ناهنجاری رَد میدان اسکالر در نظریه الکترودینامیک کوانتمی دوسیته ۲ بُعدی

مرضیه اکبری احمد محمودی
دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده فیزیک، دانشگاه کاشان،
کدپستی: ۸۷۳۱۷۵۳۱۵۳، کاشان، ایران
Marzyehakbari088@gmail.com

احسان باورساد
عضو هیات علمی، دانشکده فیزیک، دانشگاه کاشان، کدپستی:
۸۷۳۱۷۵۳۱۵۳، کاشان، ایران
bavarsad@kashanu.ac.ir

چکیده

در این مقاله، چشم‌داشتی خلأ ورودی تانسور انرژی–تکانه میدان اسکالر مختلط جفت‌شده به یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه در فضازمان دوسیته ۲ بُعدی محاسبه شده است. برای بهسازی مقدارهای چشم‌داشتی، بسط پادجمله‌ها را تا مرتبه دو بی‌دررو ساخته‌ایم و نشان داده‌ایم که عبارت‌هایی متناهی برای مولفه‌های تانسور انرژی–تکانه به‌دست می‌آید. ما مقدار ناهنجاری رَد تانسور انرژی–تکانه را محاسبه کرده‌ایم که دقیقا سازگار است با مقداری که پیش از این برای ناهنجاری رَد میدان اسکالر در فضازمان دوسیته ۲ بُعدی به دست آمده است.

کلید واژه ها : میدان اسکالر، الکترودینامیک کوانتمی، فضازمان دوسیته، بهسازی بی‌دررو، ناهنجاری رَد

Trace anomaly of scalar field in 2 dimensional de Sitter quantum electrodynamics

Akbari Ahmad mahmoudi, Marzyeh; Bavarsad, Ehsan

[1] *Department of Physics, University of Kashan, 8731753153, Kashan, Iran*

Abstract

In this paper, the in-vacuum expectation value of the energy-momentum tensor of the complex scalar field coupled to a uniform electric field background in a two dimensional de Sitter spacetime has been computed. For regularization of the expectation values, we have constructed the second order adiabatic expansions of the counterterms and have shown that finite expressions are obtained for the components of the energy-momentum tensor. We have evaluated the trace anomaly of the energy-momentum tensor which exactly agrees with the trace anomaly derived earlier for a scalar field in a two dimensional de Sitter spacetime.

Key words: Scalar field, Quantum electrodynamics, de Sitter spacetime, Adiabatic regularization, Trace anomaly

مقدمه

از آنجایی که تانسور انرژی–تکانه چشمه میدان گرانشی در معادله‌های میدان گرانشی انیشتین است و بخشی از ساختار نظریه میدان‌های کوانتمی را توصیف می‌کند؛ مطالعه‌ی آن از هر دو دیدگاه پدیده‌شناسی و نظری مهم است. فضازمان دوسیته با یک متریک به‌طور نمایی منبسط شونده، دوره تورم را با تقریب خوبی توصیف می‌کند. از این‌رو، مطالعه تانسور انرژی–تکانه نظریه الکترودینامیک کوانتمی در فضازمان دوسیته اهمیت بیشتری نیز دارد. برای دوری از پیچیدگی‌های برآمده از اسپین و بُعد، ما میدان مادی را اسکالر و بُعد فضازمان دوسیته را ۱+۱ درنظر می‌گیریم. اثر میدان‌های گرانشی و الکترومغناطیسی را به‌صورت غیراختلالی درنظر می‌گیریم؛ به دیگر سخن ما این میدان‌ها را زمینه‌هایی کلاسیک فرض میکنیم و تنها میدان اسکالر را کوانتیده می‌کنیم. چون فضازمان دوسیته دارای یک بردار کلینگ زمان‌گونه سرتاسری نیست، از این‌رو نمی‌توان یک خلأ یکتا برای میدان اسکالر کوانتیده شده در این فضازمان تعریف کرد. در این میان، توابع مُد توصیف کننده حالت خلأ ورودی در زمان‌های آغازی همانند توابع مُد در

فضازمان مینکوفسکی رفتار می‌کنند. حالت خلأ ورودی در فضازمان دوسیته هادامارد است [۱]. در فضازمان خمیده، درجه واگرایی فرابنفش مقدارهای چشمداشتی در حالت خلأای که هادامارد باشد همانند فضازمان مینکوفسکی است. از این‌رو، حالت خلأ ورودی که هادامارد است برگزیده می‌شود. مقدار چشمداشتی جریان رسانندگی میدان اسکالر در حالت خلأ ورودی در فضازمان‌های دوسیته ۲ بُعدی [۱]، ۳ بُعدی [۲] و ٤ بُعدی [۳] مطالعه شده است. در مرجع [۲] همچنین تانسور انرژی–تکانه زوج‌های اسکالر شوینگر که در یک میدان الکتریکی یکنواخت در فضازمان دوسیته با بُعد دلخواه خلق شده‌اند با این فرض که جرم آنها از ثابت هابل فضازمان بسیار بزرگتر است، محاسبه شده است و نویسندگان نشان داده‌اند که تولید این زوج‌ها به واپاشی ثابت هابل می‌انجامد. چشم‌داشتی خلأ ورودی رَد تانسور انرژی–تکانه میدان اسکار جفت‌شده به یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه در فضازمان دوسیته ٤ بُعدی در [٤] محاسبه شده است و نویسندگان درباره اثر پسزنی تولید زوج روی میدان گرانشی زمینه بحث کرده‌اند. به تازگی، در مرجع [٥] تانسور انرژی–تکانه میدان دیراک جفت‌شده به میدان الکتریکی یکنواخت زمینه در فضازمان دوسیته ۲ بُعدی محاسبه شده است و برخی پیامدهای آن مطالعه شده است. در این مقاله ما می‌خواهیم ناهنجاری رَد میدان اسکالر جفت شده به میدان الکتریکی زمینه روی تکه پوانکاره فضازمان دوسیته ۲ بُعدی را محاسبه کنیم. با این هدف، چشم‌داشتی خلأ ورودی تانسور انرژی–تکانه میدان اسکالر جفت شده به یک میدان الکتریکی زمینه روی تکه پوانکاره فضازمان دوسیته ۲ بُعدی را محاسبه کنیم؛ به‌گونه‌ای که مقدار ثابت جفت‌شدگی غیرکمینه میدان اسکالر به خمش اسکالر فضازمان دلخواه باشد.

چشم‌داشتی تانسور انرژی–تکانه در حالت خلأ ورودی

متریک فضازمان دوسیته ۲ بُعدی روی تکه پوانکاره از عنصر خط زیر خوانده می‌شود

$$ds^2 = \Omega^2(\tau)\left(d\tau^2 - dx^2\right),$$
$$\Omega(\tau) = \frac{-1}{H\tau}, \quad \tau \in (-\infty, 0), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{۱}$$

به‌گونه‌ای که H ثابت هابل و τ زمان همدیس است. برای داشتن یک میدان الکتریکی یکنواخت با چگالی انرژی ثابت در فضازمان (۱)، پتانسیل برداری الکترومغناطیسی را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$A_\mu = -\frac{E}{H^2\tau}\delta_\mu^1, \tag{۲}$$

به‌گونه‌ای که E یک مقدار ثابت است. در مرجع‌های [۱،۲] توابع مُد فرکانس مثبت میدان اسکالر با جرم m و ثابت جفت شدگی e به میدان پیمانه‌ای الکترومغناطیسی (۲) در فضازمان دوسیته (۱) از حل معادله کلاین–گوردون به دست آمده‌اند

$$U_k(x) = \left(2|k|\right)^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{i\pi\kappa}{2}} e^{+ikx} W_{\kappa,\gamma}\left(2i|k|\tau\right), \tag{۳}$$

به‌گونه‌ای که W تابع ویتاکر، k تکانه در چارچوب همراه است و کمیت‌های بدون بُعد به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$\mu = \frac{m}{H}, \quad \lambda = -\frac{eE}{H^2}, \quad r = \operatorname{sign}(k),$$
$$\kappa = -i\lambda r, \quad \gamma = \sqrt{\frac{1}{4} - 2\xi - \mu^2 - \lambda^2}, \tag{٤}$$

در این تعریف‌ها ξ ثابت جفت‌شدگی غیرکمینه میدان اسکالر به خمش اسکالر فضازمان دوسیته ۲ بُعدی $R = 2H^2$ است. توابع مُد داده شده در معادله (۳) حالت خلأ ورودی که هادامارد است را توصیف می‌کنند.

می‌توان نشان داد که مولفه‌های تانسور انرژی–تکانه برحسب توابع مُد متعامد بهنجار فرکانس مثبت با عبارت‌های زیر داده می‌شوند

$$T_{00} = \int \frac{dk}{2\pi}[\left|\partial_0 U_k\right|^2 - 2\xi\tau^{-1}(U_k\partial_0 U_k^* + U_k^*\partial_0 U_k)$$
$$+\tau^{-2}(k^2\tau^2 + 2\lambda k\tau + \frac{1}{4} - \gamma^2)\left|U_k\right|^2],$$
$$T_{11} = \int \frac{dk}{2\pi}[(1-4\xi)\left|\partial_0 U_k\right|^2 - 2\xi\tau^{-1}(U_k\partial_0 U_k^*$$
$$+U_k^*\partial_0 U_k) + \tau^{-2}((1+4\xi)k^2\tau^2 + (1+4\xi)2\lambda k\tau \tag{٥}$$
$$+(1+4\xi)\lambda^2 + (-1+4\xi)\mu^2 + 8\xi^2)\left|U_k\right|^2],$$
$$T_{01} = i\tau^{-1}\int \frac{dk}{2\pi}[(k\tau+\lambda)(U_k\partial_0 U_k^* - U_k^*\partial_0 U_k)].$$

پس از جای‌گذاری توابع مُد (۳) در عبارت‌های داده شده در معادله (٥) و استفاده از روش انتگرال‌گیری روی توابع ویتاکر که

در مرجع‌های [۱،۳] معرفی شده است، مقدار چشمداشتی خلأ ورودی تانسور انرژی–تکانه به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
T_{00} &= \frac{H^2\Omega^2}{2\pi}[\Lambda^2+\mu^2\log(2\Lambda)+\lambda\gamma\csc(2\pi\gamma)\\
&\times\sinh(2\pi\lambda)+\lambda^2+\frac{\mu^2}{2}-\xi+\frac{\mu^2}{2}(-1+i\csc(2\pi\gamma)\\
&\times\sinh(2\pi\lambda))\psi\left(\frac{1}{2}+\gamma+i\lambda\right)-\frac{\mu^2}{2}(1+i\csc(2\pi\gamma)\\
&\times\sinh(2\pi\lambda))\psi\left(\frac{1}{2}-\gamma+i\lambda\right)],\\
T_{11} &= \frac{H^2\Omega^2}{2\pi}[\Lambda^2-\mu^2\log(2\Lambda)+\lambda\gamma\csc(2\pi\gamma)\\
&\times\sinh(2\pi\lambda)+\lambda^2+\frac{\mu^2}{2}+\xi-\frac{\mu^2}{2}(-1+i\csc(2\pi\gamma)\\
&\times\sinh(2\pi\lambda))\psi\left(\frac{1}{2}+\gamma+i\lambda\right)+\frac{\mu^2}{2}(1+i\csc(2\pi\gamma)\\
&\times\sinh(2\pi\lambda))\psi\left(\frac{1}{2}-\gamma+i\lambda\right)],\\
T_{01} &= \pi^{-1}H^2\Omega^2\lambda\Lambda,
\end{aligned} \tag{۶}$$

به‌گونه‌ای که $\Lambda=-\tau K$ و K یک قطع‌تکانه است که برای بهسازی واگرایی‌های فرابنفش تعریف شده است. تابع ψ مشتق مرتبه اول لگاریتم تابع گاما است که تابع دیگاما نامیده می‌شود.

بسط مرتبه دو بی‌دررو پادجمله‌ها و بهسازی

برای حذف واگرایی‌های فرابنفش از چشمداشتی خلأ ورودی تانسور انرژی–تکانه داده شده در معادله (٦)، از روش بهسازی بی‌دررو استفاده می‌کنیم. با این فرض که تانسور انرژی–تکانه از مرتبه دو و پتانسیل برداری الکترومغناطیسی از مرتبه یک بی‌دررو هستند، پادجمله‌ها را پیدا می‌کنیم. برای معادله کلاین–گوردون

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 f_A}{d\tau^2}+\omega^2(\tau)f_A=0,\\
&\omega(\tau)=-\tau^{-1}\sqrt{\tau^2k^2+2\lambda k\tau+\lambda^2+\mu^2+2\xi},
\end{aligned} \tag{۷}$$

یک جواب از گونه WKB درنظر می‌گیریم

$$f_A(\tau)=\left(2W(\tau)\right)^{\frac{-1}{2}}\exp\left(-i\int W(\tau)d\tau\right), \tag{۸}$$

به‌گونه‌ای که تابع W معادله زیر را برآورده می‌کند

$$W^2(\tau)=\omega^2(\tau)+\frac{3\dot{W}^2}{4W^2}-\frac{\ddot{W}}{2W}, \tag{۹}$$

به‌گونه‌ای که نقطه روی تابع‌ها نشان دهنده مشتق نسبت به زمان همدیس τ است. بسط تابع W در معادله (۹) تا مرتبه دو بی‌دررو به صورت زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned}
&W^{(2)}(\tau)=\omega_0(\tau)+\frac{3\dot{\omega}_0^2}{8\omega_0^3}-\frac{\ddot{\omega}_0}{4\omega_0^2}+\frac{\xi}{\omega_0\tau^2},\\
&\omega_0(\tau)=-\tau^{-1}\sqrt{\tau^2k^2+2\lambda k\tau+\lambda^2+\mu^2+2\xi},
\end{aligned} \tag{۱۰}$$

به‌گونه‌ای که بالانویس مرتبه بی‌دررو را نشان می‌دهد. با جای‌گذاری توابع مُد بی‌دررو داده شده در معادله‌های (۸) و (۱۰) در عبارت‌های (۵) پادجمله‌های مرتبه دو بی‌دررو به دست می‌آیند

$$\begin{aligned}
T_{00}^{(A)} &= \frac{H^2\Omega^2}{2\pi}[\Lambda^2+\mu^2\log(2\Lambda)+\frac{1}{6}+\lambda^2\\
&+\frac{\lambda^2}{12\mu^2}+\frac{\mu^2}{2}-\frac{\mu^2}{2}\log(\mu^2)-2\xi],\\
T_{11}^{(A)} &= \frac{H^2\Omega^2}{2\pi}[\Lambda^2-\mu^2\log(2\Lambda)-\frac{1}{6}+\lambda^2\\
&-\frac{\lambda^2}{12\mu^2}+\frac{\mu^2}{2}+\frac{\mu^2}{2}\log(\mu^2)+2\xi],\\
T_{01}^{(A)} &= \pi^{-1}H^2\Omega^2\lambda\Lambda.
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

چشمداشتی بهسازی شده مولفه‌های تانسور–انرژی تکانه پس از کم‌کردن پادجمله‌های (۱۱) از عبارت‌های بهسازی نشده (٦) به دست می‌آیند. مولفه‌ی غیرقطری تانسور بهسازی شده را صفر به‌دست می‌آوریم

$$T_{01}^{(\text{reg})}=T_{01}-T_{01}^{(A)}=0, \tag{۱۲}$$

و برای مولفه‌های قطری داریم

$$\begin{aligned}
T_{00}^{(\text{reg})} &= T_{00}-T_{00}^{(A)}\\
&= \frac{H^2\Omega^2}{2\pi}[-\frac{1}{6}+\lambda\gamma\csc(2\pi\gamma)\sinh(2\pi\lambda)-\frac{\lambda^2}{12\mu^2}\\
&+\xi+\frac{\mu^2}{2}\log(\mu^2)+\frac{\mu^2}{2}(-1+i\csc(2\pi\gamma)\sinh(2\pi\lambda))\\
&\times\psi\left(\frac{1}{2}+\gamma+i\lambda\right)-\frac{\mu^2}{2}(1+i\csc(2\pi\gamma)\\
&\times\sinh(2\pi\lambda))\psi\left(\frac{1}{2}-\gamma+i\lambda\right)],
\end{aligned} \tag{۱۳}$$

و

$$
\begin{aligned}
T_{11}^{(\mathrm{reg})} &= T_{11} - T_{11}^{(A)} \\
&= \frac{H^2\Omega^2}{2\pi}[+\frac{1}{6} + \lambda\gamma\csc(2\pi\gamma)\sinh(2\pi\lambda) + \frac{\lambda^2}{12\mu^2} \\
&-\xi - \frac{\mu^2}{2}\log(\mu^2) - \frac{\mu^2}{2}(-1 + i\csc(2\pi\gamma)\sinh(2\pi\lambda)) \\
&\times\psi\left(\frac{1}{2} + \gamma + i\lambda\right) + \frac{\mu^2}{2}(1 + i\csc(2\pi\gamma) \\
&\times\sinh(2\pi\lambda))\psi\left(\frac{1}{2} - \gamma + i\lambda\right)],
\end{aligned} \quad (١٤)
$$

رَد تانسور انرژی–تکانه بهسازی شده

رَد تانسور انرژی–تکانه بهسازی شده از معادله‌های (١٣) و (١٤) خوانده می‌شود

$$
\begin{aligned}
T = \frac{H^2}{2\pi}[-\frac{1}{3} + 2\xi + \mu^2\log(\mu^2) - \frac{\lambda^2}{6\mu^2} \\
+\mu^2(-1 + i\csc(2\pi\gamma)\sinh(2\pi\lambda))\psi\left(\frac{1}{2} + \gamma + i\lambda\right) \\
-\mu^2(1 + i\csc(2\pi\gamma)\sinh(2\pi\lambda))\psi\left(\frac{1}{2} - \gamma + i\lambda\right)].
\end{aligned} \quad (١٥)
$$

ناهنجاری رَد تانسور انرژی–تکانه با گرفتن به ترتیب، حدهای میدان الکتریکی صفر $\lambda \to 0$، جرم میدان اسکالر صفر $\mu \to 0$ و ثابت جفت‌شدگی غیرکمینه صفر $\xi \to 0$ از عبارت داده شده در معادله (١٥) به دست می‌آید که می‌شود

$$
\lim_{\substack{\lambda\to 0,\\ \mu\to 0,\\ \xi\to 0}} T = -\frac{H^2}{6\pi} = -\frac{R}{12\pi}, \quad (١٦)
$$

به‌گونه‌ای که $R = 2H^2$ خمش اسکالر فضازمان دوسیته ۲ بُعدی است. نتیجه (١٦) ناهنجاری رَد میدان اسکالر مختلط است، از این‌رو دو برابر مقدار ناهنجاری رَد برای میدان اسکالر حقیقی به دست آمده است. بنابراین نتیجه (١٦) با مقدار ناهنجاری رَد یک میدان اسکالر حقیقی که $-R/(24\pi)$ است [٦] دقیقاً سازگار است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله ما چشمداشتی تانسور انرژی–تکانه میدان اسکالر مختلط جفت شده به یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه روی تکه پوانکاره فضازمان دوسیته ۲ بُعدی را در حالت هادامارد خلأ وردی حساب کردیم، معادله (٦) را ببینید. برای بهسازی تانسور، بسط بی‌دررو پادجمله‌ها را تا مرتبه دو ساخته‌ایم، و نشان داده‌ایم که واگرایی‌های فرابنفش از مقدارهای چشمداشتی مولفه‌های تانسور حذف می‌شوند، معادله‌های (١٢)، (١٣) و (١٤) را ببینید. ما یافته‌ایم که مولفه‌های غیرقطری تانسور انرژی–تکانه بهسازی شده صفر می‌شوند، معادله (١٢) را ببینید. با داشتن تانسور انرژی–تکانه بهسازی شده، رَد آن را محاسبه کرده‌ایم، معادله (١٥) را ببینید. ما یافته‌ایم که بسط پادجمله‌ها تا مرتبه دو بی‌دررو برای بهسازی تانسور انرژی–تکانه، به مقدار شناخته‌شده برای ناهنجاری رَد می‌انجامد، معادله (١٦) را ببینید.

مرجع‌ها

[1] M. B. Fröb, J. Garriga, S. Kanno, M. Sasaki, J. Soda, T. Tanaka and A. Vilenkin, JCAP **1404**, 009 (2014) [arXiv:1401.4137 [hep-th]].
[2] E. Bavarsad, C. Stahl and S. S. Xue, Phys. Rev. D **94**, no. 10, 104011 (2016) [arXiv:1602.06556 [hep-th]].
[3] T. Kobayashi and N. Afshordi, JHEP **1410**, 166 (2014) [arXiv:1408.4141 [hep-th]].
[4] E. Bavarsad, S. P. Kim, C. Stahl and S. S. Xue, arXiv:1909.09319 [hep-th].
[5] M. Botshekananfard and E.Bavarsad, arXiv:1911.10588 [hep-th].
[6] M. J. Duff, Nucl. Phys. B **125**, 334 (1977).