جریان ذرات اسکالر باردار خلق شده با سازوکار شوینگر در فضازمان دوسیتر ۳-بُعدی

باورساد، احسان[۱]

[۱] *دانشکده فیزیک، دانشگاه کاشان، کاشان*

چکیده

در این مقاله، کوانتش کانونیک میدان اسکالر باردار در زمینه یک میدان الکتریکی یکنواخت در فضازمان دوسیتر (۲+۱)-بُعدی انجام شده است. سپس، چشم‌داشتی عملگر جریان این میدان را در حالت خلأ ورودی حساب کرده‌ایم. برای به دست آوردن عبارتی متناهی برای جریان روش بازبهنجارش کم‌کردن بی‌دررو به کار گرفته شده است. نشان داده‌ایم که برای مورد میدان بی‌جرم، جریان بازبهنجار شده متناسب با وارون میدان الکتریکی زمینه است.

Current of created scalar particles by Schwinger mechanism in 3D de Sitter spacetime

Bavarsad, Ehsan[1]

[1] *Department of Physics, University of Kashan, Kashan*

Abstract

In this paper, canonical quantization of a charged scalar field in a constant background electric field has been considered in a (1+2)-dimensional de Sitter space-time. Then, we compute the in-vacuum expectation value of the space-like component of the current operator. Adiabatic subtraction method applied in order to renormalization of the current operator. In the case of massless scalar field, we find that renormalized current responses as E^{-1} to the background electric field.

PACS No. 4,11,98

مقدمه

هدف این مقاله مطالعه‌ی اثر شوینگر[۱] در فضازمان دوسیتر (۲+۱)-بُعدی است. اثر شوینگر، به دیگر سخن تولید زوج به وسیله یک میدان الکتریکی قوی، یک پدیده نااختلالی نظریه میدان‌های کوانتمی در فضازمان تخت است که در کارهای پیش‌گام [۱] کشف شد، برای مرور [۲] را ببینید. با وجود تلاش‌های فراوان آزمایشگاهی، تاکنون این پدیده دیده نشده است. دلیل اصلی، وجود یک ضریب نمایی کوچک کننده برای میدان‌های الکتریکی کوچک‌تر از مقدار بحرانی در عبارت آهنگ تولید است. بزرگی میدان الکتریکی بحرانی با توان ۲ جرم سکون ذره خلق شده متناسب است. آزمایش‌ها و دستگاه‌های لیزری جدیدی که بتوانند میدان الکتریکی با بزرگی نزدیک به اندازه بحرانی را تولید کنند برای دهه آینده برنامه‌ریزی شده‌اند. در این میان، پیشنهاد دیگر تغییر روی‌کرد است. در حالی که همه آزمایش‌ها دیدن اثر شوینگر روی زمین را هدف گذاری کرده‌اند می‌توان این اثر را در دستگاه‌های اخترفیزیکی و کیهان‌شناسی جستجو کرد. در فضازمان دوسیتر از خلأ ذره خلق می‌شود [۳]. در [٤] و [٥] به ترتیب، فضازمان‌های دوسیتر (۱+۱)-بُعدی و (۳+۱)-بُعدی در نظر گرفته شده‌اند و اثر شوینگر برای میدان اسکالر در آن‌ها مطالعه شده است. کمیت مهم و مناسب برای مطالعه اثر شوینگر در فضازمان خمیده که در [٤] و [٥] نیز محاسبه شده است، جریان القایی است. در محاسبه جریان القایی، واگرایی‌های فرابنفش برآمده از انتگرال‌گیری روی تکانه‌ها پدید می‌آیند که باید بهسازی[۲] شوند. روش کم‌کردن بی‌دررو[۳]

[1] Schwinger

[2] Regularize

[3] Adiabatic subtraction

بسیار مورد استفاده است، همچنان که در [۵] از این روش استفاده شده است. برای مطالعه بیشتر مناسب بودن روش کم‌کردن بی‌دررو، ما در این کار، اثر شوینگر را با محاسبه‌ی جریان القایی در فضازمان دوسیتر (۲+۱)-بُعدی مطالعه کرده‌ایم و ارزیابی کرده‌ایم که چه واگرایی‌هایی پدید می‌آیند و چگونه می‌توان آنها را بهسازی کرد.

عملگر میدان اسکالر در فضازمان دوسیتر

برای مطالعه جریان ذرات اسکالر خلق شده با سازوکار شوینگر در یک میدان الکتریکی یکنواخت، عملگر میدان اسکالر نیاز است. چون عملگر میدان دربرگیرنده توابع مُد[4] متعامد-بهنجار است از این رو، معادله کلاین-گردُن در حضور یک میدان الکتریکی یکنواخت در زمینه فضازمان دوسیتر باید حل شود. متریک فضازمان دوسیتر (۲+۱)-بُعدی را می‌توان از روی عنصر طول خواند

$$ds^2 = \Omega^2(\tau)(d\tau^2 - dx^2 - dy^2), \quad \Omega(\tau) = -\frac{1}{\tau H}, \tag{۱}$$

به گونه‌ای که H ثابت هابل و زمان همدیس[5] τ برحسب زمان ویژه t به دست می‌آید

$$\tau = -\frac{1}{H}e^{-Ht}, \qquad -\infty < \tau \le 0. \tag{۲}$$

یادآوری می‌کنیم که این بخش از فضازمان دوسیتر همدیس است به فضازمان مینکوفسکی. برای به دست آوردن جواب‌های معادله کلاین-گردُن در حضور میدان الکتریکی یکنواخت، لاگرانژی الکترودینامیک کوانتمی اسکالر را در زمینه فضازمان دوسیتر (۲+۱)-بُعدی در نظر می‌گیریم

$$\mathcal{L} = \sqrt{g}\{g^{\mu\nu}(\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi(\partial_\nu - ieA_\nu)\varphi^* - (m^2 + \xi R)\varphi\varphi^* - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\}, \tag{۳}$$

به گونه‌ای که $\varphi(x)$ میدان اسکالر با جرم m و بار e است. متریک دوسیتر با معادله (۱) داده شده و ξ ضریب ثابت بدون بُعد جفت‌شدگی میدان به خمش اسکالر $R = 6H^2$ است. برای توصیف یک میدان الکتریکی یکنواخت در زمینه فضازمان دوسیتر، پتانسیل برداری زیر را در نظر می‌گیریم

$$A_\mu(\tau) = -\frac{E}{H^2\tau}\delta_{\mu 1}. \tag{٤}$$

پس، تنها مولفه‌های ناصفر تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی $F_{01} = -F_{10} = \Omega^2(\tau)E$ هستند. با در نظر گرفتن لاگرانژی (۳) معادله کلاین-گردُن برای میدان اسکالر به دست می‌آید

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g}\, g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi) + 2ieg^{\mu\nu}A_\mu\partial_\nu\varphi - e^2A_\mu A^\mu\varphi + m_{dS}^2\varphi = 0, \tag{۵}$$

به گونه‌ای که $m_{dS}^2 = m^2 + \xi R$. پس از جای‌گذاری معادله‌های (۱) و (٤) در معادله (۵) و در نظر گرفتن جواب به صورت

$$u(x) = \Omega^{\frac{-1}{2}}(\tau)e^{i\vec{k}.\vec{x}}f(\tau), \tag{٦}$$

خواهیم داشت

$$\frac{d^2f}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{z} + \frac{1/4 - \gamma^2}{z^2}\right)f = 0, \tag{٧}$$

به گونه‌ای که

$$z = 2ik\tau, \quad k = |\vec{k}|, \quad \lambda = -\frac{eE}{H^2},$$
$$\kappa = -i\lambda\frac{k_x}{k}, \quad \gamma^2 = 1 - \frac{m_{dS}^2}{H^2} - \frac{e^2E^2}{H^4}. \tag{۸}$$

معادله (٧) معادله دیفرانسیل ویتاکر [٦] است و جواب استاندارد آن برحسب توابع ویتاکر داده می‌شود

$$f(z) = c_1M[\kappa,\gamma,z] + c_2W[\kappa,\gamma,z], \tag{۹}$$

به گونه‌ای که c_1, c_2 ضریب‌های ثابت هستند. به توابع مُدی نیاز داریم که عملگرهای خلق و نابودی و بنابراین خلأ نظریه میدان کوانتمی را تعیین کنند. این خلأ به وسیله‌ی رفتار مجانبی توابع مُد مشخص می‌شود. برای تعیین توابع مُد زمان‌های آغازی یا هنگامی که $t \to -\infty$، شرط می‌کنیم $f \sim e^{-ik\tau}$، هنگامی که $\tau \to -\infty$. با توجه به بسط‌های مجانبی توابع ویتاکر [٦] برای این مجموعه از توابع مُد متعامد-بهنجار فرکانس مثبت خواهیم داشت

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2k}}e^{\frac{i\kappa\pi}{2}}\Omega^{\frac{-1}{2}}(\tau)e^{i\vec{k}.\vec{x}}W[\kappa,\gamma,z]. \tag{۱۰}$$

توابع مُد متعامد-بهنجار فرکانس منفی که در زمان‌های آغازی رفتار مجانبی خواسته شده را دارند نیز به دست می‌آیند

[4] Mode functions
[5] Conformal

$$v(x)=\frac{1}{\sqrt{2k}}e^{\frac{-i\kappa\pi}{2}}\Omega^{\frac{-1}{2}}(\tau)e^{-i\vec{k}.\vec{x}}W[\kappa,\gamma^{*},z^{*}]. \qquad (۱۱)$$

اکنون با داشتن مجموعه کامل متعامد-بهنجار داده شده در معادله-های (۱۰) و (۱۱) می‌توان عملگر میدان اسکالر را نوشت

$$\phi(x)=\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\left\{a_{\vec{k}}u(x)+b_{\vec{k}}^{\dagger}v(x)\right\}, \qquad (۱۲)$$

به گونه‌ای که عملگرهای نابودی $a_{\vec{k}}$ و خلق $b_{\vec{k}}^{\dagger}$ رابطه‌های جابه-جایی را برآورده می‌کنند

$$\left[a_{\vec{k}},a_{\vec{k}'}^{\dagger}\right]=\left[b_{\vec{k}},b_{\vec{k}'}^{\dagger}\right]=(2\pi)^2\delta(\vec{k}-\vec{k}'), \qquad (۱۳)$$

و حالت خلأ به صورت زیر تعیین می‌شود

$$a_{\vec{k}}\left|0\right\rangle_{in}=0;\quad \forall\vec{k}. \qquad (۱۴)$$

خلأ تعریف شده در معادله (۱٤) خلأ ورودی نامیده می‌شود زیرا متناظر است با مجموعه توابع مُد متعامد-بهنجار (۱۰) و (۱۱) که در زمان‌های مجانبی آغازی رفتار مجانبی مطلوب را دارند. در این مقاله، از این پس منظور ما از خلأ، همین خلأ ورودی است.

چشم‌داشتی خلأ عملگر جریان بازبهنجار شده

با داشتن عملگر میدان (۱۲) و حالت خلأ (۱٤) می‌توان چشم-داشتی عملگر جریان را به دست آورد. عملگر جریان میدان اسکالر باردار به صورت زیر نوشته می‌شود

$$j^{\mu}=\frac{ie}{2}g^{\mu\nu}(\{\partial_{\nu}\phi+ieA_{\nu}\phi,\phi^{*}\}-\{\partial_{\nu}\phi^{*}-ieA_{\nu}\phi^{*},\phi\}), \qquad (۱۵)$$

می‌توان نشان داد $\nabla_{\mu}j^{\mu}=0$. همچنان که انتظار داریم $\left\langle j^{0}\right\rangle=0$ به دست می‌آید. پس از جای‌گذاری شکل صریح عملگر میدان (۱۲) برحسب توابع مُد داده شده در معادله‌های (۱۰) و (۱۱)، همچنین استفاده از پتانسیل برداری (٤) و رابطه‌های (۱۳) و (۱٤)، سرانجام مقدار چشم‌داشتی خلأ مولفه‌ی جریان در امتداد میدان الکتریکی زمینه، به دیگر سخن j^{1}، به دست می‌آید

(۱٦)

$$\left\langle j^{1}\right\rangle_{in}=\frac{e}{2\pi^2}H^2\Omega^{-1}(\tau)\lim_{\Lambda\to\infty}\int_{-1}^{+1}\frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}$$
$$\times\int_0^{\Lambda}dp\,(rp-\lambda)e^{\lambda r\pi}W[-i\lambda r,\gamma,-2ip]W^{*}[-i\lambda r,\gamma,-2ip],$$

به گونه‌ای که متغیرهای بدون بُعد r,p برحسب تکانه $\vec{k}$ به صورت $r=\frac{k_x}{k},\quad p=-k\tau,$ تعریف می‌شوند. و این که $\Lambda=-K\tau$ که K حد بالای انتگرال تکانه است. جزئیات روش انجام انتگرال‌گیری داده شده در معادله (۱٦) همانندی بسیاری دارد با آنچه در [۵] برای محاسبه انتگرال جریان برای مورد فضازمان دوسیتر (۳+۱)-بُعدی انجام شده است، برای آشنایی با ریز این محاسبه [۵] را ببینید، در اینجا ما مورد (۲+۱)-بُعدی را در نظر گرفته‌ایم. پس از انجام محاسبه به دست می‌آوریم

$$\left\langle j^{1}\right\rangle=\frac{e}{2\pi^2}H^2\Omega^{-1}(\tau)\lim_{\Lambda\to\infty}\{-\frac{\pi}{2}\lambda\Lambda+\frac{\pi}{4}\lambda\gamma\cot[2\pi\gamma]$$
$$+\frac{3\gamma}{4}\csc[2\pi\gamma]I_1[2\pi\lambda]-\frac{\pi\gamma\lambda}{2}\csc[2\pi\gamma]I_0[2\pi\lambda]$$
$$+\frac{i}{2}\csc[2\pi\gamma]\int_{-1}^{1}\frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}b_r((e^{2\pi\lambda r}+e^{-2\pi i\gamma})\psi[\frac{1}{2}+i\lambda r-\gamma] \qquad (۱۷)$$
$$-(e^{2\pi\lambda r}+e^{2\pi i\gamma})\psi[\frac{1}{2}+i\lambda r+\gamma])\};$$
$$b_r=-\frac{3}{2}\lambda^2r^3+\frac{r}{8}(1-4\gamma^2+8\lambda^2),$$

به گونه‌ای که تابع‌های I و ψ به ترتیب توابع بسل تعمیم‌یافته و دی‌گاما هستند. همان گونه که انتظار نیز داشتیم در عبارت جریان به دست آمده در معادله (۱۷) واگرایی فرابنفش رخ داده است. برای برداشتن این واگرایی از روش بازبهنجارش کم‌کردن بی‌دررو استفاده می‌کنیم که در [۷] توضیح داده شده است. این شیوه بازبهنجارش بر این ایده ساده استوار است، سهم جمله‌های ساخته شده از بسط بی‌دررو توابع مُد را از عبارت اصلی کم کنیم و به این ترتیب نتیجه‌ای متناهی به دست آوریم. برای این منظور جواب معادله (۷) را به صورت WKB گونه می‌نویسیم

$$f_A(\tau)=(2W(\tau))^{\frac{-1}{2}}\exp[-i\int^{\tau}W(\tau')d\tau'], \qquad (۱۸)$$

به گونه‌ای که در پایین‌ترین مرتبه بسط بی‌دررو که برای برداشتن واگرایی رخ داده در (۱۷) کافی است، داریم

$$W(\tau)=\left(k^2-\frac{2}{\tau}\frac{eE}{H^2}k_x+\frac{m^2}{\tau^2H^2}+\frac{e^2E^2}{\tau^2H^4}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (۱۹)$$

اگر فرآیند کوانتش و سپس محاسبه جریان را با استفاده از تابع داده شده در معادله‌های (۱۸) و (۱۹) انجام دهیم خواهیم داشت

$$\left\langle j^{1}\right\rangle_{A}=\frac{e}{2\pi^2}H^2\Omega^{-1}(\tau)\lim_{\Lambda\to\infty}\{-\frac{\pi}{2}\lambda\Lambda\}. \qquad (۲۰)$$

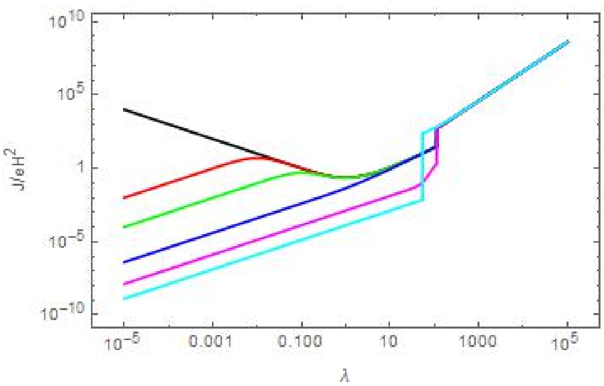
با کم‌کردن معادله (۲۰) از معادله (۱۷) عبارتی متناهی برای جریان القایی به دست می‌آید که نتیجه اصلی این مقاله است. بنابراین جریان بازبهنجار شده را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$J = -\Omega(\tau)(\langle j^1 \rangle - \langle j^1 \rangle_A). \qquad (۲۱)$$

جریان بازبهنجارشده J که از معادله‌های (۱۷)، (۲۰) و (۲۱) خوانده می‌شود در شکل ۱ به صورت تابعی از میدان الکتریکی رسم شده است. این شکل، نشان می‌دهد که برای میدان اسکالر با جرم کوچک‌تر جریان بزرگ‌تر است و در حد میدان بی‌جرم حتی برای میدان‌های الکتریکی بسیار ضعیف نیز جریان بسیار بزرگ است. اجازه دهید مورد میدان بی‌جرم را با دقت بیشتر ببینیم. با جای‌گذاری $m = 0$، $\xi = 0$ و بسط جریان J در حد میدان الکتریکی ضعیف $eE \ll H^2$، جمله پیشتاز در عبارت جریان به دست می‌آید $J = \dfrac{H^4}{\pi^2 E}$. این نتیجه با آنچه نمودار سیاه در شکل ۱ نشان می‌دهد سازگار است. یعنی در حد میدان الکتریکی کوچک فضازمان دوسیتر، رسانندگی بسیار بزرگی برای میدان اسکالر بی‌جرم پیدا می‌کند. این پدیده که فرا-رسانندگی فروسرخ نامیده می‌شود هم‌چنان که در [٤] و [٥] نیز نشان داده شده است برآمده از رفتار تابع موج ویتاکر در حد پایین یا $p \to 0$ انتگرال جریان (١٦) است. با استفاده از خاصیت [٦] تابع ویتاکر $W[\kappa,\gamma,z] \sim z^{\frac{1}{2}-|\gamma|}, \quad z \to 0,$ می‌توان نشان داد که در حد $p \to 0$ انتگرال جریان (١٦) است به صورت زیر رفتار می‌کند $J \sim \int_0 p^{1-2|\gamma|} dp,$. بنابراین هنگامی که $|\gamma| < 1/2$ شود در حد فروسرخ تکانه، جریان القایی واگرا می‌شود. برای میدان اسکالر بی‌جرم در قلمرو میدان الکتریکی ضعیف این شرط برای γ حاصل می‌شود، تعریف داده شده برای γ در معادله (۸) را ببینید.

نتیجه گیری

در این مقاله، با در نظر گرفتن یک میدان اسکالر باردار در زمینه میدان الکتریکی یکنواخت در فضازمان دوسیتر (۱+۲)-بُعدی، چشم‌داشتی خلأ ورودی برای عملگر جریان محاسبه شده است. همان گونه که انتظار نیز داشتیم در این محاسبه واگرایی فرابفش برآمده از انتگرال‌گیری روی تکانه پدید می‌آید. ما به روش بازبهنجارش کم‌کردن بی‌دررو نشان داده‌ایم که این واگرایی برداشته می‌شود و عبارتی متناهی و دقیق برای جریان القایی به دست آورده‌ایم که در شکل ۱ به صورت تابعی از میدان الکتریکی رسم شده است. این شکل، نشان می‌دهد که برای میدان اسکالر با جرم کوچک‌تر جریان بزرگ‌تر است. برای میدان اسکالر بی‌جرم $m = 0$، در حد میدان‌های الکتریکی ضعیف، جریان به صورت E^{-1} تغییر می‌کند که به پدیده‌ی فرا-رسانندگی فروسرخ می‌انجامد. بنابراین برای این مورد جریان القایی ازقانون اهم پیروی نمی‌کند. این پدیده در فضازمان دوسیتر (۱+۱)-بُعدی [٤] و (۱+۳)-بُعدی [٥] نیز مطالعه شده است.



شکل ۱: جریان القایی بهنجار شده J/eH^2 به صورت تابعی از میدان الکتریکی بهنجار شده eE/H^2 رسم شده است. نمودارهای سیاه، قرمز، سبز، آبی، صورتی و فیروزه‌ای به ترتیب متناظر هستند با انتخاب‌های جرم به صورت $m/H = 0, 0.01, 0.1, 1, 10, 100$ در این نمودارها برای سادگی $\xi = 0$ در نظر گرفته شده است.

مرجع‌ها

[۱] J. S. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951); W. Heisenberg and H. Euler, *Z. Phys.* **98**, 714 (1936).
[۲] F. Gelis and N. Tanji, [arXiv:1510.05451 [hep-ph]].
[۳] E. Mottola, *Phys. Rev. D* **31**, 754 (1985).
[٤] M. B. Frb, J. Garriga, S. Kanno, M. Sasaki, J. Soda, T. Tanaka and A. Vilenkin, *JCAP* **1404**, 009 (2014).
[٥] T. Kobayashi and N. Afshordi, *JHEP* **1410**, 166 (2014).
[٦] F.W. J. Olver, D.W. Lozier, R. F. Boisvert and C.W. Clark, *"NIST Handbook of Mathematical Functions,"* Cambridge University Press (2010).
[۷] L. Parker and D. Toms, *"Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity,"* Cambridge University Press, (2009); N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *"Quantum Fields in Curved Space,"* Cambridge University Press, (1984).