اثر پس‌زنی گرانشی تولید زوج شوینگر در یک میدان الکتریکی قوی در فضا-زمان دوسیته

احسان باورساد*، ناربه مارگسیان

دانشکده فیزیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

دریافت: 1396/06/13 ویرایش نهائی: 1396/10/09 پذیرش: 1396/11/07

چکیده

در این مقاله، یک میدان اسکالر جرم‌دار و باردار در یک میدان الکتریکی یکنواخت قوی زمینه در یک فضا-زمان دوسیته با بُعد دلخواه در نظر گرفته شده است. با استفاده از ضریب‌های بوگولیوبف[1]، تانسور شبه‌کلاسیک[2] انرژی-تکانه زوج‌های شوینگر[3] تولید شده را در حد میدان الکتریکی قوی به‌دست می‌آوریم. ما نشان داده‌ایم که رَد[4] تانسور شبه‌کلاسیک انرژی-تکانه صفر می‌شود. ما یافته‌ایم که مؤلفه‌های غیرصفر تانسور شبه‌کلاسیک انرژی-تکانه با افزایش میدان الکتریکی به‌صورت توانی افزایش پیدا می‌کنند. نتیجه‌های ما برای تانسور شبه‌کلاسیک انرژی-تکانه برای بحث دربارهٔ اثر پس‌زنی گرانشی تولید زوج شوینگر مهم هستند. ما نشان داده‌ایم که ثابت هابل واپاشی می‌کند و مقیاس زمان برای واپاشی آن با افزایش میدان الکتریکی به‌صورت توانی کاهش می‌یابد.

کلیدواژگان: میدان اسکالر، فضا-زمان دوسیته، اثر شوینگر، تانسور شبه‌کلاسیک انرژی-تکانه، پس‌زنی گرانشی

مقدمه

اثر شوینگر [1] به پدیدهٔ تولید زوج به‌وسیلهٔ یک میدان الکترومغناطیسی قوی زمینه در فضا-زمان مینکوفسکی گفته می‌شود که یک پدیدهٔ غیراختلالی در نظریهٔ میدان‌های کوآنتومی است. با وجود تلاش‌های فراوان، هنوز این پدیده در آزمایشگاه‌های روی زمین دیده نشده است. دلیل اصلی آن این است که آهنگ تولید زوج در میدان‌های الکتریکی ضعیف‌تر از مقدار بحرانی $E_{\rm critical} \simeq 1.3\times10^{18}\,{\rm V/M}$ [2] به‌طور نمایی کاهش می‌یابد. به‌همین دلیل در سال‌های اخیر پیشنهاد شده است که اثر شوینگر را در سامانه‌های اخترفیزیکی و کیهان‌شناسی مطالعه کنیم، چون به‌طور طبیعی در این سامانه‌ها میدان‌های الکترومغناطیسی و گرانشی قوی وجود دارند. در مرجع3 برخی از این ایده‌ها مطالعه شده‌اند. در دورهٔ مغناطیس‌زایی[5] تورمی میدان‌های الکتریکی قوی نیز تولید می‌شوند [4]، بنابراین مطالعهٔ اثر شوینگر در این دوره مهم است. بدون نیاز به در نظر گرفتن یک میدان الکتریکی تولید ذره در فضا-زمان دوسیته نیز رخ می‌دهد [5]، که گاهی به آن اثر شوینگر کیهان‌شناسی نیز گفته می‌شود [6].

به‌تازگی، اثر شوینگر به‌دلیل اهمیت آن در کیهان‌شناسی، برای انواع گوناگون ذرات در ابعاد گوناگون فضا-زمان دوسیته مطالعه شده است. اثر شوینگر در یک فضا-زمان دوسیته در مقاله‌های [۷،۸]،

* نویسنده مسئول: bavarsad@kashanu.ac.ir

[1] Bogoliubov
[2] Semiclassical
[3] Schwinger
[4] Trace
[5] Magnetogenesis

به‌ترتیب در 1+1 و 1+3 بُعد مورد بررسی قرار گرفته است. در این کارها چشم‌داشتی خلأ عملگر جریان رسانندگی میدان اسکالر مطالعه شده است. در مرجع [9]، اثر شوینگر و جریان رسانندگی میدان اسکالر در فضا-زمان دوسیته 1+2 بُعدی به‌عنوان مثالی از فضا-زمان دوسیته با بُعد فرد مطالعه شده است. در مرجع‌های [۱۰،۱۱] اثر شوینگر و جریان رسانندگی القایی برای میدان فرمیونی به‌ترتیب در فضا-زمان‌های دوسیته 1+1 و 1+3 بُعدی مطالعه شده است. در همهٔ کارهای [11-7] دو میدان زمینه در نظرگرفته شده است: میدان الکتریکی و میدان گرانشی. این میدان‌های الکتریکی و گرانشی زمینه از راه سازوکار شوینگر زوج ذره‌های باردار را خلق می‌کنند. زوج‌های خلق شده خود دارای میدان الکترومغناطیسی و تانسور انرژی-تکانه هستند. میدان الکترومغناطیسی زوج‌های تازه خلق شده، میدان الکتریکی زمینه را تغییر می‌دهد که به این پدیده اثر پس‌زنی تولید زوج شوینگر روی میدان الکترومغناطیسی یا به‌اختصار پس‌زنی الکترومغناطیسی می‌گوییم. تانسور انرژی-تکانه زوج‌های تازه خلق شدهٔ شوینگر میدان گرانشی زمینه را تغییر می‌دهد که به این پدیده اثر پس‌زنی تولید زوج شوینگر روی میدان گرانشی یا به‌اختصار پس‌زنی گرانشی می‌گوییم. برای مطالعهٔ اثر پس‌زنی روی میدان الکترومغناطیسی به جریان رسانندگی و برای مطالعه اثر پس‌زنی روی میدان گرانشی به تانسور انرژی-تکانه نیاز است. با داشتن جریان رسانندگی، اثر پس‌زنی روی میدان الکترومغناطیسی توسط اسکالرها [8] و فرمیون‌های [12] شوینگر به‌ترتیب در فضا-زمان‌های دوسیته 1+3 و 1+1 بُعدی مطالعه شده است.

بدون درنظر گرفتن میدان الکتریکی زمینه، تانسور انرژی-تکانه ذرات اسکالر [19-۵،۱۳] و فرمیون [23-20] در میدان گرانشی خالص یک جهان فریدمان-لومتر-رابرتسون-واکر[1] (که دوسیته حالت خاص آن است) با در نظر گرفتن متریکی که قسمت فضایی آن تخت است، مطالعه شده است. در مرجع‌های [5،13،14] نویسندگان اثر پس‌زنی تولید ذره در فضا-زمان دوسیته را مطالعه کرده‌اند. در [۵،14] نشان داده‌اند که تولید ذره به واپاشی ثابت هابل می‌انجامد. درحالی که در کارهای [15-23] نویسندگان بیشتر نظریه بازبهنجارش را توسعه داده‌اند.

در مرجع [9] برای اولین بار اثر پس‌زنی روی میدان گرانشی توسط اسکالرهای شوینگر با تعریف تانسور شبه‌کلاسیک انرژی-تکانه در فضا-زمان دوسیته با بُعد دلخواه مطالعه شده است. در آن کار نویسندگان با در نظر گرفتن یک میدان اسکالر سنگین نشان داده‌اند که ثابت هابل واپاشی می‌کند به‌طوری که مقیاس زمان برای واپاشی آن با افزایش جرم میدان اسکالر به‌طور نمایی بزرگ می‌شود. در مرجع‌های [24،۲۵] در حالت خلأ ورودی، چشم‌داشتی عملگر رَد تانسور-انرژی تکانه اسکالرهای شوینگر به‌ترتیب در فضا-زمان‌های دوسیته 1+1 و 1+2 بُعدی مطالعه شده است. در آن کارها اثر پس‌زنی روی میدان گرانشی مطالعه نشده است اما نشان داده شده که رَد بازبهنجارشده به‌روش کم‌کردن بی‌دررو[2]، در مقدارهای مشخص جرم اسکالر و شدت میدان الکتریکی، تغییر علامت می‌دهد. در این مقاله با هدف کامل کردن کار انجام شده در مقاله [9] ما یک میدان اسکالر را در یک میدان الکتریکی یکنواخت قوی زمینه در فضا-زمان دوسیته با بُعد دلخواه درنظر می‌گیریم. پس از محاسبه تانسور شبه‌کلاسیک انرژی تکانه در حد میدان الکتریکی قوی، اثر پس‌زنی آن روی میدان گرانشی زمینه را مطالعه خواهیم کرد.

[1] Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker

[2] Adiabatic subtraction method

اثر شوینگر

برای آغاز مطالعهٔ اثر شوینگر، کنش یک میدان اسکالر جفت‌شده به میدان پیمانه‌ای الکترومغناطیسی در فضا-زمان دوسیته را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$S=\int d^{D}x\sqrt{|g|}[g^{\mu\nu}(\partial_{\mu}+ieA_{\mu})\varphi \times(\partial_{\nu}-ieA_{\nu})\varphi^{*}-(m^{2}+\xi R)\varphi\varphi^{*} -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}], \quad 1$$

به‌گونه‌ای که m و e به‌ترتیب جرم و بار الکتریکی میدان اسکالر مختلط φ هستند. ما در این مقاله بُعد فضا-زمان دوسیته را با D و تعداد بُعدهای مکانی را با d نشان می‌دهیم، بنابراین $D=1+d$ است. $|g|$ قدر مطلق دترمینان متریک است. ξ ثابت جفت‌شدگی میدان اسکالر به خمش اسکالر R فضا-زمان دوسیته $D=1+d$ بُعدی (dS_D) است. متریک فضا-زمان دوسیته را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$ds^{2}=\Omega^{2}(\tau)(d\tau^{2}-d\mathbf{x}^{2}), \quad \tau\in(-\infty,0), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^{d}, \quad 2$$

عامل مقیاس همدیس به‌صورت زیر داده می‌شود

$$\Omega(\tau)=-\frac{1}{\tau H}, \quad 3$$

به‌گونه‌ای که H ثابت هابل است. ما در این مقاله پیش از آغاز مطالعه اثر پس‌زنی روی میدان گرانشی، ثابت هابل H را یک مقدار ثابت بدون وابستگی به زمان در نظر می‌گیریم. از این‌رو، خمش اسکالر dS_D یک مقدار ثابت بدون وابستگی به مختصات زمان و مکان $R=D(D-1)H^{2}$ به‌دست می‌آید. در ادامه این مقاله برای سادگی $\xi=0$ قرار می‌دهیم. برای توصیف یک میدان الکتریکی یکنواخت در dS_D پتانسیل برداری الکترومغناطیسی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$A_{\mu}=-\frac{E}{\tau H^{2}}\delta_{\mu}^{1}, \quad 4$$

به‌گونه‌ای که E یک مقدار ثابت است. از این رو، تنها مؤلفه‌های غیرصفر تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی به‌صورت زیر داده می‌شوند

$$F_{01}=-F_{10}=\partial_{0}A_{1}-\partial_{1}A_{0}=\Omega^{2}(\tau)E. \quad 5$$

از کنش 1 معادله کلاین-گوردُن[1] خوانده می‌شود

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_{\mu}\left(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}\varphi\right) +2ieA^{\mu}\partial_{\mu}\varphi-e^{2}A^{\mu}A_{\mu}\varphi+m^{2}\varphi=0. \quad 6$$

می‌توان نشان داد که جواب‌های متعامد بهنجار معادلهٔ6، که در حد زمان‌های آغازی ($\tau\to-\infty$) دارای رفتار مجانبی موج تخت هستند، برای مُدهای[2] فرکانس مثبت و منفی به‌ترتیب به‌صورت زیر داده می‌شوند [9]

$$U_{\mathbf{in,k}}(x)=(2k)^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{i\kappa\pi}{2}}\Omega^{\frac{2-D}{2}}(\tau) \times e^{+i\mathbf{k.x}}W_{\kappa,\gamma}(z_{+}),$$
$$V_{\mathbf{in,k}}(x)=(2k)^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{-i\kappa\pi}{2}}\Omega^{\frac{2-D}{2}}(\tau) \times e^{-i\mathbf{k.x}}W_{\kappa,-\gamma}(z_{-}). \quad 7$$

از طرف دیگر، جواب‌های متعامد بهنجار معادلهٔ6، که در حد زمان‌های پایانی ($\tau\to0$) دارای رفتار مجانبی موج تخت هستند، برای مُدهای فرکانس مثبت و منفی به‌ترتیب به‌صورت زیر داده می‌شوند [9]

$$U_{\mathbf{out,k}}(x)=(4|\gamma|k)^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{i\gamma\pi}{2}}\Omega^{\frac{2-D}{2}}(\tau) \times e^{+i\mathbf{k.x}}M_{\kappa,\gamma}(z_{+}),$$
$$V_{\mathbf{out,k}}(x)=(4|\gamma|k)^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{i\gamma\pi}{2}}\Omega^{\frac{2-D}{2}}(\tau) \times e^{-i\mathbf{k.x}}M_{\kappa,-\gamma}(z_{-}). \quad 8$$

در معادله‌های 7 و 8 W,M توابع ویتاکر[3] [26] هستند و زیرنویس‌های in و out نشان دهنده رفتار دلخواه توابع مُد به‌ترتیب در زمان‌های آغازی و پایانی هستند. پارامترهای بی‌بُعد به‌صورت زیر تعریف شده‌اند

[1] Klein-Gordon
[2] Modes
[3] Whittaker

$$\begin{aligned} &k=|\mathbf{k}|,\quad r=\frac{k_x}{k},\quad \lambda_m=\frac{m}{H},\\ &\lambda=-\frac{eE}{H^2},\quad \rho=\sqrt{\lambda_m^2+\lambda^2},\\ &\gamma=\sqrt{\frac{d^2}{4}-\rho^2},\quad \kappa=-i\lambda r,\\ &z_+=2ik\tau,\quad z_-=-2ik\tau. \end{aligned} \tag{9}$$

برای داشتن حالت‌های فیزیکی قابل قبول، نیاز داریم که حالت‌های ذره‌ای خوش تعریف در زمان‌های آغازی و پایانی داشته باشیم تا بتوانیم برانگیختگی‌های میدان اسکالر را به‌عنوان ذره تعریف کنیم. برای این منظور باید میدان‌های الکتریکی و گرانشی زمینه کندتغییر باشند. این شرط، بی‌دررو نامیده می‌شود که یک تقریب شبه‌کلاسیک است. معادله کلاین-گوردُن (6) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2}+\nu^2(\tau) f(\tau)=0, \tag{10}$$

به‌گونه‌ای که فرکانس وابسته به زمان به‌صورت زیر داده می‌شود

$$\nu^2(\tau)=k^2+\frac{2\lambda k_x}{\tau}+\frac{(1/4)-\gamma^2}{\tau^2}. \tag{11}$$

شرایط بی‌دررو ایجاب می‌کند که در همه زمان‌ها فرکانس $\nu(\tau)$ یک تابع کند تغییر با زمان باشد و رابطه‌های زیر برآورده شوند

$$\frac{\dot{\nu}^2}{\nu^4}\ll 1,\qquad \frac{\ddot{\nu}}{\nu^3}\ll 1, \tag{12}$$

به‌گونه‌ای که نقطهٔ نشان دهنده مشتق نسبت به زمان همدیس τ است. در زمان‌های بینهایت گذشته ($\tau\to-\infty$)، فرکانس11 به مقدار $\nu\sim k$ میل می‌کند که رابطه‌های12 را برآورده می‌کند. در زمان‌های بینهایت آینده ($\tau\to 0$) خواهیم داشت

$$\frac{\dot{\nu}^2}{\nu^4}\sim\frac{1}{2}\frac{\ddot{\nu}}{\nu^3}\sim\left(\lambda^2+\lambda_m^2+\frac{1-d^2}{4}\right)^{-1}. \tag{13}$$

با این فرض که تعداد بُعدهای فضا-زمان خیلی بزرگ نباشد، به‌دیگر سخن، مرتبهٔ بزرگی d یک باشد، در این صورت اگر

$$\lambda^2+\lambda_m^2\gg 1 \tag{14}$$

باشد، آنگاه شرایط بی‌دررو12 در زمان‌های آینده نیز برقرار خواهد بود. تحت شرایط شبه‌کلاسیک14 راجع به دو قلمرو حدی می‌توان بحث کرد: قلمرو میدان اسکالر سنگین $\lambda_m\gg\max(1,\lambda)$ و قلمرو میدان الکتریکی قوی $\lambda\gg\max(1,\lambda_m)$. خلق ذره زمانی روی می‌دهد که شرایط بی‌دررو12 نقض شوند. بنابراین زمان خلق یک ذره با تکانه همراه[1] k هنگامی است که تابع $\nu(\tau)$ تغییر سریعی داشته باشد، به دیگر سخن، در نقاط بیشینهٔ تابع $|\dot{\nu}/\nu^2|$ [۷،۸]. تحلیل تابع $|\dot{\nu}/\nu^2|$ نشان می‌دهد که زمان خلق یک ذره با تکانه همراه k به‌صورت زیر تخمین زده می‌شود [8]

$$\tau\sim-\frac{\rho}{k}, \tag{15}$$

به‌گونه‌ای که ρ در معادلهٔ9 تعریف شده است.

با داشتن دو مجموعه کامل متعامد بهنجار از توابع مُد که در معادله‌های7 و 8 داده شده‌اند، می‌توان ضریب‌های بوگولیوبف را از ضرب اسکالر توابع مُد به‌دست آورد. می‌توان نشان داد [9]

$$\begin{aligned} |\alpha_{\mathbf{k}}|^2&=\frac{e^{2i\pi\kappa}+e^{2\pi|\gamma|}}{2\sinh\left(2\pi|\gamma|\right)},\\ |\beta_{\mathbf{k}}|^2&=\frac{e^{2i\pi\kappa}+e^{-2\pi|\gamma|}}{2\sinh\left(2\pi|\gamma|\right)}, \end{aligned} \tag{16}$$

به‌گونه‌ای که رابطهٔ بهنجارش $|\alpha_{\mathbf{k}}|^2-|\beta_{\mathbf{k}}|^2=1$ برآورده می‌شود. ضریب بوگولیوبف $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$ برابر است با چگالی تعداد ذرات شوینگر خلق شده با تکانه همراه $\mathbf{k}$ به‌دیگر سخن، تابع توزیع ذرات تولید شده است [7-9]. با درنظر گرفتن تعریف $\kappa=-\frac{i\lambda k_x}{k}$،

[1] Comoving

معادلهٔ16 نشان می‌دهد ضریب بوگولیوبف $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$ برای $k_x > 0$ و $k_x < 0$ غیرصفر است. برای محاسبهٔ تانسور شبه‌کلاسیک انرژی-تکانه روی همه مقدارهای ممکن k_x انتگرال گرفته می‌شود؛ معادلهٔ17 را در ادامه ببینید. چون رابطهٔ شبه‌کلاسیک15 و نتیجه‌های ما در این مقاله به علامت λ بستگی ندارند، برای سادگی λ را همواره مثبت درنظر می‌گیریم.

تانسور شبه‌کلاسیک انرژی-تکانه

در مرجع [9] تانسور شبه‌کلاسیک انرژی-تکانه ذرات شوینگر به‌صورت زیر تعریف شده است

$$T^{\mu\nu} = |g|^{\frac{-1}{2}} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{p_{\mathbf{k}}^{\mu} p_{\mathbf{k}}^{\nu}}{p_{\mathbf{k}}^0} |\beta_{\mathbf{k}}|^2, \qquad 17$$

به‌گونه‌ای که g دترمینان متریک است و از معادلهٔ2 خوانده می‌شود و ضریب بوگولیوبف $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$ در معادلهٔ16 داده شده است. در معادلهٔ2 مختصات همدیس تخت فضا-زمان دوسیته، مؤلفه‌های بردار تکانه فیزیکی p^{μ} یک ذره شبه‌کلاسیک باردار هستند که در پتانسیل الکتریکی داده شده در معادلهٔ4 حرکت می‌کند و با استفاده از جفت‌شدگی کمینه، به‌صورت زیر داده می‌شوند

$$\begin{aligned} &p_{\mathbf{k}}^i = \Omega^{-2}(\tau)\delta^{ij}\left(k_j + eA_j\right), \\ &i = 1,\ldots,d, \\ &p_{\mathbf{k}}^0 = \Omega^{-1}(\tau)\sqrt{m^2 + \Omega^2(\tau)\delta_{ij}\, p_{\mathbf{k}}^i p_{\mathbf{k}}^j}. \end{aligned} \qquad 18$$

در مرجع [9] تانسور معادلهٔ17 در حد میدان اسکالر سنگین $\lambda_m \gg \max(1,\lambda)$ محاسبه شده و از آن برای مطالعهٔ اثر پس‌زنی گرانشی تولید زوج استفاده شده است. در این مقاله، هدف اصلی ما این است که تانسور17 را در حد میدان الکتریکی قوی $\lambda \gg \max(1,\lambda_m)$ محاسبه کرده و از آن برای مطالعه اثر پس‌زنی گرانشی تولید زوج استفاده کنیم. برای محاسبه انتگرال17 مؤلفه‌های بردار تکانه همراه $\mathbf{k}$ را در مختصات کروی می‌نویسیم

$$k_i = k\omega_i, \qquad i = 1,\ldots,d, \qquad 19$$

به‌گونه‌ای که $k = \sqrt{k_i k_i}$ اندازه بردار و ω_i مختصات توصیف کننده رویه یک کره $d-1$ بُعدی با شعاع یک هستند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} &\omega_1 = \cos\theta_1, \\ &\omega_2 = \sin\theta_1 \cos\theta_2, \\ &\vdots \\ &\omega_{d-1} = \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{d-2} \cos\theta_{d-1}, \\ &\omega_d = \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{d-2} \sin\theta_{d-1}, \\ &0 \le \theta_1,\ldots,\theta_{d-2} \le \pi, \quad 0 \le \theta_{d-1} \le 2\pi. \end{aligned} \qquad 20$$

در معادلهٔ15 زمان خلق یک ذره با اندازه تکانه همراه $k = \sqrt{k_i k_i}$ تخمین زده شده است. ما برای مشخص شدن مؤلفه‌های تکانه فیزیکی18 به یک رابطه نیاز داریم که زمان خلق یک ذره را با مؤلفهٔ تکانهٔ همراه k_i تخمین بزند. ما این رابطه را در حد میدان الکتریکی قوی، به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$k_i \tau \sim \lambda\omega_i, \qquad i = 1,\ldots,d. \qquad 21$$

با درنظر گرفتن اینکه در حد میدان الکتریکی قوی $\rho \simeq \lambda$، رابطهٔ میان مختصات $\omega_i\omega_i = 1$ است، می‌توان نشان داد که رابطهٔ21 با رابطهٔ15 سازگار است. رابطهٔ21 با رابطهٔ مشابه داده شده در مرجع [7] برای مورد فضا-زمان دوسیته 1+1 بُعد سازگار است. با استفاده از رابطهٔ21 تکانهٔ فیزیکی ذرات با عبارت‌های زیر تقریب زده می‌شوند

$$\begin{aligned} &p_{\mathbf{k}}^0 \simeq \Omega^{-1}(\tau) H\lambda\sqrt{2(1+\cos\theta_1)}, \\ &p_{\mathbf{k}}^1 \simeq -\Omega^{-1}(\tau) H\lambda(1+\cos\theta_1), \\ &p_{\mathbf{k}}^i \simeq -\Omega^{-1}(\tau) H\lambda\omega^i, \qquad i = 2,\ldots,d, \end{aligned} \qquad 22$$

با یادآوری تعریف $|\gamma| = \sqrt{\lambda^2 + \lambda_m^2 - (d^2/4)}$، در حد میدان الکتریکی قوی $\lambda \gg \max(1,\lambda_m)$ می‌توان نوشت $|\gamma| \simeq \lambda$، از این‌رو ضریب بوگولیوبف16 با عبارت تقریبی زیر داده می‌شود

$$|\beta_{\mathbf{k}}|^2 \simeq \exp\left[2\pi\lambda\left(\cos(\theta_1)-1\right)\right]. \qquad 23$$

با درنظر گرفتن مختصات قطبی کروی20، عنصر دیفرانسیلی انتگرال‌گیری به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} d^d k &= d\Sigma_{d-1} k^{d-1} dk, \\ d\Sigma_{d-1} &= (\sin\theta_1)^{d-2} \cdots \sin\theta_{d-2} \\ &\quad \times d\theta_1 \cdots d\theta_{d-1}, \end{aligned} \qquad 24$$

به‌گونه‌ای که $d\Sigma_{d-1}$ عنصر سطح یک کره $d-1$ بُعدی است. اکنون با جای‌گذاری معادلهٔ24 در معادلهٔ17 خواهیم داشت

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{\Omega^{-D}(\tau)}{(2\pi)^d} \int d\Sigma_{d-1} |\beta_{\mathbf{k}}|^2 \frac{p_{\mathbf{k}}^{\mu} p_{\mathbf{k}}^{\nu}}{p_{\mathbf{k}}^{0}} \\ &\quad \times \int_0^{\infty} k^{d-1} dk. \end{aligned} \qquad 25$$

انتگرال k در سمت راست معادلهٔ25 آشکارا واگرا است، زیرا همهٔ ذرات تولید شده از زمان بینهایت گذشته تا بینهایت آینده را به‌حساب می‌آورد. اما تعداد ذرات تولید شده در یکای حجم، یکای زمان متناهی است [7-9]. بنابر شرایط بی‌دررو، در قلمرو میدان الکتریکی قوی، می‌دانیم که زمان خلق یک ذره با تکانه k با معادلهٔ15 داده می‌شود، به‌گونه‌ای که در معادلهٔ15 $\rho \simeq \lambda$ در نظر گرفته می‌شود. ما برای محاسبهٔ مقداری متناهی برای انتگرال25 از روشی مشابه [7-9] استفاده می‌کنیم: از معادلهٔ15 برای تبدیل انتگرال تکانه k به یک انتگرال زمان τ استفاده می‌کنیم. سپس به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \int_0^{k_{\max}} k^{d-1} dk &= \lambda^d H^{d+1} \int_{-\infty}^{\tau} \Omega^{d+1}(\tau') d\tau' \\ &= \frac{\lambda^d H^d}{d} \Omega^d(\tau), \end{aligned} \qquad 26$$

به‌گونه‌ای که d نشان دهندهٔ تعداد بُعدهای مکانی فضا-زمان دوسیته $D=1+d$ بُعدی است. سرانجام با جاگذاری عبارت‌های صریح 24-22 و استفاده از معادلهٔ26، در قلمرو میدان الکتریکی قوی مؤلفه‌های تانسور شبه‌کلاسیک انرژی-تکانه به‌دست می‌آیند

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{C(4\pi\lambda)^{\frac{1}{4}}}{\Gamma\left(d-\frac{1}{2}\right)} M_{\frac{-1}{4},\frac{d}{2}-\frac{3}{4}}(4\pi\lambda), \\ T^{11} &= \frac{Cd(4\pi\lambda)^{\frac{-1}{4}}}{2\Gamma\left(d+\frac{1}{2}\right)} M_{\frac{-3}{4},\frac{d}{2}-\frac{1}{4}}(4\pi\lambda), \\ T^{01} &= \frac{C\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma(d)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} M_{\frac{-1}{2},\frac{d-1}{2}}(4\pi\lambda), \\ T^{ij} &= \delta^{ij} \frac{C(4\pi\lambda)^{\frac{-1}{4}}}{2\Gamma\left(d+\frac{1}{2}\right)} M_{\frac{1}{4},\frac{d}{2}-\frac{1}{4}}(4\pi\lambda), \\ T^{0i} &= 0, \qquad i=2,\ldots,d, \\ C &= \Omega^{-2}(\tau) \frac{H^D \lambda^{\frac{d}{2}+1} e^{-2\pi\lambda}}{(2\pi)^d d\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right). \end{aligned} \qquad 27$$

با استفاده از روابط بازگشتی [26] توابع ویتاکر می‌توان نشان داد رَد تانسور داده شده در معادلهٔ27 صفر می‌شود

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = 0, \qquad 28$$

این خاصیت، سازگار است با این واقعیت که رَد تانسور انرژی-تکانه یک شاره کامل با معادلهٔ حالت تابش صفر است. برای ساده‌تر استخراج کردن نتیجه‌های فیزیکی، رفتار مؤلفه‌های تانسور معادلهٔ27 را در قلمرو حدی $\lambda \to \infty$ جستجو می‌کنیم. در حد $\lambda \to \infty$ جمله‌های پیشتاز[1] مؤلفه‌های غیرصفر تانسور27 به‌صورت زیر داده داده می‌شوند

$$\begin{aligned} T^{00} &\simeq T^{11} \simeq T^{01} \simeq \frac{\Omega^{-2}(\tau) 2|eE|^{1+\frac{D}{2}}}{(2\pi)^{D-1}(D-1)H^2}, \\ T^{ij} &\simeq \delta^{ij} \Omega^{-2}(\tau) \frac{|eE|^{\frac{D}{2}}}{2(2\pi)^D (D-1)}, \\ i &= 2,\ldots,d, \end{aligned} \qquad 29$$

[1] Leading

به‌گونه‌ای که از تعریف $\lambda = |eE|/H^2$ استفاده کرده‌ایم. در قلمرو میدان الکتریکی قوی، چگالی تعداد زوج‌های خلق شده [9]:

$$n = \frac{|eE|^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^{D-1}(D-1)H}, \qquad 30$$

به‌دست آمده است. مقایسهٔ چگالی انرژی زوج‌های خلق شده که با T^{00} در رابطهٔ29 و چگالی تعداد آنها در رابطهٔ30 نشان می‌دهد که انرژی متوسط هر زوج برابر است با $2|eE|/H$، که مقدار انرژی پتانسیل الکتریکی یک زوج ذره با بار e است که در میدان الکتریکی خارجی E مسافت افق هابل H^{-1} را می‌پیمایند.

اثر پس‌زنی گرانشی

هدف ما در این بخش ارائه یک بحث کوتاه درباره اثر پس‌زنی گرانشی زوج‌های اسکالر شوینگر است که در بخش پیشین تانسور شبه‌کلاسیک انرژی-تکانه آنها را محاسبه کردیم. برای این منظور، روش [9] را پیش می‌گیریم. یک روش دقیق‌تر مطالعهٔ اثر پس‌زنی تولید زوج روی میدان گرانشی این است که دورهٔ زمانی تولید زوج را به بازه‌های به اندازه کافی کوچک‌تر تقسیم کنیم. در پایان هر بازهٔ زمانی تانسور انرژی-تکانه زوج‌های خلق شده را محاسبه کنیم و با استفاده از آن معادلهٔ انیشتین را حل کرده و میدان گرانشی تصحیح شده را بیابیم. برای بازهٔ زمانی بعدی این میدان گرانشی تصحیح شده را به‌صورت فضا-زمان زمینه در نظر بگیریم و توابع مُد تصحیح شده را به‌دست بیاوریم و با استفاده از آنها تانسور تصحیح شده انرژی-تکانه را محاسبه کنیم و این فرآیند را تا پایان دورهٔ تولید زوج تکرار کنیم. این شیوهٔ دقیق‌تر مطالعهٔ اثر تولید زوج روی میدان گرانشی، هدف پژوهش ما در این مقاله نیست.

ما در این مقاله شرایطی را در نظر می‌گیریم که چگالی انرژی میدان الکتریکی که متناسب با E^2 است بسیار کوچک‌تر از چگالی انرژی خلأ $H^2M_{\mathrm{P}}^2$ باشد که در آن M_{P} جرم پلانک است. در این شرایط می‌توان فرض کرد که در اثر تولید زوج شکل معادلهٔ انیشتین تغییر نکند. به دیگر سخن، فرض می‌کنیم پس‌زنی تولید زوج تنها به یک ثابت کیهانشناسی مؤثر Λ_{eff} در معادلهٔ انیشتین برای فضا-زمان دوسیته با پارامتر هابل وابسته به زمان بیانجامد. از این‌رو، معادلهٔ انیشتین را به‌صورت زیر می‌توان نوشت

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} + \Lambda_{\mathrm{eff}}\, g^{\mu\nu} = -8\pi G_D T^{\mu\nu}, \qquad 31$$

به‌گونه‌ای که تانسور انرژی-تکانه در معادلهٔ29 داده شده است و $G_D = H^{4-D}M_{\mathrm{P}}^{-2}$ ثابت گرانش نیوتون در $\mathrm{dS_D}$ است. برای تحلیل پس‌زنی گرانشی پارامتر هابل وابسته به‌زمان را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$H(\tau) = \Omega^{-2}(\tau)\frac{d\Omega(\tau)}{d\tau}. \qquad 32$$

با درنظر گرفتن متریک فضا-زمان به‌صورت داده شده در معادلهٔ2، می‌توان نشان داد که تانسور ریچی و خمش اسکالر برحسب $H(\tau)$، به‌صورت زیر داده می‌شوند

$$\begin{aligned}
R_{00} &= (D-1)\left(H^2(\tau) + \Omega^{-1}\dot{H}(\tau)\right)\\
&\quad\times\Omega^2(\tau),\\
R_{ij} &= -\left((D-1)H^2(\tau) + \Omega^{-1}\dot{H}(\tau)\right)\\
&\quad\times\Omega^2(\tau)\delta_{ij},\\
R_{0i} &= 0, \qquad i = 1,\dots,d,\\
R &= (D-1)\left(DH^2(\tau) + 2\Omega^{-1}\dot{H}(\tau)\right).
\end{aligned} \qquad 33$$

اکنون با استفاده از معادله‌های28 و 33 به‌سادگی می‌توان نشان داد که رَد معادلهٔ31 به نتیجه زیر می‌انجامد

$$\Lambda_{\mathrm{eff}} = \left(\frac{D-2}{2D}\right)R. \qquad 34$$

معادلهٔ انیشتین شامل جمله T^{00} را به‌صورت زیر می‌توان نوشت

$$R^{00}-\frac{1}{2}Rg^{00}+\Lambda_{\text{eff}}\,g^{00}=-8\pi G_D T^{00}, \qquad 35$$

با جای‌گذاری معادله‌های ۳۳،۲۹ و 34 در معادلهٔ35 خواهیم داشت

$$\Omega^{-1}(\tau)\frac{dH}{d\tau} = -\frac{8DM_P^{-2}\,|eE|^{\frac{2+D}{2}}}{(2\pi)^{D-2}(D-1)^2(D-2)H^{D-2}}. \qquad 36$$

اگر متریک دوسیته معادلهٔ2 را به‌شکل متریک یک جهان فریدمان-لومتر-رابرتسون-واکر با عامل مقیاس کیهان‌شناسی $a(t)$ بنویسیم

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\mathbf{x}^2, \qquad 37$$

آنگاه به‌سادگی می‌توان نشان داد که تحول زمانی پارامتر هابل برحسب زمان ویژه t به‌صورت زیر داده می‌شود

$$\frac{dH}{dt} = \frac{-8DM_P^{-2}\,|eE|^{\frac{2+D}{2}}}{(2\pi)^{D-2}(D-1)^2(D-2)H^{D-2}}. \qquad 38$$

این نتیجه نشان می‌دهد که تولید زوج شوینگر به واپاشی ثابت هابل می‌انجامد. مشابه با مرجع [5] مقیاس زمان واپاشی ثابت هابل را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$t_B = -\left(\frac{dH}{dt}\right)^{-1} H = \frac{(2\pi)^{D-2}(D-1)^2(D-2)H^{D-1}M_P^2}{8D\,|eE|^{\frac{D+2}{2}}}. \qquad 39$$

بنابراین، تولید زوج شوینگر در قلمرو میدان الکتریکی قوی، به واپاشی ثابت هابل می‌انجامد؛ به‌گونه‌ای که زمان واپاشی با افزایش میدان الکتریکی به‌صورت توانی کاهش پیدا می‌کند. به‌طور خاص برای مورد 3+1 بُعد زمان واپاشی ثابت هابل با افزایش میدان الکتریکی E به‌صورت E^{-3} کاهش می‌یابد.

نتیجه گیری

در این مقاله، یک میدان اسکالر جرم‌دار و باردار در یک میدان الکتریکی قوی زمینه در فضا-زمان دوسیته با بُعد دلخواه در نظر گرفته‌شد. با استفاده از ضریب‌های بوگولیوبف تانسور شبه‌کلاسیک انرژی-تکانه ذرات اسکالر شوینگر تولید شده در قلمرو میدان الکتریکی قوی، محاسبه شد. در حد $\lambda\to\infty$، تانسور شبه‌کلاسیک انرژی-تکانه با توان مناسبی که به بُعد فضا-زمان بستگی دارد افزایش یافت. از تانسور شبه‌کلاسیک انرژی-تکانه برای مطالعهٔ اثر پس‌زنی تولید زوج شوینگر در قلمرو میدان الکتریکی قوی استفاده شد. همچنین محاسبه شد تولید زوج شوینگر در قلمرو میدان الکتریکی قوی، به واپاشی ثابت هابل می‌انجامد. با انجام محاسبات نشان داده شد زمان واپاشی ثابت هابل با افزایش میدان الکتریکی به‌صورت توانی کاهش پیدا می‌کند و با افزایش میدان الکتریکی آهنگ تولید زوج افزایش پیدا می‌کند [7-9]. با افزایش آهنگ تولید زوج، در واقع آهنگ تبدیل انرژی گرانشی به ماده افزایش پیدا می‌کند. بنابراین انتظار داریم زمان واپاشی ثابت هابل کوتاه‌تر شود. مقایسه با مسأله هم‌ارز در قلمرو میدان اسکالر سنگین نشان می‌دهد [9] که در آن مورد با افزایش جرم میدان اسکالر چون آهنگ تولید زوج کمتر می‌شود، بنابراین زمان واپاشی ثابت هابل نیز به‌طور نمایی افزایش می‌یابد.

سپاس گزاری

احسان باورساد از حمایت این پژوهش توسط دانشگاه کاشان با شماره پژوهانه 317203/4 سپاس‌گزاری می‌کند.

مرجع‌ها

[1] J.S. Schwinger, On gauge invariance and vacuum polarization, *Physical Review* **82**, (1951) 664.

[2] A. Di Piazza, C. Muller, K.Z. Hatsagortsyan, C.H. Keitel, Extremely high-intensity laser interactions with fundamental quantum systems, *Reviews of Modern Physics* **84** (2012) 1177.

[3] R. Ruffini, G. Vereshchagin, S.S. Xue, Electron-positron pairs in physics and astrophysics: from heavy nuclei to black holes, *Physics Reports* **487** (2010) 1.

[4] R. Durrer, A. Neronov, Cosmological Magnetic Fields: Their Generation, Evolution and Observation, *The Astronomy and Astrophysics Review* **21** (2013) 62.

[5] E. Mottola, Particle Creation in de Sitter Space, *Physical Review D* **31** (1985) 754.

[6] J. Martin, Inflationary perturbations: The Cosmological Schwinger effect, *Lecture Notes in Physics* **738** (2008) 193.

[7] M.B. Fröb, J. Garriga, S. Kanno, M. Sasaki, J. Soda, T. Tanaka and A. Vilenkin, Schwinger effect in de Sitter space, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **04** (2014) 009.

[8] T. Kobayashi, N. Afshordi, Schwinger Effect in 4D de Sitter Space and Constraints on Magnetogenesis in the Early Universe, *Journal of High Energy Physics* **10** (2014) 166.

[9] E. Bavarsad, C. Stahl and S.S. Xue, Scalar current of created pairs by Schwinger mechanism in de Sitter spacetime, *Physical Review D* **94** (2016) 104011.

[10] C. Stahl, E. Strobel, S.S. Xue, Fermionic current and Schwinger effect in de Sitter spacetime, *Physical Review D* **93** (2016) 025004.

[11] T. Hayashinaka, T. Fujita, J. Yokoyama, Fermionic Schwinger effect and induced current in de Sitter space, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **07** (2016) 010.

[12] C. Stahl and S.S. Xue, Schwinger effect and backreaction in de Sitter spacetime, *Physics Letters B* **760** (2016) 288.

[13] T. Markkanen, A. Rajantie, Massive scalar field evolution in de Sitter, *Journal of High Energy Physics* **01** (2017) 133.

[14] T. Markkanen, De Sitter Stability and Coarse Graining, *The European Physical Journal C* **78** (2018) 97.

[15] L. Parker, S.A. Fulling, Adiabatic regularization of the energy-momentum tensor of a quantized field in homogeneous spaces, *Physical Review D* **9** (1974) 341.

[16] S.A. Fulling, L. Parker, Renormalization in the theory of a quantized scalar field interacting with a robertson-walker spacetime, *Annals of Physics* **87** (1974) 176.

[17] J.S. Dowker, R. Critchley, Effective Lagrangian and Energy-Momentum Tensor in de Sitter Space, *Physical Review D* **13** (1976) 3224.

[18] S. Habib, C. Molina-Paris, E. Mottola, Energy-momentum tensor of particles created in an expanding universe, *Physical Review D* **61** (1999) 024010.

[19] D. Lopez Nacir, F.D. Mazzitelli, Backreaction in trans-Planckian cosmology: Renormalization, trace anomaly and self-consistent solutions, *Physical Review D* **76** (2007) 024013.

[20] A. Landete, J. Navarro-Salas, F. Torrenti, Adiabatic regularization and particle creation for spin one-half fields, *Physical Review D* **89** (2014) 044030.

[21] A. Landete, J. Navarro-Salas, F. Torrenti, Adiabatic regularization for spin-1/2 fields, *Physical Review D* **88** (2013) 061501.

[22] S. Ghosh, Creation of spin 1/2 particles and renormalization in FLRW spacetime, *Physical Review D* **91** (2015) 124075.

[23] S. Ghosh, Spin 1/2 field and regularization in a de Sitter and radiation dominated universe, *Physical Review D* **93** (2016) 044032.

[24] ز. سجادی‌نیا، *تریس بازبهنجارشده تانسور انرژی-تکانه اسکالرهای شوینگر در فضا-زمان دوسیته 2-بُعدی*، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران (1396).

[24] Z. Sajadi Nia, *Renormalized trace of the energy-momentum tensor of the Schwinger scalars in 2D de Sitter spacetime*, Thesis for the Degree of Master of Science (MSc), University of Kashan, Kashan, Iran (2017).

[25] م. مرتضی‌زاده، *بررسی تریس تانسور انرژی-تکانه میدان اسکالر در حضور میدان الکتریکی زمینه در فضا-زمان دوسیتر 3بُعدی*، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران (1396).

[25] M. Mortezazadeh, *Investigation of trace energy-momentum tensor of scalar field in presence of an electric field background in 3D de*

Sitter spacetime, Thesis for the Degree of Master of Science (MSc), University of Kashan, Kashan, Iran (2017).

[26] F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, Cambridge (2010).

Gravitational backreaction effect of Schwinger pair production in a strong electric field in de Sitter spacetime

Ehsan Bavarsad*, Narbeh Margosian

Department of Physics, University of Kashan, Kashan, Iran

Received: 04.09.2017 Final revised: 30.12.2017 Accepted: 27.01.2018

Abstract

In this paper, a massive charged scalar field in a uniform strong electric field background in a de Sitter spacetime of arbitrary dimension has been considered. Using Bogoliubov coefficients, we obtain the semiclassical energy-momentum tensor of the Schwinger pairs in the strong electric field limit. We have shown that the trace of the semiclassical energy-momentum tensor vanishes. We have found that the nonvanishing components of the semiclassical energy-momentum tensor increase by a power of the electric field. Our results of the semiclassical energy-momentum tensor would be important for discussing the gravitational backreaction effect of the Schwinger pair production. We have shown that the Hubble constant decays and the time scale of the decay decreases by a power of the electric field.

Keywords: Scalar field, de Sitter spacetime, Schwinger effect, Semiclassical energy-momentum tensor, Gravitational backreaction

*Corresponding Author: bavarsad@kashanu.ac.ir