pi^{-1}H^2\mu^2\left(2\gamma_{\rm Euler}-\log(\mu^2)+4\psi^{(2)}(1)\lambda^2\right). \qquad (۲۱)$$

مقدار ناهنجاری همدیس در فضازمان خمیده دو بُعدی $-R/(24\pi)$ به‌دست آمده است [۹]، به‌گونه‌ای که R خمش اسکالر فضازمان است. درحالی که معادله (۲۱) نشان می‌دهد رَد بهسازی شده (۲۰) در شرایط جفت‌شدگی همدیس صفر می‌شود. برای از بین بردن این ناسازگاری، ما فرض می‌کنیم که رَد بازبهنجار شده $T_{\rm ren}$ در شرایط جفت‌شدگی همدیس مقدار صحیح ناهنجاری همدیس را به‌دست بدهد. از این‌رو، تعریف می‌کنیم

[۱] Counterterm

$$T_{\text{ren}} = T - T_A - \frac{H^2}{12\pi}. \qquad (۲۲)$$

در مرجع [۵] برای اولین بار این روش برای بازبهنجازش جریان القایی معرفی شده است. نویسندگان مقاله [۵] کم‌کردن تنها پادجمله مناسب را کم‌کردن کمینال[۲] و کم‌کردن پادجمله همراه با یک مقدار متناهی مناسب برای به‌دست آوردن رفتار صحیح جریان القایی را کم‌کردن بیشینال[۳] نامیده‌اند. همانند مقاله [۵] ما نیز رَد (۲۰) را کمینال کم‌شده و رَد (۲۱) را بیشینال کم‌شده می‌نامیم. اکنون با استفاده از معادله‌های (٦)، (۹)، (۱۹) و (۲۲) تانسور انرژی–تکانه بازبهنجارشده به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} T_{\text{ren}}^{\mu\nu} &= -(2\pi)^{-1} H^2 \mu^2 [(12\mu^2)^{-1} + \log(\mu^2) \\ &+ \Re\{\psi(1+\gamma+i\lambda) + \psi(1+\gamma-i\lambda) + \text{Sinh}(2\pi\lambda) \\ &\times \text{Csch}(2\pi|\gamma|)(\psi(1+\gamma+i\lambda) - \psi(1+\gamma-i\lambda))\}] g^{\mu\nu}. \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

نتیجه‌گیری

در این مقاله با در نظرگرفتن یک میدان الکتریکی زمینه با چگالی انرژی ثابت، چشم‌داشتی خلأ ورودی رَد تانسور انرژی–تکانه الکترودینامیک کوانتمی در فضازمان دوسیته دو بُعدی به‌دست آمده است، معادله (۹) را ببینید. برای بهسازی رَد از روش کم‌کردن بی‌دررو استفاده کرده‌ایم و نشان داده‌ایم که برای حذف واگرایی فرابنفش لگاریتمی، بسط بی‌دررو مرتبه صفر پادجمله کافی است، معادله (۲۰) را ببینید. همانند مرجع [۵]، تنها کم کردن پادجمله مناسب را کم‌کردن کمینال و کم‌کردن پادجمله همراه با یک مقدار متناهی مناسب را کم‌کردن بیشینال نامیده‌ایم. نشان داده‌ایم که کم‌کردن کمینال به مقدار صحیح ناهنجاری همدیس نمی‌انجامد، معادله (۲۱) را ببینید. با درنظر گرفتن شرایط بازبهنجارش در نقطه جفت‌شدگی همدیس رَد بیشینال کم‌شده را تعریف کرده‌ایم، معادله (۲۲) را ببینید. سرانجام تانسور انرژی–تکانه بازبهنجار شده را به‌دست آورده‌ایم، معادله (۲۳) را ببینید.

مرجع‌ها

1. E. Mottola, *Phys. Rev. D* **31**, 754 (1985); E. Bavarsad, C. Stahl and S. S. Xue, *Phys .Rev. D* **94**, 104011 (2016).
2. A. Landete, J. Navarro-Salas, and F. Torrenti, *Phys. Rev. D* **89**, 044030 (2014); **88**, 061501 (2013); S. Ghosh, *Phys. Rev. D* **91**, 124075 (2015); **93**, 044032 (2016); A. del Rio, J. Navarro-Salas, and F. Torrenti, *Phys. Rev. D* **90**, 084017 (2014); A. Ferreiro, and J. Navarro-Salas, *Phys .Rev. D* **97**, 125012 (2018).
3. C. Stahl, E. Strobel, and S. S. Xue, *Phys. Rev. D* **93**, 025004 (2016).
4. T. Hayashinka, T. Fujita and J. Yokoyama, *JCAP* **1607**, 010 (2016).
5. T. Hayashinka and S. S. Xue, *Phys. Rev. D* **97**, 105010 (2018).
6. M. B. Fröb, J. Garriga, S. Kanno, M. Sasaki, J. Soda, T. Tanaka, and A. Vilenkin, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **04**, 009 (2014).
7. T. Kobayashi and N. Afshordi, *J. High Energy Phys.* **10**, 166 (2014).
8. L. Parker, D. Toms, *"Quantum Field Theory in Curved Spacetime,"* Cambridge University Press, (2009).
9. M. J. Duff, *Nucl. Phys. B* **125**, 334 (1997).

[۲] Minimal Subtraction

[۳] Maximal Subtraction