کاشانی نامه

احوال و آثار
غیاث‌الدین جمشید کاشانی

تألیف

ابوالقاسم قربانی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

تاریخ علم

۲

ریاضی

۴۷

مرکز نشر دانشگاهی

۴۲۸

کاشانی‌نامه
(احوال و آثار غیاث‌الدین جمشید کاشانی)
تألیف ابوالقاسم قربانی
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ دوم ۱۳۶۸ (با تجدید نظر)
تعداد ۳۰۰۰
حروفچینی: لاینوترون مرکز نشر دانشگاهی
لیتوگرافی: بهزاد
چاپ و صحافی: نوبهار

قربانی، ابوالقاسم
کاشانی‌نامه (احوال و آثار غیاث‌الدین جمشید کاشانی)
ص. ع. به فرانسه
Abu-l-Qāsim Qurbānī, Kāchānīnāmeh; la vie et les oeuvres mathématiques de Ghīāthod-Dīn Djamchīd Kāchānī
چاپ اول این کتاب در سال ۱۳۵۰ توسط دانشگاه تهران منتشر شده است.
واژه‌نامه: ص.
کتابنامه: ص.
۱. غیاث‌الدین، جمشید‌بن‌مسعود، ـ ۸۳۲ ق. ۲. ریاضیات ـ تاریخ. ۳. نجوم ـ تاریخ.
الف. مرکز نشر دانشگاهی. ب. عنوان.
QA۲۹/غ۹ ۹۲۵/۱

به‌نام خداوند بخشندهٔ مهربان

قسمتی از مقدمهٔ چاپ اول*

پیشرفت و توسعهٔ شگفت انگیز علوم در کشورهای اسلامی از نیمهٔ دوم قرن دوم هجری (قرن هشتم میلادی) آغاز شد و در اواخر قرن پنجم (یازدهم میلادی) به اوج کمال رسید و در طی این سه‌قرن‌و نیم‌آثاری‌بدیع در رشته‌های مختلف دانش به‌وجود آمد و از اوایل قرن سیزدهم میلادی با همان سرعت حیرت آوری که رو به‌ترقی رفته بود راه انحطاط پیش گرفت و در مدت سه قرن قوس نزولی پیمود تا بالاخره در اواخر قرن نهم (پانزدهم میلادی) تقریباً از حرکت باز ایستاد و از آن پس، اگرچه بحث در افکار گذشتگان و شرح و حاشیه‌نویسی بر آثار آنان ادامه داشت وگاهگاه دانشمندان و محققانی در رشته‌های مختلف علوم اسلامی پیدا می‌شدند، روح علمی رفته رفته در کشورهای اسلامی به انحطاط گرایید و آن نیروی خلاقه که در قرنهای پیش موجب پیدایش آن همه شاهکارهای علمی شده بود از میان رفت. ریاضیات و نجوم هم از این قاعدهٔ کلی مستثنی نبود جز اینکه در اوایل قرن نهم (پانزده میلادی) آثار ریاضی نفیسی توسط ریاضیدان عالیقدر ایرانی غیاث‌الدین جمشید کاشانی پدید آمد که از ممتازترین تألیفات دورهٔ اسلامی است.

مقدمهٔ چاپ دوم

در این کتاب از زندگینامهٔ علمی و شاهکارهای ریاضی استاد غیاث‌الدین جمشید کاشانی منجم و ریاضیدان زبردست ایرانی آگاه خواهید شد و از جمله خواهید دانست که او:

اولاً کسرهای اعشاری را به قیاس با کسرهای ستینی (= شصتگانی) که در نجوم متداول بود اختراع کرد و در حالی که به اهمیت اختراع خود وقوف کامل داشت استفاده از این کسرها را به دیگران توصیه کرد و خود آنها را آگاهانه و به‌وجهی پیگیر در آثار خود به‌کار برد و از همین راه بود که استعمال کسرهای اعشاری معمول ومتداول شد.

---

* چاپ اول این کتاب در سال ۱۳۵۰ هجری شمسی توسط دانشگاه تهران در هزار نسخه چاپ و منتشر شد.

ثانیاً عدد π (پی) یعنی نسبت محیط دایره به قطر آن را با دقّتی که تقریباً تا صد و پنجاه سال بعد از وی بی‌رقیب ماند حساب کرد و مقدار 2π را مساوی با

$$2\pi=6{,}2831853071795865$$

به‌دست آورد.

ثالثاً جیب زاویهٔ یك درجه را با روش تکراری حلّ یك نوع معادلهٔ درجهٔ سوم به‌وجهی که پیش از وی سابقه نداشت با دقت شایان توجهی حساب کرد. نتیجهٔ محاسبهٔ او با اصطلاحات کنونی عبارت است از:

$$\sin 1^\circ=0{,}017452406437283510371 2$$

که هفده رقم اعشاری آن با مقدار واقعی سینوس یك درجه مطابق است.

***

در چاپ حاضر:

اولاً با در نظر گرفتن پژوهشهایی که به تازگی توسط دانشمندان مغرب زمین دربارهٔ تاریخ ریاضیات دورهٔ اسلامی و از جمله راجع به آثار استاد غیاث‌الدین جمشید کاشانی به‌عمل آمده است در برخی از مطالب کتاب تغییراتی داده و توضیحات لازم را به‌عمل آورده‌ام.

ثانیاً در بالا و سمت چپ اسامی ریاضیدانانی که نامشان در متن کتاب حاضر آمده است ستاره‌ای قرار داده‌ام (مانند: نسوی*) کسانی که بخواهند از شرح احوال و آثار ریاضیدانان مذکور آگاهی یابند می‌توانند به تألیف دیگر نگارنده موسوم به «زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی» که در سال ۱۳۶۵ هجری توسط مرکز نشر دانشگاهی انتشار یافته است رجوع کنند. به این منظور در فهرست راهنمای پایان کتاب حاضر در دنبال نام هر یك از این ریاضیدانان نشانی زندگینامهٔ او را در کتاب مذکور ذکر کرده‌ام. مثلاً در دنبال نام نسوی در فهرست پایان کتاب آمده است (زندگینامه: ۱۵۹) و این یعنی برای آگاهی یافتن از زندگینامهٔ نسوی رجوع شود به‌شمارهٔ ۱۵۹ کتاب «زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی».

ثالثاً همهٔ تاریخها در این کتاب برحسب سال هجری قمری است مگر در مواردی که به صراحت خاطرنشان شده باشد.

تهران بهمن ماه ۱۳۶۷

ابوالقاسم قربانی

فهرست

عنوان	صفحه

عنوان	صفحه

بخش اول

زندگینامهٔ کاشانی[۱]

آنچه دربارهٔ زندگی کاشانی می‌دانیم

۱. نام و لقب و نسبتش چنان که خود وی بارها در مقدمهٔ تألیفاتش نوشته[۲] جمشید بن مسعود بن محمود طبیب کاشانی ملقب به غیاث‌الدین است و در این کتاب برای رعایت اختصار غالباً وی را کاشانی[۳] خواهیم نامید. بدواً اطلاعاتی را که دربارهٔ زندگانی کاشانی داریم به تفصیل شرح می‌دهیم و سپس با استناد به آنها خلاصهٔ زندگینامهٔ وی را می‌نویسیم.

۲. نخستین کس که در ایران شرح احوال و آثار کاشانی را به تفصیل بیان کرد و نامهٔ تاریخی مهمی را که وی از سمرقند به پدرش نوشته بوده با تعلیقات مفید منتشر ساخت آقای محمد محیط طباطبائی بود.[۴]

۳. پژوهندگان و دانشمندان غربی مانند سوتر[۵]، لوکی[۶]، کندی[۷]، یوشکویچ[۸] و دیگران نیز دربارهٔ وی و آثارش تحقیقاتی به عمل آورده‌اند. باوجود این، اطلاعاتی که از زندگانی کاشانی در دست داریم چندان زیاد نیست. خوشبختانه نسخه‌های خطی عده‌ای از تألیفات

---

۱) در ذیل صفحات این کتاب به آثار و تألیفات نویسندگان و محققان به‌وسیلهٔ نام آنان و گاهی نیز توسط عنوان کتاب مورد بحث ارجاع شده است. فهرست الفبایی و اسامی مؤلفان و عنوان کامل هر یك از آثار آنان را با نشانهٔ اختصاری در پایان همین کتاب آورده‌ایم. مثلا وقتی می نویسیم: (← کندی Z، ص ۱۲۷ ش ۲۰) یعنی رجوع کنید به شمارهٔ ۲۰ صفحهٔ ۱۲۷ کتاب *تاریخچهٔ زیجهای اسلامی* تألیف ا.س. کندی که عنوان انگلیسی و سایر مشخصات آن با نشانهٔ اختصاری «کندی Z» در پایان همین کتاب تحت عنوان «فهرست منابع و مآخذ» آمده است.

۲) مثلا در مقدمهٔ *مفتاح الحساب* و در مقدمهٔ *رسالهٔ محیطیه* و جز آنها.

۳) مؤلفان و دانشمندان غربی، به پیروی از سنت عربی اسلامی، وی را «الکاشی» (al-kāshī) می‌نامند.

۴) محیط: *غیاث‌الدین*، محیط: *نامه*؛ محیط: *تعلیقات*.

۵) سوتر M، ص ۱۷۳ ش ۴۲۹.

۶) لوکی R، ص ۴.

۷) کندی P، ص ۱ تا ۸.

۸) یوشکویچ G، ص ۲۳۷.

وی که بعضی از آنها به خط دست خود اوست، و بعداً دربارهٔ آنها به بحث خواهیم پرداخت، از گزند حوادث محفوظ مانده و می توان از روی آنها تاریخهای زیر را به دست آورد. کاشانی:

در ۱۲ ذیحجهٔ ۸۰۸ (۲ ژوئن ۱۴۰۶)[۱] در کاشان رصد کرده است.[۲]

همچنین در ۲۶ نوامبر ۱۴۰۶ م (۱۵ جمادی الثانیهٔ ۸۰۸) و ۲۲ مهٔ ۱۴۰۷ م (۲۰ ذیحجهٔ ۸۰۹) در کاشان به رصد پرداخته است.[۲]

در ۲۱ رمضان ۸۰۹ (اول مارس ۱۴۰۷) تألیف رسالهٔ *سلم السماء* را در کاشان به پایان رسانیده است.[۳]

در ۸۱۳ (۱۱ـ۱۴۱۰) یا پیش از آن تاریخ کتاب مختصر در *علم هیأت* را به نام شاهزاده سلطان اسکندر نوشته است.[۴]

در ۸۱۶ (۱۴ـ۱۴۱۳) *زیج خاقانی* را نوشته و به الغ بیك اهدا کرده است.

در ذیقعدهٔ ۸۱۸ (ژانویهٔ ۱۴۱۶) *رسالهٔ آلات رصد* را به نام سلطان اسکندر نوشته است.[۵]

در ذیحجهٔ ۸۱۸ (فوریهٔ ۱۴۱۶) متن رسالهٔ *نزهة الحدائق* را نوشته است.[۶]

در ۷ شعبان ۸۲۴ (۷ اوت ۱۴۲۱) تألیف کتاب *تلخیص المفتاح* را که خلاصهٔ کتاب *مفتاح الحساب* خود اوست به پایان رسانیده است.[۷]

در اواسط ماه شعبان سال ۸۲۷ (ژوئن ۱۴۲۴) تألیف *رسالهٔ محیطیه* را تمام کرده است.

در سوم جمادی الاولی ۸۳۰ (۲ مارس ۱۴۲۷) کتاب *مفتاح الحساب* را که از سالها قبل مشغول تألیف و تکمیل آن بوده در سمرقند به الغ بیك اهدا کرده است.[۸]

بالاخره کاشانی در ۱۹ رمضان ۸۳۲ (۲۲ ژوئن ۱۴۲۹) در خارج شهر سمرقند درگذشته است.[۹]

---

۱) در این کتاب برای رعایت اختصار مثلا هر جا نوشته‌ام: ۱۲ ذیحجهٔ ۸۰۸ (۱۴۰۶)، مقصود دوازدهم ماه ذیحجه از سال ۸۰۸ هجری است که مطابق است با سال ۱۴۰۶ میلادی. همه جا ابتدا سال هجری و سپس سال میلادی را بین پرانتز در دنبال آن نوشته‌ام جز در مواردی که سال هجری قمری را «هـ.ق» و سال میلادی را «م» نامیده‌ام.

۲) کندی *P*، ص ۱ و ۱۸۸.

۳) ش ۵۳.

۴) ش ۶۹.

۵) ش ۶۶.

۶) ش ۵۹.

۷) ش ۴۱. (بنابراین تألیف *مفتاح الحساب* را پیش از این تاریخ شروع کرده ولی چنانکه بعداً خواهیم دید تا سال ۸۳۰ (۱۴۲۷) مشغول تکمیل و تصحیح آن بوده است) ش ۷۸.

۸) ش ۷۸.

۹) ش ۱۷.

نامهٔ کاشانی به پدرش

۴. نامه‌ای از کاشانی در دست است که از سمرقند به پدر خود نوشته و حاوی مطالب مهمی است و می‌توان از آن اطلاعاتی دربارهٔ وی کسب کرد.

۵. یك نسخه از این نامه در کتابخانهٔ مدرسهٔ عالی سپهسالار در جزو مجموعه‌ای به شمارهٔ ۲۹۱۴/۲۴ موجود است[۱] و یك نسخه از آن نیز در کتابخانهٔ مجلس شورای ملی در جزو مجموعه‌ای محفوظ می‌باشد.[۲] آقای محیط طباطبائی متن این نامه را از روی نسخهٔ خطی مذکور و نسخهٔ دیگری که در *زنبیل* فرهاد میرزا معتمدالدوله نقل شده است با تعلیقات مفیدی در سال ۱۳۱۹ هـ.ش به‌چاپ رسانیده است.[۳] دکتر کندی در نوشتن شرح احوال کاشانی از این نامه و سایر مقالات آقای محیط طباطبائی استفاده کرده[۴] و بعداً نیز خود متن نامه را بانگلیسی ترجمه کرده است.[۵] قسمتهایی از این نامه را صاییلی در کتاب *رصدخانه در اسلام* به انگلیسی ترجمه و تفسیر کرده[۶] و بعداً نیز در سال ۱۹۶۰ م متن فارسی و ترجمهٔ ترکی و انگلیسی آن را در کتابی جداگانه در آنکارا منتشر ساخته است.

۶. این نامهٔ کاشانی تاریخ ندارد و در آغاز آن فقط نوشته شده است: «این عبودیت سابع (= هفتم) ذی‌قعدة الحرام شرف اصدار یافت.»[۷] آقای محیط طباطبائی از روی بعض قرائن حدس زده است که این نامهٔ تاریخی در حدود سال ۸۲۷ هـ.ق نوشته شده است.[۸] آنچه قطعی به نظر می‌رسد این است که نامهٔ مذکور بعد از ماه رمضان سال ۸۲۴ هـ.ق نوشته شده زیرا کاشانی در آن نامه از شرح *تجنیس الحساب* نام می‌برد[۹] و این شرح در سلخ ماه رمضان سال ۸۲۴ هـ.ق به پایان رسیده است[۱۰] (بعداً خواهیم دید که نامهٔ مذکور به احتمال قوی در هفتم ذیقعدهٔ ۸۲۴ هـ.ق نوشته شده است ← شمارهٔ ۳ همین کتاب).

---

۱) *فهرست سپهسالار*، بخش ۴ ص ۷۳ ش ۲۴.

۲) *فهرست مجلس*، ج ۱۵ ص ۲۰۲ (مجموعهٔ ۵۱۳۸/۱۴۲).

۳) محیط: *نامه*؛ محیط: *تعلیقات*.

۴) کندی *P*، ص ۱، ۳، ۷ و مواضع دیگر از مقدمهٔ آن کتاب.

۵) کندی *L*.

۶) صاییلی O، ص ۲۹، ۱۰۵، ۱۹۷، ۱۹۸، ۲۱۳، ۲۵۰، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۴، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۴ تا ۲۸۸.

۷) محیط: *نامه*، ص ۹.

۸) محیط: *غیاث‌الدین*، ص ۳ و ۸

۹) محیط: *نامه*، ص ۱۰ سطر ۹.

۱۰) متن این کتاب موسوم است به *التجنیس فی‌الحساب* تألیف سراج الدین ابوطاهر محمد بن عبدالرشید سجاوندی و شرحش موسوم است به *منهاج معانی التجنیس* از مسعود بن معتز معروف به نظامی مشهدی که آن را در سمرقند در سلخ ماه رمضان ۸۲۴ هـ.ق تمام کرده است ← (همائی: *خیامی نامه*، ج ۱ ص (۷)).

در اینکه نامهٔ مذکور در اوایل شروع ساختمان رصدخانهٔ سمرقند نوشته شده است تردیدی نمی‌توان داشت، چه مهمترین مسأله در بنای ساختمان رصدخانه تعیین خط نصف‌النهار موضع رصد است و کاشانی در این باره به پدر خود چنین نوشته است: «دیگر، روزی که تسویهٔ زمین جهت استخراج نصف‌النهار در موضع رصد[1] شده و آن را بنایان فاخر کرده بودند، بعد از آن خشك شده بود، رفته بودیم که نصف‌النهار پیدا کنیم، خواستیم که امتحان کنیم[2]...» و نیز نوشته است: «اکنون اکثری از عمارات برآورده شده، قریب پانصد تومان خشت پخته و گچ بکار رفت و یك ذات‌الحلق تمام شد و یکی دیگر هم در کار است و بعضی آلات دیگر هم... در دست دارند.»[3]

از مضمون عبارات فوق کاملا پیداست که کاشانی نامهٔ خود را در اوایل شروع ساختمان رصدخانهٔ سمرقند به پدر خود نوشته است و بعداً در این باره گفتگو خواهیم کرد.

۷. ضمناً نامهٔ کاشانی شامل نکاتی است که می‌توان تا اندازه‌ای خلق و خوی وی و رابطهٔ او را با الغ بیك* از مضمون آنها به دست آورد. کاشانی می‌نویسد:

«از تحسین‌های حضرت سلطنت پناهی آنست که هیچ هفته نگذرد که بعضی دوستان بأین بنده نرسانند که بندگی حضرت سلطنت پناهی امشب یا امروز چنین و چنان نکته‌ها فرمودند. امثال آنها: مستحضر است، بغایت خوب می‌داند و از همه این بهتر می‌داند و از قاضی[4] مستحضرتر و پرمایه‌تر است و در این فن پرذهن‌تر، چیزی که او به ده روز مشکل در می‌یابد، مولانا غیاث‌الدین برفور یا در روز در می‌یابد، جمیع اقسام این فن را می‌داند و نیز مرد نیك و سلیم‌القلب است، هر کس از جنس موالی و غیره که پیش ما آید، همین که ما او را اندك تربیتی کردیم خود را نگاه نداشتند و با مردم جنگ می‌کردند و فضولی پا پیش می‌گرفتند، مولانا غیاث‌الدین باوجودی که انواع تربیت و عنایت در حق او فرمودیم و دائماً به شرف مجاورت و مکالمه مستعد است در این مدت هرگز با کسی نزاع نکرد و نه او از کس و نه کس از او گله کرد و به سخنهای مردم در آوردن و به عرض رسانیدن جهت طمع دخل نکرد و نیکومعاش دارد و امثال هذه به کرات فرمودند... بحمدالله والمنه که بعد از

۱) مقصود از «موضع رصد» رصد خانه است.

۲) محیط: *نامه*، ص ۱۲ سطر آخر و آغاز صفحهٔ ۱۳.

۳) محیط: *نامه*، ص ۱۶.

۴) مقصود موسی بن محمد بن محمود قاضی زادهٔ رومی است.

چندین مدت که در کنج خانه به سر برده بود چون بیرون آمد، به چنان شهری عظیم، بر چنین مردی هنرمند و به حضرت جهان پادشاهی دانا... رسید به یمن عنایت ازلی و سعادت لم‌یزلی و برکت همت آن خداوند چنان زیست که در آن حضرت مستحسن افتاد.»

تاریخ رفتن کاشانی به سمرقند

۸. چون در نسخه‌ای خطی از *زیج خاقانی* تألیف کاشانی که در سال ۸۱۶ (۱۴ـ۱۴۱۳) نوشته شده و موجود است[۱]، کاشانی این زیج را به الغ بیك* تقدیم کرده‌است؛ آقای محیط طباطبائی و دیگران از این روحدس زده‌اند که باید کاشانی در فاصلهٔ بین سالهای ۸۱۲ و ۸۱۶ هـ.ق به سمرقند رفته باشد[۲]؛ ولی به دلایل زیر این حدس درست نیست:

۹. اولا کاشانی در ذیقعدهٔ سال ۸۱۸ هـ.ق رسالهٔ *آلات رصد* را به فارسی به نام سلطان اسکندر[۳] تألیف کرده و در مقدمهٔ آن نوشته است: «این رساله‌ایست در شرح آلات رصد که بر حسب فرمان پادشاه اسلام، فرمانفرمای هفت اقلیم ظل الله فی الارضین قهرمان الماء والطین، سلطان السلاطین فی العالم، ملجأ و ملاذ بنی آدم، القایم بامورالمسلمین و ولی امیرالمؤمنین، الواثق بالله الاکبر، السلطان اسکندر خلدالله تعالی ملکه و خلافته و سلطانه و ابدعلی العالمین بره و احسانه در سلك تحریر آمد.» و نمی‌توان قبول کرد که کاشانی در سال ۸۱۸ در سمرقند نزد الغ بیك بوده و رسالهٔ *آلات رصد* خود را آن هم با عبارات و عناوین و القاب فوق به سلطان اسکندر تقدیم کرده باشد.

۱۰. ثانیاً تقدیم *زیج خاقانی* در سال ۸۱۶ هـ.ق به الغ بیك دلیل آن نیست که کاشانی در آن سال به سمرقند رفته باشد. چه ممکن است که کاشانی این کتاب را برای شناساندن خود به الغ بیك به او تقدیم کرده و از کاشان به سمرقند فرستاده باشد، و از کجا معلوم است که تقدیم همین کتاب موجب اطلاع یافتن الغ بیك از میزان معلومات و شخصیت علمی کاشانی نشده و بعداً نظر به احتیاجی که به وجود وی حس می‌کرده او را به سمرقند نخوانده باشد؟

۱۱. ثالثاً چنانکه گفتیم کاشانی در اوایل شروع بنای رصدخانهٔ سمرقند در آنجا بوده واز

---

۱) ش ۳۴.

۲) محیط: *غیاث‌الدین*، ص ۷ سطر اول

۳) کندی نوشته است که این اسکندر شخص دیگری جز «اسکندر بن قرایوسف» نمی‌تواند باشد (کندی *p*، ص ۲). برای آگاهی یافتن از احوال اسکندر بن قرایوسف رجوع کنید به *لغت‌نامهٔ دهخدا* حرف الف، صفحه ۲۳۶۱، ستون دوم.

برخی عبارات نامه‌ای که به پدرش نوشته می‌توان استنباط کرد که فاصلهٔ زمانی ورود او به سمرقند و نوشتن نامه به پدرش زیاد نبوده است. چه وی مانند شخص تازه‌واردی جریان کارهای خود را به پدرش گزارش می‌دهد. مثلا می‌نویسد[۱]:

«غرض که چون بنده همچنین جایی در آمد و هر کس چشم و گوش برگماشتند که معلوم کنند که این کس در چه نصاب است، هر چند روزبندگی حضرت سلطنت پناهی در حلقهٔ درس حاضر می‌شود و چون حاضر شد درس ریاضیات مقدم می‌دارند و این بنده هم حاضر شد. یکی از امتحان طلبه این است که هر کس به حلقهٔ درسی درآید غافل است از آنکه چه مسأله در میان خواهد بود و اصحاب مدرسه آن را به تجدید مطالعه بلیغ کرده‌اند، چون آغاز بحث می‌شد هر بار به عنایةالله تعالی و یمن همت آن خداوندی این بنده دخل کاملی کرده چنانکه چند چیز که ایشان را از مطالعه معلوم نشده گفته و اعتراضات وارده بر سخن ایشان کرده و نکته‌های لطیفه بیرون آورده که همه حیران مانده‌اند. پیش از آمدن این بنده اشکالی چند ایشان را واقع شده بود و در میان یکدیگر انداخته و هیچکس بیرون آوردن آن نتوانسته است. مثلا خواسته‌اند که اسطرلابی که یك گز قطر آن باشد بسازند... همهٔ مستخرجان فرمودند که به اتفاق عمل کنند... و درمانده بودند. ریاضیدانان را اشارت فرموده بودند که به قوت قوانین هندسی تحقیق و تصحیح آن بکنند. هیچکس نتوانسته است که تحقیق آن بکند... هر چند عمل می‌کرده‌اند و فکر در آن می‌نموده‌اند راست نمی‌آمده. چون این بنده رسید در روز این مسأله در حضرت سلطنت پناهی پیش آورده‌اند و این بنده در فور و هم در مجلس تصحیح یکی[۲] از آن کرده و منشأ غلط ایشان بیان کرده و تطبیق کلام زیج بر این بیان کرد.»

و نمی‌توان قبول کرد که کاشانی مثلا در سال ۸۱۶ هـ.ق به سمرقند رفته باشد و پس از چندین سال (به قول آقای محیط طباطبائی در سال ۸۲۷ یعنی بعد از متجاوز از ده سال) این مطالب را به پدرش نوشته باشد.

بنابر آنچه گذشت بدون تردید کاشانی تا سال ۸۱۸ هـ.ق هنوز به سمرقند نرفته بود و هنگامی که نامهٔ مذکور را به پدر خود نوشته مدت زمان زیادی از ورود او به سمرقند نگذشته

---

۱) محیط: *نامه*، ص ۱۰.　۲) ظاهراً: نیکی

بوده است.

۱۲. از طرف دیگر مدرکی در دست داریم که به استناد آن می توان گفت که به احتمال قوی کاشانی تا سال ۸۲۴ (۱۴۲۱) هنوز در کاشان بوده است. یك نسخهٔ خطی از کتاب *تلخیص المفتاح* کاشانی جزو مجموعهٔ شمارهٔ ۳۱۸۰ کتابخانهٔ ملی ملك موجود است[۱] و در پایان آن نوشته شده: «و قدتم فی السابع من شعبان المعظم لسنة اربع و عشرین و ثمانمائة هجریه»[۲] و بعد از عبارت مذکور مطالب زیر نیز در پایان آن نسخه به همان خط متن دیده می شود: «تمت الکتابة بحمدالله و حسن توفیقه علی یدالعبد معین بن محمد المنجم الکاشی احسن الله احواله فی منتصف الشهر المذکور للسنة المذکورة بمدینة کاشان عمرهاالله تعالی.»

پس معلوم می شود که کاشانی تألیف کتاب *تلخیص المفتاح* را در هفتم ماه شعبان سال ۸۲۴ (۷ اوت ۱۴۲۱) به پایان رسانیده و معین بن محمد منجم کاشی استنساخ نسخهٔ مذکور را در نیمهٔ ماه شعبان همان سال یعنی پس از هشت روز در کاشان تمام کرده است. از طرف دیگر کاتب نسخهٔ مذکور که نام کاملش عبدالرزاق بن محمد ملقب به معین المنجم است[۳] همان معین الدین کاشانی است که بنا به قول چند مورخ به اتفاق غیاث الدین جمشید به سمرقند رفته[۴] و آقای محیط طباطبائی وی را خواهر زادهٔ غیاث الدین جمشید معرفی کرده است.[۵] با در نظر گرفتن مطالب فوق و اینکه کاشانی نامهٔ مذکور را بعد از رمضان ۸۲۴ هنگامی که هنوز مدت زمان زیادی از ورود او به سمرقند نگذشته بوده[۶] نوشته است، چنین به نظر می رسد که

---

۱) این نسخهٔ نفیسی است به خط معین الدین کاشانی و شامل نسخهٔ خطی *مفتاح الحساب* و رسالهٔ جیب درجهٔ واحده نیز می باشد.

۲) یك نسخهٔ خطی دیگر نیز از *تلخیص المفتاح* در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران موجود است که در پایان آن همین تاریخ ۸۲۴ هـ.ق آمده است. (*فهرست دانشگاه*، ج ۳ ص ۸۶۸).

۳) چه در انتهای نسخهٔ خطی کتاب *مفتاح الحساب* که با کتاب *تلخیص المفتاح* مذکور جزو همان مجموعهٔ ۳۱۸۰ کتابخانهٔ ملی ملك است نوشته شده: «کتب العبد عبدالرزاق بن محمد الملقب بمعین المنجم الکاشانی فی رجب سنه ثلثین و ثمانمائة هجریة ببلدة سمرقند صانهاالله».

۴) *لب التواریخ*، ص ۱۹۲: «میرزا الغ بیك بن میرزا شاهرخ... در سنه ۸۲۳ باتفاق مولانا صلاح الدین موسی قاضی زادهٔ رومی و مولانا علی قوشچی که شارح *تجرید* است و مولانا غیاث الدین جمشید و مولانا معین الدین که ایشان را از کاشان به سمرقند آورده بودند در شمال سمرقند مایل به مشرق رصد بست»؛ *حبیب السیر*، ص ۳۴ ج ۴: «در زمان دولتش (= الغ بیك) جمعی کثیر از آن طایفه (= علما) در بلدهٔ سمرقند مجتمع گشته بودند و... از آن جمله یکی مولانا غیاث الدین جمشید که در علم هیأت و ریاضی و فن نجوم عدیل و نظیر نداشت و در وقتی که میرزا الغ بیك رصد می ساخت و آن جناب به اتفاق مولانا معین الدین کاشی... به تمشیت آن مهم می پرداختند.» (و نیز رجوع کنید به صفحهٔ ۲۹ همان جلد از *حبیب السیر*.)

۵) محیط: *غیاث الدین*، ص ۶.

۶) ش ۶ همین کتاب.

غیاث‌الدین جمشید و معین الدین کاشی هر دو در نیمهٔ شعبان سال ۸۲۴ هـ.ق در کاشان بوده و بعداً با هم به سمرقند رفته‌اند و کاشانی نامهٔ مذکور را در هفتم ذیقعدهٔ همان سال از سمرقند به پدرش نوشته است.

۱۳. اکنون باید دید که این فرض با تاریخ بنای رصدخانهٔ سمرقند سازگار هست یا نه، زیرا دیدیم که کاشانی در اوایل شروع بنای رصد خانه در سمرقند بوده است.[۱]

۱۴. در تاریخ شروع بنای رصدخانه سمرقند بین مورخان اختلاف است. خواندمیر در *حبیب السیر*[۲] این تاریخ را سال ۸۲۴ هـ.ق و میرخواند در *روضة‌الصفا*[۳] سال ۸۲۵ هـ.ق و یحیی بن عبداللطیف قزوینی در *لب التواریخ*[۴] سال ۸۲۳ هـ.ق و عبدالرزاق سمرقندی در *مطلع السعدین*[۵] سال ۸۲۳ هـ.ق و حتی رکن الدین پسر شرف‌آملی که معاصر الغ بیک* و کاشانی بوده در مقدمهٔ *زیج جامع سعیدی*[۶] در سال ۸۳۰ نوشته‌اند.

۱۵. خواندمیر که تاریخ ۸۲۴ هـ.ق را برای اتمام مدرسه و خانقاه سمرقند بیان کرده، نوشته است[۷]: «و در سنهٔ ۸۲۴ آن خسرو بی‌مانند (= الغ بیك) در وسط بلدهٔ فاخرهٔ سمرقند مدرسهٔ رفیع و خانقاهی منیع بنا نموده باتمام رسانید و بسیاری از مزارع وقری و مستغلات فوایدانتما بر آن بقاع وقف گردانید. و همچنین فرمان داد استاد کاران در آن بلدهٔ فردوس نشان رصدی بنیان نهادند و بطلمیوس ثانی مولانا غیاث‌الدین جمشید و جامع کمالات انسانی مولانا معین الدین کاشی در ترتیب آن بنا سعی و اهتمام دادند.»

از سیاق عبارات فوق چنین برمی آید که در سال ۸۲۴ هـ.ق بنای مدرسه و خانقاه سمرقند به پایان رسیده و در همان سال الغ بیك فرمان بنای رصدخانه را صادر کرده است.

۱۶. با در نظر گرفتن همهٔ مطالبی که گذشت، ملاحظه می‌شود که، بدون آنکه به اشکال اساسی برخوریم، می‌توانیم فرض کنیم که الغ‌بیك پس از پایان یافتن ساختمان مدرسه و خانقاه سمرقند، نظر به احتیاجی که برای شروع بنای رصدخانه به غیاث‌الدین جمشید داشته[۸]، در سال ۸۲۴ هـ.ق او را به سمرقند دعوت کرده و بنای رصدخانه مطابق با نقشه‌ای که کاشانی تهیه کرده[۹] در اواخر همان سال شروع شده است.

---

۱) ش ۶ همین کتاب. ۲) حبیب *السیر*، ج ۴ ص ۲۹. ۳) محیط، غیاث *الدین*، ص ۸.
۴) لب‌*التواریخ*، ص ۱۹۲. ۵) محیط: غیاث‌*الدین*، ص ۵. ۶) محیط: غیاث‌*الدین*، ص ۴ و ۸.
۷) حبیب‌*السیر*، ج ۴ ص ۲۹.

۸) کاشانی در نامهٔ خود به پدرش نوشته است: «پیش از آمدن این بنده اشکالی چند ایشان را واقع شده بود و درمیان یکدیگر انداخته و هیچکس بیرون آوردن آن نتوانسته است (محیط: *نامه*، ص ۱۰).

۹) کاشانی به پدرش نوشته است: «و بنای عمارت رصد به وجهی که این بنده شرح داده فرمودند (محیط: *نامه*، ص ۱۱ دو سطر آخر).

تاریخ فوت کاشانی

۱۷. تاریخ درگذشت کاشانی در چند محل به صراحت ذکر شده است. اولا در مجموعهٔ خطی ریاضی شماره ۱۷۹۰ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران در صفحهٔ آخر نسخهٔ *مفتاح الحساب* که جزو آن مجموعه است نوشته شده: «وفات مولانای اعظم مولانا غیاث الدین طیب الله مضجعه در اول چهارشنبه نوزدهم شهر رمضان المبارك سنهٔ ۸۳۲ هجریه خارج بلدهٔ سمرقند بموضع رصد»[۱] و عین این عبارت در صفحهٔ اول نسخهٔ خطی *زیج خاقانی* که در دیوان هند (ایندیاافیس) به شمارهٔ ۴۳۰ محفوظ می باشد نیز آمده است.[۲] ثانیاً، در نسخهٔ خطی زیج ناقصی که به شمارهٔ ۱۰۲ در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی محفوظ است[۳] و شرحش را بعداً خواهیم دید، عبارت زیر آمده است: «توفی المولی المخدوم الاعظم غیاث الملة و الدین جمشید، طیب الله مضجعه و طاب ثراه و جعل الجنة مأواه و مثواه، و هو مصنف هذا الزیج فی صباح یوم الاربعاء تاسع عشر من رمضان سنة ۸۳۲ هجریة خارج بلدة سمرقند بموضع رصد.»[۴]

بنابراین تردیدی نیست که کاشانی در صبح روز چهارشنبه نوزدهم ماه رمضان سال ۸۳۲ (۲۲ ژوئن ۱۴۲۹) در خارج شهر سمرقند درگذشته است.[5]

نکته‌ای دربارهٔ درگذشت کاشانی

۱۸. امین احمد رازی در *تذکرهٔ هفت اقلیم*[۶] نوشته است: «آورده‌اند که چون میرزا الغ بیك گورکان همت بر بستن رصد گماشت مولانا غیاث الدین جمشید را با اعزاز و احترام طلب داشته مصاحبتش را ملازم گرفت، و چون مولانا در آداب و رسوم خدمت پادشاهان بسیار عاری افتاده بود، هر آینه آنچه آداب و روش ملازمت بوده باشد ازو به وقوع نمی پیوست، و جناب میرزا از این رهگذر همواره مکدر بوده اظهار آزردگی می فرمود، اما بنابر آنکه معاملهٔ زیج بی‌وجود مولانا سمت اختتام نمی پذیرفت، بالضروره در تجرع سخنان تلخ مولانا صابر بوده همیشه بر زبان می آورده که این مهم کی صورت انصرام یابد تا من از اطوار و گفتار

---

۱) مصاحب: حکیم خیام، ص ۳۰۰. ۲) کندی *P*، ص ۱۷.

۳) *فهرست رضوی*، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۳۳. ۴) محیط: *غیاث الدین*، ص ۹.

۵) برای رفع شبهه باید متذکر شوم که آقای مدرس رضوی در مقدمهٔ ترجمهٔ *میزان الحکمه* (چاپ تهران ۱۳۴۶ هـ. ش) تاریخ تولد کاشانی را ۸۴۰ هـ.ق و تاریخ وفات اورا ۹۱۲ هـ.ق نوشته است و این هر دو اشتباه است.

۶) *تذکرهٔ هفت اقلیم*، چاپ تهران ج ۲ ص ۴۶۰ (افتادگی دارد)؛ نسخهٔ خطی کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران پشت برگ ۳۵۷.

ناهنجار مولانا جمشید خلاص شوم.» و بعضی باعث فوت مولانا را از جانب میرزا الغ بیک می‌دانند.

۱۹. از طرف دیگر با آنکه، چنانکه بعداً خواهیم دید[۱]، *رسالهٔ وتر وجیب* کاشانی بدون شك وجود داشته، و او در این رساله جیب یك درجه را با دقت فراوانی حساب کرده و در مقدمهٔ کتاب *مفتاح الحساب* که آن را به الغ بیك* تقدیم کرده از آن رساله نام برده و به تألیف آن تفاخر کرده است، معلوم نیست چرا الغ بیك در مقدمهٔ زیج خود که بعد از فوت کاشانی به پایان رسیده نوشته است: «و جیب یك درجه که بنای عمل جدول جیب و ظل بر آنست الی یومنا هیچکس به طریق برهان استخراج نکرده و همهٔ حکما تصریح کرده‌اند به آنکه طریق عمل به استخراج آن نیافته‌اند و حیلت کرده‌اند تا به تقریب به دست آورده‌اند و ما بعنایةالله و منه به طریق برهان ملهم شدیم و در بیان آن علی حده کتابی پرداختیم.»

شخصیت علمی کاشانی

۲۰. برای شناختن شخصیت علمی کاشانی بهتر دیدم که به جای تکرار بعضی توصیفات مبهم و معمولی از قبیل «بطلمیوس ثانی» و «بی شبیه و نظیر زمان خود» و «سلطان المهندسین» و «افضل المهندسین»، که در کتابهای فارسی دربارهٔ وی آمده است، قسمتی از آنچه را ریاضیدانان و محققان مغرب زمین در وصف آثار کاشانی نوشته‌اند در اینجا بیاورم:

۲۱. دانشمند خاورشناس و ریاضیدان آلمانی پاول لوکی[۲] نخست در سال ۱۹۴۴ میلادی کتابی در شرح و تفسیر قسمتی از *مفتاح الحساب* کاشانی نوشت[۳] و سپس در ۱۹۴۹ میلادی *رسالهٔ محیطیهٔ* او را به زبان آلمانی ترجمه و تفسیر کرد[۴]، و کتاب اول (متأسفانه بعد از مرگش) در ۱۹۵۱ م و کتاب دوم در ۱۹۵۳ م به چاپ رسید.

۲۲. اینك وصف *رسالهٔ وتر وجیب* کاشانی را از زبان لوکی بشنوید[۵]:

«هانکل[۶] در کتاب *تاریخ ریاضیات*[۷] خود شرح می‌دهد که چگونه یك منجم و ریاضیدان مسلمان (= کاشانی) در قرن پانزدهم میلادی جیب یك درجه را از روی جیب سه درجه با دقت فراوان حساب کرده، و چگونه معادلهٔ درجهٔ سوم

---

۱) رجوع کنید به شمارهٔ ۲۵۷ (بخش پنجم) کتاب حاضر.

2) Paul Luckey

۳) لوکی *R*.

۴) لوکی *I*.

۵) لوکی *R*، ص ۱.

۶) H. Hankel (۱۸۳۹_۱۸۷۳ م).

۷) هانکل *G*، ص ۲۸۹ تا ۲۹۳.

مربوط به آن مسئله را تشکیل داده و با روش استادانه‌ای آن را حل کرده است. هانکل می‌گوید که این روش زیبای حل معادلات عددی از حیث دقت و ظرافت دست کمی از روشهای تقریبی که از زمان ویت[1] به بعد در مغرب زمین متداول شده است ندارد. بعد از روش استخراج جذر و کعب که در اصل با آن شباهتهایی دارد این نخستین روش محاسبهٔ تقریبی است که در تاریخ ریاضیات بدان برمی‌خوریم... به حق می‌توان این روش را بدیعترین و جالبترین روشهایی دانست که در همهٔ نوشته‌های (ریاضی) اسلامی وجود دارد. مخترع چنین روش تحسین‌آمیزی یك نفر ایرانی بود که در نیمهٔ اول قرن پانزدهم (میلادی) در انجمن دانشورانی که نزد الغ‌بیك گرد آمده بودند می‌زیسته و در آثارش خود را غیاث‌الدین جمشید فرزند مسعود فرزند محمود طبیب کاشانی نامیده است.»

۲۳. سپس لوکی دربارهٔ سایر آثار کاشانی می‌نویسد[2]:

«در نتیجهٔ پژوهشهایی که من تاکنون در یك قسمت از آثار وی، که خوشبختانه قسمت اعظم آنها در کتابخانه‌های شرق و غرب موجود است، به عمل آورده‌ام، او را ریاضیدانی شناخته‌ام هوشمند و مخترع و نقاد و صاحب افکار عمیق و واقف بر آثار ریاضیدانان سلف که به خصوص در فن محاسبه و به کار بستن روشهای تقریبی متبحر و چیره‌دست بوده است. اگر *رسالهٔ محیطیهٔ* او به دست ریاضیدانان معاصر وی که در مغرب زمین می‌زیستند رسیده بود، از آن پس مردم مغرب زمین از بعضی منازعات و تألیفات مبتذل دربارهٔ اندازه‌گیری دایره (= محاسبهٔ عدد پی) بی‌نیاز می‌شدند. اگر نظریهٔ واضح و روش عملی وی در مورد شناساندن کسرهای اعشاری انتشار یافته بود یك قرن و نیم بعد از وی ویت، استون[3]، و بورگی[4] در اروپا مجبور نمی‌شدند که نیروی فکری و عملی خود را برای از نو یافتن آن کسرها به کار اندازند.»

(پایان نوشتهٔ لوکی؛ و رجوع کنید به شمارهٔ ۲۳۱ کتاب حاضر، در آنجا عقیدهٔ لوکی را دربارهٔ *رسالهٔ محیطیهٔ* کاشانی خواهید یافت.)

۲۴. یوشکویچ در کتاب *تاریخ ریاضیات در قرون وسطی* دربارهٔ *مفتاح الحساب* کاشانی می‌نویسد[5]:

۱) François Viète (۱۶۰۳ـ۱۵۴۰).
۲) لوکی R، ص ۲.
3) Stevin 4) Bürgi
۵) یوشکویچ G، ص ۲۳۷، یوشکویچ M، ص ۷۱.

«مفتاح الحساب کتابی است درسی، دربارهٔ ریاضیات مقدماتی، که استادانه تألیف شده و مؤلف آنچه را که مورد نیاز طبقات مختلف خوانندگان آن کتاب می‌تواند بود در نظر گرفته است. این کتاب از حیث فراوانی و تنوع مواد و مطالب و روانی بیان و سلاست کلام تقریباً در همهٔ آثار (ریاضی) قرون وسطی یگانه است.»

و نیز دربارهٔ رسالهٔ محیطیهٔ کاشانی می‌نویسد[1]:

«این رساله که دربارهٔ محاسبهٔ عدد پی (π) نوشته شده اثری است نفیس و درخشنده، در فن محاسبهٔ خطاها که، نه تنها از حیث نتیجهٔ آن که مشتمل بر هفده رقم اعشاری دقیق عدد پی می‌باشد، بلکه همچنین از جهت ظرافت بیان و سادگی روش تخمین و انتخاب ماهرانه از بین مقادیر تقریبی موجود، نیز جالب توجه است.»

۲۵. کندی دربارهٔ کاشانی می‌نویسد[2]:

«در باب میزان معلومات و مقام علمی وی در تاریخ علم می‌توانیم بر پایهٔ استوارتری (نسبت به شرح احوال او) گفتگو کنیم. پیش از هر چیز باید گفت که کاشانی محاسبی زبردست بود و در این فن مهارت خارق العاده داشت، و شاهد این مدعا این است که وی با اعداد شصتگانی خالص به آسانی و روانی حساب می‌کرد، کسرهای اعشاری را اختراع نمود، روش تکراری[3] را در حساب به طور کامل و پیگیر به کار می‌بست، با چیره‌دستی مراحل محاسبه را طوری تنظیم می‌نمود که بتوان حداکثر خطا را پیش‌بینی کرد و در هر مقام صحت اعمال را مورد امتحان قرار می‌داد. آلت «طبق المناطق» که وی اختراع کرد نمایندهٔ کاملترین پیشرفتی است که برای این دسته از افزارهای نجومی حاصل شده است. بخصوص این تنها افزار فنی (مکانیکی) بود که تعیین عروض سیارات را امکان‌پذیر می‌ساخت. اگر هم دربارهٔ عملی بودن نتایجی که از این آلت حاصل می‌شود با قید احتیاط بیندیشیم، در باب مهارتی که از جهت هندسی در آن به کار رفته است شک و تردید نمی‌توان داشت.»

---

۱) یوشکویچ G، ص ۳۱۳؛ یوشکویچ M، ص ۱۵۱.

۲) کندی P، ص ۸.

3) Iterative algorism

۲۶. سپس کندی می‌افزاید[۱]:

«چنین به نظر می‌رسد که کاشانی در کار رصد و نجوم فنی کاملا صاحب صلاحیت بوده و در این باره نه نسبت به زمان خود پیشی داشته و نه از آن عقب‌تر بوده است. همین حکم را می‌توان دربارهٔ هیأت وی (نظریهٔ وی دربارهٔ حرکت سیارات) اظهار داشت. او بدون قید و شرط این عقیده را که در *المجسطی* نیامده است می‌پذیرد: «ماه و سیارات سفلی و خورشید و سیارات دیگر در حول زمین که ثابت فرض می‌شود روی نوارهای پیوسته‌ای در حرکت هستند.» و از این‌رو اندازه‌گیری فواصل سماوی، مثلا فاصلهٔ متوسط زحل از زمین، را با واحدهای زمینی امکان‌پذیر می‌پندارد. پس معاصران وی که او را «بطلمیوس ثانی» نامیده‌اند[۲] زیاد سخاوت به خرج داده‌اند. اما نسل بعدی هم که یکی از ریاضیدانان زمان خود را «غیاث‌الدین جمشید ثانی» خوانده‌اند نیز نسبت به میزان معلومات آن ریاضیدان زیاد خوشبین بوده‌اند[۳]».

خلاصهٔ زندگینامهٔ کاشانی

۲۷. غیاث‌الدین جمشید کاشانی ریاضیدانی عالیقدر و محاسبی ماهر و منجمی زبردست و مؤلفی توانا و مخترع آلات دقیق رصد بود و به حق می‌توان او را از برجسته‌ترین ریاضیدانان دورهٔ اسلامی دانست. وی از حدود سال ۸۰۸ (۱۴۰۶) تا پایان عمرش یعنی ۸۳۲ (۱۴۲۹) فعالیت علمی داشت، و در این مدت به تصنیف و تألیف رسالات و کتب ریاضی و نجومی پرداخت، که مهمترین آنها *زیج خاقانی*، *مفتاح الحساب*، *رسالهٔ محیطیه*، و *رسالهٔ وتر و جیب* است(شرح آنها خواهد آمد)، و آلت «طبق المناطق» را برای عروض کواکب اختراع کرد و کتاب *نزهة الحدائق* را در شرح آن نوشت. از جملهٔ شاهکارهای ریاضی وی، چنانکه بعداً خواهیم دید، این است که او نخستین مخترع کسرهای اعشاری است و عدد پی (π) یعنی نسبت محیط دایره به قطر آن را با دقتی که تقریباً تا صد و پنجاه سال بعد از وی در

---

۱) کندی *P*، ص ۹.

۲) اشاره است به اینکه خواندمیر در *تاریخ حبیب‌السیر* نوشته است: «بطلمیوس ثانی مولانا غیاث‌الدین جمشید و جامع کمالات انسانی مولانا معین‌الدین کاشی...» (*حبیب السیر*، ج ۴ ص ۲۱).

۳) اشاره است به اینکه ملاعلی محمد اصفهانی پدر حاج نجم‌الدوله «غیاث‌الدین جمشید ثانی» لقب داشته (محیط: *تعلیقات*، ص ۶۰).

دنیا بی‌رقیب ماند حساب کرد، و جیب زاویهٔ یك درجه را با روش تکراری حل نوعی معادلهٔ درجهٔ سوم به وجه بسیار جالب توجهی که تا زمان وی سابقه نداشت به دست آورد. کاشانی در حدود سال ۸۲۴ (۱۴۲۱) به دعوت الغ بیك* از کاشان به سمرقند رفت، و مدیر رصدخانهٔ سمرقند و مورد احترام الغ بیك و ریاضیدانان دیگری که در سمرقند می‌زیستند بود، و بنا به قول بیرجندی*[۱]: «اصل رصد سمرقند از آثار طبع لطیف اوست.» کاشانی در ۱۹ رمضان ۸۳۲ (۱۴۲۹) در خارج شهر سمرقند درگذشت.

۱) بیرجندی: شرح زیج، ص ۴۰.

بخش دوم

تألیفات کاشانی

۲۸. در این بخش فقط از تألیفات ریاضی و نجومی کاشانی گفتگو خواهیم کرد.[۱] این تألیفات عبارتند از:

یک) *مفتاح الحساب*، رجوع کنید به بخش سوم کتاب حاضر.[۲]

دو) *رسالهٔ محیطیه*، رجوع کنید به بخش چهارم کتاب حاضر.[۲]

سه) *رسالهٔ وتر وجیب*، رجوع کنید به بخش پنجم کتاب حاضر.[۲]

چهار) *زیج خاقانی* در تکمیل *زیج ایلخانی* (به فارسی).

۲۹. تألیف این زیج را کاشانی در سال ۸۱۶ (۱۴ـ۱۴۱۳) به پایان رسانیده و آن را به الغ بیک* اهدا کرده‌است. این زیج نخستین تألیف مفصل کاشانی است و چنین شروع می‌شود: «حمد و سپاس بی قیاس حضرت خالقی را که با ید ابداع و قدرت... اما بعد چنین گوید مؤلف این کتاب اقل عباداللّه تعالی جمشید بن مسعود بن محمود... که مدتی بود که در اقسام علمی و عملی ریاضیات اجتهاد می نمود...»

۳۰. *زیج خاقانی* در شش مقاله است به این شرح: مقالهٔ اول در معرفت تواریخ مشهور (مشتمل بر مقدمه و چهار باب)؛ مقالهٔ دوم در معرفت جیب و سهم و ظل و میل و مطالع (وذکر طول و عرض بلدان) و آنچه بدان تعلق دارد (مشتمل بر مقدمه و دو باب)؛ مقالهٔ سوم در معرفت مواضع کواکب (در طول و عرض) و توابع آن (مشتمل بر مقدمه و دو باب)؛ مقالهٔ چهارم در

---

۱) برای کسب اطلاع از سایر تألیفات کاشانی و از جمله *تفسیر القرآن* که به وی منسوب است رجوع کنید به *ریحانة الادب*، جلد ۳ صفحهٔ ۱۶۵ شمارهٔ ۲۷۳ و *لغت نامهٔ دهخدا* مقالهٔ «غیاث الدین جمشید» و به خصوص ذیل صفحهٔ ۳۸۹.

۲) چون *مفتاح الحساب* و *رسالهٔ محیطیه* و *رسالهٔ وتر وجیب* چه از لحاظ تاریخ ریاضیات و چه از جهت مطالبی که در آنها مندرج است اهمیت زیاد دارند در سه بخش جداگانهٔ این کتاب آنها را مورد بحث قرار می‌دهیم.

استخراج سایر قسی و خطوط مشهوره (مشتمل بر مقدمه و دو باب)؛ مقالهٔ پنجم در استخراج طالع از معلومات مختلفه (مشتمل بر مقدمه و دوباب)؛ مقالهٔ ششم در باقی اعمال نجومی (که آن تسییرات است مشتمل بر مقدمه و دو باب).

هر یك از این شش مقاله به استثنای مقالهٔ اول، مرکب از سه قسمت است. قسمت اول مقدمه‌ای است در توضیح معانی اصطلاحات متعدد فنی که در آن مقاله به کار رفته است و قسمت دوم شرح اعمال و قسمت سوم دلایل صحت این اعمال است.

۳۱. کاشانی در مقدمهٔ این زیج از خواجه نصیرالدین طوسی* با تجلیل و احترام یاد می کند، ولی از اشتباهاتی که در زیج *ایلخانی* روی داده انتقاد می نماید. هدف اصلی کاشانی از تألیف زیج *خاقانی* تصحیح اشتباهات و تکمیل زیج *ایلخانی* بوده است، چه خود او در مقدمهٔ *مفتاح الحساب* می گوید[۱]: «همهٔ جدولهای زیج *ایلخانی* را از نو با دقیقترین عمل استخراج کردم، و زیج موسوم به خاقانی را در تکمیل زیج *ایلخانی* وضع کردم، و آنچه را که از کارهای منجمان استنباط کردم و در زیج دیگری وجود نداشت با برهانهای هندسی در آن گرد آوردم.»

۳۲. اگر از فواید دیگر این زیج چشم بپوشیم و فقط آن را از لحاظ اصطلاحات فنی متعدد فارسی و عربی که در آن به کار رفته است مورد دقت قرار دهیم، این زیج یکی از مهمترین کتابهای علمی فارسی به شمار است.

۳۳. لوکی می نویسد[۲]: «می توان زیج *خاقانی* را مبدأ و پایهٔ مقدماتی زیج *الغ بیك* دانست، و همچنین روش محاسباتی را که در این زیج به کار رفته است مبنای نوشتجات بعدی کاشانی دربارهٔ مثلثات و پایهٔ *مفتاح الحساب* وی به شمار آورد. بنابر این بررسی مطالب این زیج باید جالب توجه باشد.»

نسخه‌های خطی موجود زیج *خاقانی*

۳۴. یك نسخهٔ خطی از زیج *خاقانی* در استانبول (ایاصوفیا، نسخهٔ شمارهٔ ۲۶۹۲) موجود

---

۱) *مفتاح* ص ۲. عین عبارت *مفتاح الحساب* این است: «کما استأنفت استخراج جمیع جداول الزیج الایلخانی بأدق عمل و وضعت الزیج المسمی بالخاقانی فی تکمیل الزیج الایلخانی و جمعت فیه جمیع ما استنبطت من اعمال المنجمین ممالایأتی فی زیج آخر مع البراهین الهندسیة» عبارت «بأدق عمل و وضعت الزیج المسمی بالخاقانی فی تکمیل الزیج الایلخانی» در دیباچهٔ *مفتاح الحساب* چاپی از قلم افتاده ولی در همهٔ نسخه‌های خطی معتبر آن کتاب دیده می شود.

۲) لوکی *R*، ص ۱۳.

است که در سال ۸۱۶ (۱۴ـ۱۴۱۳) نوشته شده و در آن دست برده‌اند و پر از زیر نویسیها و قلم‌خوردگیها و تصحیحات است. کراوزه به همین دلیل حدس زده که ممکن است این نسخه نسخهٔ پیش‌نویس خود کاشانی بوده باشد.[1]

۳۵. نسخهٔ خطی دیگری نیز از زیج خاقانی در کتابخانهٔ دیوان هند (ایندیا افیس) به شمارهٔ ۴۳۰ (Ethé 2232) موجود است که در سال ۹۰۵ (۱۴۹۹) استنساخ شده است.

۳۶. کندی نوشته است: «اینکه در فهرست فارسی ایندیا افیس[2] نوشته شده که زیج خاقانی نخستین روایت از زیج جدید سلطانی (= زیج گورکانی= زیج الغ بیك) است اشتباه می باشد.»[3]

۳۷. محقق محترم آقای دانش‌پژوه در برخی از مجلدات فهرست کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران و سایر فهرستها این زیج را با زیج الغ بیك اشتباه کرده و برخی از نسخه‌های خطی زیج الغ بیك را زیج خاقانی نامیده است[4] ولی اخیراً خود او متوجه این اشتباه شده و البته در موقع مناسب تصحیح خواهد کرد.

۳۸. نسخهٔ خطی شمارهٔ ۵۳۲۹ کتابخانهٔ آستان قدس رضوی[5] که در ۱۵ برگ است فقط قسمتی از زیج خاقانی است.[6]

۳۹. کندی خلاصهٔ بسیار جامع و سودمندی از مطالب مهم زیج خاقانی را ازروی نسخهٔ موجود در دیوان هند فراهم آورده[7] و علاوه بر این همهٔ زیج مذکور را به زبان انگلیسی ترجمه و شرح کرده و وعده داده است که در آینده آن را منتشر کند.[8]

۴۰. این نکته را هم ناگفته نگذاریم که استوری در کتاب *تاریخ تألیفات فارسی*[9] نام زیج خاقانی را در ضمن تألیفات الغ بیك آورده و این بدون تردید اشتباه است.

---

۱) کراوزه S.، ص ۵۱۰ ش ۴۲۹/۴.

2) Ethé. H, *Cat. of Pers. Mss. in the Library of the India Office* Vol. 1, Oxford 1903, p 1220.

۳) کندی Z، ص ۱۲۷ ش ۲۰.

۴) زیجهای شمارهٔ ۳۰۵۳، ۴۴۶۱، و ۱۸۸۵ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران، زیج شمارهٔ (ج ـ۵۸) دانشکدهٔ حقوق تهران، زیج شمارهٔ ۴۵۴ کتابخانهٔ دانشکدهٔ ادبیات تهران، و زیج شمارهٔ ۲۸۸/۱ ب دانشکدهٔ الهیات، همه نسخه‌های زیج الغ بیك (= زیج جدید سلطانی = زیج گورکانی) هستند نه«زیج خاقانی در تکمیل زیج ایلخانی» (*فهرست دانشگاه*، ج ۱۰ ص ۱۹۹۵ و ج ۱۳ ص ۳۴۱۶؛ *فهرست دانشکدهٔ حقوق* ص ۱۳۳؛ *فهرست سوم ادبیات*، ص ۱۹؛ و *فهرست الهیات*، ج ۲ ص ۱۷۰).

۵) فهرست رضوی، ج ۸ ص ۱۷۷.

۶) رجوع کنید به شمارهٔ ۴۹ کتاب حاضر.

۷) کندی Z.، ص ۱۶۴ بند ۱۵ تا صفحهٔ ۱۶۶.

۸) کندی Z.، ص ۱۲۷ سطر آخر و ص ۱۲۸ سطر اول.

۹) استوری P.، ج ۲ قسمت اول ص ۶۷ ش ۱۰۴.

پنج) *تلخیص المفتاح فی علم الحساب* (به عربی).

۴۱. این کتاب، چنانکه از عنوانش پیداست، خلاصهٔ کتاب *مفتاح الحساب* است و کاشانی تألیف آن را چنانکه از بعض نسخه‌های خطی موجود آن استنباط می‌شود در هفتم ماه شعبان سال ۸۲۴ (۷ اوت ۱۴۲۱) به پایان رسانیده است.[۱] *تلخیص المفتاح* دارای سی فصل و تقریباً شامل یك هشتم مطالب *مفتاح الحساب* است، و از مقالهٔ سوم *مفتاح* که مربوط به طریق حساب منجمان است مطلبی در آن نیامده.

نسخه‌های خطی موجود *تلخیص المفتاح*

۴۲. در ایران چند نسخهٔ خطی از *تلخیص المفتاح* می‌شناسیم: یك نسخهٔ خطی از آن جزو مجموعهٔ شمارهٔ ۸۶۸ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران و یك نسخه نیز جزو مجموعهٔ شمارهٔ ۹۵۷ همان کتابخانه موجود است.[۲]

۴۳. دو نسخهٔ دیگر از *تلخیص المفتاح* در کتابخانهٔ ملی ملك هست.[۳] یکی در مجموعهٔ شمارهٔ ۳۱۸۰ به خط معین الدین کاشی و دیگری به شمارهٔ ۳۰۷۹.

۴۴. دو نسخهٔ خطی نیز از *تلخیص المفتاح* در کتابخانهٔ مجلس شورای ملی موجود است[۴] (به شماره‌های ۲۷۸۶/۹ و ۲۸۲۸/۱) و یك نسخهٔ خطی از آن نیز در استانبول (جارالله شمارهٔ ۱۴۶۰) هست[۵] و چند نسخهٔ خطی دیگر از آن نیز در خارج از ایران وجود دارد.[۶]

۴۵. نسخهٔ خطی *رسالة فی الحساب* که در جلد دوم *فهرست نسخه‌های خطی و عکسی کتابخانهٔ دانشکدهٔ الهیات و معارف اسلامی* (ص ۵۲) معرفی شده به احتمال قوی نسخه‌ای از *تلخیص المفتاح* است.

آغاز و فصلهای *تلخیص المفتاح*

۴۶. *تلخیص المفتاح* چنین شروع می‌شود: «الحمدلله الواحد الاحد الفرد القدیم الصمد الذی آلاء غیر محدودة... اما بعد فان احوج خلق الله تعالی الی غفرانه جمشید بن مسعود بن

---

۱) ← ش ۱۲ کتاب حاضر.

۲) *فهرست دانشگاه*، ج ۳ ص ۸۶۶ تا ۸۶۸.

۳) شخصاً دیده‌ام.

۴) فهرست مجلس، ج ۱۰ ص ۳۳ ش ۹ و ص ۱۴۹ ش ۱.

۵) کراوزه $\mathcal{K}$، ص ۵۱۰.

۶) بروکلمان $(i)_2$، ص ۲۷۳، و بروکلمان S_2، ص ۲۹۵ ش ۵.

محمود الطبیب الکاشانی الملقب بغیاث، احسن اللّه احواله، یقول لمافرغت من تحریر کتابی المسمی بمفتاح *الحساب*، فانتخبت منه هذا المختصر فیمالابدمنه للمبتدیین وسمیته *تلخیص المفتاح* و جعلته مشتملاً علی ثلثین فصلاً مستعیناً باللّه وحده العزیز.»

۴۷. ترجمهٔ فارسی عنوانهای سی فصل *تلخیص المفتاح* به این شرح است:

۱. در چگونگی نوشتن اعداد و مراتب آنها.
۲. در تضعیف (ضرب کردن در ۲).
۳. در تنصیف (تقسیم کردن بر ۲).
۴. در جمع.
۵. در تفریق.
۶. در ضرب.
۷. در تقسیم.
۸. در استخراج جذر.
۹. در میزانها (امتحان اعمال).
۱۰. در تعریف کسرها و چگونگی نوشتن آنها.
۱۱. در شناختن تداخل و تشارك و تباین.
۱۲. در تجنیس.
۱۳. در رفع.
۱۴. در گرفتن کسرهای مختلف از یك مخرج (مخرج مشترك گرفتن).
۱۵. در تضعیف کسرها.
۱۶. در تنصیف کسرها.
۱۷. در جمع کسرها.
۱۸. در تفریق کسرها.
۱۹. در ضرب کسرها.
۲۰. در تقسیم کسرها.
۲۱. در استخراج جذر (کسرها).
۲۲. در تحویل کسر از یك مخرج به مخرج دیگر.
۲۳. در مساحت سطوح مستوی که محیط آنها (مرکب از قطعه) خطهای راست است.
۲۴. در مساحت دایره و قطعه دایره.
۲۵. در مساحت سطوح مستدیر مانند استوانه و مخروط.

۲۶. در اندازه‌گیری حجم اجسام.
۲۷. در آنچه برای شروع مسائل (معادلات) ششگانهٔ جبری لازم است.
۲۸. در ذکر مسائل (معادلات) ششگانهٔ جبری.
۲۹. در خطأین.
۳۰. در ایراد بعضی از قواعد که محاسب به آنها نیازمند است.

شرح *تلخیص المفتاح*

۴۸. بر کتاب *تلخیص المفتاح* شرحهایی نوشته شده است، چنانکه حاجی خلیفه در *کشف الظنون*[1] نوشته است: «*مفتاح الحساب* لغیاث‌الدین جمشید... الفه‌لالوغ بك ثم اختصره و سماه *تلخیص المفتاح* و قدشرح بعضهم هذاالتلخیص.»

آقا بزرگ طهرانی در *الذریعةالی تصانیف الشیعة*[2] نوشته است که نسخه‌ای خطی از شرح *تلخیص المفتاح* کاشانی را موسوم به *تنویرالمصباح فی‌شرح تلخیص المفتاح* در نجف نزد شخصی (موسوم به شیخ علی قمی) دیده است، و آن را شرحی مزجی و مبسوط از همهٔ *تلخیص المفتاح* معرفی کرده و نوشته است که این شرح خطبه و دیباچه ندارد.[3]

نسخه‌ای از یك شرح *تلخیص المفتاح* به عربی در کتابخانهٔ مجلس شورای ملی موجود است که خطبه ندارد و ناتمام است.[4]

ششم) زیج تسهیلات (فارسی؟).

۴۹. نام این زیج را کاشانی خود در مقدمهٔ *مفتاح الحساب* در شمار تألیفات خود آورده است[5] ولی تاکنون نسخه‌ای از آن با این نام دیده یا شناخته نشده است. آقای محیط طباطبائی حدس زده است که شاید نسخهٔ خطی زیج شمارهٔ ۱۰۲ کتابخانهٔ آستان قدس رضوی[6] که به فارسی است همین زیج تسهیلات باشد.[7] امّا این نسخه که در ۱۵ برگ است قسمتی است از *زیج خاقانی*.

---

۱) چاپ استانبول ج ۲ ص ۱۷۶۰ باب‌المیم.
۲) *الذریعه*، ج ۴ ص ۴۷۱ ش ۲۰۹۳.
۳) و نیز رجوع کنید به *الذریعه*، ج ۴ ص ۴۲۸ ش ۱۸۸۸.
۴) فهرست مجلس، ج ۱۰ ص ۳۴ ش ۱۱.
۵) مفتاح، ص ۲: «ووضعت ایضا زیج التسهیلات و جداول شتی».
۶) فهرست رضوی، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۳۳.
۷) محیط: *غیاث الدین*، ص ۲۰ تا ۲۲؛ *لغت نامه*: حرف «غ» ص ۳۸۷ ستون سوم به بعد.

۵۰. این مطلب در خور توجه است که برگهای ۱۴۲ تا ۱۵۶ نسخهٔ خطی *زیج خاقانی* موجود در دیوان هند[1] شامل جداولی است برای تسهیل تقویم کواکب، و در آنجا مطالب مفصلی در شرح این جدولها نوشته شده است و گذشته از این، جدولهای مذکور در آن زیج، به خلاف زیجهای دیگر، در فصلی جداگانه قرار دارد. کندی از این رو حدس زده است که شاید کاشانی قبل از تألیف *زیج خاقانی* این جداول و شرح آنها را تهیه و تدوین کرده و آنها را در رسالهٔ جداگانه‌ای نوشته و آن را *زیج تسهیلات* نامیده باشد.

هفت) رسالهٔ *سلم السماء* = *رسالهٔ کمالیه* (عربی).

۵۱. عنوان کامل این رساله در نسخهٔ چاپی آن (شرحش خواهد آمد) چنین است: «الرسالة الموسومة بسلم السماء فی استخراج ابعاد الارض و السماء من السیارات السبعة و الثوابت و افلاکها» موضوع این رساله، چنانکه از عنوانش پیداست، استخراج بعدهای سیارات و قطرهای آنها و اندازهٔ اجرام آنها می باشد که کاشانی آن را به قول خود برای رفع اشکال متقدمین در ابعاد و اجرام نوشته است (← ذیل ش ۱ ص ۲۹) و چنین شروع می شود: «الحمدلله الذی رفع السماء بغیر عمد، فزینها بمصابیح السیارات و الثوابت...»

۵۲. این رساله در هفت مقاله و خاتمه است به این شرح: مقالهٔ اول در مساحت زمین و آنچه متعلق به آن است؛ مقالهٔ دوم در ابعاد ماه و اندازهٔ قطر آن؛ مقالهٔ سوم در ابعاد خورشید و اندازهٔ قطر آن و بعد رأس مخروط سایه؛ مقالهٔ چهارم در ابعاد سیارات سفلی و اندازهٔ قطرهای آنها؛ مقالهٔ پنجم در ابعاد کواکب علوی و قطرهای آنها؛ مقالهٔ ششم در ابعاد فلك ثوابت؛ مقالهٔ هفتم در اجرام کواکب؛ خاتمه در جدولها.

این جدولها مشتملند بر: مساحت زمین و آنچه متعلق به آن است؛ ابعاد قمر؛ ابعاد عطارد؛ ابعاد زهره؛ ابعاد خورشید؛ ابعاد مریخ؛ ابعاد مشتری؛ ابعاد زحل؛ ابعاد ثوابت؛ اقطار سیارات و اجرام آنها؛ مقادیر اجرام ثوابت.

۵۳. *سلم السماء* را کاشانی در روز چهارشنبه ۲۱ ماه رمضان سال ۸۰۹ (مارس سال ۱۴۰۷) به پایان رسانیده است.[2]

۵۴. این رساله ظاهراً چند بار در تهران به چاپ رسیده است. از جمله یك نسخهٔ چاپ سنگی مورخ ۱۲۹۹ هـ.ق آن با بعضی از نسخه‌های چاپی *مفتاح الحساب* چاپ ۱۳۰۶ هـ.ق

---

۱) ← ذیل شمارهٔ ۳ صفحهٔ ۲۱ کتاب حاضر.

۲) این تاریخ از یك نسخهٔ خطی رسالهٔ *سلم السماء* موجود در استانبول به دست آمده است. کراوزه S، ص ۵۱۰ ش ۴۲۹.

یك جا جلد شده است. نسخه‌های خطی آن فراوان است[۱] که از آن جمله است نسخهٔ خطی مشهد[۲] و نسخهٔ دیگری متعلق به نویسنده.

۵۵. نسخهٔ چاپ سنگی مورخ ۱۲۹۹ هـ.ق و برخی از نسخه‌های خطی این رساله فقط *سلم السماء* نامیده شده است، اما بعضی دیگر از نسخه‌های خطی آن نام *رسالهٔ کمالیه* را نیز دارد. مانند نسخهٔ خطی موجود در کتابخانهٔ لیدن[۳] که در سال ۹۲۲ هـ.ق استنساخ شده است و همچنین نسخهٔ موجود در مشهد.

از مطالعه و مقایسهٔ مقدمهٔ این رساله در نسخه‌های مختلف ظاهراً چنین به نظر می آید که کاشانی ابتدا این رساله را *رسالهٔ کمالیه* نامیده و آن را به وزیری موسوم به کمال الدین محمود اهدا کرده است و بعداً (شاید هنگامی که به سمرقند رفته) نام «کمالیه» را از آن حذف کرده و آن را *سلم السماء* نامیده است (و نیز ممکن است که از ابتدا هر دو نام را روی آن گذاشته و بعداً نام کمالیه را حذف کرده باشد) ولی، کاشانی خود در مقدمهٔ *مفتاح الحساب* که سالها پس از رسالهٔ مذکور تألیف کرده آن را *سلم السماء* نامیده است.[۴]

۵۶. برای آنکه تفاوت بین نسخه‌های مختلف در مورد عنوان این رساله روشن شود، قسمتی از مقدمهٔ آن را از روی دو نسخهٔ متفاوت در اینجا می آورم (عباراتی که با هم اختلاف دارند با حروف متفاوت چاپ‌شده‌تا بهتر بتوان این اختلاف را مشاهده کرد):

در نسخهٔ چاپی و نسخهٔ خطی متعلق به نویسنده آمده است: «فحررت هذه الرسالة مشتملة علی استخراج ابعاد الکواکب و انصاف اقطارها و مقادیر الاجرام من غیر مساهلة فی الحساب **لیکون تذکرة للاحباب و تبصرة لاولی الالباب و سمیتها سلم السماء**».

همین قسمت، در نسخهٔ خطی موجود در لیدن[۵] چنین است: «فحررت هذه الرسالة مشتملة علی استخراج ابعاد الکواکب و انصاف اقطارها و مقادیر الاجرام من غیر مساهلة فی الحساب **لأتوسل بها عالی (کذا) مجلس من هوللعلی و المفاخر مجمع... مولی اعاظم الوزراء... ذوالمناصب و المعالی... المخصوص بعنایة الملك المعبود. کمال الحق و الدنیا و الدین محمود خلدالله تعالی ظلال عواطفه... فانی بالقصور و العجز لمعترف و من تیار بحار الافاضل لمعترف و سمیته**

---

۱) بروکلمان S_2، ص ۲۹۵.

۲) فهرست رضوی، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۳۶ ش ۱۱۱.

۳) به شمارهٔ CCO1141.

۴) مفتاح، ص ۲: «وصنفت رسائل اخری مثل الرسالة المسماة بسلم السماء فی اشکال وقع للمتقدمین فی الابعاد و الاجرام.»

۵) عکس چهار صفحهٔ اول این نسخه را در صفحات ۳۱ و ۳۲ همین کتاب خواهید یافت.

بالرسالة الکمالیة.»[1]

ترجمهٔ مقدمه رسالهٔ *سلم‌السماء*

۵۷. این رساله هنوز به فارسی و یا زبانهای دیگر ترجمه نشده و مطالب آن مورد بررسی قرار نگرفته است. فقط قسمت اعظم و مهم مقدمهٔ آن را آقای محیط طباطبائی به فارسی برگردانده است[2] و من عین ترجمهٔ ایشان را برای مزید فایده در اینجا می‌آورم:

«نیازمندترین مردم خدا به آمرزش و بخشش او، جمشید پسر مسعودبن محمود طبیب کاشی ملقب به غیاث، چنین می‌گوید که: چون به مطالعهٔ کتابهای ریاضی و مباحث هیأت و سماویات به ویژه مسألهٔ ابعاد فلکها و استخراج انصاف قطرها پرداختم دیدم صاحبان فن در این باب اختلافهایی دارند، چنانکه بیشتر ایشان افلاک را به ترتیب مشهور اثبات کرده و فلك ناهید را زیر فلك خورشید تعیین نموده‌اند و برخی (از متأخران) پنداشته‌اند که فلك زهره بر فراز فلك شمس است، و دلیل بر آن آورده‌اند که در *مجسطی* دوری بین فلك مایل قمر و مقعر فلك خورشید را طوری معین ساخته است که برای ثِخَن وستبری دو فلك زهره و عطارد کافی نیست چه رسد بدانکه فاصلهٔ میان محدب جوزهر قمر و مقعر فلك شمس گنجایش آن دو را داشته باشد، با وجود این به مقادیر نیمه قطرهای کواکب التفاتی نداشته، در صورتی که مسافت همهٔ آنها از نیمهٔ قطر یا شعاع عالم کون و فساد به اندازهٔ ده هزار و دویست و بیست و هفت فرسخ بیشتر است، و دورترین بعد هر کوکبی را همانا نزدیکترین بعد کوکبی که برفراز آن واقع شده است گرفته‌اند.

«مدتی بود که خود را به حل این اشکال وادار کرده بودم و به اینکه گره از این موضوع گشاده شود مشعوف بودم، پس از خداوند مشکل گشا یاری جستم که آنچه در این باب مقرون به صواب است به من الهام کند و مرا به راه راست هدایت نماید، و به اعمال حسابی برای استنباط این بعدها سرگرم گشتم، و تقویم قمر و عرض آن را به همان تاریخ وقوع دوخسوفی که

---

۱) در اینجا در نسخهٔ خطی کتابخانهٔ لیدن علامت گذاشته شده و در حاشیه به همان خط متن نوشته شده است «بسلم السماء».

۲) محیط: *غیاث الدین*، ص ۲۲ تا ۲۳؛ *لغت‌نامه*، حرف «غ» صفحهٔ ۳۸۸ ستونهای سوم و چهارم.

بطلمیوس در مجسطی آورده استخراج نمودم تا قطر قمر را به دست آوردم و حساب را باز از سر گرفتم و دقت کامل نمودم که حتی یک ثالثه هم از نظر نیفتد، و به کسوری رسیدم که پیش از این در استخراج عرض قمر هنگام آن دو خسوف بدان التفاتی نداشتند...

«پس این رساله را در باب استخراج بعدهای کواکب و نیمه قطرهای آنها و اندازهٔ اجرام، بدون سهل انگاری در محاسبه، نوشتم تا برای دوستان یادبودی و برای خردمندان رهنمایی باشد؛ و آن را *سلم‌السماء* نام نهادم.»

۵۸. تبصره. سوتر نوشته است[1] که: «در فهرست کتابخانهٔ (بادلیان) اکسفورد[2] نام کتابی در شرح زیج *الغ بیک* تألیف علی‌قوشچی* آمده است که به فارسی است، اما احتمال می‌رود که این کتاب شرح رسالهٔ *سلم‌السماء* کاشانی باشد، زیرا اسم *سلم‌السماء* در عنوان آن کتاب دیده می‌شود.» بروکلمان هم به تقلید از سوتر این شرح را شرح رسالهٔ *سلم‌السماء* دانسته است[3] اما ظاهراً کتاب مذکور همان شرح زیج الغ بیک است.[4]

هشت) کتاب *نزهة‌الحدائق* (عربی).

۵۹. این کتاب را کاشانی در تاریخ دهم ذیحجهٔ سال ۸۱۸ (۱۰ فوریهٔ ۱۴۱۶) یعنی کمی بعد از نوشتن رساله در شرح *آلات رصد* (شرحش خواهد آمد) در کاشان به پایان رسانیده است.[5] کاشانی آلتی موسوم به «طبق المناطق» اختراع کرده که با آن می‌توان تقاویم کواکب هفتگانه و عروض آنها و ابعاد آنها را از زمین و عمل خسوف و کسوف را به آسانترین طریق و در مدت کم شناخت، و این کتاب را در چگونگی آن آلت و روش به کاربردن آن نوشته است. متن این کتاب دارای دو باب و خاتمه است. باب اول دربارهٔ ساختن «طبق المناطق»، و باب دوم (در پانزده فصل) دربارهٔ چگونگی عمل با آن آلت، و خاتمه درباره ساختن و به کاربردن «لوح اتصالات» است و آن نیز آلتی است که کاشانی خود قبل از «طبق المناطق» اختراع کرده بوده است.

۶۰. کتاب *نزهة‌الحدائق* ذیلی هم دارد که آن را کاشانی در نیمهٔ ماه شعبان سال ۸۲۹ (۲۲ ژوئن ۱۴۲۶) یعنی یازده سال پس از تألیف متن *نزهة‌الحدائق* و سه سال قبل از فوت خود در

---

۱) سوتر *M*، ص ۱۷۸ ش ۴۳۸.

۲) ج I شمارهٔ ۷۲/۲.

۳) بروکلمان S_2، ص ۲۹۵.

۴) استوری *P*، ج ۲ ص ۷۰.

۵) چه خود وی در آخر آن نوشته است: فرغت من تألیفها یوم النحر حجة ثمان عشر و ثمانمائة هجریة.

سمرقند در ده «الحاق» نوشته و به *نزهة‌الحدائق* افزوده است.

در مقدمهٔ این ذیل کاشانی می‌نویسد: «... چون از تحریر رسالهٔ موسوم به *نزهة الحدائق* که دربارهٔ ساختن آلتی است که خود اختراع کرده‌ام، و آن را «طبق المناطق» نامیده‌ام، مدت زمانی گذشت، چیزهای دیگری به فکرم رسید و مصمم شدم که آنها را به عنوان ذیل در ده الحاق به آن کتاب اضافه کنم...»

الحاق دهم دربارهٔ نامگذاری «طبق المناطق» است و کاشانی در آن می‌گوید که، در آغاز تحریر رسالهٔ *نزهة‌الحدائق*، آلتی را که اختراع کرده بوده «طبق المناطق» نامیده و، پس از آنکه رساله منتشر شده و آن آلت به آن نام شهرت پیدا کرده، دوستانش به او گفته‌اند که چون نامش جمشید است بهتر است این آلت را «جام جم» بنامد، و او از پذیرفتن این نام امتناع می‌کرده، تا اینکه پس از نوشتن ذیل کتاب در نتیجهٔ اصرار دوستانش بالاخره نام «جام جمشید» را هم بر «طبق المناطق» نهاده است.

۶۱. یك نسخهٔ خطی از کتاب *نزهة‌الحدائق* و ذیل آن (ملحقات) به‌شمارهٔ ۲۵۰۸ در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران موجود است. اینکه در *فهرست کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه*[1] نوشته شده که ذیل کتاب دربارهٔ لوح اتصالات است درست نیست. در واقع کاشانی در ذیل کتاب آنچه را در متن دربارهٔ «طبق المناطق» نوشته بوده کامل کرده است.

۶۲. کتاب *نزهة‌الحدائق* و ذیل آن در آخر کتاب *مفتاح الحساب* چاپ تهران، سال ۱۳۰۶ هـ.ق از صفحهٔ ۲۵۰ تا ۳۱۳ به چاپ رسیده است و یك نسخهٔ خطی آن هم در دیوان هند (ایندیاافیس) به شمارهٔ ۲۱۰ موجود است.

کارهای دکتر کندی[2] دربارهٔ کتاب *نزهة‌الحدائق*

۶۳. رساله‌ای به فارسی بدون عنوان و بدون نام مؤلف در مجموعهٔ گارت دانشگاه پرینستون[3] موجود است که دربارهٔ طرز ساختن و به کار بردن «طبق المناطق» و «لوح اتصالات» کاشانی در زمان بایزید ثانی سلطان عثمانی، یعنی بین سالهای ۸۸۶ (۱۴۸۱) تا ۹۱۸ (۱۵۱۲)، ظاهراً در قسطنطنیه نوشته شده و به سلطان مذکور اهدا گردیده است. این رساله در دو مقاله است. مقالهٔ اول آن «در صنعت طبق المناطق» و مشتمل بر پنج باب و خاتمه (در صفت لوح اتصالات) است، و مقالهٔ دوم آن «در عمل با طبق المناطق» و مشتمل بر پانزده

---

۱) *فهرست دانشگاه*، ج ۹ ص ۱۲۹۰.

2) E.S. Kennedy

3) Garett Collection, Princeton University

باب و خاتمه (در عمل به لوح اتصالات) است، و مؤلف، که آن را با استفاده از کتاب *نزهة الحدائق* کاشانی و ذیل آن فراهم آورده است، و در مقدمهٔ آن می نویسد: «و استاد محقق و نحریر مدقق، مکمل علوم اوایل و کاشف معضلات مسائل، افتخار الحکماء فی العالم، مولاناء اعظم مولانا غیاث الملة و الدین جمشید، برداللّه مضجعه، آلتی تصور کرد و آن را «طبق المناطق» نام نهاد، و رساله‌ای در کیفیت صنعت و عمل آن پرداخته که بدان آلت معمولات زیج باسهل طرق واقل زمان عمل کرده می شود، و چندان احتیاج به ضرب و قسمت و حساب ندارد، والی زماننا هذا هیچ احد از آحاد علما، با وجود آنکه همگی همت بر استجماع مآثر فضل و افضال مقصور داشته‌اند، نقاب حجاب از چهرهٔ آن مخدره برنداشته‌اند...»

۶۴. دکتر کندی قبلا در سالهای ۱۹۴۷ تا ۱۹۵۲ میلادی چند مقاله دربارهٔ مطالب کتاب *نزهة الحدائق* با استفاده از رسالهٔ فارسی مذکور نوشت[۱]، و در آنها «لوح اتصالات» و «طبق المناطق» کاشانی را معرفی کرد، و روش اندازه‌گیری عرض جغرافیایی را براساس نظریهٔ بطلمیوس و محاسبهٔ خسوف را بوسیلهٔ «طبق المناطق» شرح داد. بعداً در سال ۱۹۶۰ میلادی متن فارسی رسالهٔ مذکور را با ترجمهٔ انگلیسی آن وشرح و تفسیر مطالب مهم آن در کتابی جداگانه منتشر ساخت[۲]، و در واقع کارهای سابق خود را دربارهٔ کتاب *نزهة الحدائق* کامل و منقح ساخت، و از این راه خدمتی شایان تقدیر به تاریخ نجوم اسلامی انجام داد.

۶۵. در کتاب اخیر متأسفانه برای دکتر کندی سوءتفاهمی رخ داده است که اگرچه مهم نیست ولی رفع آن لازم به نظر می آید:

کاشانی در الحاق نهم ذیل کتاب نزهة *الحدائق*[۳] می نویسد: «الحاق التاسع فی الاشاره الی کیفیة العمل بما ذکرنا فی الحاق السادس و السابع... فطریق العمل بها فی اکثر المواضع کما ذکر نا فی الرسالة الاقلیلا منه‌اوردناه فی الذیل...» یعنی: «الحاق نهم دربارهٔ اشاره به چگونگی عمل به آنچه در الحاق ششم و هفتم گفتیم... و طریق عمل به آن در بیشتر مواضع همانست که (درمتن) رساله (نزهة *الحدائق*) ذکر کردیم مگر کمی از آن(اِلّاقلیلامِنهُ) که در ذیل آوردیم...»

دکتر کندی اشتباهاً «الاقلیلا منه» یعنی «مگر کمی از آن» را چون دنبال کلمهٔ «الرسالة» بوده است نام رساله‌ای تصور کرده و در صفحهٔ هفت کتاب مذکور (سطر هفتم) آن را به صورت *Al-risālat al-Iqlīlāminah* جزو تألیفات کاشانی ثبت کرده و پیداست که این درست

۱) کندی *C*، کندی *T*، کندی I، کندی *E*.   ۲) کندی *P*.

۳) که با بعضی از نسخه‌های *مفتاح الحساب* چاپی (چاپ تهران ۱۳۰۶ هـ.ق) جلد شده است، صفحات ۳۱۰ و ۳۱۱.

نیست و باید اصلاح شود.

نه) *رسالهٔ آلات رصد* (فارسی).

۶۶. این رسالهٔ مختصر را کاشانی در ذیقعدهٔ سال ۸۱۸ (ژانویهٔ ۱۴۱۶) در شرح هشت آلت رصد نوشته است، و آن هشت آلت عبارتند از: ذات الشعبتین؛ ذات الحلق؛ حلقهٔ اعتدال؛ حلقتان؛ سدس فخری؛ ذات السمت و الارتفاع؛ ذات الجیب و السهم؛ ذات الحلق صغیر.

۶۷. کاشانی در مقدمهٔ این رساله می نویسد: «... اما بعد این رساله‌ایست در شرح آلات رصد که برحسب فرمان پادشاه اسلام... السلطان اسکندر[1] ... در سلك تحریر آمد...» و در پایان رساله عبارت زیر خوانده می شود: «حرره اقل عبادالله جمشید بن مسعود بن محمود الطبیب الکاشی الملقب به غیاث، احسن الله احواله، فی ذی القعدة سنة ثمان عشر و ثمانمائة هجریة نبویة.»

۶۸. یك نسخهٔ خطی از این رساله در کتابخانهٔ دانشکدهٔ ادبیات تهران (مجموعهٔ حکمت) به شمارهٔ ۱۵۹/۴ موجود است.[2] یك نسخهٔ خطی نیز از این رساله در کتابخانهٔ لیدن در سه صفحه به شمارهٔ ۲۶۴۷ موجود است[3] که تاریخ تحریر ندارد. عکس این نسخه را در صفحات ۳۳ تا ۳۵ این کتاب چاپ کرده و برای آنکه خواننده زودتر بتواند اسامی آلات رصد را در آن بیابد زیر آن اسامی خط کشیده‌ایم.

متن فارسی این رساله را بارتلد در ۱۹۱۸ به چاپ رسانده[4] و کندی مقاله‌ای دربارهٔ رسالهٔ مذکور نوشته است.[5]

ده) مختصر در علم هیئت (فارسی).

۶۹. این کتاب را کاشانی در سال ۸۱۳ (۱۴۱۰) یا پیش از آن تاریخ نوشته و آن را به سلطان جلال‌الدین امیرزاده اسکندر بهادرخان اهدا کرده است.

یك نسخهٔ خطی ناقص از این کتاب که در سال ۸۱۴ـ۸۱۳ (۱۱ـ۱۴۱۰) نوشته شده جزو مجموعه‌ای در کتابخانهٔ موزهٔ بریتانیا[6] موجود است و فیلم آن به شمارهٔ ۲۴/۶ در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران هست.[7] و یك نسخهٔ خطی دیگر از آن در کتابخانهٔ وزیری جامع یزد و

---

۱) دربارهٔ این شخص رجوع کنید به: استوری *P*، ج ۲ ص ۷۳، کندی *P*، ص ۲، و ذیل شمارهٔ ۳ صفحهٔ ۵ کتاب حاضر.

۲) *فهرست نسخه‌های خطی دانشکدهٔ ادبیات*، مجموعهٔ حکمت، صفحهٔ ۴۴.

۳) *فهرست کتابخانهٔ لیدن*، ج ۵ ص ۲۴۵ ش ۲۶۴۷ (God. 945 Warner).

۴) استوری *P*، ج ۲ ص ۷۳؛ صایلی *O*، ص ۴۳۳.

۵) کندی *A*.

۶) استوری *P*، ج ۲ ص ۷۲.

۷) *فهرست میکروفیلمهای دانشگاه*: ص ۴۰۲.

فیلم آن در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه به شمارهٔ ۲۴۶۴/۵ محفوظ است.[۱]

یك نسخهٔ خطی دیگر از این کتاب باعنوان مختصر در علم هیئت در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران به شمارهٔ ۲۱۶۰/۱ جزو مجموعه‌ای موجود است که ناقص است و تا نیمهٔ باب پانزدهم دارد.[۲] و یك نسخهٔ دیگر در کتابخانهٔ مجلس به شمارهٔ ۵۰۰۲ موجود است.

۷۲. کتاب مختصر در علم هیئت چنین شروع می شود: «الحمدلله الذی خلق السموات و الارضین... اما بعد این مختصریست در علم هیئت بر حسب اشارت من اشارته حکم و طاعته غنم... و هوالسلطان الاعظم، جلال الدین والدنیا امیرزاده اسکندر، خلد الله تعال خلافته و ملکه و سلطانه، بندهٔ کمترین جمشیدبن مسعود بن محمود، الملقب بغیاث، در سلك تحریر آورد. هر چند این بندهٔ کمترین خود را در حد (یا عدد؟) مصنفان نمی داند و بعجز و قصور خویش معترفست، امیدوار که بعین رضا ملحوظ گردد. و این رساله را مرتب کردیم بر بیست باب...»

۷۲. فهرست پانزده باب موجود در نسخهٔ خطی کتابخانهٔ دانشگاه تهران به این شرح است: ۱) در ذکر افلاك و کیفیت و ترتیب آن؛ ۲) جملهٔ حرکات افلاك بر دو نوع است...؛ ۳) ذکر دوایر عظیمه؛ ۴) در ذکر قوسها؛ ۵) در هیأت افلاك شمس؛ ۶) در هیأت افلاك قمر؛ ۷) در ذکر افلاك علویه و زهره و حرکات آنها؛ ۸) در افلاك عطارد و حرکات آنها؛ ۹) در عروض؛ ۱۰) در اختلاف منظر؛ ۱۱) در زیادتی نور ماه و نقصان آن؛ ۱۲) (ظاهراً در خسوف) چون زمین جسمی کثیف است و تاریك...؛ ۱۳) در هیأت کسوف؛ ۱۴) در هیأت زمین؛ ۱۵) در معرفت خط نصف‌النهار و سمت قبله (این باب ظاهراً ناتمام است).

۷۲. در باب سوم این کتاب اصطلاحات زیر تعریف شده است: معدل النهار؛ منطقةالبروج؛ دایرهٔ مار به اقطاب اربعه؛ دایرهٔ میل؛ دایرهٔ عرضیه؛ دایرهٔ نصف‌النهار؛ دایرهٔ اول سموت؛ دایرهٔ سمت؛ دایرهٔ افق حادث؛ مدارات یومی.

و در باب چهارم آن قوسهای زیر تعریف شده است: تقویم کوکب؛ عرض کوکب؛ میل اول؛ میل دوم؛ میل کلی؛ بُعد از معدل النهار؛ عرض بلد؛ طول بلد؛ مطالع ممر کوکب؛ مطالع؛ سمت مشرق؛ تعدیل النهار؛ سمت؛ ارتفاع؛ عرض اقلیم؛ عرض افق حادث؛ سمت قبله.

یازده) رساله‌هایی که به کاشانی منسوب است.

۷۳. *رساله در ساخت اسطرلاب* (فارسی). نام این رساله در فهرست کتابخانهٔ آستان

---

۱) *فهرست میکروفیلمهای دانشگاه*؛ ص ۶۹۸.

۲) *فهرست دانشگاه*، ج ۹ ص ۸۵۲.

قدس رضوی آمده[۱] و مؤلف فهرست مذکور آن را از تألیفات کاشانی معرفی کرده است.

۷۴. الف. سمت قبله *از دایرهٔ* هندیهٔ معروفه (به عربی). در همان کتابخانه و در دنبالهٔ رسالهٔ فوق (در ساخت اسطرلاب) رسالهٔ سمت *قبله* موجود است که مؤلف فهرست گمان کرده است که از کاشانی باشد و معلوم نیست که این حدس تا چه اندازه به حقیقت نزدیک است.

۷۴. (ب). تشریح *در پرگار* (فارسی). در *فهرست کتابخانهٔ آستان قدس رضوی* (ج ۳ فصل ۱۷ ص ۱۴ ش ۳۹) نام این رساله آمده و مؤلف فهرست مذکور نوشته که محتمل است این رساله از عبدالعلی بیرجندی* و یا از غیاث‌الدین جمشید کاشانی باشد.

۷۵. *مفتاح الاسباب فی علم الزیج.* نام این رساله در کتاب *مخطوطات الموصل* تألیف داود چلبی موصلی، چاپ بغداد، سال ۱۹۲۷ میلادی آمده است و منسوب به کاشانی است.[۲]

۷۶. تبصره. باید دانست که رسالهٔ *عمل الضرب بالتخت و التراب* که با رسالهٔ *سلم السماء*[۳] و رسالهٔ *استخراج* جیب درجهٔ *واحده*[۴] در ۱۲۹۹ هـ.ق در تهران به چاپ سنگی رسیده است و در پایان برخی از نسخه‌های *مفتاح الحساب* چاپ سنگی سال ۱۳۰۶ هـ.ق دیده می‌شود، و بعضی آن را از کاشانی دانسته‌اند[۵] از نصیرالدین‌طوسی*است که ظاهراً از کتاب *جوامع الحساب*[۶] وی استخراج شده است.

دوازده)نامه‌های کاشانی

۷۷. علاوه بر نامه‌ای که کاشانی از سمرقند به پدرش نوشته و قسمتهایی از آن را قبلا نقل کردیم[۷]، در مجموعهٔ خطی شمارهٔ ۴۴_۲۱۴۴ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران[۸] مطالبی از نامهٔ دیگری از کاشانی نقل شده که چون حاوی نکات سودمندی است، بخشی از آن را عیناً در اینجا می‌آوریم:

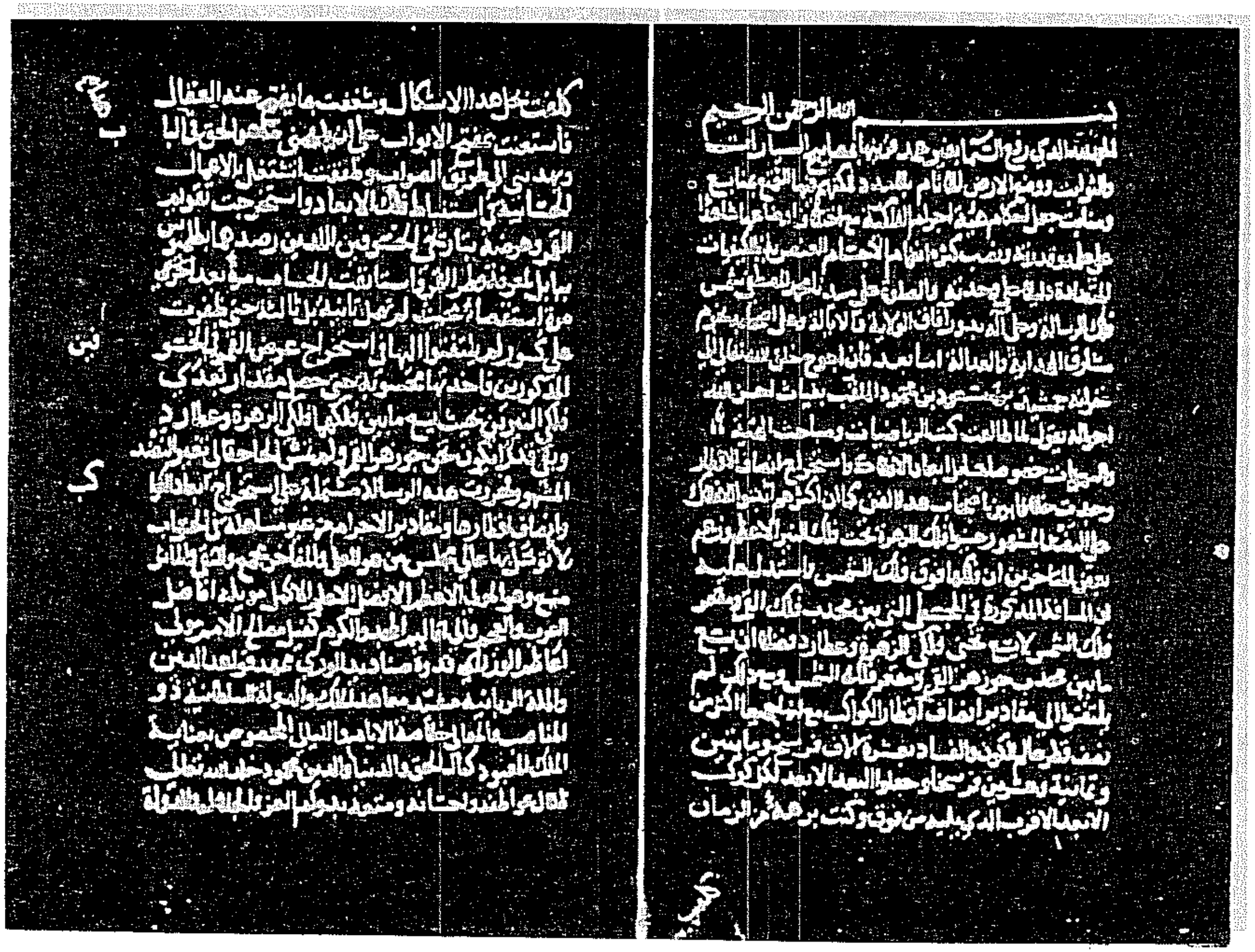
«مولانا غیاث‌الدین جمشید کاشانی مصنف *سلم السماء* در کتابتی که به مردم خود به کاشان نوشته بود قید کرده بود که نوبتی میرزا الغ بیك سی هزاردینار

---

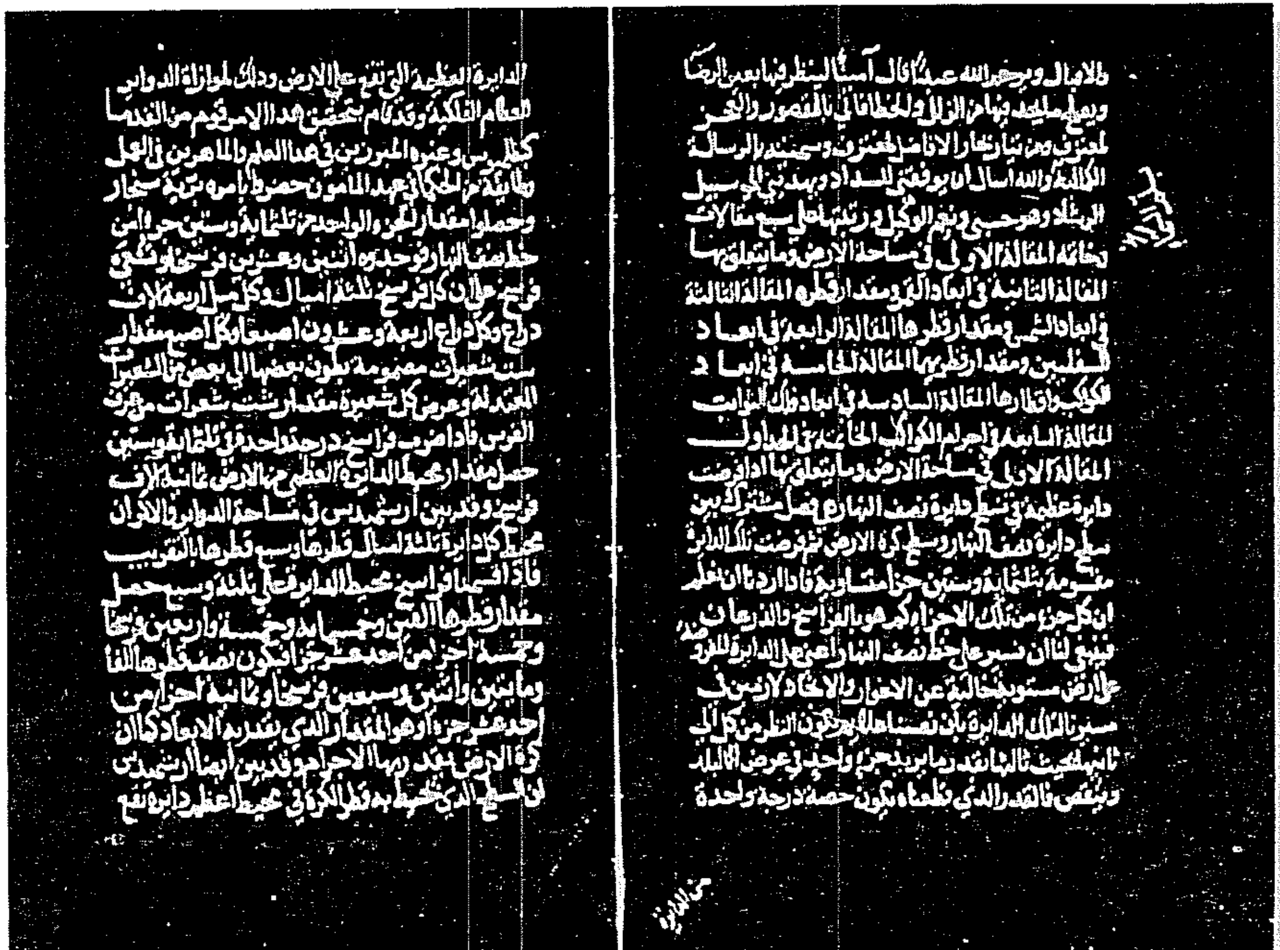
۱) فهرست رضوی، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۲۸ ش ۸۴.
۲) بروکلمان S_2، ص ۲۹۵؛ کندی P، ص ۶ و ۲۵۴ ش ۴۰.
۳) ← ش ۵۱ تا ۵۸ کتاب حاضر.
۴) ← بخش پنجم کتاب حاضر.
۵) کندی P، ص ۷.
۶) *فهرست دانشگاه*، ج ۱۳ ص ۳۳۷۰.
۷) ← ش ۴ تا ۷ کتاب حاضر.
۸) شخصاً دیده‌ام.

کپکی[1] صدقه فرموده بود که از آن جمله ده هزار به طلبه دهند. اسامی طلبه را قلمی کردند ده هزار و کسری بود که به درس و تدریس مشغول اند، و همین مقدار در خانه‌های خود هستند که از بزرگان و اولادشان که محتاج به وظیفه نیستند، و از آن جمله پانصد کس به ریاضیات مشغول اند، و در بیست موضع درس این فن گویند، ادنای ایشان در فارس و عراق نظیر ندارد، و بیست وچهار مستخرج‌اند که بعضی هیوی اند، و نیز قید کرده که در مدرسهٔ میرزا الغ بیک سه مدرس اند یکی قاضی زاده...»

۱) کپکی (Kapeki)، نوعی دینار و تومان که در عهد مغول و تیموریان و صفویان متداول بوده.



صفحات اول و دوم رسالهٔ «سلم السّماء» (عکس نسخهٔ خطی موجود در لیدن) ← ش ۵۵



الاميال و بحمد الله عندنا كان امينا لينظر فيها بعين الرضا
ويصلح ما يجد فيها من الزلل والخطا فاني بالقصور والعجز
لمعترف ومن تيار عثار الاناس لمغترف وسميته بالرسالة
الكمالية والله اسال ان يوفقني للسداد ويهديني الى سبيل
الرشاد وهو حسبي ونعم الوكيل ورتبتها على سبع مقالات
وخاتمة المقالة الاولى في مساحة الارض وما يتعلق بها
المقالة الثانية في ابعاد القمر ومقدار قطره المقالة الثالثة
في ابعاد الشمس ومقدار قطرها المقالة الرابعة في ابعاد
السفليين ومقدار قطريهما المقالة الخامسة في ابعاد
الكواكب واقطارها المقالة السادسة في ابعاد فلك الثوابت
المقالة السابعة في اجرام الكواكب الخاتمة في الجداول
المقالة الاولى في مساحة الارض وما يتعلق بها اذا فرضت
دايرة عظيمة في سطح دايرة نصف النهار فصل مشترك بين
سطح دايرة نصف النهار وسطح كرة الارض ثم فرضت تلك الدايرة
مقسومة بثلثماية وستين جزا متساوية فاذا اردنا ان نعلم
ان كل جزء من تلك الاجزاء كم هو بالفراسخ والذرعان
فينبغي لنا ان نسير على خط نصف النهار اعني على الدايرة المفروضة
على الارض مستوية خالية عن الاغوار والانجاد لا رمل في
مسيرنا لتلك الدايرة بان نصعد ... من كل الى
ثانية بحيث ان لنا تقدر ما ير به بجزء واحد في عرض البلد
وينقص فالقدر الذي قطعناه يكون حصة درجة واحدة

الدايرة العظيمة التي تقع على الارض وذلك لموازاة الدواير
العظام الفلكية وقد قام بتحقيق هذا الامر قوم من القدما
كبطلميوس وغيره المبرزين في هذا العلم والماهرين في العمل
وطايفة من الحكما في عهد المامون حضروا بامره برية سنجار
وحصلوا مقدار الجزء الواحد من ثلثماية وستين جزا من
خط نصف النهار فوجدوه اثنين وعشرين فرسخا وثلثي
فرسخ على ان كل فرسخ ثلثة اميال وكل ميل اربعة الاف
ذراع وكل ذراع اربعة وعشرون اصبعا وكل اصبع مقدار
ست شعيرات مضمومة بطون بعضها الى بعض من الشعيرات
المعتدلة وعرض كل شعيرة مقدار ست شعرات من عرف
الفرس فاذا ضرب فراسخ درجة واحدة في ثلثماية وستين
حصل مقدار محيط الدايرة العظمى من الارض ثمانية الاف
فرسخ وقد بين ارشميدس في مساحة الدواير ان
محيط كل دايرة ثلثة امثال قطرها وسبع قطرها بالتقريب
فاذا قسمنا فراسخ محيط الدايرة على ثلثة وسبع حصل
مقدار قطرها الفين وخمسماية وخمسة واربعين فرسخا
وخمسة اجزاء من احد عشر جزا فيكون نصف قطرها الفا
ومايتين واثنين وسبعين فرسخا وثمانية اجزاء من
احد عشر جزءا وهو المقدار الذي يقدر به الابعاد كما ان
كرة الارض يقدر بها الاجرام وقد بين ايضا ارشميدس
ان السطح الذي يحيط به قطر الكرة في محيط اعظم دايرة تقع

صفحات سوم و چهارم رسالهٔ «سلم السماء» (عکس نسخهٔ خطی موجود در لیدن). ← ش ۵۵

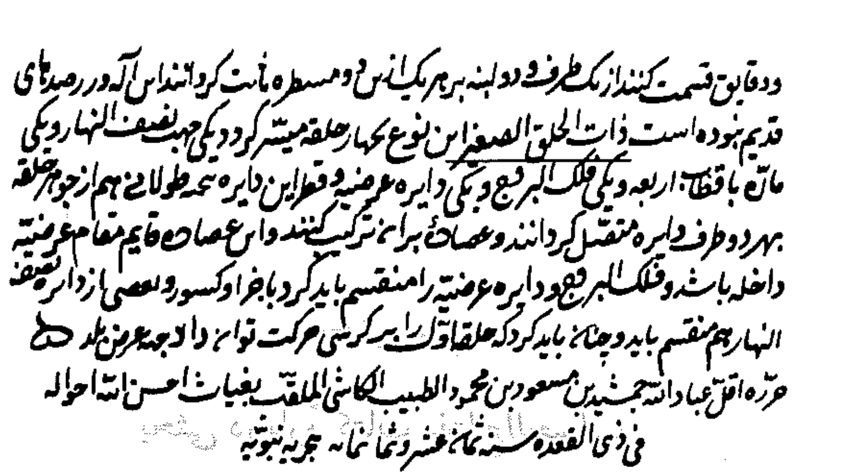
بسم الله الرحمن الرحیم الحمد لله رب العالمین والصلوة والسلام علی خیر خلقه محمد وآله الطیبین الطاهرین

اما بعد این رساله ایست در شرح آلات رصد که بر حسب فرمان پادشاه اسلام فرمانروای هفت اقلیم ظل الله فی الارضین قهرمان الماء والطین سلطان السلاطین فی العالم ملجأ وملاذ بنی آدم القایم بامور المسلمین وولی امیرالمؤمنین الواثق بالله الاکبر السلطان اسکندر خلد الله تعالی ملکه وخلافته وسلطانه وابد علی العالمین بره واحسانه در سلک تحریر آمد ذات الشعبتین سه مسطره باشند یکی قایم بر سطح افق و دوم را بر سر مسطره قایم بمسماری ترکیب کرده باشند بر مثال پرگار و سیوم را بر نزدیک قاعده مسطره قایمه بمسماری ترکیب کرده باشند و باید که طول مسطره ثانی دو گز و نیم کمتر نباشد و ما بین دو قطب که بمحل مسمار است از مسطره قایمه بقدر ما بین محل مسمار باشد از مسطره ثانی تا سر مسطره و طول مسطره ثالث بقدر وتر ربع دایره باشد که نصف قطر آن بقدر ما بین المسمارین بوده و دو لبنه بر مسطره ثانی نصب کرده باشند و مسطره ثالث منقسم کنند بهشتاد و پنج جزو با جزایی که ما بین قطب و راس مسطره ثانی شصت جزو باشد و هر درجه را بشصت دقیقه کرده باشند و ابتداء اعداد از نزدیک قاعده باشد و بعضی بجای مسطره ثالث ربع حلقه نصب کنند ذات الحلق مرکب است از هفت حلقه که هر یک چهار سطح آن محیط باشد دو سطح مستوی متوازی و دو سطح مستدیر یکی حاوی و یکی محوی حلقه اول در سطح نصف النهار نصب کنند و حلقه ثانی در اندرون حلقه اول باشد بحیثیتی که محدب او مماس مقعر حلقه اول باشد و بر طرفین حلقه اول دو سه قطعه چسبانیده باشند تا حلقه ثانی از اندرون او بهر دو طرف میل تواند کرد و در اندرون او متحرک شود و حلقه سوم بمثابت دایره مار باقطاب اربعه باشد از آن دو قطب معدل با حلقه دوم ترکیب کرده باشند و حلقه چهارم بمثابت فلک البروج بود با حلقه سیوم بر زوایای قایمه الصاق کرده باشند و یک روی او که مستوی است بدوازده برج و درجات قسمت کرده باشند و هر درجه بآن مقدار که قسمت پذیرد قسمت کرده باشند و حلقه پنجم و ششم بمثابت دو دایره عرضیه در اندرون حلقه مار باقطاب اربعه بدو قطب بروج با او ترکیب کرده باشند و یک روی حلقه ششم بسیصد و شصت و پنج درجه قسمت کرده و حلقه هفتم در اندرون حلقه ششم ترکیب کرده بنوعی که حلقه دوم در اندرون حلقه اول بود و دو لبنه بر سر حلقه نصب کرده باشند متقابل و حلقه اول را در سطح نصف نهار بر کرسی نصب کرده اند و ذات الحلق که بجهت رصد مراغه ساخته بوده از قطر حلقه اول آن چهار گز هاشمی بوده اما از رصدهای قدیم یک گز بیش نبوده حلقه اعتدال رصدی که در زمان عضدالدوله در شیراز کرده بوده اند حلقه ساخته بوده اند که قطر آن ده گز بوده موازی سطح معدل النهار نصب کرده بوده اند جهت رصد تحویل آفتاب باعتدالین و هیچ قسمتی بر آن نکرده بوده اند حلقه ثانی دو حلقه باشد بطریق

صفحهٔ اول رسالهٔ «شرح آلات رصد» (عکس نسخهٔ خطی موجود در لیدن). ← ش ۶۸

حلقهٔ اول و ثانی ذات الحلق نصب کرده و یک روی حلقهٔ اول بدرجات و دقایق قسمت کرده باشند و دو لبنه
بر حلقهٔ ثانی الصاق کرده باشند متقابل و حلقهٔ اول را کرسی باشد چنانک ذات الحلق است سدس فخری سدس دایره
باشد در سطح دایرهٔ نصف النهار نصب کرده و آنرا بیک ثانیه قسمت کرده باشند و آن چنانست که
دیواری برآرند از سنگ و گچ که طول قاعدهٔ آن هشتاد گز باشد و سطبری آن چهار گز و طول قامت آن
در طرف شمال چهل گز باشد و در طرف جنوب یک گز و چنان کنند که از جانب جنوب از قاعدهٔ دیوار تا جانب
شمال از سر دیوار سدسی باشد از مقعر حلقه چنانک اگر عمودی از مرکز آن بر سطح افق قایم کرده است
بر یک طرف سدس بگذرد و روی آن مقعر را از سنگ تراشیده کنند و بر میانهٔ آن مداری حفری کنند
باشند که عرض آن چهار اصبع بود و عمق آن یک اصبع و اندرون آن تختهای مس یا برنج سفکنند چنانکه
سطح ظاهر آن در غایت استدارت باشد و آنرا بدرجات و دقایق و ثوانی قسمت کنند و این گاهی لوح
ساحت که خط نصف النهار در غایت تدقیق برده آورده باشند ذات السمت و الارتفاع اساسی
مدور برآرند که یک گز و نیم ارتفاع آن باشد و قطر آن پنج گز کمتر نشاید و بر روی آن تختهٔ از مس
یا برنج الصاق کنند چنانک سطح آن موازی سطح افق باشد و دو شخص از برنج ترکیب کنند که
بر هر یک دو ربع دایره و دو سطح مستطیل و یک ربع دیگر محیط بود و نصف قطر هر یک از آن دو ربع
بقدر نصف قطر سطح آن اساس مدور باشد و بر هر یک از آن نرمادجات ترکیب کنند چنانکه گاهی
هر دو برهم منطبق شوند و گاهی با یکدیگر بر زوایای قایمه باشند و میلی از آهن بسازند که طول آن
از نصف قطر آن دایره بیک گز زیادت باشد و بآن نرمادجات فرو کنند و آنچه زیادت باشد
بقطب دایرهٔ اساس مرتفع و محیط دایرهٔ اساس بدرجات و دقایق قسمت کنند و محیط هر یک
از آن دو جسم همچنین قسمت کنند و بر مرکز هر یک از آن دو جسم قطبی و عضاده ترکیب کنند و این آلت
را در دمشق کرده بوده اند و بعد از آن در مراغه کردند و در قدیم نبوده است ذات الجیب و السهم
اساسی بقدر همان طریق که در ذات السمت گفتیم بسازند و تخته از چوب طولانی مسطح چنانک
سطبری سمک [illegible] آن مساوی عرض آن باشد و طول آن مساوی قطر دایرهٔ اساس باشد
و قطبی بمیانهٔ آن و مرکز دایره بگذرانند و حفری طولانی در میانهٔ آن برند و دو عمود مرتفع از دو طرف
قطب هر یک بقدر نصف قطر دایره قایم گردانند چنانک فاصله که میانهٔ هر دو باشد مساوی حفری
بود که بر میانهٔ آن تخته کرده باشند و بر میانهٔ هر یک از آن در طول حفری بکنند مقابل یکدیگر و دو
مسطره ترکیب کنند در طول مساوی قامت عمود و در غلظ مساوی حفری که در آن تخته کرده باشند
و بر سر هر دو نرمادجه ترکیب کنند و میلی از آهن تا آن بگذرانند چنانچه از هر دو طرف قدری بگذرد
و این هر دو را اندر میانهٔ آن دو حفر روان گردانند و کنارهای حفرها باجزا و قسمت کا نه

صفحهٔ دوم رسالهٔ «شرح آلات رصد» (عکس نسخهٔ خطی موجود در لیدن). ← ش ۶۸


ودقایق قسمت کنند از یک طرف و دو لبنه بر هر یک از ین دو مسطره ثابت گردانند این آله در رصدهای
قدیم نبوده است ذات الحلق الصغیر این نوع چهار حلقه میسّر گردد یکی جهت نصف النهار و یکی
مارّه باقطاب اربعه و یکی فلک البروج و یکی دایره عرضیه و قطر این دایره تیره طولانی هم از جوهر حلقه
بهر دو طرف دایره متصل گردانند و عضادتی برای ترکیب کنند و این عضاده قایم مقام عرضیه
داخله باشد و فلک البروج و دایره عرضیه را منقسم باید کرد باجزا و کسور و بعضی از دایره نصف
النهار هم منقسم باید و چنان باید کرد که حلقه اوّل را بر کرسی حرکت توان داد جهت عرض بلد تمّ
حرّره اقل عباد الله جمشید بن مسعود بن محمود الطبیب الکاشی الملقب بغیاث احسن الله احواله
فی ذی القعده سنة ثمان عشر و ثمانمایه هجریه نبویه

صفحهٔ سوم رسالهٔ «شرح آلات رصد» (عکس نسخهٔ خطی موجود در لیدن). ← ش ۶۸

بخش سوم

بحثی دربارهٔ کتاب *مفتاح الحساب*

تاریخ تألیف *مفتاح الحساب*

۷۸. *مفتاح الحساب* که به زبان عربی نوشته شده یکی از مهمترین تألیفات کاشانی است و، با وجود آنکه برای تدریس نوشته شده، شامل مطالب علمی جالب توجه می باشد و بسیار استادانه تألیف گردیده است.[۱]

کاشانی ظاهراً تألیف این کتاب را مدتی پیش از سال ۸۲۴ (۱۴۲۱) شروع کرده است، زیرا در آن سال کاشانی خود خلاصه‌ای از آن را فراهم آورده و آن را *تلخیص المفتاح* نامیده است (← ش ۱۲ و ۴۱). اما در آن تاریخ هنوز *مفتاح الحساب* کامل نبوده و ظاهراً کاشانی در طی سالهای ۸۲۴ تا ۸۳۰ هـ. ق به تکمیل آن پرداخته و مطالبی به آن افزوده است. مثلا وقتی در سال ۸۲۷ *رسالهٔ* محیطیه را تألیف کرده (← ش ۲۲۹) نام آن را در چند موضع از *مفتاح الحساب* که در شرف تکمیل بوده آورده است.[۲] بالاخره در سوم جمادی الاولی سال ۸۳۰ (۲ مارس ۱۴۲۷) کاشانی نسخهٔ کامل شدهٔ *مفتاح الحساب* را بهالغ‌بیك* تقدیم کرده است. در آخر بعضی از نسخه‌های خطی *مفتاح الحساب* عبارت زیر ثبت شده است[۳]: «صورة خط المصنف: حرره مؤلفه اضعف عبادالله، جمشیدبن مسعود الطبیب احسن الله تعالی احواله، فی ثالث جمادی الاولی سنة‌ثلثین و ثمانمائة هجریة مصطفویة.»

---

۱) برای کسب اطلاع از نظر یوشکویچ دربارهٔ کتاب *مفتاح الحساب* رجوع کنید به شمارهٔ ۲۴ کتاب حاضر.

۲) مفتاح، ص ۲ و ۷۹ و ۱۰۷.

۳) از جمله در آخر نسخهٔ خطی شمارهٔ ۴۲۲/۱ کتابخانهٔ دانشکدهٔ ادبیات تهران (مجموعهٔ امام جمعهٔ کرمان، فهرست سوم *ادبیات*، ص ۶۱) و همچنین در آخر نسخهٔ خطی شمارهٔ ۲۴۱۸ بانکیپور (← ص ۱۳ ج ۲۲، *کاتالگ بانکیپور*).

نسخه‌های موجود *مفتاح الحساب*

۷۹. *مفتاح الحساب* در سال ۱۳۰۶ (۱۸۸۸) در تهران به چاپ سنگی رسیده و نسخه‌های خطی متعدد از آن نیز در ایران و خارج از ایران موجود است.[۱]

در ایران یك نسخهٔ خطی نفیس از *مفتاح الحساب* به خط عبدالرزاق بن محمد ملقب به معین المنجم، که همان معین الدین کاشی است که با کاشانی به سمرقند رفته، در کتابخانهٔ ملّی ملك جزو مجموعه‌ای به شمارهٔ ۳۱۸۰ (از برگ ۱ تا برگ ۱۲۵) موجود است که کتابت آن در ماه رجب سال ۸۳۰ هـ.ق یعنی در حدود دو ماه پس از تاریخ تکمیل *مفتاح الحساب* در سمرقند پایان یافته است (بهترین نسخه).[۲]

بعض نسخه‌های خطی دیگر *مفتاح الحساب* در ایران از این قرار است: در کتابخانهٔ ملی ملك[۲] نسخهٔ شمارهٔ ۳۲۵۲؛ در کتابخانه مجلس شورای ملی[۳] نسخهٔ شمارهٔ ۱۵۳۰ (۱۵۱۹۱) و نسخهٔ شمارهٔ ۲۹۷۴/۱؛ در کتابخانهٔ دانشکدهٔ ادبیات تهران[۴] نسخهٔ شمارهٔ ۴۴۲/۱ (عکس این نسخه در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه به شمارهٔ ۲۷۶۰ موجود است)؛ در کتابخانه مرکزی دانشگاه[۵] نسخه‌های شمارهٔ ۱۷۹۰/۱ و ۲۰۶۶؛ در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی[۶] نسخه‌های شمارهٔ ۵۶۲۹، ۵۶۳۰/۱، ۵۶۳۱، و ۵۳۹۲.

شرحها و ترجمه‌های *مفتاح الحساب*

۸۰. ویکه قسمتی از دیباچهٔ *مفتاح الحساب* و بعضی از قواعد آن را در سال ۱۸۶۴ م به زبان فرانسوی ترجمه کرد.[۷]

۸۱. لوکی درسال ۱۹۴۴ م کتابی در شرح و تفسیر قسمتی از *مفتاح الحساب* نوشت و مقدمهٔ آن را به زبان آلمانی ترجمه کرد و این کتاب در ۱۹۵۱ به چاپ رسید.[۸]

۸۲. رزنفلد و سگال و یوشکویچ در سال ۱۹۵۶ م متن عربی *مفتاح الحساب* را با ترجمه و شرح آن به زبان روسی منتشر ساختند.[۹]

۸۳. خانم نائله رجائی در ۱۹۵۱ م رسالهٔ پایان نامهٔ دکترای خود را در دانشگاه امریکایی

---

۱) بروکلمان G_2 ص ۲۳۷ (ش ۴) و بروکلمان S_2، ص ۲۹۵ ش ۵.

۲) شخصاً دیده‌ام. ۳) *فهرست مجلس*، ج ۱۰ ص ۴۲۱ و ج ۴ ص ۲۳۳.

۴) *فهرست سوم ادبیات*، ص ۶۱ و ۱۰۷. ۵) *فهرست دانشگاه*، ج ۸ ص ۳۵۳ و ۶۹۴.

۶) *فهرست رضوی*، ج ۸ ص ۳۰۰، ۴۳۴، ۴۳۵. ۷) ویکه P_1، ص ۲۲ تا ۲۵.

۸) لوکی R، همهٔ کتاب و صفحات ۶ تا ۱۳ (ترجمهٔ مقدمهٔ *مفتاح الحساب*).

۹) رزنفلد و یوشکویچ، ص ۹ تا ۲۶۱ (ترجمهٔ روسی *مفتاح الحساب*) و ۳۲۰ تا ۳۶۷ (شرح برخی از مطالب *مفتاح الحساب*) و ص ۴۲۸ تا ۵۶۶ (متن عربی *مفتاح الحساب*).

بیروت دربارهٔ اختراع کسرهای اعشاری توسط کاشانی با استفاده از مطالب *مفتاح‌الحساب* و *رسالهٔ محیطیه* کاشانی نوشت.[۱]

۸۴. آقای عبدالقادر داخل در ۱۹۵۱ م موضوع رسالهٔ پایان نامهٔ دکترای خود را در دانشگاه امریکایی بیروت «استخراج ریشهٔ n اُم در دستگاه شصتگانی توسط کاشانی» قرار داد. وی در این رساله باب پنجم[۲] از مقالهٔ سوم *مفتاح‌الحساب* را به انگلیسی ترجمه و شرح کرد و آن را با متن عربی باب مذکور و مطالب بسیار مفید دیگر در ۱۹۶۰ م به چاپ رسانید.[۳]

۸۵. علاوه بر اینها قسمت مهم مقالهٔ لوکی دربارهٔ «استخراج ریشه n اُم و بسط دوجمله‌ای در ریاضیات اسلامی»[۴]، مربوط به مطالب *مفتاح‌الحساب* است.

۸۶. میرزامحمد علی قاینی اصفهانی در بین سالهای ۱۲۷۳ و ۱۲۹۴ هـ.ق در قصبهٔ اردکان یزد مقالهٔ چهارم *مفتاح‌الحساب* را که درباب مساحت است شرح کرده و این شرح را *نهایة‌الایضاح* نامیده و در دیباچهٔ آن ناصرالدین شاه را ستوده است. دو نسخهٔ خطی از این شرح در کتابخانهٔ مجلس شورای ملی موجود است.[۵]

۸۷. این نکته را هم ناگفته نگذاریم که یولیوس روسکا[۶] نام کتاب *مفتاح‌الحساب* را در ضمن فهرست تألیفات ریاضی اسلامی که باید ترجمه و انتشار آنها را به زبانهای اروپایی برسایر تألیفات در این باب مقدم داشت ثبت کرده است.[۷]

ترجمهٔ فارسی دیباچهٔ *مفتاح‌الحساب*

۸۸. آقای محیط طباطبائی چند سطر از دیباچهٔ *مفتاح‌الحساب* را به فارسی ترجمه کرده است[۸]، و گفتیم که ویکه نیز قسمت مهم آن دیباچه را به زبان فرانسوی و لوکی همهٔ آن را به زبان آلمانی ترجمه کرده‌اند.

لوکی متن عربی دیباچهٔ *مفتاح‌الحساب* را از روی سه نسخهٔ خطی موجود در لندن و برلین

---

۱) رجائی: *رساله*.

۲) الباب الخامس فی استخراج الضلع الاول من المضلعات (*مفتاح*، ص ۷۴ تا ۷۸).

۳) داخل: *رساله*. ۴) لوکی *A*.

۵) *فهرست مجلس*، ج ۴ ص ۲۳۴ وج ۱۹ ص ۴۸۷، در آنجا نام مؤلف کتاب *نهایة الایضاح* میرزا محمد علی قاینی اصفهانی آمده است و این درست است. ← *فهرست مجلس*، ج ۱۹ حاشیهٔ صفحه ۲۹۴.

6) Julius Ruska

۷) الدومیه‌لی *S*، ص ۲۸۷.

۸) محیط: *غیاث‌الدین*، ص ۵ (سطر آخر) و ص ۶ (شش سطر اول).

و پاریس در آخر کتاب خود آورده است.[۱] این متن با دیباچهٔ *مفتاح‌الحساب* چاپی مختصر اختلافاتی دارد.[۲]

۸۹. ترجمهٔ فارسی دیباچهٔ *مفتاح الحساب* از روی دیباچهٔ چاپ لوکی:

بسم‌اللّٰه‌الرحمن الرحیم وبتوفیقك نعتصم یا کریم

ستایش خداوندی را سزاست که در آفرینش آحاد یگانه است، و در به هم پیوستن اعداد گوناگون بی‌همتا است. و درود بر بهترین آفریدهٔ او محمد (ص) که والاترین شفاعت کنندهٔ روز رستاخیز است، و برخاندان او و فرزندانش که راههای رهایی و رستگاری را رهنمونند. اما بعد، نیازمندترین بندگان خدای تعالی به آمرزش و بخشش او جمشید پسر مسعود پسر محمود پزشك کاشی ملقب به غیاث، که خدا روزگارش را نیکو گرداناد، چنین گوید: «چون در اعمال حساب و قوانین هندسه چندان ممارست کردم که به حقایق آن رسیدم، و به دقایق آن پی بردم، و از مسایل پیچیده و دشوار آن پرده برداشتم، و مشکلات آن را گشودم، و قوانین ودستورهای بسیار در آن یافتم، و آنچه را استخراجش بر بسیاری از کسان که به آن پرداخته بودند دشوار بود به دست آوردم، و همهٔ جداول زیج *ایلخانی* را از نو با دقیقترین عمل استخراج کردم، و زیج موسوم به خاقانی را در تکمیل زیج *ایلخانی* وضع کردم، و آنچه در کارهای منجمان استنباط کردم و در زیج دیگری وجود نداشت با برهانهای هندسی در آن گردآوردم، و نیز زیج *تسهیلات* و جداول پراکندهٔ دیگر را وضع کردم، و رساله‌های دیگری تصنیف نمودم، مانند رسالهٔ موسوم به *سلم السماء* در حل دشواریهایی که برای پیشینیان در ابعاد و اجرام رخ داده بود، و رساله‌ای که آن را *محیطیه* نامیدم، در نسبت قطر به محیط، و*رسالهٔ وتروجیب* در استخراج آن دو برای یك سوم قوسی که وتر وجیب آن معلوم باشد، و این نیز یکی از مسائلی است که بر پیشینیان دشوار بوده است، چنانکه صاحب *مجسطی* در آن کتاب گفته که برای به دست آوردن آن راهی نیست، و آلت موسوم به «طبق المناطق» را اختراع کردم و کتاب *نزهةالحدائق* را در چگونگی ساختن و شناختن آن نوشتم، و آن آلتی است که تقاویم کواکب و

---

۱) لوکی R، ص ۱۲۷ تا ۱۳۰. ۲) مثلا رجوع کنید به ذیل شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۱۶ کتاب حاضر

عرضهای آنها و دوری آنها از زمین و رجوع آنها وخسوف و کسوف و آنچه متعلق به آنها است از روی آن به دست می‌آید، همچنین جوابهای مسائل بسیاری را که محاسبان زبردست برسبیل امتحان یا برای آموختن با من در میان نهادند، و حل آنها به وسیلهٔ معادلات ششگانهٔ جبری[1] حاصل نشده بود استخراج کردم، در اثنای این اعمال به دستورهای متعددی دست یافتم که با آنها اعمال مقدماتی حساب به آسانترین وجه و ساده‌ترین راه و کمترین عمل و بیشترین فایده و روشن‌ترین وضع صورت می‌گیرند. پس بهتر دیدم که آنها را مدون کنم، و بر آن شدم که به شرح آنها بپردازم تا دوستان را تذکری باشد و خردمندان را مهارت افزاید[2]؛ و این کتاب را نوشتم و در آن آنچه را که مورد احتیاج شخص محاسب بود با احتراز از اطناب ممل و ایجاز مخل جمع آوردم و برای بیشتر اعمال، دستوری در جدول قرار دادم تا به خاطر سپردن آنها بر مهندسان[3] آسان باشد. و همهٔ جدولهایی که در این کتاب وضع شده ساخته و پرداختهٔ من است و مسؤول آسانی و دشواری آنها من هستم[4] مگر هفت جدول که عبارتند از:

اول جدولی که در آن حاصلضربهای اعداد کوچکتر از ده قرار دارند[5]؛ دوم شبکهٔ ضرب[6]؛ سوم جدولی که در آن اصول منازل قرار دارند[7]؛ چهارم مثال یکی کردن مخرجها[8]؛ پنجم شناسایی مراتب حاصلضرب و خارج قسمت[9]؛ ششم جدول جیبها[10]؛ هفتم شناسایی جنس حاصلضرب و خارج قسمت.[11]

و این کتاب را جزو کتابخانهٔ... سلطان اعظم... الغ بیک گورکان... قرار دادم. و چون کتاب را به پایان رسانیدم، آن را *مفتاح‌الحساب* نامیدم، و از خداوند مسئلت دارم که مرا در درستی و راستی موفق گرداند، و راه راست را به من بنمایاند، و از کسی که به این کتاب نظر می‌افکند استدعا دارم که از ضعف

---

۱) السّت الجبریة، یعنی معادلات $ax^2=bx$، $ax^2=c$، $bx=c$، $ax^2+bx=c$، $ax^2+c=bx$، و $ax^2=bx+c$ که در آنها a و b و c اعداد مثبت هستند.

۲) وپکه از ابتدای مقدمهٔ *مفتاح‌الحساب* تا همین عبارت را از روی نسخهٔ خطی *مفتاح‌الحساب* موجود در موزهٔ بریتانیا به زبان فرانسوی ترجمه کرده است (← وپکه P_1، ص ۲۲ تا ص ۲۵).

۳) در *مفتاح‌الحساب* چاپی «لیسهل ضبطهاعلی المهوسین» و در بعض نسخه‌های دیگر «لیسهل ضبطها علی المهندسین» آمده است.

۴) مفتاح، ص ۳ (عین عبارت این است: فخاطری ابوعذره و مقتضب حلوه و مره).

۵ تا ۱۱) مفتاح، به ترتیب صفحات ۱۲، ۱۵، ۳۸، ۴۷، ۷۲، ۱۱۶، و ۱۶۰.

عبارات آن مرا معذور دارد، و اگر لغزشی در آن روی داده باشد بر من خرده نگیرد، چه من به عجز و تقصیر خود مقرم و به سستی بیان و نوشتهٔ خود معترفم. و این کتاب را در یك مقدمه و پنج مقاله مدوّن ساختم.»

فهرست مقالات و بابها و فصلهای *مفتاح‌الحساب*

۹۰. مقدمه: در تعریف حساب و عدد و اقسام آن

۹۱. مقالهٔ اول: در حساب عددهای صحیح با ارقام هندی، و آن مشتمل است بر شش باب: ۱) در صورتهای اعداد و مراتب آنها؛ ۲) در تضعیف و تنصیف و جمع و تفریق؛ ۳) در ضرب؛ ۴) در تقسیم؛ ۵) در استخراج ریشه‌های اعداد مانند جذر و کعب؛ ۶) در میزان (امتحان) اعمال.

۹۲. مقالهٔ دوم: در حساب کسر، و آن مشتمل است بردوازده باب: ۱) در تعریف کسرها و اقسام آن؛ ۲) در چگونگی نوشتن ارقام کسرها؛ ۳) در شناخت تداخل و اشتراك و تباین؛ ۴) در تجنیس و رفع؛ ۵) در یکی کردن مخرجهای کسرهای مختلف؛ ۶) در افراد (تبدیل) کسرهای مرکب؛ ۷) در تضعیف و تنصیف و جمع و تفریق؛ ۸) در ضرب؛ ۹) در تقسیم؛ ۱۰) در استخراج ریشه‌ها؛ ۱۱) در تحویل کسر ازیك مخرج به مخرج دیگر؛ ۱۲) در چگونگی ضرب دانگ‌ها (دوانیق) وطسوج ها و تقسیم آنها.

۹۳. مقالهٔ سوم: در طریق حساب منجمان، و آن مشتمل است بر شش باب: ۱) درشناخت ارقام جمّل و چگونگی نوشتن آنها؛ ۲) در تضعیف و تنصیف وجمع و تفریق؛ ۳) در ضرب؛ ۴) در تقسیم؛ ۵) در استخراج ریشه‌ها؛ ۶) در تحویل ارقام ستّینی (= شصتگانی) به ارقام هندی و برعکس، چه صحیح باشند و چه کسری.

۹۴. مقالهٔ چهارم: در مساحت، و آن مشتمل است بر مقدمه و نه باب: مقدمه، در تعریف مساحت؛ ۱) در مساحت مثلث و آنچه مربوط به آن است، و مشتمل است بر سه فصل: (اول) در تعریف مثلث و اقسام آن، (دوم) در مساحت مثلث عموماً و استخراج ابعاد آن، (سوم) در مساحت مثلث متساوی اضلاع خصوصاً و استخراج ابعاد آن؛ ۲) در مساحت چهارضلعیها و آنچه متعلق به آنها است، و آن مشتمل است بر پنج فصل: (اول) در تعریفات، (دوم) در مساحت مربع و مستطیل و استخراج ابعاد آنها، (سوم) در لوزی (معین) و ذوالیمینین، (چهارم) در شبه لوزی و ذوزنقه، (پنجم) در ذوالرجلین و منحرف. ۳) در مساحت کثیرالاضلاعها و آنچه متعلق به آنها است، و آن مشتمل است بر پنج فصل: (اول) در تعریف، (دوم) در مساحت کثیرالاضلاعها و استخراج ابعاد آنها، (سوم) در آنچه مختص به

کثیرالاضلاع منتظم است و استخراج ابعاد آن، (چهارم) در آنچه مختص به شش ضلعی منتظم است، (پنجم) در آنچه مختص به هشت ضلعی منتظم است. ۴) در مساحت دایره و قطاع دایره و قطعهٔ دایره و حلقه و جز آنها و آنچه متعلق به آنها است، و آن مشتمل است بر پنج فصل: (اول) درتعریفات، (دوم) در مساحت دایره و استخراج محیط آن برحسب قطر و برعکس، (سوم) در مساحت قطاع دایره و قطعهٔ دایره و استخراج ابعاد آنها، (چهارم) در مساحت سایر سطحها که محیط آنها خطوط مستدیر هستند، (پنجم) در بیان جدول جیب و چگونگی عمل با آن. ۵) در مساحت سطوح مستوی غیر از آنچه (قبلا) ذکر کردیم، مانند شبه دایره و مطبل و مدرج و ذوات الشرفات و کثیر الاضلاع مستدیر و غیره. ۶) در مساحت سطوح مستدیر مانند استوانه‌ها و مخروطها و کره و آنچه متعلق به آنها است، و آن مشتمل است بر شش فصل: (اول) در تعریفات، (دوم) در مساحت سطح استوانه، (سوم) در مساحت سطح مخروط، (چهارم) در مساحت سطح کره و استخراج قطر آن، (پنجم) در مساحت سطح قطعهٔ کره و استخراج ابعاد آن، (ششم) در مساحت قاچ (ضلع الکره). ۷) در مساحت حجم اجسام، و آن مشتمل است بر هشت فصل: (اول) در حجم استوانه، (دوم) در حجم مخروط، (سوم) در حجم مخروط ناقص، (چهارم) در حجم فضل مخروط و فضل معین مجسّم، (پنجم) در حجم کره، (ششم) در حجم قطاع کره و قطعهٔ کره، (هفتم) در حجم کثیرالوجوههای منتظم، (هشتم) در مساحت حجم سایر اجسام، ۸) در اندازه‌گیری حجم بعضی از اجسام از روی وزن آنها. ۹) در حجم بناها و عمارات، و آن مشتمل است بر سه فصل: (اول) در مساحت حجم طاق و ازج، (دوم) در حجم قبهٔ مجوفه، (سوم) در حجم سطوح مقرنس.

۹۵. مقالهٔ پنجم: در استخراج مجهولات به وسیلهٔ جبر و مقابله و خطأین و غیره با قواعد حسابی، و آن مشتمل است بر چهار باب: ۱) در جبر و مقابله، و آن مشتمل است بر ده فصل: (اول) در تعریفات، (دوم) در جمع اجناس مانند عدد و شیء ومال و کعب، (سوم) در تفریق این اجناس، (چهارم) در ضرب این اجناس، (پنجم) در تقسیم این اجناس، (ششم) در جذر این اجناس، (هفتم) در ذکر مسائل جبری، (هشتم) در چگونگی استخراج مجهول با معادلات ششگانهٔ مشهور، (نهم) در چگونگی استخراج مجهول، هر گاه عمل به تعادل بین دو جنس ختم شود که با هم همان نسبت را داشته باشند که اجناس معادلات ششگانهٔ مذکور با هم دارند، (دهم) در مسائلی که خود ما استنباط کرده‌ایم و بیان آن را وعده داده بودیم. ۲) در استخراج مجهول به طریق خطأین. ۳) در ایراد بعضی از قواعد حسابی که در استخراج مجهولات به آنها احتیاج پیدا می‌شود، و آنها پنجاه قاعده هستند. ۴) در مثالها و آن مشتمل بر چهل مثال است.

نگاهی به مقدمهٔ *مفتاح‌الحساب*

۹۶. دیدیم که *مفتاح‌الحساب* مشتمل بر یك مقدمه و پنج مقاله است. بررسی این پنج مقاله و نقادی مطالبی که کاشانی از خود استنباط کرده، و بحث در آنچه از پیشینیان گرفته و آنها را بسط و توسعه داده است، مستلزم تألیف کتابی مفصل و جداگانه است. در این باره پاول لوکی کتابی نفیس به زبان آلمانی فراهم آورده[1] که، اگرچه شامل بحث در همهٔ مقالات *مفتاح‌الحساب* نیست، ولی در نوع خود کتابی است ممتاز و بسیار قابل استفاده، همچنین گفتیم که رزنفلد و یوشکویچ در ترجمهٔ روسی که از *مفتاح‌الحساب* به عمل آورده‌اند بسیاری از مطالب آن را شرح کرده‌اند.[2]

در این بخش ابتدا به عنوان نمونه مقدمه و مقالهٔ اول *مفتاح‌الحساب* را مورد بررسی قرار می‌دهیم، و سپس به برخی از مطالب مهم مقالات دیگر آن نیز اشاره می‌کنیم، و در بخشهای آیندهٔ کتاب حاضر نیز هر جا مقتضی باشد از آن کتاب گفتگو خواهیم کرد.

در مقدمهٔ *مفتاح‌الحساب* تعاریف زیر جلب توجه می‌کند:

۹۷. موضوع علم حساب عدد است و عدد در شمردن به کار می‌آید و مشتمل است بر واحد و آنچه از آن تألیف می‌شود[3]، و به اعتبار کمیت ذاتی، یعنی اگر به عدد دیگر مضاف نشود، آن را صحیح می‌نامند، مانند یك و دو و ده و پانزده و غیره، و به اعتبار کمیت اضافی، یعنی اگر به عدد دیگر مضاف شود، آن را کسر می‌گویند، و عدد منسوب الیه را مخرج می‌خوانند[4]، مانند یك از دو (کالواحد من الاثنین) و آن نصف است و سه از پنج (کالثلثة من الخمسة) و آن سه پنجم است.

۹۸. عدد مفرد عددی است که فقط در یك مرتبه واقع شود.[5] (یعنی ازیکی از ارقام نه گانه و احیاناً یك یا چند صفر تشکیل گردد) مانند ۱، ۲، ۱۰، ۹۰، و ۳۰۰۰۰.

۹۹. عدد مجرد، واحد در هر مرتبه‌ای که واقع شود عدد مجرد نامیده می‌شود[6] مانند ۱، ۱۰، و ۱۰۰۰ (یعنی یکی از قوای صحیح عدد ۱۰).

۱۰۰. عدد مرکب عددی است که در دو مرتبه یا بیشتر واقع شود[7] مانند ۱۱ و ۱۳۳.

---

۱) لوکی *R*. ۲) رزنفلد و یوشکویچ، ص ۳۲۴ تا ۳۶۷.

۳) مفتاح، ص ۸: «فموضوعه‌العدد و هومایقع فی‌العد ویشتمل علی الواحد و علی مایتألف منه.»

۴) اصطلاح کسر در اینجا با آنچه امروزه کسر می‌نامیم اندك تفاوتی دارد. مثلا ما امروزه $\frac{3}{5}$ را کسر و ۳ را صورت کسر و ۵ را مخرج کسر می‌نامیم ولی کاشانی ۳ را کسر و ۵ را مخرج می‌نامد.

۵) مفتاح، ص ۸: «المفردما وقع فی‌مرتبة واحدة.»

۶) مفتاح، ص ۸: «وقدیسمی الواحد فی‌ای مرتبة کان بالمجرد.»

۷) مفتاح، ص ۸: «والمرکب ما وقع فی‌مرتبتین اوازید».

۱۰۱. زوج الزوج عددی است که بتوان آنقدر آن را نصف کرد تا به یك رسید[۱] مانند ۸ و ۱۶ (یعنی یکی از قوای صحیح عدد ۲).

۱۰۲. زوج الزوج و الفرد عددی است که زوج الزوج نباشد ولی بیش از یك بار بتوان آن را نصف کرد[۲] مانند ۱۲ و ۲۰ (یعنی حاصلضرب یك عدد فرد در یکی از قوای عدد ۲).

۱۰۳. زوج الفرد عددی است که فقط یك بار بتوان آن را نصف کرد[۳] مانند ۱۰ و ۳۰ (یعنی حاصلضرب یك عدد فرد در ۲).

نگاهی به بابهای اول و دوم از مقالهٔ اول *مفتاح‌الحساب*

۱۰۴. در آغاز باب اول کاشانی می گوید که حکمای هند برای عقود[۴] نه گانهٔ معروف نه رقم وضع کرده‌اند به این صورت ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، و ۹ و سپس مراتب را تعریف می کند و می گوید: «مراتب عبارت است از مواضع ارقام متوالی از راست به چپ روی یك سطر و موضع اول را مرتبهٔ یکان و موضع سمت چپ آن را مرتبهٔ دهگان گویند...» و بعد می نویسد: «و بدان که هر صورتی از صورتهای نه گانه اگر در مرتبهٔ اول واقع شود علامت یکی از اعداد یك تا نه است و اگر در مرتبهٔ دوم واقع شود علامت یکی از عقود نه گانهٔ عشرات است که عبارتند از ۱۰، ۲۰، ...، و ۹۰ و اگر در مرتبهٔ سوم واقع شود علامت یکی از عقود نه گانهٔ مات است و به همین قیاس.»[۵]

۱۰۵. کاشانی در این باب از صفر به عنوان رقم یا عدد نام نمی برد اما بعد از تعریف مراتب

---

۱) مفتاح، ص ۸: «زوج الزوج و هومایقبل التنصیف الی الواحد.»

۲) *التفهیم*، ص ۳۵: «زوج‌الزوج و الفرد کدامست؟ این آن است که به دو نیم بیش از یك بار شود و به یکی نرسد.»

۳) *التفهیم*، ص ۳۵: «زوج‌الفرد کدامست؟ این آن است که یك بار به دو نیم شود و بس و به یکی برسد.»

) عقود جمع عقد (به فتح عین و سکون قاف) به معنی گره و بند گره بستن است. کاشانی اصطلاح «عقد» را برای هر یك از اعداد یك تا نه و اصطلاح «رقم» را برای هر یك از علامات ۱، ۲، ...، و ۹ به کاربرده است و چنانکه خواهیم دید بعداً از عقود نه‌گانهٔ عشرات (یعنی ۱۰، ۲۰، ...، و ۹۰) و عقود نه گانهٔ مآت (یعنی ۱۰۰، ۲۰۰، ...، و ۹۰۰) گفتگو می کند؛ و نیز رجوع کنید به گاندز G، صفحات ۴۰۲ تا ۴۰۷. (در آنجا شرح جامعی دربارهٔ استعمال اصطلاح عقود در منابع اسلامی نوشته شده) و کارادوو A (در آنجا عقد را به کسر عین گرفته است).

بیرونی در کتاب *ماللهند* (چاپ ساخاو، متن عربی، ص ۸۳؛ چاپ حیدرآباد دکن، ص ۱۳۶) نوشته است: «و مما اتفق علیه جمیع الامم فی الحساب هوتناسب عقوده علی الاعشار. فمامن مرتبه فیهالاّ و واحدها عُشر واحد التی بعدها و عشرة اضعاف واحدالتی قبلها» پس بنابه گفتهٔ بیرونی، اگر a یکی از ارقام ۱ تا ۹ باشد، هر عقد به صورت $a\times 10^{n}$ و واحد هر عقد به صورت 10^{n} است.

۵) مفتاح، ص ۹.

می‌نویسد: «و هر مرتبه‌ای که در آن عدد نباشد واجب است که در آن صفری به شکل دایرهٔ کوچك قرار دهیم تا آنکه خللی در مراتب حاصل نگردد»[۱] و نیز در باب دوم مقالهٔ اول *مفتاح* در ضمن شرح عمل «تنصیف» وقتی می‌خواهد عدد ۴۰۰۰۵۲۷ را نصف کند می‌گوید: «۴ را نصف می‌کنیم می‌شود ۲ و آن را زیر ۴ قرار می‌دهیم و چون صفر نصف ندارد[۲] زیر آن یك صفر قرار می‌دهیم...» پس در اینجا هم کاشانی صفر را عدد نمی‌شمرد و نمی‌گوید که نصف صفر صفر است.

۱۰۵ (الف). اما با این حال در باب سوم مقالهٔ اول *مفتاح*، هنگامی که از ضرب کردن دو عدد در هم گفتگو می‌کند، می‌گوید: «هر مرتبه‌ای که در آن صفر واقع باشد... در حاصلضرب جزء نظیر آن صفری قرار می‌دهیم، زیرا حاصلضرب صفر در هر عدد دیگر صفر است»،[۳] پس کاشانی در این مواضع صفر را عدد می‌شمرد، و از این هم مهمتر آن است که چنانکه بعداً خواهیم دید، وی صفر را به عنوان نمایندهٔ قوه به کار برده و به آن معنی یك عدد واقعی داده است.[۴]

۱۰۵ (ب). در باب دوم مقالهٔ اول *مفتاح*، کاشانی چگونگی اعمال تضعیف (دو برابر کردن) و تنصیف (تقسیم بر دو) و جمع و تفریق را شرح می‌دهد.

این مطلب در خور توجه است که، با وجود اینکه عمل تضعیف حالت خاصی از عمل ضرب (ضرب در ۲) و عمل تنصیف حالت خاصی از عمل تقسیم (تقسیم بر ۲) است، در بیشتر کتابهای حساب دورهٔ اسلامی، مانند کتاب *حساب* تألیف محمدبن موسی خوارزمی* (قرن سوم هجری) و کتاب *فی‌اصول حساب الهند* از کوشیاربن لبان گیلانی* (قرن چهارم هجری) و کتاب *شمارنامه* از محمدبن ایوب طبری* (قرن پنجم هجری) و کتاب *المقنع فی‌الحساب الهندی* از علی‌بن‌احمد نسوی* (قرن پنجم هجری) تا *مفتاح‌الحساب* کاشانی

---

۱) *مفتاح*، ص ۹. بیرونی در *التفهیم* (ص ۴۷) می‌نویسد: «و چون مرتبه‌ای خالی باشد از عددی، به جای او نشانی کنند از بهر نگاهداشتن اورا که تهی است ولی ما اورا دایره‌ای خرد کنیم و اورا صفر نام کنیم، یعنی تهی و هندوان او را نقطه کنند». ضمناً معلوم می‌شود که ایرانیان از قدیم صفر را به صورت دایره می‌نوشته‌اند و عادت ناپسند نوشتن نقطه به جای صفر بعداً پیدا شده است و وقتی آقای دکتر مصاحب در *دایرة‌المعارف فارسی* و سایر تألیفات خود صفر را به صورت (O) می‌نویسد تا با نقطه و علامت درجه (°) اشتباه نشود کاملا حق دارد و خرده‌هایی که به ایشان گرفته‌اند بیجاست (← *دایرة‌المعارف فارسی*، ص ۱۳).

۲) *مفتاح*، ص ۱۰: «ولان لیس للصفر نصف.»

۳) *مفتاح*، ص ۱۴: «لان ضرب الصفر فی أی عدد یکون صفراً.»

۴) ش ۲۲۰ کتاب حاضر، و نیز رجوع کنید به لوکی *R*، ص ۱۸.

(قرن نهم هجری) و حتی کتاب عیون *الحساب* ملامحمدباقر یزدی* (قرن یازدهم هجری)، این دو عمل جداگانه در نظر گرفته شده است.[۱]

نگاهی به باب سوم مقالهٔ اول *مفتاح الحساب*

۱۰۶. در آغاز این باب کاشانی عمل ضرب عددهای صحیح را چنین تعریف می‌کند: «ضرب کردن دو عدد صحیح عبارت از یافتن امثال یکی از آن دو عدد است به عدهٔ آحاد عدد دیگر»[۲] و اضافه می‌کند که تعریف جامع عمل ضرب این است: «ضرب کردن دو عدد به دست آوردن عددی است که نسبت آن به یکی از آن دو عدد مساوی باشد با نسبت دیگری به واحد»[۳].

۱۰۷. سپس کاشانی چند قاعده برای عمل ضرب ذکر می‌کند و برای هر کدام مثالی می‌آورد.

مثال ۱. برای ضرب کردن عدد ۵۴۷۸۰۰ در عدد یك رقمی ۴ حاصلضر بهای جزء یعنی ۳۲=۴×۸، ۲۸=۴×۷، ۱۶=۴×۴، و ۲۰=۵×۴ را طوری مطابق با جدول زیر در دو سطر می‌نویسد که هر یك از ارقام آنها به محاذات رقم هم مرتبهٔ خود در عدد ۵۴۷۸ قرار گیرد و پس از جمع کردن اعداد حاصل، صفرها را در مقابل حاصل جمع فرود می‌آورد.[۴]

	۵	۴	۷	۸	۰	۰	چهارضرب در:
	۱	۶	۳	۲			سطر عمل
۲	۰	۲	۸				
۲	۱	۹	۱	۲	۰	۰	

۱۰۸. تبصره. کاشانی در اینجا به این مطلب اشاره نمی‌کند که می‌توان یك عدد یك رقمی را در یك عدد چند رقمی همانگونه که امروزه متداول است از راست به چپ ضرب کرد و

---

۱) برای کسب اطلاع دربارهٔ تاریخچهٔ این دو عمل رجوع کنید به اسمیث H، ج ۲، ص ۳۳.

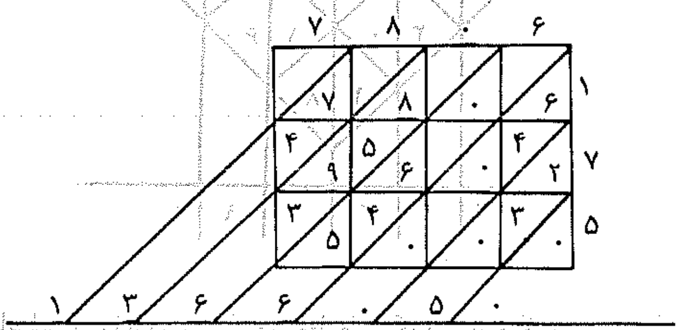
۲) مفتاح، ص ۱۲: «فی الضرب و هوفی الصحاح طلب امثال احدالعددین بعدة الاخر.»

۳) مفتاح، ص ۱۲: «والتعریف الجامع هوتحصیل عدد یکون نسبته الی احدالمضروبین کنسبة المضروب الاخر الی الواحد.»

۴) مفتاح، ص ۱۳.

نتیجه را نوشت. اما با اینکه وی این روش را برای مبتدیان تشریح نمی‌کند، می‌توان یقین داشت که خود او این طریقه را به کار می‌بسته است. زیرا بعداً خواهیم دید که کاشانی همین روش را برای ضرب کردن یك عدد یك رقمی در یك عدد چند رقمی در موقع انجام دادن عمل تقسیم به کار می‌برد، و علاوه بر این در دستگاه شمار شصتگانی همین روش را توصیه می‌کند و آن را برای کسانی که مبتدی نیستند راه ساده‌ای می‌داند.

۱۰۹. **مثال ۲.** سپس کاشانی به بیان قاعدهٔ ضرب دو عدد چند رقمی می‌پردازد و حاصلضرب ۷۸۰۶×۱۷۵ را به وسیلهٔ شبکهٔ ضرب مطابق با شکل زیر به دست می‌آورد:[1]



۱۱۰. شبکهٔ ضرب را کاشانی از پیشینیان گرفته و در دیباچهٔ *مفتاح‌الحساب* خود به این موضوع اشاره کرده است،[2] و علاوه بر این در آخر باب سوم نوشته است: «و هر چه در این باب هست ما خود استنباط کرده‌ایم، مگر شبکهٔ اول»[3]

شرح شبکهٔ ضرب با اندك تفاوتی در کتاب *تلخیص اعمال الحساب* تألیف ابن البناء مراکشی* از ریاضیدانان مراکش که در نیمهٔ دوم قرن هفتم و اوایل قرن هشتم هجری قمری (در حدود یك قرن قبل از کاشانی) می‌زیسته دیده می‌شود.[4] اما ابن البنا به جای «شبکه» آن را «جدول» نامیده است.

۱۱۱. کاشانی «شبکهٔ ضرب» را که از پیشینیان خود گرفته به صورت بهتری درآورده و آن

---

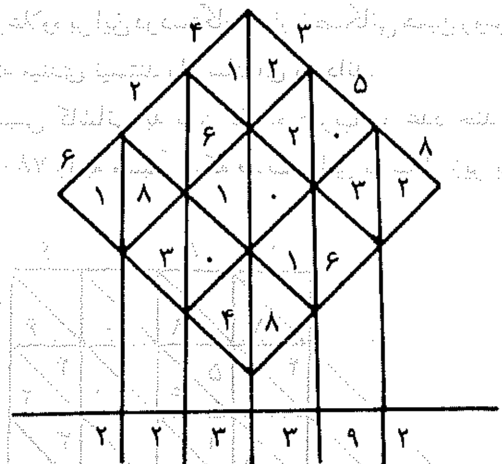
۱) مفتاح، ص ۱۵.

۲) مفتاح، ص ۳، و رجوع کنید به ترجمهٔ دیباچهٔ *مفتاح‌الحساب* در کتاب حاضر، صفحهٔ ۵۰.

۳) مفتاح، ص ۱۸: «وجمیع ما فی‌هذاالباب مماا‌ستنبطته سوی الشبکة الاولی.»

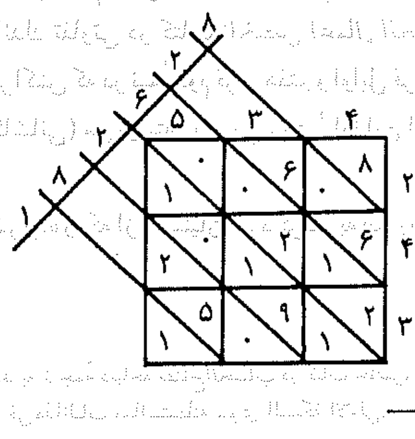
۴) اریستیدمار T، ص ۳۰۰.

را «شبکهٔ مورب» نامیده است، و حاصلضرب ۳۵۸×۶۲۴ را مطابق با شکل زیر حساب کرده است[۱]:



و باز همین حاصلضرب را بدون رسم کردن خطوط شبکه در مثال دیگری به‌دست آورده است.[۲]

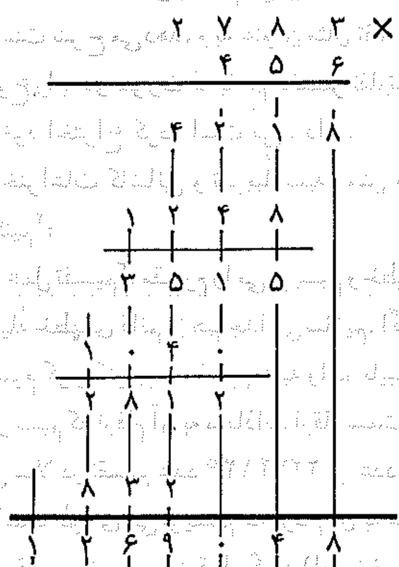
۱۱۲. همین «شبکهٔ مورب» با اندک اختلافی در کتاب *کشف الاسرار عن علم حروف الغبار* تألیف علی قلصادی* متوفی به سال ۸۹۱ (۱۴۸۶) که از ریاضیدانان عرب اندلسی و تقریباً تا ۶۰ سال بعد از کاشانی زنده بوده است دیده می‌شود. وی حاصلضرب ۳۴۲×۵۳۴ را به شکل زیر به دست آورده.[۳]



۱) مفتاح، ص ۱۶.
۲) مفتاح، ص ۱۷.
۳) ویکه T، ص ۱۴.

و با اندک دقتی رجحان شبکهٔ مورب کاشانی بر شبکهٔ فوق دیده می‌شود.

۱۱۳. مثال ۳. بالاخره کاشانی حاصلضرب ۴۵۶×۲۷۸۳ را مطابق با شکل زیر به دست آورده است.[۱]



در این مثال حاصلضربهای جزء یعنی ۶×۲۷۸۳ و ۵×۲۷۸۳ و ۴×۲۷۸۳ به وجهی که در مثال ۱ (ش ۱۰۷) ذکر شد نوشته شده است.

کاشانی در پایان این مثال می‌نویسد: «دلیل صحت این عمل بر مرد هوشمند، اگر در آن تأمل کند، پوشیده نیست، و این نوع از سایر انواع آسانتر می‌باشد جز اینکه طریقهٔ شبکه به فهم مبتدیان نزدیکتر است.»[۲]

نگاهی به باب چهارم مقالهٔ اول *مفتاح‌الحساب*

۱۱۴. در آغاز این باب کاشانی تقسیم را چنین تعریف می‌کند: «در مورد عددهای صحیح عمل تقسم عبارت است از تجزیهٔ مقسوم به اجزای متساوی که عدهٔ آنها مساوی با آحاد مقسوم علیه باشد، هر یك از این اجزا را خارج قسمت می‌نامند»، و اضافه می‌کند که تعریف

۱) مفتاح، ص ۱۷.

۲) مفتاح، ص ۱۷.

جامع عمل تقسیم این است: «تقسیم عبارت از به دست آوردن عددی است که نسبت آن به واحد مساوی با نسبت مقسوم به مقسوم علیه باشد، و یا به دست آوردن عددی است که نسبت آن به مقسوم مساوی با نسبت واحد به مقسوم علیه باشد.»[۱]

۱۱۵. سپس کاشانی به بیان قاعدهٔ عمل تقسیم می‌پردازد و روشی را که از قدما گرفته و خود تصرفاتی در آن کرده است شرح می‌دهد، و به عنوان مثال تقسیم عدد ۹۰۸ ۳۵۶۵ را بر عدد ۴۷۵ به دو نوع، و هر نوع را به دو صورت که با هم مختصر تفاوتی دارند، انجام می‌دهد، و سپس به شرح روشی که خود اختراع کرده است می‌پردازد.

ما این روش را که از اختراعات کاشانی و تقریباً شبیه روش معمولی کنونی است، در اینجا به اختصار بیان می‌کنیم[۲]:

۱۱۶. روش کاشانی در عمل تقسیم[۳]: مقسوم را می‌نویسیم و خطی افقی در بالای آن رسم می‌کنیم و ارقام آن را به وسیلهٔ خطهای قائم از هم جدا می‌سازیم. اگر رقم سمت چپ مقسوم علیه از رقم سمت چپ مقسوم کوچکتر بود، مقسوم علیه را در پایین مقسوم به فاصله‌ای که مناسب باشد به قسمی می‌نویسیم که ارقام آن به محاذات ارقام سمت چپ مقسوم قرار گیرند، و در غیر این صورت (یعنی مثلا در تقسیم عدد ۲۲۷۴۱۲۶ بر عدد ۵۶۵) مقسوم علیه را در پایین مقسوم و با فاصلهٔ مناسب طوری می‌نویسیم که ارقام آن به محاذات ارقام سمت چپ مقسوم به استثنای آخرین رقم سمت چپ آن قرار گیرد (این نخستین وضع مقسوم علیه در جدول است)، سپس اولین رقم سمت چپ خارج قسمت (یعنی ۴) را (مطابق با قاعدهٔ کنونی) می‌یابیم و آن را در خارج جدول بالای خط افقی مرسوم به محاذات رقم سمت راست مقسوم علیه (یعنی رقم ۴ در مقسوم) می‌نویسیم و آن را در مقسوم علیه (یعنی ۵۶۵) ضرب و حاصل (یعنی ۲۲۶۰) را از قسمتی از مقسوم که به محاذات مقسوم علیه قرار دارد (یعنی از ۲۲۷۴) کم می‌کنیم، و باقیمانده (یعنی ۱۴) را که نخستین باقیماندهٔ جزء است می‌نویسیم. سپس در بالای نخستین وضع مقسوم علیه خطی افقی رسم می‌کنیم و مقسوم علیه را یك رقم به

---

۱) مفتاح، ص ۱۸: «فی القسمة و هی فی الصحاح تجزیة المقسوم بآحاد المقسوم علیه تجزیة متساویة العدة لیتعین حصة الواحد من المقسوم علیه ویسمی تلك الحصة خارج القسمة و تعریفها الجامع انها تحصیل عدد نسبته الی الواحد کنسبة المقسوم الی المقسوم علیه او تحصیل عدد نسبته الی المقسوم کنسبة الواحد الی المقسوم علیه.»

۲) کسانی که بخواهند اطلاعات بیشتری دربارهٔ سایر انواع عمل تقسیم کسب کنند می‌توانند به *مفتاح الحساب* چاپی صفحات ۱۸ تا ۲۰ رجوع کنند.

۳) در این کتاب روش کاشانی را شرح داده آن را در مورد مثال ۵۶۵: ۱۲۶ ۲۷۴ ۲ عمل می‌کنیم (و نیز رجوع کنید به مفتاح، ص ۲۳ به بعد).

نخستین رقم خارج قسمت

				۴	۰	۲	۵	خارج قسمت
مقسوم	۲	۲	۷	۴	۱	۲	۶	
نخستین مقسوم جزء	۲	۲	۷	۴				
۴×(مقسوم علیه) →	۲	۲	۶	۰				
دومین مقسوم جزء →			۱	۴	۱			۱۴ = نخستین باقیماندهٔ جزء
۰×(مقسوم علیه) →			۰	۰	۰			
سومین مقسوم جزء			۱	۴	۱	۲		۱۴۱ = دومین باقیماندهٔ جزء
۲× (مقسوم علیه) →			۱	۱	۳	۰		
آخرین مقسوم جزء →				۲	۸	۲	۵	۲۸۲ = سومین باقیماندهٔ جزء
							۱	آخرین باقیمانده
					۵	۶	۵	آخرین وضع مقسوم علیه
				۵	۶	۵		سومین وضع مقسوم علیه
			۵	۶	۵			دومین وضع مقسوم علیه
		۵	۶	۵				اولین وضع مقسوم علیه

طرف راست انتقال می‌دهیم و در بالای وضع قبلی مقسوم علیه می نویسیم. اگر فرض کنیم که رقم بعدی مقسوم (یعنی ۱) را در سمت راست اولین باقیماندهٔ جزء (یعنی ۱۴) فرودآورده باشیم، دومین مقسوم جزء (یعنی ۱۴۱) درست به محاذات دومین وضع مقسوم علیه قرار می گیرد. سپس دومین رقم سمت چپ خارج قسمت (یعنی صفر) را پیدا می کنیم و آن را در سمت راست رقم قبلی خارج قسمت (یعنی ۴) می نویسیم و عمل را مطابق با جدول ادامه می دهیم.

۱۱۷. این مطلب در خور توجه است که تنها تفاوتی که روش تقسیم کاشانی باروش کنونی دارد این است که ما امروزه مقسوم علیه را در سمت راست مقسوم طوری می نویسیم که با مقسوم روی یك سطر قرار گیرد در صورتی که کاشانی هر بار مقسوم علیه را یك رقم به سمت راست انتقال می دهد به قسمی که هر یك از مقسومهای جزء درست به محاذات مقسوم علیه در همان تقسیم جزء قرار می گیرد.

۱۱۸. کاشانی باز همین عمل تقسیم را به طرز جالب توجه دیگری انجام می‌دهد[1] و آن این است که، به جای آنکه هر بار مقسوم علیه را یك رقم به سمت راست انتقال دهد، مقسومهای جزء را یك رقم به سمت چپ منتقل می نماید و با این تدبیر مقسوم علیه را یك بار بیشتر نمی نویسد (جدول صفحهٔ بعد را ملاحظه کنید).

کاشانی در پایان این باب خاطرنشان می کند که دو روش اخیر از استنباطات خود اوست.[2]

نگاهی به باب پنجم از مقالهٔ اول *مفتاح الحساب*

۱۱۹. این باب از *مفتاح الحساب* مختص به استخراج ریشه nاُم اعداد صحیح است. کاشانی در این باب قوای اعداد و ریشه‌ها را تعریف می کند و اصطلاحاتی به کار می برد که به زبان امروزی چنین بیان می شود[3] (جدول صفحهٔ ۵۴ را ملاحظه کنید)

۱۲۰. کاشانی می گوید که قوهٔ سوم (a^3) را مکعب و نیز کعب می گویند. و بهتر است که ریشهٔ سوم کعب گفته شود، و کعب را مجازاً به قوهٔ سوم اطلاق کرده‌اند.[4] بیرونی* در *التفهیم*

---

۱) مفتاح، ص ۲۴.

۲) مفتاح، ص ۲۴: «و هذان النوعان مما استنبطناه.»

۳) مفتاح، ص ۲۵.

۴) مفتاح، ص ۲۵ سطر ۹: «والحاصل الثانی مکعبا و کعباً ایضا باسم الضلع کما قیل والاولی ان یقول ان الکعب اسم الضلع قدیطلقونه علی المضلع مجازاً (در مفتاح چاپی کلمهٔ ماقبل آخر این عبارت اشتباهاً «علی الضلع» چاپ شده است).»

				۴	۰	۲	۵	خارج قسمت
	۲	۲	۷	۴	۱	۲	۶	مقسوم
اولین مقسوم جزء								
	۲	۲	۶	۰				
			۱	۴				نخستین باقیماندهٔ جزء
دومین مقسوم جزء		۱	۴	۱	۲	۶		دومین باقیماندهٔ جزء ۱۴۱۲ است که در جدول ثبت نشده است
سومین مقسوم جزء	۱	۴	۱	۲	۶			
	۱	۱	۳	۰				
		۲	۸	۲				سومین باقیماندهٔ جزء
آخرین مقسوم جزء	۲	۸	۲	۶				
	۲	۸	۲	۵				
				۱				آخرین باقیماندهٔ جزء
		۵	۶	۵				مقسوم علیه

(ص ۴۳) می نویسد: «گروهی از بهر سبک کردن سخن، «مکعّب» را «کعب» خوانند و آنگه ناچار کعبش را «ضلع» باید خواند تا مشتبه نشود.»

۱۲۱. دیدیم که قوهٔ ششم را «کعب کعب» نامیده است. برای نامیدن قوای بعدی قاعده آن است که نخستین لفظ «کعب» را به «مال مال» تبدیل کنند تا قوهٔ بعدی به دست آید و سپس به ترتیب یکی از «مال»ها را به «کعب» و بعد «مال» دیگر را نیز به «کعب» تبدیل کنند و همواره لفظ مال را بر لفظ کعب مقدم دارند وقس علی هذا.

معادل کنونی آن	مفهوم آن	اصطلاح قدیمی
پایه = ریشه	عدد a در مقام مقایسه با a^{2}، a^{3}، ... و a^{n}	ضلع اول
جذر = ریشهٔ دوم	عدد a در مقام مقایسه با a^{2}	جذر
کعب = ریشهٔ سوم	عدد a در مقام مقایسه با a^{3}	کعب
a^{2}	قوهٔ دوم عدد	مجذور = مال = مربع
a^{3}	قوهٔ سوم عدد	مکعب (کعب)[1]
a^{4}	قوهٔ چهارم عدد	مال مال
a^{5}	قوهٔ پنجم عدد	مال کعب[2]
a^{6}	قوهٔ ششم عدد	کعب کعب
$\frac{1}{a}$		جزءالجذر
$\frac{1}{a^{2}}$		جزءالمال
$\frac{1}{a^{3}}$		جزءالکعب
$\frac{1}{a^{4}}$		جزء مال‌المال
	قوه	منزل
	نمای قوه	عدد منزل
	قوهٔ یك عدد یا به وجه اعم عددی که باید از آن ریشهٔ n اُم استخراج کرد	مضلع (در جمع مضلعات)
	عددی که ریشهٔ n اُم درست داشته باشد	مضلع مُنطق
	عددی که ریشهٔ n اُم درست نداشته باشد	مضلع اصم

---

۱) شمارهٔ ۱۲۰ کتاب حاضر.

۲) برای نامیدن قوای بعدی رجوع کنید به شمارهٔ ۱۲۱ کتاب حاضر.

بنابراین قوهٔ هفتم می‌شود «مال مال کعب» و قوهٔ هشتم می‌شود «مال کعب کعب» و قوهٔ نهم «کعب کعب کعب»، قوهٔ دهم «مال مال کعب کعب» و غیره.

۱۲۲. کاشانی می‌نویسد که جذر در منزل اول و مال در منزل دوم و کعب در منزل سوم است و اگر بخواهیم عدد منزل (= نمای) یك مضلع (= قوه) را بدانیم باید برای هر «مال» عدد ۲ و برای هر «کعب» عدد ۳ را بگیریم و همهٔ اعداد حاصل را با هم جمع کنیم. مثلاً عدد منزل «مال مال کعب» عدد ۷ و عدد منزل «مال مال کعب کعب» عدد ۱۰ است (*مفتاح*، ص ۲۵).

۱۲۳. هرگاه عدد منزل را داشته باشیم و بخواهیم اسم مضلع را بیابیم اگر آن عدد بر ۳ قسمت‌پذیر باشد آن را بر ۳ تقسیم می‌کنیم و به عدهٔ آحاد خارج قسمت لفظ «کعب» را تکرار می‌کنیم. مثلاً اگر عدد منزل ۹ باشد اسم مضلع «کعب کعب کعب» است.

اما اگر عدد منزل بر ۳ قسمت‌پذیر نباشد، آن قدر عدد ۲ را از آن کم می‌کنیم تا بر ۳ قسمت‌پذیر شود و به ازای هر ۲ یك لفظ «مال» و به عدهٔ آحاد خارج قسمت تقسیم باقیمانده بر ۳ لفظ «کعب» را می‌گوییم و «مال»ها را بر «کعب»ها مقدم می‌داریم. مثلاً اگر عدد منزل ۸ باشد اسم مضلع «مال کعب کعب» و اگر عدد منزل ۷ باشد اسم مضلع «مال مال کعب» است (*مفتاح*، ص ۲۶).

۱۲۴. سپس کاشانی اصطلاح «مضلع» را که قبلاً به عنوان اسم عام برای قوای اعداد به کار برده بود، برای عددی به کار می‌برد که ریشهٔ nاُم آن مورد نظر است و می‌نویسد: «هر عدد که ریشهٔ nاُم درست داشته باشد آن را «مضلع مُنطق» می‌نامند و اگر ریشهٔ n اُم درست نداشته باشد آن را «مضلع اصم» می‌گویند.»[1]

بنابه تعریف فوق مثلاً عدد ۸۱ از حیث جذر مضلع مُنطق است زیرا ریشهٔ دوم (جذر) درست آن عدد ۹ می‌باشد. همین عدد باز از حیث ریشهٔ چهارم منطق است زیرا ریشهٔ چهارم درست آن عدد ۳ است. اما ۸۱ مثلاً از حیث ریشهٔ سوم و ریشهٔ پنجم دیگر مضلع مُنطق نیست.

۱۲۵. مؤلف سپس می‌افزاید[2]: «مضلعهای منطق همه در مرتبهٔ آحاد واقع می‌شوند و اموال مُنطق در مرتبهٔ دهگان قرار نمی‌گیرند بلکه در مرتبهٔ صدگان واقع می‌شوند و در مرتبهٔ هزارگان قرار نمی‌گیرند بلکه در مرتبهٔ ده‌هزارگان واقع می‌شوند. اما مکعب در مرتبهٔ هزارگان و سپس

---

۱) مفتاح، ص ۲۶: «فاعلم ان کل مضلع یوجدله ضلع یتولد ذلك المضلع منه بالحقیقه، یقال له انه منطق، و مالا یوجدله ضلع کذلك، یقال له اصم.»

۲) مفتاح، ص ۲۶: «والمضلعات المنطقه یقع جمیعها فی مرتبةالاحاد...» در این جا عبارات *مفتاح‌الحساب* را عیناً ترجمه کرده‌ام و در شمارهٔ ۱۲۶ مطلب را توضیح داده‌ام.

در مرتبهٔ هزار هزارگان قرار می‌گیرد، و طریقهٔ شناسایی این آن است که از مرتبهٔ آحاد شروع کنیم و مراتب را به عدهٔ منزلهای هر مضلعی (= نمای هر قوه‌ای) که می‌خواهیم بگیریم و آن را دور منطق و اصم بنامیم و سپس دور دیگری به همان عده بگیریم و عمل را ادامه دهیم. آن مضلع در مرتبهٔ اول هر دور منطق و در باقی مراتب اصم است. از این رو معلوم می‌شود که مجذور در یك مرتبه واقع می‌شود و در مرتبهٔ بعدی آن واقع نمی‌شود، و مکعب در یك مرتبه واقع می‌شود و در دو مرتبهٔ بعدی واقع نمی‌شود، و مال مال در یك مرتبه واقع می‌شود و در سه مرتبهٔ بعد از آن واقع نمی‌شود وقس علی هذا.»

۱۲۶. توضیح. کاشانی در اینجا اصلاح دور را که جمع عربی آن ادوار است به کار می‌برد، به این مفهوم که اگر از عددی مثلا بخواهیم ریشهٔ سوم بگیریم ارقام آن عدد را از سمت راست سه به سه جدا می‌کنیم و هر دستهٔ سه رقمی را دور می‌نامیم و اگر از همان عدد بخواهیم ریشهٔ چهارم استخراج کنیم ارقام آن را از سمت راست چهار به‌چهار جدا می‌کنیم. این بار هر دور دارای چهار رقم است، زیرا می‌خواهیم از عدد ریشهٔ چهارم بگیریم.

مؤلف می‌گوید عددی که می‌خواهیم از آن ریشه بگیریم در مرتبهٔ اول هر دور منطق و در مرتبه‌های دیگر آن دور اصم است.

مثلا اگر بخواهیم از عدد ۷۹۳۰۲۸۴۵۶۱ ریشهٔ چهارم استخراج کنیم. ارقام آن را از سمت راست چهاربه‌چهار جدا می‌کنیم:

۷۹، ۳۰۲۸، ۴۵۶۱

۴۵۶۱ دور اول و رقم ۱ در مرتبهٔ اول آن واقع است. عدد ۳۰۲۸ دور دوم است و رقم ۸ در مرتبهٔ اول آن قرار دارد.

ارقامی که با حروف سیاه چاپ شده‌اند، یعنی ارقام ۱، ۸، و ۹، بنابه گفتهٔ کاشانی برای ریشهٔ چهارم در مرتبه‌های منطق واقعند و بقیهٔ ارقام برای همان ریشه در مرتبه‌های اصم قرار دارند.

برای توضیح این مطلب مفردات منطق[1] را در نظر می‌گیریم. اعداد ۱، ۴، ۹، ۱۰۰، ۴۰۰، ۹۰۰، ۱۰۰۰۰، ۴۰۰۰۰، ۹۰۰۰۰، و نظایر آنها از حیث ریشهٔ دوم «مفردات منطق» هستند زیرا همه هم مفرد هستند و هم جذر درست دارند. دیده می‌شود که ارقام سمت چپ این اعداد یا در مرتبهٔ یکان هستند یا در مرتبهٔ صدگان و یا در مرتبهٔ ده‌هزارگان و نظایر آنها و عدد مفردی که جذر درست داشته باشد رقم سمت چپش جز در مراتب مذکور واقع نمی‌شود.

---

۱) برای تعریف عددهای مفرد رجوع کنید به شمارهٔ ۹۸ کتاب حاضر.

همچنین اعداد ۱، ۸، ۱۰۰۰، ۸۰۰۰، ۱۰۰۰۰۰۰، ۸۰۰۰۰۰۰، و نظایر آنها از حیث ریشهٔ سوم «مفردات منطق» هستند زیرا همه هم مفرد هستند و هم ریشهٔ سوم درست دارند. دیده می‌شود که ارقام سمت چپ این اعداد یا در مرتبهٔ یکان واقع هستند و یا در مرتبهٔ هزارگان و یا در مرتبهٔ هزار هزارگان و یا نظایر آنها، و عدد مفردی که ریشهٔ سوم درست داشته باشد رقم سمت چپش جز در مراتب مذکور واقع نخواهد شد.

۱۲۷. استخراج جذر. سپس کاشانی به شرح استخراج جذر می‌پردازد و روشی را که از پیشینیان اقتباس کرده و آن را منقح ساخته بیان می‌کند، و باز در همین روش تصرفاتی کرده آن را به صورت ساده‌تر در می‌آورد[1]، به وجهی که اختلاف روش وی با طریقه‌ای که امروزه برای گرفتن جذر مرسوم است بسیار کم می‌باشد. از دو روشی که کاشانی برای استخراج جذر ذکر کرده، دومی، بنابه گفتهٔ خود او، در حالتی که عدهٔ ارقام عدد زیاد باشد، آسانتر است.

۱۲۸. اکنون مثال استخراج جذر عدد ۳۳۱ ۷۸۱ را با روش ساده شدهٔ کاشانی در اینجا نقل می‌کنیم و سپس به شرح آن می‌پردازیم. جذر این عدد ۵۷۶ و باقیماندهٔ آن ۵ است.

ردیف جذر ←

	۵		۷		۶
۳	۳	۱	۷	۸	۱
۲	۵				
	۸				
	۷	۴	۹		
		۶	۸		
		۶	۸	۷	۶
					۵
		۱	۱	۴	۶
	۱	۰			
	۵		۷		

← عدد q که باید جذر آن را گرفت

---

۱) مفتاح، ص ۲۶ تا ۲۸.

عدد ۳۳ ۱۷ ۸۱ را از سمت راست به دورهای دورقمی جدا می‌کنیم. برای تشریح عمل استخراج جذر به پیروی از لوکی[1] عدهٔ صدگان جذر (یعنی [۰۰] ۵) را با حرف a[2] و عدهٔ دهگان آن (یعنی [۰] ۷) را با حرف b و رقم یکان آن را با حرف c نشان می‌دهیم.[3]

ابتدا بزرگترین عدد صحیح a را قسمی می‌یابیم که داشته باشیم

$$a^{۲}\leqslant q=۳۳[۱۷۸۱]$$

به این ترتیب عدد a=۵[۰۰] حاصل می‌شود. این عدد را در ردیف جذر در مرتبهٔ اول دور سوم می‌نویسیم، و همچنین به محاذات آن در پایین جدول در فاصلهٔ مناسب ثبت می‌کنیم. سپس $a^{۲}$= ۲۵ [۰۰۰۰] را از q=۳۳[۱۷۸۱] کم کرده حاصل یعنی (۰۰۰۰) ۸ را در زیر ۳۳[۱۷۸۱] می‌نویسیم. بعد در بالای رقم ۵ که در پایین جدول نوشتیم خطی افقی رسم و آن را از حوزهٔ عمل خارج می‌کنیم و به جای آن عدد ۲a= ۱۰ [۰۰] را یك رقم به طرف راست در بالای خط می‌نویسیم. آنگاه عدد b را قسمی جستجو می‌کنیم که[4]:

$$(۲a+b)b\leqslant q-a^{۲}$$

یعنی

$$۱۰[۰۰]b+b^{۲}\leqslant ۸۱۷[۸۱]$$

و عدد b=۷[۰] را می‌یابیم. رقم ۷ را در مرتبهٔ اول دور دوم می‌نویسیم و همچنین آن را در پایین جدول در سمت راست ۱۰ ثبت می‌کنیم به این نحو عدد زیر بدست می‌آید:

$$۲a+b=۱۰۷[۰]$$

و سپس

$$(۲a+b)b=۱۰۷[۰]\times ۷[۰]$$

را حساب می‌کنیم می‌شود [۰۰] ۷۴۹ این عدد را از باقیماندهٔ اول (با در نظر گرفتن دو رقم

---

۱) لوکی R، ص ۲۳.

۲) جذر مطلوب ۵۷۶ و صدگان آن ۵۰۰ است که آن را با حرف a نشان می‌دهیم ولی چون فقط رقم سمت چپ آن یعنی ۵ در ضمن عمل نوشته می‌شود آن را به صورت [۰۰]۵ نوشته‌ایم. بنابراین در این قسم نوشتن کروشه علامت ضرب نیست.

۳) به این ترتیب جذر به صورت ۶+۷۰+۵۰۰ = $a+b+c$ در می‌آید.

۴) توجه کنید $۲a+b$ یعنی ۱۰× b + [۰۰]۵×۲ زیرا ۵ رقم صدگان و b رقم دهگان است.

بعدی) یعنی ۸۱۷ کم می‌کنیم می‌شود [۰۰]۶۸. سپس در بالای [۰] ۱۰۷ یك خط افقی رسم می‌کنیم و آن را از حوزهٔ عمل خارج می‌نماییم و در عوض عدد

$$۲a+۲b=۱۱۴[۰]$$

را یك رقم به طرف راست در بالای خط مذکور می‌نویسیم و بالاخره رقم c را قسمی جستجو می‌کنیم که داشته باشیم

$$(۲a+۲b+c)c\leqslant q-a^۲-(۲a+b)b$$

یعنی

$$۱۱۴۰c+c^۲\leqslant ۶۸۸۱$$

ورقم $c=۶$ را می‌یابیم و ۶ را که رقم یکان جذر است در مرتبهٔ یکان دور اول می‌نویسیم و مانند قبل رقم ۶ را نیز در پایین و در سمت راست [۰]۱۱۴ می‌نویسیم و

$$(۲a+۲b+c)c=۶۸۷۶$$

را از عدد ۶۸۸۱ کم می‌کنیم باقیماندهٔ جذر یعنی ۵ به دست می‌آید.

۱۲۹. بنابر آنچه گذشت استخراج جذر مبنی بر اتحاد زیر می‌باشد

$$(a+b+c+\dots)^۲\equiv a^۲+(۲a+b)b+(۲a+۲b+c)c+\dots$$

همانگونه که امروزه عمل می‌کنیم کاشانی حاصلضربهای

$۷\times ۱۰۷=۷۴۹$ و $۶\times ۱۱۴۶=۶۸۷۶$

را در ذهن انجام می‌دهد و کم می‌کند.

۱۳۰. اگر عددی مانند...+$T=a+b+c$ جذر درست نداشته باشد، کاشانی کسری به باقیماندهٔ جذر اضافه می‌کند و آن را کسر اصطلاحی می‌نامد.

در مثال فوق کاشانی جذر عدد ۳۳۱ ۷۸۱ را مساوی با

$$۵۷۶\frac{۵}{۱۱۵۳}$$

محسوب می‌دارد و آن را جذر تقریبی اصطلاحی می‌نامد.[۱]

---

۱) مفتاح، ص۲۷.

صورت کسر

$$v=\frac{۵}{۱۱۵۳}$$

همان باقیماندهٔ جذر یعنی عدد ۵ است و مخرج آن به این طریق به دست می‌آید که آخرین عدد پایین جدول یعنی

$$۲a+۲b+c=۱۱۴۶$$

را با $c=۶$ (یعنی آخرین رقم جذر) جمع کرده و یك واحد به آن بیفزاییم. یعنی در واقع

$$v=\frac{۵}{(۵۷۷)^{۲}-(۵۷۶)^{۲}}=\frac{۵}{۲\times ۵۷۶+۱}$$

به طور کلی اگر جذر به صورت

$$T=a+b+c+\cdots$$

و باقیماندهٔ آن r باشد داریم

$$v=\frac{r}{(T+۱)-T^{۲}}=\frac{r}{۲T+۱}$$

و دستور استخراج جذر بنا به گفتهٔ کاشانی این است

$$\sqrt{T^{۲}+r}=T+\frac{r}{۲T+۱}$$

بعداً خواهیم دید که کاشانی همین طریقه را در مورد استخراج ریشهٔ nاُم تعمیم می‌دهد و کسر

$$\frac{r}{(T+۱)^{n}-T^{n}}$$

را به دست می‌آورد و مخرج آن را مخرج اصطلاحی می‌نامد.[۱]

۱۳۱. کاشانی در پایان مثال فوق (ش ۱۲۸) می‌نویسد: «این روش وقتی که عدهٔ ارقام عدد زیاد باشد آسانتر است و ما آن را استنباط کرده‌ایم و طریقهٔ اول را نیز منقح ساختیم.»[۲]

---

۱) ← ش ۱۴۷ کتاب حاضر.

۲) مفتاح، ص ۲۹: «و هو اسهل اذا کان الارقام کثیرة و ذلك مما استنبطناه و اما الطریق اولی فنحن نقحناها هکذا.»

تاریخچهٔ استخراج ریشه nاُم نزد ریاضیدانان ایرانی پیش از زمان کاشانی

۱۳۲. ریاضیدانان ایرانی پیش از کاشانی کتابهایی دربارهٔ استخراج جذر و کعب و ریشه‌های بالاتر نوشته‌اند که اینك به ترتیب تقدم تاریخ مهمترین آنها را یاد می‌کنیم.

۱۳۳. ابوالوفای بوزجانی* (قرن چهارم هجری) مؤلف کتابی است موسوم به کتاب *استخراج ضلع الکعب و مال‌المال و مایترکب منهما*[1]. این کتاب متأسفانه مفقود شده است. وپکه نوشته است که احیاناً موضوع آن کتاب بحث در حل معادلات

$$x^4+ax^3=b\ ,\ \ x^4=b,\ \ x^3=a$$

بوده است.[2]

۱۳۴. کوشیاربن لبان گیلانی* (جیلی) که در قرن چهارم هجری می‌زیسته، فصلهای نهم تا شانزدهم کتاب *فی اصول حساب الهند*[3] خود را به استخراج جذر و کعب اختصاص داده است.

۱۳۵. ابوریحان بیرونی* (نیمهٔ اول قرن پنجم هجری)، در ضمن فهرست آثار خود که تا سال ۴۲۷ (۱۰۳۵) به تألیف آنها موفق شده بود، از کتابی دربارهٔ استخراج کعب و ریشه‌های بالاتر نام برده که آن را درصد ورقه نوشته بوده است «کلاماً یتبعها فی استخراج الکعاب و اضلاع ماورائه من مراتب الحساب فی (۱۰۰) ورقه.»[4] این کتاب نیز مفقود شده است.

۱۳۶. محمدبن ایوب طبری* (نیمهٔ قرن پنجم هجری)، مؤلف کتاب *شمارنامه*[5]، بابهای سیزدهم تا هفدهم فصل اول آن کتاب را به استخراج جذر و کعب عددهای صحیح و امتحان آنها و بابهای هشتم و نهم از فصل دوم آن را به استخراج جذر و کعب کسرها، و بابهای دهم تا

---

۱) نام این کتاب در منابع مختلف به صورتهای متفاوت آمده است: ابن الندیم در *الفهرست* (چاپ فلوگل، صفحهٔ ۲۸۳؛ ترجمهٔ فارسی *الفهرست*، صفحهٔ ۵۰۶) به جای «ضلع المکعب و مال المال» نوشته «ضلع المکعب بمال مال». قفطی در *تاریخ الحکماء* (چاپ لیپرت ص ۲۸۸؛ ترجمهٔ فارسی *تاریخ الحکماء* ص ۳۹۲) به جای «ضلع» کلمهٔ «مبلغ» را گذاشته و نوشته «مبلغ المکعب بمال مال». بدون تردید عنوان صحیح آن کتاب همان است که در متن نوشته‌ایم (← وپکه C، ص ۲۵۴).

۲) وپکه C، ص ۲۵۴.

۳) متن عربی و ترجمهٔ انگلیسی این کتاب با مقدمه‌ای جامع به انگلیسی در سال ۱۹۶۵م منتشر شده است (← لوی و پتروك).

۴) *لغت‌نامه*، حرف الف، ص ۴۶۸، ستون دوم.

۵) متن فارسی این کتاب در سال ۱۳۴۵هـ ش در تهران به چاپ رسیده (← *شمارنامه*، متأسفانه قسمتهای اساسی و مهم آن مغلوط چاپ شده) ولی هنوز چنانکه باید مطالب ریاضی آن مورد نقادی قرار نگرفته است.

هفدهم آن را به استخراج جذر و کعب از کسور شصتگانی (درج و دقائق) و امتحان صحت آنها اختصاص داده است.

۱۳۷. علی‌بن احمد نسوی* (نیمهٔ دوم قرن پنجم هجری) در کتاب *المقنع فی‌الحساب‌الهندی* روشهای استخراج جذر و کعب کوشیار گیلانی (← ش ۱۳۴) را منقح ساخته و در بابهای دوازدهم تا پانزدهم مقالهٔ اول و بابهای ششم و هفتم از مقالهٔ دوم و بابهای ششم و هفتم از مقالهٔ سوم و بابهای ششم و هفتم از مقالهٔ چهارم آن کتاب دربارهٔ استخراج جذر و کعب عددهای صحیح و کسری و مرکب بحث کرده است.[۱]

۱۳۸. حکیم عمرخیام* (نیمهٔ دوم قرن پنجم و اوایل قرن ششم هجری) نیز دربارهٔ استخراج ریشه‌های چهارم، پنجم، ششم، و غیره کتابی داشته که متأسفانه از بین رفته است، چه وی در کتاب جبر خود می‌نویسد[۲]:

> «هندیان را در استخراج جذر و کعب طریقه‌ایست مبتنی بر اندك استقرائی... و ما را کتابی است در براهین درستی این راهها و منجر شدن آنها به مطلوب، و ما این طریقه‌ها را افزون کرده‌ایم یعنی استخراج مال مال و مال کعب و کعب کعب[۳] و غیره را بر آنها افزوده‌ایم و این اضافات تازه است.»

کتابی که خیام به آن اشاره می‌کند، ممکن است *رساله در صحت طرق هندی برای استخراج جذر و کعب* تألیف وی باشد که متأسفانه تاکنون نسخه‌ای از آن به دست نیامده، و نیز ممکن است کتاب مذکور کتاب *مشکلات‌الحساب*[۴] وی باشد که آن هم مفقود شده است.

---

۱) این کتاب را نسوی قبلا به زبان فارسی برای مجدالدوله دیلمی نوشت و بعداً آن را برای یکی از جانشینان وی با تغییراتی به عربی برگرداند. یك نسخهٔ خطی از این کتاب در کتابخانهٔ لیدن به شمارهٔ ۱۰۲۱ موجود و عکس آن در اختیار نویسنده است. (در سال ۱۳۵۱ عکس این کتاب را در کتاب «قربانی: *نسوی‌نامه*» به چاپ رسانیده‌ام).

۲) مصاحب، *حکیم خیام*، متن عربی ص ۱۲ و ترجمهٔ فارسی ص ۱۷۰ (و نیز رجوع کنید به و پکه A، صفحهٔ ۱۳ ترجمه).

۳) یعنی استخراج ریشه‌های چهارم، پنجم و ششم.

۴) نام کتاب *مشکلات‌الحساب* در یك مجموعهٔ خطی شامل «رسالة فی شرح ما اشکل من مصادرات کتاب اقلیدس» متعلق به کتابخانهٔ لیدن آمده است. شمارهٔ مجموعهٔ خطی مذکور Or. 199(8) است و شرحی دربارهٔ آن نسخه در صفحهٔ ۴۰ جلد سوم فهرست کتابخانهٔ لیدن نوشته شده. نویسندهٔ این مجموعه را شخصاً دیده‌ام. در پشت جلد آن به خط دیگری نوشته شده است: «فهرس ما فی هذاالدفتر من‌الکتب» و در جزو فهرست مذکور آمده است: «مشکلات الحساب له» اما متأسفانه *مشکلات‌الحساب* در جزو آن مجموعه نیست و مفقود شده است، چون نوشته‌اند که نسخه‌ای از این کتاب در مونیخ موجود است (مصاحب، *حکیم خیام*، ص ۱۳۲) شخصاً به کتابخانهٔ شهر مونیخ مراجعه کردم و پس از جستجوی زیاد اثری از آن نیافتم.

۱۳۹. نصیر الدین طوسی*(قرن هفتم هجری) در کتاب *جوامع الحساب بالتخت والتراب*[۱] چند فصل دربارهٔ استخراج جذر و کعب و ریشه‌های بالاتر دارد. کتاب مذکور مشتمل بر سه باب است. باب اول آن دربارهٔ عددهای صحیح است و باب دوم آن مربوط به کسرهای متعارفی و باب سوم آن راجع به کسرهای شصتگانی است. فصل هشتم از باب اول آن دربارهٔ قوای اعداد و اعمال مربوط به آنها و فصل نهم آن باب دربارهٔ استخراج جذر است. فصل یازدهم از باب اول مربوط به استخراج ریشه‌های دیگر از اعداد صحیح است. همچنین فصلهای دوازدهم و سیزدهم باب دوم آن مربوط به استخراج جذر و کعب و ریشه‌های دیگر از کسرهای متعارفی است؛ و بالاخره فصلهای هشتم و نهم باب سوم آن کتاب مربوط به استخراج جذر و کعب در دستگاه شصتگانی است.

طوسی قاعدهٔ استخراج ریشهٔ nُم را به تفصیل در مورد مثال زیر شرح داده است.[۲]

$$\sqrt[6]{244\ 140\ 626}=25\frac{1}{(26)^6-(25)^6}=25\frac{1}{64\ 775\ 151}$$

۱۴۰. نظام‌الدین اعرج*(قرن هشتم هجری) نیز در کتاب *الشمسیة فی الحساب*[۳] یك باب در استخراج ریشهٔ nُم دارد. کتاب مذکور مشتمل بر یك مقدمه و دو فن است (فن اول در دو باب و فن دوم در چهار باب). فصل سوم از باب اول از فن دوم کتاب شمسیه دربارهٔ استخراج ضلع nُم است. نظام اعرج در این فصل قاعده‌ای کلی برای استخراج ریشهٔ nُم ذکر می کند و به عنوان مثال کعب تقریبی عدد ۳۴ ۰۱۱ ۲۲۵ را مساوی با $324\frac{1}{315\ 901}$ به‌دست

---

۱) یك نسخهٔ خطی از *جوامع‌الحساب* در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی موجود است (← *فهرست رضوی*، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۱۶ ش ۴۳) و یك نسخهٔ خطی هم از آن متعلق به کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران (به شمارهٔ ۴۴۰۹/۲) است (← *فهرست دانشگاه*، ج ۱۳ ص ۳۳۷۰) نسخه‌های دیگری از آن کتاب نیز در خارج از ایران موجود است (← کراوزه S، ص ۴۹۶؛ بروکلمان G_1، ص ۶۷۴ ش ۳۵، بروکلمان S_1 ص ۹۳۰ ش ۳۵).

گذشته از اینها *جوامع‌الحساب* در سال ۱۹۶۳ میلادی توسط S.A. Akhmedov به روسی ترجمه شده و در مجلهٔ «ایستوریکو ماتماتیچسکیه ایسلدوانیا» منتشر شده است.

۲) یوشکویچ G، ص ۲۴۷.

۳) دو نسخهٔ خطی از *شمسیة‌الحساب* در کتابخانهٔ دانشگاه تهران به شماره‌های ۲۶۲۲/۱ و ۴۷۲۳/۳ موجود است و دو نسخهٔ خطی هم از آن در مشهد مضبوط است (*فهرست رضوی*، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۴۳ شماره‌های ۱۳۱ و ۱۳۲) و چندین نسخهٔ خطی از آن نیز در خارج از ایران هست (← بروکلمان G_2، ص ۲۵۶ ش ۲ و بروکلمان S_2، ص ۲۷۳ ش $2a$)، عبدالعلی بیرجندی شرحی بر *شمسیة‌الحساب* نوشته است که یك نسخهٔ خطی از آن در مشهد (*فهرست رضوی*، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۴۳ شمارهٔ ۱۳۳) موجود است و نیز ابواسحاق بن عبدالله کوبنانی شرحی بر *شمسیة‌الحساب* نوشته است که یك نسخهٔ خطی از آن در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه به شمارهٔ ۲۴۱۷/۱ و یك نسخهٔ خطی دیگر از آن در کتابخانه مدرسهٔ سپهسالار به شمارهٔ ۵۲۱ مضبوط است.

می‌دهد، ولی برای استخراج ریشه‌های بالاتر مثالی نمی‌آورد.

استخراج ریشهٔ nاُم توسط کاشانی[۱]

۱۴۱. کاشانی برای استخراج ریشه nاُم عددهای صحیح در دستگاه شمار دهگانی و نیز در دستگاه شمار شصتگانی قاعده‌هایی کاملا کلی بیان می‌کند.[۲] یوشکویچ نوشته است که: «تنها قاعدهٔ کلی که برای استخراج ریشهٔ nاُم اعداد صحیح در آثار ریاضیدانان اسلامی می‌شناسیم همان است که در *مفتاح‌الحساب* نوشته شده»[۳]؛ اما، چنانکه قبلا گفتیم، مثلا در *الشمسیه فی‌الحساب* تألیف نظام‌الدین اعرج که از حیث زمان مقدم بر کاشانی است، نیز قاعده‌ای کلی در این باب آمده است (← ش ۱۴۰).

۱۴۲. عبدالقادر داخل در سال ۱۹۵۱ م فصل پنجم از مقالهٔ سوم *مفتاح‌الحساب* را که دربارهٔ استخراج ریشهٔ nاُم در دستگاه شمار شصتگانی است به انگلیسی ترجمه کرد و آن را به تفصیل مورد بحث و تفسیر قرارداد، و رسالهٔ وی در ۱۹۶۳ م توسط دانشگاه امریکایی بیروت چاپ شد، و کسانی که بخواهند از روش استخراج ریشهٔ nاُم در دستگاه شصتگانی اطلاع به دست آورند می‌توانند به رسالهٔ مذکور رجوع کنند.[۴]

۱۴۳. روشی که کاشانی برای استخراج ریشهٔ nاُم به کار برده، همان روشی است که اروپاییان بعدها در قرن نوزدهم میلادی یافتند و به روش «روفینی- هورنر»[5] موسوم است[۶]، و این نکته را باید متذکر شد که کاشانی فقط دستور کلی استخراج ریشهٔ nاُم را از خود می‌داند و می‌نویسد که راهی که پیشینیان برای استخراج ریشهٔ nاُم داشته‌اند، به ویژه هنگامی که عدهٔ ارقام عدد زیاد و n بزرگ باشد، دشوار بوده است.[۷]

۱۴۴. کاشانی ظاهراً روش دیگری برای استخراج ریشهٔ nاُم از خود داشته و می‌خواسته آن را در کتاب جداگانه‌ای بنویسد و موفق نشده است، چه در پایان فصل پنجم از مقالهٔ اول *مفتاح‌الحساب* می‌نویسد: «وطریقهٔ دیگری استنباط کرده‌ایم که در رسالهٔ دیگر خواهیم نوشت.»[۸]

---

۱) برای کسب اطلاعات جامع دربارهٔ استخراج ریشهٔ nاُم نزد ریاضیدانان دورهٔ اسلامی رجوع کنید به لوکی *A*، و نیز نگاه کنید به مصاحب: *جبر و مقابلهٔ خیام*، صفحات ۱۵۶ و ۱۵۷.

۲) *مفتاح*، صفحات ۲۹ تا ۳۵ و ۷۴ تا ۷۷. ۳) یوشکویچ *G*، ص ۲۴۲. ۴) داخل: *رساله*.

5) Ruffini, Horner.

۶) برای کسب اطلاع از این روش رجوع کنید به داخل: *رساله*، ص ۱ تا ۱۱.

۷) *مفتاح*، ص ۳۵: «و استخراج الضلع الاول بهذالدستور و علی هذاالترتیب مما استنبطناه و اما ماذهب علیه المتقدمون فمتعسر خصوصاً اذاکثر عددالمنازل و مراتب العدد.»

۸) *مفتاح*، ص ۳۵: «و قداستنبطناطریقا آخر سنورده فی رسالة آخری.»

۱۴۵. کاشانی پس از بیان قاعدهٔ کلی برای استخراج ریشهٔ nاُم به عنوان مثال از عدد

۴۴ ۲۴۰ ۸۹۹ ۵۰۶ ۱۹۷

ریشهٔ پنجم استخراج می کند. برای آنکه فهم روش استخراج ریشهٔ nاُم عملا برای خواننده آسانتر باشد، مثال استخراج ریشهٔ پنجم از عدد فوق را با استفاده از *مفتاح‌الحساب*[۱] و با توضیحات کافی و اصطلاحات کنونی بیان می کنیم. این مثال جامع است و می توان آن را برای استخراج ریشه‌های دیگر سرمشق قرار داد.

۱۴۶. استخراج ریشهٔ پنجم از عدد

۴۴ ۲۴۰ ۸۹۹ ۵۰۶ ۱۹۷

الف. ارقام عدد مفروض را از سمت راست به دسته‌های پنج رقمی تفکیك می کنیم (زیرا می خواهیم ریشهٔ پنجم بگیریم)، و آنها را با خطوط قائم مضاعف ازیکدیگر جدا می نمائیم، و نیز همهٔ ارقام عدد را با خطوط قائم ساده ازیکدیگر مجزا می کنیم. چنانکه قبلا در مورد جذر گفتیم (→ ش ۱۲۶) کاشانی هر یك از این دسته‌ها را دور و رقم اول سمت راست هر دور را مرتبهٔ منطق آن دور می نامد.

عدد مفروض به سه دور تقسیم می شود که دور اول آن از سمت راست عدد ۰۶۱۹۷ است و دور آخر آن فقط چهار رقم دارد (۴۴۲۴). ارقامی که ذیلا با حروف سیاه چاپ کرده‌ایم مرتبه‌های منطق هر دور را نشان می‌دهند

۴۴۲۴ ‖ ۰۸۹۹۵ ‖ ۰۶۱۹۷

دور سوم ــ دور دوم ــ دور اول

سپس پنج صف (خانه) افقی مستطیل شکل در زیر عدد مفروض تشکیل می‌دهیم و از بالا به پایین به ترتیب آنها را صف عدد و صف قوهٔ چهارم[۲] و صف قوهٔ سوم و صف قوهٔ دوم و صف پایه می نامیم، و در بالای عدد مفروض نیز خانه‌ای برای نوشتن ریشه تشکیل می‌دهیم، و آن را سطر خارج می نامیم (رجوع کنید به جدول عملیات در صفحهٔ ۶۹).

ب. برای تعیین نخستین رقم سمت چپ ریشهٔ مطلوب، ریشهٔ پنجم نخستین دور سمت چپ (یعنی عدد ۴۴۲۴) را که یك رقمی است با امتحان کردن ارقام مختلف می یابیم، عدد ۵

---

۱) مفتاح، صفحات ۲۹ تا ۳۵.

۲) اگر مثلا بخواهیم ریشهٔ هفتم بگیریم صف اول عدد و صف دوم صف قوهٔ ششم خواهد بود.

حاصل می‌شود.[1] این ۵ را در بالای مرتبهٔ منطق دور سوم یعنی در بالای رقم ۴ (سمت راست عدد ۴۴۲۴) می‌نویسیم و نیز آن را در پایین صف پایه به محاذات ۵ فوقانی ثبت می‌کنیم. سپس قوای متوالی عدد ۵ را در پایین صفهای هم نام خود می‌نویسیم، به این ترتیب که مربع آن یعنی ۲۵ را در پایین صف قوهٔ دوم و مکعب آن یعنی ۱۲۵ را در پایین صف قوهٔ سوم و قوه چهارم ۵ یعنی ۶۲۵ را در پایین صف قوهٔ چهارم و بالاخره قوهٔ پنجم ۵ یعنی ۳۱۲۵ را در صف عدد زیر عدد مفروض می‌نویسیم، به قسمی که یکان هر یك از این اعداد درست به محاذات مرتبهٔ منطق دور مربوط قرار گیرد. سپس زیر عدد ۳۱۲۵ خطی افقی رسم می‌کنیم که دلیل بر محو کردن آن عدد باشد و ۳۱۲۵ را از دور اول کم می‌کنیم و باقیمانده یعنی ۱۲۹۹ را زیر خط افقی می‌نویسیم.

ج. برای تعیین دومین رقم ریشه به طریق زیر عمل می‌کنیم:

اولا) (برای صف قوهٔ چهارم) ۵هایی را که در صف پایه و در صف عدد نوشته بودیم با هم جمع می‌کنیم و حاصل یعنی ۱۰ را در صف پایه در بالای ۵ می‌نویسیم.[2] سپس این مجموع یعنی ۱۰ را در عدد سطر خارج یعنی ۵ ضرب کرده حاصل یعنی ۵۰ را در صف قوهٔ دوم می‌نویسیم به طوری که رقم یکان آن در ستون مرتبهٔ منطق دور اخیر واقع شود و ۵۰ را با ۲۵ که در همان صف نوشته بودیم جمع می‌کنیم و حاصل یعنی ۷۵ را در بالای ۵۰ می‌نویسیم.[3] باز ۷۵ را در ۵ ضرب می‌کنیم و حاصل یعنی ۳۷۵ را در صف قوهٔ سوم به طریق مذکور می‌نویسیم و آن را با عددی که در صف قوهٔ سوم نوشته بودیم یعنی ۱۲۵ جمع می‌کنیم و حاصل یعنی ۵۰۰ را در بالای ۳۷۵ می‌نویسیم. باز ۵۰۰ را در ۵ ضرب می‌کنیم و حاصل یعنی ۲۵۰۰ را در صف قوهٔ چهارم می‌نویسیم و آن را با عدد ۶۲۵ که قبلا در آنجا نوشته بودیم جمع می‌کنیم و حاصل یعنی ۳۱۲۵ را در بالای آن می‌نویسیم.

ثانیاً) (برای صف قوهٔ سوم) ۵ را با ۱۰ که در صف پایه نوشته بودیم جمع می‌کنیم و حاصل یعنی ۱۵ را در بالای ۱۰ می‌نویسیم، باز ۱۵ را در ۵ ضرب می‌کنیم و حاصل یعنی ۷۵ را در صف قوهٔ دوم در بالای ۷۵ قبلی می‌نویسیم و آنها را با هم جمع می‌کنیم و حاصل یعنی ۱۵۰ را در بالای ۷۵ می‌نویسیم. باز ۱۵۰ را در ۵ ضرب می‌کنیم و حاصل یعنی ۷۵۰ را در صف

---

۱) زیرا

$$5^5 = ۳۱۲۵ < ۴۴۲۴ < 5^6 = ۱۵۶۲۵$$

۲) و در بالای ۵ یك خط افقی رسم می‌کنیم که دلیل بر محوکردن ۵ و اثبات ۱۰ باشد.

۳) و در بالای ۵۰ یك خط افقی رسم می‌کنیم که دلیل بر محوکردن ۵۰ و اثبات ۷۵ باشد، به طور کلی هر بار که در صف‌ها عدد جدیدی به دست می‌آوریم عدد سابق را با کشیدن خطی افقی در بالای آن محو می‌کنیم.

قوهٔ سوم در بالای ۵۰۰ قبلی می نویسیم و آنها را با هم جمع می کنیم و حاصل یعنی ۱۲۵۰ را در بالای ۷۵۰ می نویسیم.

ثالثاً (برای صف قوهٔ دوم) ۵ را با ۱۵ که در صف پایه نوشته بودیم جمع می کنیم و حاصل یعنی ۲۰ را در بالای ۱۵ می نویسیم. باز ۲۰ را در ۵ ضرب می کنیم و حاصل یعنی ۱۰۰ را در صف قوهٔ دوم بالای ۱۵۰ قبلی می نویسیم و حاصل یعنی ۲۵۰ را در بالای ۱۰۰ می نویسیم.

رابعاً (برای صف پایه) ۵ را با ۲۰ که در صف پایه نوشته بودیم جمع می کنیم و حاصل یعنی ۲۵ را در بالای ۲۰ می نویسیم.

اکنون در صف پایه عدد **۲۵** و در صف قوهٔ عدد **۲۵۰** در صف قوهٔ سوم عدد **۱۲۵۰** و در صف قوهٔ چهارم عدد **۳۱۲۵** نوشته شده است.

د. اینك باید اعداد فوق را انتقال دهیم. عددی را که در صف قوهٔ چهارم نوشته شده (یعنی ۳۱۲۵ را) یك رقم به طرف راست انتقال می دهیم و در یك سطر بالاتر می نویسیم (و عدد سابق را با کشیدن خطی افقی در بالای آن محو می کنیم) و عددی را که در صف قوهٔ سوم نوشته شده (یعنی ۱۲۵۰ را) دو رقم به سمت راست انتقال می‌دهیم و در یك سطر بالاتر می نویسیم و عددی را که در صف قوهٔ دوم نوشته (یعنی ۲۵۰ را) سه رقم به سمت راست انتقال می دهیم و در یك سطر بالاتر می نویسیم و بالاخره عددی را که در صف پایه نوشته شده (یعنی ۲۵ را) چهار رقم به سمت راست انتقال می‌دهیم و در یك سطر بالاتر می نویسیم. به این ترتیب عددی که در صف پایه پس از انتقال نوشته‌ایم (یعنی ۲۵) مرتبهٔ یکانش به محاذات مرتبهٔ دهگان دور دوم قرار می گیرد.

هـ. اکنون باید در صدد جستجوی بزرگترین عدد یك رقمی مانند m برآییم به طوری که اگر آن را در صف پایه در سمت راست ۲۵ (که قبلا آن را انتقال داده بودیم) بنویسیم تا

$$\overline{۲۵m} = ۲۵ \times ۱۰ + m$$

حاصل شود و سپس این عدد را در m ضرب کرده با آنچه در صف قوهٔ دوم انتقال داده بودیم با در نظر گرفتن مراتب (یعنی با ۲۵۰۰۰) جمع و حاصل را در m ضرب کنیم و با آنچه در صف قوهٔ سوم نوشته بودیم با در نظر گرفتن مراتب (یعنی با ۱۲۵۰۰۰۰) جمع کنیم و باز حاصل را در m ضرب کرده نتیجه را با آنچه در صف قوهٔ چهارم نوشته بودیم (یعنی با ۳۱۲۵۰۰۰۰) جمع کنیم، بتوانیم حاصل اخیر را از آنچه در دور سمت چپ در صف عدد نوشته شده است (یعنی از عدد ۱۲۹۹۰۸۹۹۵) کم کنیم. به تجربه این عدد m را مساوی با ۳ می یابیم و اعمال فوق‌الذکر را انجام می‌دهیم.

پس از انجام دادن این اعمال در صف پایه عدد ۲۵۳، در صف قوهٔ دوم عدد ۲۵۷۵۹، در صف قوهٔ سوم عدد ۱۳۲۷۲۷۷، در صف قوهٔ چهارم عدد ۳۵۲۳۱۸۳۱ و در صف عدد، ۱۰۵۶۹۵۴۹۳ بدست می آید که چون آن را از عدد ۱۲۹۹۰۸۹۹۵ که ذکرش گذشت کم کنیم باقیماندهٔ جزئی ۲۴۲۱۳۵۰۲ حاصل می شود که باید دور سمت راست یعنی ۰۶۱۹۷ را در سمت راست آن پایین بیاوریم.

و. اینك باید همان اعمالی را که دربارهٔ رقم ۵ (یعنی رقم صدگان ریشه) انجام دادیم در مورد عدد ۳ (یعنی رقم دهگان ریشه) انجام دهیم.

پس از انجام دادن این اعمال در صف پایه عدد ۲۶۵ و در صف قوهٔ دوم عدد ۲۸۰۹۰ و در صف قوهٔ سوم عدد ۱۴۸۸۷۷۰ و در صف قوهٔ چهارم عدد ۳۹۴۵۲۴۰۵ نوشته می شود.

باز باید به همان ترتیب که قبلا گفتیم این اعداد را به سمت راست انتقال داد و رقم یکان ریشه را یافت.

ریشهٔ پنجم تقریبی عدد مفروض ۵۳۶ و باقیماندهٔ این ریشه عدد ۲۱ است و بنابراین عدد مفروض ریشهٔ پنجم درست ندارد و از حیث ریشهٔ پنجم اصم است.

۱۴۷. کاشانی در مورد تعیین باقیماندهٔ ریشهٔ پنجم همان روشی را که دربارهٔ تعیین باقیماندهٔ جذر به کار برده بود تعمیم می‌دهد و برای اصلاح ریشهٔ پنجم تقریبی عدد مفروض یعنی برای آنکه ریشهٔ ۵۳۶ دقیق‌تر باشد کسری به آن می افزاید. صورت این کسر عدد ۲۱ یعنی باقیماندهٔ ریشهٔ پنجم است و مخرج آن که آن را مخرج اصطلاحی می نامد عبارت است از

$$(۵۳۷)^۵-(۵۳۶)^۵$$

پس درواقع ریشهٔ پنجم تقریبی عدد مفروض (← ش ۱۴۶) را کاشانی مساوی با عدد کسری زیر محسوب می‌دارد[۱]

$$۵۳۶+\frac{۲۱}{(۵۳۷)^۵-(۵۳۶)^۵}=۵۳۶\,\frac{۲۱}{۴۱۴\ ۲۳۷\ ۷۴۰\ ۲۸۱}$$

به طور کلی اگر ریشهٔ n'م را T و باقیماندهٔ آن را r بنامیم کسری که برای اصلاح باید به ریشهٔ n'م افزود عبارت است از[۲]

---

۱) مفتاح، ص ۳۵.

۲) کاشانی دلیلی برای این موضوع نمی‌آورد اما چنانکه خواهیم دید (← ش ۱۴۸) روش جداگانهٔ محاسبهٔ $(T+۱)^n-T^n$ را بیان می‌کند. کسانی که بخواهند دلیل صحت این روش را بدانند می‌توانند به یکی از منابع زیر رجوع کنند: لوکی A؛ لوکی R، ص ۲۴؛ یوشکویچ G، ص ۲۴۴؛ رزنفلد و یوشکویچ، ص ۳۳۲ یادداشت شمارهٔ ۲۱.

سطر خارج	۶					۳					۵			
صف عدد به فرض آنکه قوهٔ پنجم باشد	۷	۹	۱	۶	۰	۵	۹	۹	۸	۰	۴ ۵	۲ ۲	۴ ۱	۴ ۳
	۶	۷	۱	۶	۰	۳	۹	۴	۵	۹	۹ ۶	۹ ۵	۲ ۰	۱ ۱
	۱	۲				۲ ۲	۰ ۰	۵ ۵	۳ ۳	۱ ۱	۲ ۲	۴ ۴	۲ ۲	
صف قوهٔ چهارم	۰	۸	۰	۸	۵	۹	۴	۹	۶	۲	۱	۴		
	۴ ۶	۸ ۹	۳ ۶	۷	۹ ۶	۵ ۳	۶ ۸	۳ ۵	۱ ۵	۹ ۳	۰	۴		
	۶	۹	۶	۷	۱ ۵	۴ ۰	۴ ۴	۳ ۲	۰ ۵	۹ ۴	۹	۳		
						۵	۰	۴	۲	۵	۴	۹	۳	
						۴ ۱	۷ ۳	۵ ۸	۰ ۱	۲ ۳	۲ ۲	۴ ۵	۳	
						۱	۳	۸	۱	۸ ۵	۹ ۲	۳ ۱	۳	
											۵	۲	۱	۳
											۰ ۵	۰ ۲	۵ ۶	۲
صف قوهٔ سوم	۰	۶	۵	۶	۰	۹	۹	۳	۵	۱				
	۶ ۴	۹ ۶	۴ ۰	۱ ۵	۴ ۶	۱ ۷	۷ ۲	۱ ۲	۵	۱				
	۶	۴ ۱	۴ ۶	۵ ۹	۴ ۱	۰ ۷	۷ ۵	۱ ۰	۵	۱				
	۶	۱	۶	۹ ۰	۴ ۷	۹ ۷	۶ ۸	۱ ۸	۴	۱				
						۰	۷	۷	۸	۸	۴	۱		
						۲ ۸	۱ ۵	۹ ۸	۱ ۶	۸ ۰	۴	۱		
						۱ ۷	۸ ۷	۵ ۲	۹ ۷	۷ ۲	۳	۱		
						۷	۷	۲	۷ ۰	۷ ۵	۲	۱		
											۰	۵	۲	۱
											۰ ۰	۵ ۰	۷ ۵	
											۵ ۵	۷ ۲	۳ ۱	
صف قوهٔ دوم						۰	۹	۰	۸	۲				
						۶ ۴	۸ ۰	۷ ۳	۷	۲				
						۷ ۷	۷ ۲	۷ ۵	۶	۲				
						۸ ۹	۶ ۵	۷ ۷	۵	۲				
						۹	۵	۷ ۰	۵	۲				
	۰	۶	۹	۲	۷	۸	۳				۰	۵	۲	
	۴ ۶	۴ ۱	۰ ۹	۶ ۶	۱ ۵	۸	۲				۰ ۰	۰ ۵	۱ ۱	
	۸ ۸	۰ ۰	۰ ۹	۶ ۰	۱ ۴	۸	۲				۵ ۵	۷ ۷		
	۲ ۶	۷ ۳	۹ ۹	۵ ۴	۱ ۲	۸	۲				۰	۵		
	۶	۳	۹ ۰	۵ ۹	۱ ۰	۸	۲				۵	۲		
صف پایه	۰	۸	۶	۲		۵	۶	۲			۵	۲		
	۴	۷	۶	۲		۲	۶	۲			۰	۲		
	۸					۹					۵	۱		
	۲	۶				۶					۰	۱		
	۶	۵	۶	۲		۳	۵	۲			۵			

$$\frac{r}{(T+1)^n-T^n}$$

و دستور محاسبهٔ ریشهٔ nاُم بنا به گفتهٔ کاشانی این است

$$\sqrt[n]{T^n+r}=T+\frac{r}{(T+1)^n-T^n}$$

برای محاسبهٔ مخرج اصطلاحی لازم نیست جداگانه $(۵۳۶)^۵-(۵۳۷)^۵$ را حساب کنیم بلکه اعدادی را که پس از پایان عمل در فوق صفهای چهارگانه (جدول صفحهٔ ۶۹) به دست آمده است باهم جمع کرده و یك واحد به آنها می افزاییم تا مخرج اصطلاحی حاصل شود

۴	۱	۲	۶	۹	۴	۹	۵	۸	۰	۸	۰	صف قوهٔ چهارم
		۱	۵	۳	۹	۹	۰	۶	۵	۶	۰	صف قوهٔ سوم
					۲	۸	۷	۲	۹	۶	۰	صف قوهٔ دوم
								۲	۶	۸	۰	صف پایه
۴	۱	۴	۲	۳	۷	۷	۴	۰	۲	۸	۱	مجموع اعداد فوق به اضافه یك

دستور محاسبهٔ a^n-b^n

۱۴۸. کاشانی در پایان باب پنجم از مقالهٔ اول[۱] می گوید که روش دیگری برای یافتن تفاضل بین یك قوه از دو عدد (یعنی a^n-b^n) هست که در آن احتیاج به شناختن اعدادی داریم که آنها را اصول این قوه می نامند[۲]:

---

۱) مفتاح، ص ۳۷: «طریق آخر فی استخراج مابین المضلعین المنطقین...»

۲) محمدباقر یزدی نیز در پایان مطلب دهم از باب اول کتاب *عیون الحساب* فصلی دربارهٔ محاسبهٔ a^n-b^n دارد و روشی برای محاسبهٔ ضرایب بسط دوجمله‌ای ذکر می کند (قربانی: در *ریاضیدان ایرانی*، صفحات ۳۸ تا ۴۱).

«بدان که[۱] اصل منزل قوهٔ دوم [یعنی ضریب ab در بسط $(a+b)^2$] فقط یك عدد است و آن ۲ می باشد و اصول منزل قوهٔ سوم [یعنی ضرایب عددی a^2b و ab^2 در بسط $(a+b)^3$] دو عدد است که عبارتند از ۳ و ۳ و برای هر یك از منزلهای بعدی عدد آن یك واحد به ازای هر صف زیاد می شود و همچنین اعداد دو طرف یکی زیاد می شوند و اگر هر دو عدد مجاور از اصول یك منزل را باهم جمع کنیم یکی از اعداد وسط از منزل بعدی به دست می آید. مثلا اعداد منزل قوهٔ سوم ۳ و ۳ است که مجموعشان ۶ می شود پس ۶ عدد وسط منزل چهارم است و اصول منزل چهارم ۴ و ۶ و ۴ هستند و مجموع ۴ و ۶ یعنی ۱۰ یکی از دو عدد وسط منزل قوهٔ پنجم است و مجموع ۶ و ۴ عدد وسط دیگر است و به همین قیاس اصول منازل تا بی نهایت به قسمی که در جدول ۱ دیده می شود به دست می آیند.»[۲]

۱۴۹. کاشانی بعد می گوید[۳] «و هر گاه بخواهیم تفاضل بین یك قوه از دو عدد صحیح متوالی [یعنی $(a+1)^n-a^n$] را به دست آوریم[۴] عدد کوچکتر (یعنی a) را در اصل صف پایهٔ آن قوه ضرب می کنیم و مربع آن (یعنی a^2) را در اصل صف قوهٔ دوم و مکعب آن (یعنی a^3) را در اصل صف قوهٔ سوم ضرب می کنیم و به همین طریق عمل را ادامه می‌دهیم تا اینکه جمیع قوای عدد a که از قوهٔ مفروض کوچکترند در اصول آن قوه ضرب شوند و همهٔ حاصلها را باهم جمع می کنیم و یك واحد بر آن می افزاییم تا تفاضل مطلوب حاصل شود.»[۵]

۱۵۰. مثال: می خواهیم 4^5-5^5 را حساب کنیم. صفوفی برای قوایی که از قوهٔ پنجم کوچکترند تشکیل می‌دهیم و در آنها اصول متعلق به قوهٔ پنجم را در یك ستون می نویسیم و در ستون دیگر عدد کوچکتر یعنی ۴ را در صف پایه و مربع آن را در صف قوهٔ دوم و مکعب آن را در صف قوهٔ سوم و قوهٔ چهارم آن را در صف قوهٔ چهارم می نویسیم. سپس اعدادی را که در هر صف واقع شده در عدد نظیر خود از ستون قوه‌ها ضرب می کنیم و حاصلها را در ستون دیگری

---

۱) مفتاح، ص ۳۷: «و اعلم ان اصل منزلة‌المال عدد واحد و هو اثنان و الکعب هماثلثة و لکل منزل بعده یزید عدده بواحد لازیاد الصفوف و هکذا یتزاید اعداد الاطراف و اذا جمعنا کل عددین متجاورین من اصول منزلة یحصل احد اعداد الاوساط من المنزلة المتأخره.»

۲) ملاحظه کنید که این درست دستور تشکیل مثلث حسابی است که اروپاییان آن را مثلث حسابی پاسکال می‌نامند (← ش ۱۵۲ و ۱۵۴).

۳) مفتاح، ص ۳۸: «فاذا اردنا ان نستخرج مابین مضلعین منطقین متوالیین...».

۴) احتیاج به این محاسبه وقتی پیدا می‌شود که بخواهیم مخرج اصطلاحی مذکور یعنی $(T+1)^n-T^n$ را حساب کنیم.

۵) مثلا برای قوهٔ پنجم از دستور فوق حاصل می‌شود

$$(a+1)^5-a^5=5a^4+10a^3+10a^2+5a+1$$

جدول ۱

صفوف	اصول قوهٔ نهم	اصول قوهٔ هشتم	اصول قوهٔ هفتم	اصول قوهٔ ششم	اصول قوهٔ پنجم	اصول قوهٔ چهارم	اصول قوهٔ سوم	اصول قوهٔ دوم
صف قوهٔ هشتم	۹							
صف قوهٔ هفتم	۳۶	۸						
صف قوهٔ ششم	۸۴	۲۸	۷					
صف قوهٔ پنجم	۱۲۶	۵۶	۲۱	۶				
صف قوهٔ چهارم	۱۲۶	۷۰	۳۵	۱۵	۵			
صف قوهٔ سوم	۸۴	۵۶	۳۵	۲۰	۱۰	۴		
صف قوهٔ دوم	۳۶	۲۸	۲۱	۱۵	۱۰	۶	۳	
صف پایه	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲

می‌نویسیم و بعد اعدادی را که در ستون حاصلضربها نوشته شده باهم جمع می‌کنیم و یک واحد به حاصل جمع می‌افزاییم عدد ۲۱۰۱ به دست می‌آید[۱] و این مساوی است با $۵^{۵}-۴^{۵}$. (جدول ۲)

۱۵۱. سپس کاشانی می‌گوید[۲]: «و هرگاه بخواهیم تفاضل یک قوه از دو عدد غیرمتوالی (یعنی a^n-b^n) مثلا $۷^{۵}-۴^{۵}$ را به دست آوریم ستون دیگری به جدول فوق اضافه می‌کنیم و در آن قوای متوالی تفاضل دو عدد یعنی $۷-۴=۳$ را می‌نویسیم به قسمی که تفاضل (یعنی ۳)

---

۱) درواقع داریم

$$۵^{۵}-۴^{۵}=۵\times۴^{۴}+۱۰\times۴^{۳}+۱۰\times۴^{۲}+۵\times۴+۱=۲۱۰۱$$

۲) مفتاح، ص ۳۹: «و ان اردنا مابین مضلعین منطقین غیرمتوالیین...».

جدول ۲

صفوف	اصول قوهٔ پنجم	قوای عدد ۴	حاصلضربها
صف قوهٔ چهارم	۵	۲۵۶	۱۲۸۰
صف قوهٔ سوم	۱۰	۶۴	۶۴۰
صف قوهٔ دوم	۱۰	۱۶	۱۶۰
صف پایه	۵	۴	۲۰

۲۱۰۰	← حاصلجمع
۱	
۲۱۰۱	$= 5^5 - 4^5$

در صف قوهٔ چهارم و مربع آن در صف قوهٔ سوم و مکعب آن در صف قوهٔ دوم و قوهٔ چهارم آن در صف پایه قرار گیرد. سپس اعدادی را که در ستون حاصلضربها واقع شده‌اند در اعداد نظیر آنها از ستون قوای تفاضل ضرب می کنیم و حاصلضربهای اخیر را باهم جمع می کنیم و قوهٔ پنجم تفاضل یعنی ۲۴۳=$۳^{۵}$ را به آن می افزاییم عدد ۱۵۷۸۳ حاصل می شود و این همان تفاضل قوای مطلوب است.»[۱] (جدول ۳)

ذکر یك نکتهٔ تاریخی

مثلث حسابی و بسط دو جمله‌ای

۱۵۲. با کمی دقت در جدولهای ۱، ۲، و ۳ که گذشت معلوم می شود که

اولا) جدول شمارهٔ ۱ همان مثلثی است که امروزه اروپاییان آن را «مثلث حسابی پاسکال» می نامند. (جدول ۴)

---

۱) درواقع اگر به طور کلی عدد بزرگتر را $(a+b)$ و عدد کوچکتر را a بنامیم تفاضل آنها b می‌شود و داریم

$$(a+b)^5 - a^5 = 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

جدول ۳

صفوف	اصول قوهٔ پنجم	قوای عدد ۴	حاصلضربها	قوای عدد ۳	حاصلضربهای دوم
صف قوهٔ چهارم	۵	۲۵۶	۱۲۸۰	۳	۳۸۴۰
صف قوهٔ سوم	۱۰	۶۴	۶۴۰	۹	۵۷۶۰
صف قوهٔ دوم	۱۰	۱۶	۱۶۰	۲۷	۴۳۲۰
صف پایه	۵	۴	۲۰	۸۱	۱۶۲۰

۱۵۵۴۰ ← حاصلجمع

۲۴۳ ← $۳^۵$

۱۵۷۸۳ = $۷^۵ - ۴^۵$

جدول ۴. مثلث حسابی

سطر اول ۱

سطر دوم ۱ ۱

سطر سوم ۱ ۲ ۱

سطر چهارم ۱ ۳ ۳ ۱

سطر پنجم ۱ ۴ ۶ ۴ ۱

سطر ششم ۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

سطر هفتم ۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱

سطر هشتم ۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱

سطر نهم ۱ ۸ ۲۸ ۵۶ ۷۰ ۵۶ ۲۸ ۸ ۱

سطر دهم ۱ ۹ ۳۶ ۸۴ ۱۲۶ ۱۲۶ ۸۴ ۳۶ ۹ ۱

با این تفاوت که (الف) وضع قرار گرفتن اعداد در آنها متفاوت است یعنی اعدادی که در جدول ۱ در ستونهای قائم قرار گرفته‌اند در جدول ۴ در سطرهای افقی واقع هستند و (ب) یکهائی که در جدول ۴ در ستون چپ و در قطر واقع هستند در جدول شمارهٔ ۱ دیده نمی شوند.

ثانیاً) اعدادی که در جدول شمارهٔ ۱ قرار دارند[۱] عبارتند از ضرایب بسط دو جمله‌ای. مثلا اعدادی که در ستون «اصول قوهٔ نهم» قرار دارند یعنی

۹ و ۳۶ و ۸۴ و ۱۲۶ و ۱۲۶ و ۸۴ و ۳۶ و ۹

ضرایب بسط دو جمله‌ای $(a+b)^{۹}$ هستند. از این قرار

$$(a+b)^{۹}=a^{۹}+۹a^{۸}b+۳۶a^{۷}b^{۲}+۸۴a^{۶}b^{۳}+۱۲۶a^{۵}b^{۴}+۱۲۶a^{۴}b^{۵}+$$
$$۸۴a^{۳}b^{۶}+۳۶a^{۲}b^{۷}+۹ab^{۸}+b^{۹}$$

و اگر مطابق با قراردادهای کنونی عدهٔ ترکیبات[۲] n شیء را r به r با علامت C_n^r نشان دهیم معلوم می شود که

$$C_{۹}^{۱}=۹ \quad و \quad C_{۹}^{۲}=۳۶ \quad و \quad C_{۹}^{۳}=۸۴ \quad و \quad C_{۹}^{۴}=۱۲۶ \quad و \quad \ldots$$

ثالثاً) اگر در جدول شمارهٔ ۳ دو عدد صحیح غیرمتوالی را a و b بنامیم حاصل این جدول با علائم کنونی دستور زیر است

$$(a+b)^{۵}-a^{۵}=۵a^{۴}b+۱۰a^{۳}b^{۲}+۱۰a^{۲}b^{۳}+۵ab^{۴}+b^{۵}$$

و از آنجا

$$(a+b)^{۵}=a^{۵}+۵a^{۴}b+۱۰a^{۳}b^{۲}+۱۰a^{۲}b^{۳}+۵ab^{۴}+b^{۵}$$

یعنی درست دستور بسط دو جمله‌ای که آن را دستور دو جمله‌ای نیوتن می نامند. البته این مثال برای قوهٔ پنجم داده شده ولی قاعدهٔ متن *مفتاح‌الحساب* کلی است و می توان آن را برای هر قوهٔ دیگری به کار برد به قسمی که قاعده‌ای که در *مفتاح‌الحساب* بیان شده درواقع شرح دستور بسط دوجمله‌ای مطابق با دستور زیر می باشد

$$(a+b)^{n}=a^{n}+C_n^{۱}a^{n-۱}b+C_n^{۲}a^{n-۲}b^{۲}+\ldots+C_n^{n}b^{n}$$

---

۱) اینها همان اعدادی هستند که در جدول ۴ یعنی مثلث حسابی در سطر دهم واقع هستند.

۲) Combinaison فرانسوی، Combination انگلیسی.

۱۵۳. این نکته شایستهٔ توجه است که کاشانی، بنابر آنچه خود در مقدمهٔ *مفتاح‌الحساب* نوشته، جدولهای ۱، ۲، و ۳ را از پیشینیان خود اقتباس کرده است، و چنانکه قبلا هم گفتیم، این محاسبات در کتابهای ریاضی که پیش از زمان کاشانی تألیف شده‌اند دیده می‌شود. بنابراین مثلث حسابی و دستور بسط دوجمله‌ای (برای قوای صحیح) مدتها قبل از زمان کاشانی شناخته شده بوده و بین ریاضیدانان معروف بوده تا آنجا که آنها را در کتابهای درسی می‌نوشته‌اند و آنها را برای استخراج ریشهٔ nاُم مورد استفاده قرار می‌داده‌اند.

۱۵۴. طبیعی است که از خود بپرسیم که این مطالب که در زمان کاشانی در زمرهٔ مطالب معمولی ریاضیات بوده از کجا آمده و چه کسی آنها را کشف کرده است.

در نتیجهٔ پژوهشهایی که اخیراً به عمل آمده است[۱] می‌دانیم که دستور بسط دوجمله‌ای (البته در حالتی که نمایندهٔ آن عدد صحیح باشد) در یك متن ریاضی از تألیفات کرجی* (ابوبکرمحمدبن حسین) دیده شده است.

کرجی ریاضیدانی ایرانی بود که در بین سالهای ۴۱۰ و ۴۲۰ درگذشت. متن مذکور را سموأل (ابونصر سموأل بن یحیی) که در سال ۵۷۰ هجری در مراغه درگذشت در کتاب *الباهر فی علم‌الحساب* نقل کرده است.

نگاهی به باب ششم از مقالهٔ اول *مفتاح‌الحساب*

۱۵۵. باب ششم *مفتاح‌الحساب* مربوط به امتحان صحت اعمال به وسیلهٔ عدد ۹ است. کاشانی مانند سایر ریاضیدانان پیش از خود مجموع ارقام هر عدد را می‌گیرد و آن را ۹ به ۹ طرح می‌کند و بقیه را میزان آن عدد می‌نامد. یعنی درواقع میزان هر عدد عبارت است از باقیماندهٔ تقسیم آن عدد بر ۹. مثلا کاشانی میزان عدد ۶۴۵۷۸ را مساوی با عدد ۳ به دست می‌آورد. سپس طریقهٔ امتحان صحت اعمال ضرب و تقسیم و استخراج جذر و کعب و سایر ریشه‌ها را مطابق با روش کنونی شرح می‌دهد.

۱۵۶.موضوع جالب توجه در این باب این است که کاشانی در ابتدای آن می‌نویسد[۲]:

«اگر حساب درست باشد میزان درست در می‌آید و عکس این مطلب صحیح نیست.»

این موضوع از این جهت جالب است که برخی از ریاضیدانان اسلامی قبل از کاشانی به

---

۱) رجوع کنید به مقالهٔ رشدی راشد با عنوان «استقراء ریاضی: کرجی و سموأل» در صفحات ۱ تا ۲۹ جلد نهم مجلهٔ *Archiv for History of Exact Sciences* بخصوص صفحهٔ ۳ آن.

۲) *مفتاح*، ص ۳۹: «فی الموازین، للحساب امتحان یعرف بالمیزان ان صح الحساب صح المیزان ولم یطرد.»

عدم صحت عکس مطلب فوق اشاره نکرده‌اند. مثلا کرجی* در کتاب *الکافی فی الحساب* و نسوی* در کتاب *المقنع فی الحساب الهندی*[۱] می‌گویند که هرگاه نتیجهٔ امتحان صحیح باشد محاسبه نیز صحیح است و هرگاه نباشد محاسبه نیز صحیح نیست و خوارزمی* نیز در کتاب حساب خود همین را گفته است.[۲]

اما ریاضیدان دیگری از مردم مصر یا سوریه موسوم به تقی‌الدین بن عزالدین حنبلی* قبلی که ظاهراً در قرن هشتم هجری می‌زیسته در کتاب *حاوی اللباب من علم الحساب* توجه خواننده را به این موضوع جلب می‌کند که اگر نتیجهٔ امتحان غلط درآید معلوم می‌شود حساب غلط است اما اگر صحیح درآید معلوم نیست که حساب صحیح باشد. یعنی صحیح بودن نتیجهٔ امتحان شرط لازم برای صحت عمل هست ولی کافی نیست.[۳]

نگاهی به مقالهٔ دوم *مفتاح الحساب*

۱۵۷. مقالهٔ دوم *مفتاح الحساب* مربوط به حساب کسرها است و مشتمل بر دوازده باب است. در آغاز باب اول این مقاله کاشانی کسر را چنین تعریف می‌کند: «کسر کمیتی است که نسبت داده شود به مقدار دیگر که به عنوان واحد فرض شده است و مخرج نامیده می‌شود.»[۴]

درواقع کاشانی کلمهٔ کسر را در اینجا هم به جای صورت کسر و هم به جای خود کسر به کار برده است و در بعضی جاهای دیگر صورت کسر را عددالکسر[۵] می‌نامد.

۱۵۸. سپس کاشانی کسرها را به وجه زیر تقسیم‌بندی می‌کند (در مثالهای زیر a،b،c،d، و ... اعداد صحیح مثبت فرض می‌شوند)

الف. کسر مفرد[۶] : $\dfrac{a}{b}$ $\quad b > 1$

کسر مفرد بر دو نوع است:

---

۱) نسوی در باب نهم از مقالهٔ اول *المقنع* می‌نویسد: «فی میزان الضرب وهو ان نأخذ میزان‌المضروب والمضروب فیه کل واحد منهما علی حده و نضرب بعضهم فی بعض و نحفظ الباقی بعد اسقاط تسعة‌تسعة ان جاوزها؛ ثم نأخذ میزان‌الحاصل من الضرب فان کان مساویاً للمحفوظ فالضرب صواب و ان خالفه فخطا.»

۲) لوکی R: ص ۲۶. ۳) کارادوو A.

۴) مفتاح، ص ۴۰: «فی تعریف الکسور و اقسامه وهی کمیة تنسب الی جملة تفرض واحدا و المنسوبة الیهما یسمی مخرجا.»

۵) مثلا در تعریف کسر مجرد و کسر مکرر که در شماره‌های ۱ و ۲ ذیل صفحه ۷۸ نقل شده است.

۶) مفتاح، ص ۴۰: «فالمفرد مانسب فیه عدد صحیح الی عدد صحیح اکثر من‌الواحد تفرض واحدا صحیحا فقط.»

۱. مجرد[۱]: $a = ۱$ مثل $\frac{۱}{۲}$ (نصف) و $\frac{۱}{۳}$ (ثلث) و $\frac{۱}{۱۱}$ و $\frac{۱}{۲۰}$

۲. مکرر[۲]: $a > ۱$ مثل $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۵}{۱۱}$

۱۵۹. کاشانی در اینجا خاطر نشان می کند که نسبت بین کسر (صورت) و مخرج آن در اعداد نامتناهی یافت می شود، (منظورش این است که مثلا کسرهای $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۲}{۴}$، $\frac{۳}{۶}$ و... و $\frac{a}{۲a}$ با هم معادل هستند) و می گوید بهتر است که کوچکترین اعداد صحیح ممکن را صورت و مخرج کسر اختیار کنیم و استعمال کسر را به شکلهای دیگر قبیح قلمداد می کند.[۳]

مثلا از بین کسرهای $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۲}{۴}$، $\frac{۳}{۶}$ و... فقط $\frac{۱}{۲}$ را به کار می برد و $\frac{۲}{۴}$ و غیره را زشت می داند.

۱۶۰. ب. کسر مرکب و آن یا معطوف است و یا مستثنی و یا مضاف و یا منکسر و یا ترکیبی از این چهار نوع یا بعضی از انواع آن:

۱) کسر معطوف[۴] آن است که از عطف دو یا چند کسر حاصل شود.

مثال ۱

$\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ یعنی $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}$

مثال ۲

$\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۷}$ یعنی $\frac{۳}{۵} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۷}$

۲) کسر مستثنی[۵] آن است که کسری یا کسرهایی از کسر دیگری کم شود.

مثال ۱

$$\frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۵}$$

---

۱) فالمجرد هو مایکون عدد کسره واحدا کواحد من اثنین و یقال له‌النصف اومن ثلثه و یقال له الثلث او من اربعه وهو الربع. و مازاد مخرجه عن العشره کواحد من احد عشر او من عشرین فلیس له اسم خاص.

۲) مفتاح، ص ۴۱: «و المکرر ماهو عددالکسر فیه ازید من الواحد.»

۳) مفتاح، ص ۴۱: «و اعلم ان کل نسبة بین الکسر و مخرجه یوجد فی اعداد غیرمتناهیة والمختار منها فی الاستعمال اقل عددین صحیحین علی تلك النسبة و ایراد ما سواهما قبیح.»

۴) مفتاح، ص ۴۱: «فالمعطوف ما یعطف کسر علی کسر اخر و ذلك اما بین اثنین او اکثر»

۵) مفتاح، ص ۴۱: «والکسر المستثنی ما استثنی عن کسر کسر اخر وهو ایضا اما بین اثنین اواکثر.»

مثال ۲

$$\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۵}-\frac{۲}{۱۱}-\frac{۱}{۲۰}$$

۳) کسر مضاف[۱] به قول کاشانی آن است که مخرج جزء اول را واحد یا بیشتر انگاشته آن را به مخرج دیگری نسبت دهیم (یعنی کسری از کسر دیگر که آن را به منزلهٔ واحد می گیریم).

مثال ۱ نصف یك ششم یعنی $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۶}$

مثال ۲ ربع سه پنجم یعنی $\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۵}$

و ممکن است اضافه چند بار تکرار شود.

مثال ۳ نصف سه‌پنجم از چهارنهم از یك دهم یعنی $\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۴}{۹}\times\frac{۱}{۱۰}$

کاشانی پس از ذکر مثال اخیر اضافه می کند که بهتر است در کسر مضاف و معطوف کسرهای بزرگتر مقدم باشند.[۲]

۴) کسر منکسر[۳] آن است که یکی از دو منسوب (صورت و مخرج) یا هر دوی آنها صحیح نباشند.

مثال

$$\frac{\frac{۱}{۲}}{۳} \quad و \quad \frac{\frac{۱}{۹}}{۴\frac{۱}{۲}} \quad و \quad \frac{۱}{۳\frac{۱}{۲}} \quad و \quad \frac{۱\frac{۱}{۲}}{۵}$$

۵) کسرهایی که از چهار نوع فوق ترکیب شده باشند.

مثال

$$\frac{\frac{۱}{۳}}{۲\frac{۱}{۲}}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۱۰}$$

۱۶۱. کاشانی در پایان این باب عبارتی دارد که از نظر تاریخ ریاضیات بسیار مهم است و دلیل بر آن است که وی مخترع کسرهای اعشاری است و ما بعداً در بخش ششم کتاب حاضر

---

۱) مفتاح، ص ۴۱: «والکسر المضاف ما یفرض مخرج جزء الاول کم کان واحدا او اکثر و ینسب الی مخرج آخر.»

۲) مفتاح، ص ۴۱: «و الاولی فی المضاف والمعطوف تقدیم الاکثر فالاکثر.»

۳) مفتاح، ص ۴۱: «والکسر المنکسر هو ما یکون احدالمنسوبین او کلا هما غیرصحیح.»

دربارهٔ آن به تفصیل بحث خواهیم کرد و آن عبارت این است[1]: «و منجمان کسرهای معطوفی به کار می‌برند که مخرجهای متوالی آنها شصت و قوای متوالی شصت است تا هرجا بخواهند و آنها را به ترتیب دقیقه‌ها و ثانیه‌ها و ثالثه و رابعه‌ها و غیره می‌نامند و ما به قیاس حساب منجمان کسرهایی آورده‌ایم که مخرجهای متوالی آنها ده و قوای متوالی ده می‌باشد تا هرجا بخواهیم و آنها را به ترتیب «اعشار» و «دومین اعشار» و «سومین اعشار» و «چهارمین اعشار» نامیدیم.»

۱۶۲. در باب دوم مقالهٔ دوم کاشانی چگونگی نوشتن کسرها را شرح می‌دهد و برای علامت جمع حرف و و برای علامت تفریق حرف الّا و برای علامت ضرب حرف ل و برای علامت تقسیم حرف من را به کار می‌برد[2] و در اینجا ماروش وی را با روش متداول کنونی روبروی هم قرار می‌دهیم تا مقایسهٔ آنها آسان باشد. (صفحهٔ بعد را ملاحظه کنید)

۱۶۳. باب سوم مقالهٔ دوم[3] دربارهٔ تداخل و اشتراك و توافق و تماثل اعداد صحیح است و در اینجا کاشانی «شمارندهٔ مشترك»[4] دو عدد متوافق (متشارك) را «مشترك فیه» یا «وفق» می‌نامد و خارج قسمت تقسیم هر یك از دو عدد متوافق را بر وفق آنها «جزءالوفق» یا «اشتراك» آن عدد می‌نامد. مثلا دو عدد ۱۰ و ۱۵ متشارك هستند و وفق آنها ۵ است، و جزءالوفق ۱۰ عدد ۲ و جزءالوفق عدد ۱۵ عدد ۳ است.

برای تعیین بزرگترین شمارندهٔ مشترك دو عدد، کاشانی همان الگوریتم مشهور اقلیدس[5] را شرح می‌دهد.

۱۶۴. باب چهارم مقالهٔ دوم دربارهٔ تجنیس و رفع است و باب پنجم آن مربوط به یافتن کوچکترین مخرج مشترك بین چند کسر است و کاشانی دو قاعده در این مورد ذکر می‌کند[6]

---

۱) مفتاح، ص ۴۲: «والمنجمون استعملوا کسورا معطوفة علی ان مخارجها المتوالیه هی ستون و مضلعاته المتوالیه الی حیث شاؤا و ترکوا مابعدها یسمونها علی‌التوالی بالدقایق والثوانی و الثوالث والروابع و قس علیه و نحن اوردنا علی قیاس المنجمین کسورا یکون مخارجها المتوالیه عشرة و مضلعاتها المتوالیة الی حیث شئنا و نسمیها بالاعشار و ثانی الاعشار و ثالث الاعشار و رابعها و هلمّ جرا.»

۲) مفتاح، ص ۴۱ تا ۴۳. ۳) مفتاح، ص ۴۵.

۴) به عقیدهٔ من بهتر است به جای اصطلاح «مقسوم علیه» به معنی «عد کننده» اصطلاح شمارنده به کار رود. مثلا شمارنده‌های عدد ۶ عبارتند از ۱، ۲، ۳، و ۶. به خصوص که «مقسوم علیه» در مقام تقسیم به کار می‌رود و ممکن است «شمارندهٔ» مقسوم نباشد. مثلا در تقسیم ۱۷ بر ۵ عدد ۵ «مقسوم علیه» است ولی «شمارندهٔ» عدد ۱۷ نیست. اصطلاح «شمردن» به معنی «عد کردن» را ابوریحان بیرونی در *التفهیم* به‌کار برده است. ← *التفهیم*، ص ۳۶: «و این عدد که ایشان را بشمرد او را وفق خوانند میان ایشان.»

۵) یعنی تعیین بزرگترین شمارندهٔ مشترك دو عدد به وسیلهٔ تقسیمات متوالی.

۶) مفتاح، ص ۴۶ تا ۴۸.

روش کاشانی		روش کنونی
کسر با عدد صحیح:	۳ ۱ ۲	$۳\frac{۱}{۲}$
کسر بدون عدد صحیح:	۰ ۱ ۲	$\frac{۱}{۲}$
جمع (کسر معطوف):	۰ ۰ ۱ و ۱ ۲ ۳	$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}$
تفریق (کسر مستثنی):	۰ ۰ ۱ الا ۱ ۳ ۴	$\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}$
ضرب (کسر مضاف):	۰ ۱ ۴ ل ۱ ۶ ل ۳ ۵	$\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۶}\times\frac{۳}{۵}$

که اگرچه با هم اندك تفاوتی دارند ولی درواقع هر دو معادل همان قاعده‌ای است که اکنون به کار می بریم.

تقسیم (کسر منکسر):	۲ ۱ ۲ من ۴ ۲ ۵	$\dfrac{۲\frac{۱}{۲}}{۴\frac{۲}{۵}}$
ترکیب چند عمل:	۰ ۰ ۱ ۱ ۳ ۲ من و ل الا ۱ ۲ ۱ ۱۰ ۱ ۶ ۲	$\dfrac{\frac{۱}{۳}}{۲\frac{۱}{۲}}+\dfrac{۱}{۲}\times\dfrac{۱}{۶}-\dfrac{۱}{۱۰}$

۱۶۵. باب ششم مقالهٔ دوم *مفتاح الحساب* دربارهٔ «افراد کسر مرکب» یعنی به دست آوردن حاصل کسرهای معطوف و مستثنی و مضاف و منکسر است که تعریف آنها را قبلاً ذکر کردیم (← ش ۱۶۰). در آخر این باب کاشانی می‌گوید[۱] که اگر کسری مرکب از چند کسر مرکب بود ابتدا هر یك از کسرهای مرکب را به کسر مفرد تبدیل می‌کنیم و سپس حاصل را مفرد می‌سازیم. به عنوان نمونه مثالی را که کاشانی در آخر این باب آورده است با معادل آن به وسیلهٔ رمزهای کنونی در اینجا می‌آوریم. (صفحهٔ بعد را ملاحظه کنید)

۱۶۶. باب هفتم مقالهٔ دوم دربارهٔ تنصیف و تضعیف و جمع و تفریق کسرها و باب هشتم آن دربارهٔ ضرب کسرها است و با عملیات کنونی چندان تفاوتی ندارد. کاشانی در آخر این باب به کسرهای اعشاری که خود اختراع کرده است اشاره می‌کند و روش ضرب کردن کسرهای

---

۱) مفتاح، ص ۵۰.

٢		
١		
۴		١
من		٢
۵		٣
۴	الا	من
۵		٨
ل		
٢		
١		
٢		
من		
۴		

مطلوب:

٠
٩۵
٢٧٨۴

$$\frac{٢\frac{١}{۴}}{۵\frac{۴}{۵}}\times\frac{٢\frac{١}{٢}}{۴}-\frac{١\frac{٢}{٣}}{٨}=\frac{٩۵}{٢٧٨۴}$$

اعشاری را به وسیلهٔ شبکهٔ ضرب شرح می‌دهد[١] و مابعداً این مطلب را در بخش ششم این کتاب مورد بررسی قرار خواهیم داد. باب نهم مقالهٔ دوم در تقسیم کسرها است.

۱۶۷. باب دهم مقالهٔ دوم مربوط به استخراج ریشهٔ nُم از کسرها است. در این باب به دستورهای زیر بر می‌خوریم[٢]

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{b^{n-١}\cdot a}}{b}$$

١) مفتاح، ص ۵۴ ٢) مفتاح، ص ۵۵

کاشانی می‌گوید[۱]: «هرگاه صورت و مخرج (نسبت به ریشهٔ مطلوب) منطق نباشند صورت و مخرج کسر را در مورد جذر یك بار در مخرج ضرب می‌کنیم و در مورد کعب دو بار و در مورد ریشهٔ چهارم سه بار و در مورد ریشهٔ پنجم چهار بار ضرب می‌کنیم و به همین نحو برای سایر ریشه‌ها عمل می‌کنیم و ریشهٔ حاصل اخیر را به تقریب می‌گیریم و این ریشه را بر مخرج تقسیم می‌کنیم.»

مثال ۱

$$\sqrt{\frac{۵}{۶}}=\frac{\sqrt{۵\times ۶}}{۶}=\frac{\sqrt{۳۰}}{۶}$$

و مطابق با دستوری که در شمارهٔ ۱۳۰ برای استخراج جذر تقریبی به دست آمد[۲] داریم

$$\frac{\sqrt{۳۰}}{۶}=\frac{۵\frac{۵}{۱۱}}{۶}=\frac{۶۰}{۶۶}=\frac{۱۰}{۱۱}$$

مثال ۲. و باز مطابق با دستور کلی که در شمارهٔ ۱۴۷ به دست آمد[۳] ریشهٔ چهارم زیر را حساب می‌کند

$$\sqrt[۴]{\frac{۱}{۴}}=\frac{\sqrt[۴]{۱\times ۴^{۳}}}{۴}=\frac{\sqrt[۴]{۶۴}}{۴}\approx\frac{۲\frac{۴۸}{۶۵}}{۴}=\frac{۸۹}{۱۳۰}$$

کاشانی سپس می‌گوید که اگر کسر عدد صحیح همراه داشته باشد، ابتدا ریشهٔ قسمت صحیح را، همانگونه که در مقالهٔ پیش گفتیم، استخراج کرده باقیماندهٔ این ریشه را با قسمت کسری جمع می‌کنیم و آن را به مخرج اصطلاحی[۴] نسبت می‌دهیم و حاصل را ساده می‌کنیم.

---

۱) مفتاح، ص ۵۵: «و ان لم یکن کل واحد منهما منطقاً نضرب الکسر فی المخرج مرة‌للجذر و مرتین للکعب و ثلث مرات لضلع مال المال و اربع مرات لمال الکعب و هکذا فی سایر المنازل بتزاید واحد واحد و نأخذ ضلع الحاصل الاخیر بالتقریب علی مامر و نقسم هذا الضلع علی المخرج أعنی مخرج الکسر الذی نرید ضلعه فما خرج فهوالمطلوب.»

۲) یعنی دستور

$$\sqrt{T^{۲}+r}=T+\frac{r}{۲T+۱}$$

۳) یعنی دستور

$$\sqrt[n]{T^{n}+r}=T+\frac{r}{(T+۱)^{n}-T^{n}}$$

۴) ← ش ۱۳۰ کتاب حاضر.

مثال ۳

$$\sqrt{۷\frac{۱}{۶}}=\sqrt{۴+۳\frac{۱}{۶}}\approx ۲+\frac{۳\frac{۱}{۶}}{۵}=۲+\frac{۱۹}{۳۰}$$

و می‌گوید که اگر عدد کسری را تجنیس کنیم جذر دقیق‌تر به دست می‌آید

$$\sqrt{۷\frac{۱}{۶}}=\sqrt{\frac{۴۳}{۶}}=\frac{\sqrt{۲۵۸}}{۶}=\frac{۱۶\frac{۲}{۳}}{۶}=۲\frac{۷}{۹}$$

و باز مطابق با دستور کلی (← ش ۱۴۷):

$$\sqrt[n]{T^n+r}=T+\frac{r}{(T+۱)^n-T^n}$$

کعب زیر را حساب می‌کند:

مثال ۴

$$\sqrt[۳]{۳۰\frac{۱}{۲}}=\sqrt[۳]{۲۷+۳\frac{۱}{۲}}\approx ۳\frac{۳\frac{۱}{۲}}{۴^۳-۳^۳}=۳\frac{۳\frac{۱}{۲}}{۳۷}=۳\frac{۷}{۷۴}$$

و می‌گوید که در اینجا نیز اگر عدد کسری را تجنیس کنیم کعب دقیقتر به دست می‌آید

$$\sqrt[۳]{۳۰\frac{۱}{۲}}=\sqrt[۳]{\frac{۶۱}{۲}}=\frac{\sqrt[۳]{۶۱\times ۲^۲}}{۲}=\frac{\sqrt[۳]{۲۴۴}}{۲}\approx\frac{۶\frac{۲۸}{۱۲۷}}{۲}=۳\frac{۱۴}{۱۲۷}$$

۱۶۸. باب یازدهم مقالهٔ دوم مفتاح دربارهٔ تبدیل مخرج کسر به عدد دلخواهی است. برای این کار کاشانی ابتدا تناسب را شرح می‌دهد و بعد به عنوان مثال می‌گوید می‌خواهیم مخرج کسر $\frac{۵}{۷}$ را به ۹ تبدیل کنیم و تناسب $\frac{x}{۹}=\frac{۵}{۷}$ را حل می‌کند و جواب $x=۶\frac{۳}{۷}$ را به دست می‌آورد و کسر $\frac{۵}{۷}$ را به شکل $\frac{۶\frac{۳}{۷}}{۹}$ می‌نویسد.[۱]

۱۶۹. سپس کسرهای دانگ (دانق) و تسو (طسوج) و شعیر را که در زمان وی بین مردم در باب معاملات متداول بوده است شرح می‌دهد.

---

۱) مفتاح، ص ۵۹.

$$\frac{1}{6}\ \text{دینار} = \text{دانگ}$$

$$\frac{1}{24}\ \text{دینار} = \frac{1}{4}\ \text{دانگ} = \text{تسو}$$

$$\frac{1}{96}\ \text{دینار} = \frac{1}{16}\ \text{دانگ} = \frac{1}{4}\ \text{تسو} = \text{شعیر}$$

باب دوازدهم مقالهٔ دوم دربارهٔ ضرب و تقسیم دانگها و تسوها و شعیرها است.

نگاهی به مقالهٔ سوم *مفتاح الحساب*

۱۷۰. مقالهٔ سوم *مفتاح الحساب* دربارهٔ حساب منجمان یعنی حساب در دستگاه شمار شصتگانی[۱] (ستینی) است و باب اول این مقاله دربارهٔ چگونگی نوشتن اعداد در این دستگاه است، و چون در بخشهای آیندهٔ این کتاب گاهی ناچار خواهیم بود که بعض اعداد را در این دستگاه شمار بنویسیم لازم می‌دانیم به‌عنوان مقدمه برای آن دسته از خوانندگان این کتاب که با حساب منجمان آشنایی ندارند با استفاده از باب اول مقالهٔ سوم *مفتاح الحساب* و کتابهای دیگر توضیحی دربارهٔ این دستگاه دهیم و قراری برای نوشتن این اعداد با ارقام هندی بگذاریم.

۱۷۱. تا آنجا که اطلاع داریم نخستین کس که در دورهٔ اسلامی دربارهٔ حساب در دستگاه شصتگانی کتابی نوشت کوشیار بن‌لبان گیلانی* (جیلی) از ریاضیدانان قرن چهارم هجری بود. وی مقالهٔ دوم کتاب *فی اصول حساب الهند* خود را به حساب در این دستگاه اختصاص داد.

۱۷۲. حساب جمل. در حساب جمل[۲] اعداد را به‌وسیلهٔ حروف: ابجد، هوز، حطی، کلمن، سعفص، قرشت، ثخذ، ضظغ که بیست و هشت حرف هستند نشان می‌دهند. به این ترتیب که مطابق با جدول زیر نه حرف از الف تا طا را برای یکان و از یا تا صاد را برای دهگان و از قاف تا ظا را برای صدگان و غین را به جای هزار می‌گیرند.

---

۱) اصطلاح فارسی شصتگانی (Sexagésimal) معادل با «ستینی» عربی را ابوریحان بیرونی در کتاب *التفهیم* (صفحات ۴۴ و ۴۵) در ترکیباتی از قبیل «کسور شصتگانی» و «مرتبه‌های شستگانی» به کار برده است و پسوند «گان» در اینجا دال بر تکریر عدد است یعنی شصت شصت. ما این اصطلاح را به صورت «شصتگانی» معادل با «ستینی» به کار می‌بریم و شصت را عمداً با صاد می‌نویسیم (همانگونه که صدگان را معمولاً با صاد می‌نویسند) تا با شستگانی که به معنی بنیاد و اساس است (← برهان *قاطع*) مشتبه نشود.

۲) ورجوع کنید به مقالهٔ «ابجد» در *دایرة المعارف فارسی* و مقالهٔ «حساب الجمل» در *دایرة المعارف اسلام* چاپ دوم.

یکان	ا ۱	ب ۲	ج ۳	د ۴	ه ۵	و ۶	ز ۷	ح ۸	ط ۹	
دهگان	ی ۱۰	ك ۲۰	ل ۳۰	م ۴۰	ن ۵۰	س ۶۰	ع ۷۰	ف ۸۰	ص ۹۰	
	ق ۱۰۰	ر ۲۰۰	ش ۳۰۰	ت ۴۰۰	ث ۵۰۰	خ ۶۰۰	ذ ۷۰۰	ض ۸۰۰	ظ ۹۰۰	غ ۱۰۰۰

و اعداد دیگر را به‌وسیلهٔ ترکیب این حروف می نویسند و در موقع نوشتن اعداد مرکب عدد بزرگتر را بر عدد کوچکتر به ترتیبی که در فارسی تلفظ می کنیم مقدم می‌دارند. در اینجا چند عدد را هم به‌حساب جمل و هم با ارقام هندی می نویسیم تا مطلب واضح شود.

یا	کد	نط	قا	غقلد
۱۱	۲۴	۵۹	۱۰۱	۱۱۳۴

و عدهٔ هزارگان را مطابق با تلفظ فارسی بر حرف «غین» مقدم می‌دارند.

مثال

بغ	هغ	بغتکج
۲۰۰۰	۵۰۰۰	۲۴۲۳

برای نوشتن این حروف در زیجها قواعدی هست. از قبیل اینکه نقطهٔ با، جیم، زا، و یا را نمی گذارند و جیم را به شکل حـ می نویسند تا با حا اشتباه نشود و غیره.

۱۷۳. اگرچه در دستگاه شمار شصتگانی از همین حروف جمل برای نوشتن اعداد استفاده می شود، ولی باید متوجه بود که نوشتن اعداد در حساب جمل و در دستگاه شمار شصتگانی تفاوت دارد.

۱۷۴. ارقام شمار شصتگانی. همانگونه که در شمار دهگانی همهٔ اعداد را به‌وسیلهٔ صفر و نه رقم ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ می نویسیم درشمار شصتگانی برای نوشتن همهٔ اعداد به صفر و پنجاه و نه رقم (از یك تا پنجاه و نه) احتیاج هست که آنها را همانگونه که گفتیم با ترکیب

حروف جمل می‌نویسند به این شرح

ا	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ی
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
یا	یب	یج	ید	یه	یو	یز	یح	یط	ك
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
کا	کب	کج	کد	که	کو	کز	کح	کط	ل
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
لا	لب	لج	لد	له	لو	لز	لح	لط	م
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
ما	مب	مج	مد	مه	مو	مز	مح	مط	ن
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
نا	نب	نج	ند	نه	نو	نز	نح	نط	
۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	

پس در شمار شصتگانی ارقام از یك تا پنجاه و نه به صورت مرکب نوشته می‌شود مانند ید (یعنی ۱۴) و کز (یعنی ۲۷) و نط (یعنی ۵۹) و غیره.

در زیجها صفر را به صورتهای مختلف نوشته‌اند. مثلا دایره‌ای کوچك که خط کوچکی بر بالای آن مماس شده باشد، و از جمله در این اواخر آن را به شکل دو ضمهٔ معکوس روی یکدیگر می‌نویسند.

۱۷۵. چگونگی نوشتن اعداد در دستگاه شصتگانی. می‌دانیم که پایهٔ دستگاه شمار دهگانی عدد ۱۰ است یعنی واحد هر مرتبه (از راست به چپ) ده برابر واحد مرتبهٔ قبل از آن و یکدهم واحد مرتبهٔ بعد از آن است. مثلا ۱۴۳۷۹ر۵۶ را در واقع می‌توان چنین نوشت

$$۱ \times (۱۰)^۴ + ۴ \times (۱۰)^۳ + ۳ \times (۱۰)^۲ + ۷\,(۱۰)^۱ + ۹ + \frac{۵}{۱۰} + \frac{۶}{(۱۰)^۲}$$

اما پایهٔ دستگاه شمار شصتگانی عدد ۶۰ است یعنی واحد هر مرتبه ۶۰ برابر واحد مرتبهٔ مادون آن و $\frac{1}{۶۰}$ واحد مرتبهٔ مافوق آن می‌باشد.

قدما مرتبهٔ آحاد شمار شصتگانی را مرتبهٔ درجات می‌نامیدند و در جهت نزول هر درجه را به ۶۰ دقیقه و هر دقیقه را به ۶۰ ثانیه و هر ثانیه را به ۶۰ ثالثه و هر ثالثه را به ۶۰ رابعه و هکذا تقسیم می‌کردند، به قسمی که بعد از مرتبهٔ درجات، در جهت نزول مرتبهٔ دقیقه‌ها و بعد از آن مرتبهٔ ثانیه‌ها و بعد از آن به ترتیب مرتبه‌های ثالثه‌ها و رابعه‌ها و خامسه‌ها و سادسه‌ها و غیره قرار داشت که آنها را کسرهای شصتگانی (کسور ستینی) می‌نامیدند و این مراتب را برعکس مراتب شمار دهگانی از راست به چپ می‌نوشتند و اسامی مرتبه‌ها را یا در بالای ارقام قرار می‌دادند و یا نام آخرین مرتبه را درسمت چپ آن می‌نوشتند، مگر وقتی که قرینه‌ای برای دانستن نام مراتب در دست باشد.

مثلا ۲ درجه و ۲۴ دقیقه و ۱۱ ثانیه و ۴۵ ثالثه را به یکی از شکلهای زیر می‌نوشتند

درجه	دقیقه	ثانیه	ثالثه
ب	کد	یا	مه

(از راست به چپ بخوانید)

و یا

ب کد یا مه (ثالثه)

این عدد را با ارقام هندی می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{۴۵}{(۶۰)^{۳}}+\frac{۱۱}{(۶۰)^{۲}}+\frac{۲۴}{۶۰}+۲$$

(از راست به چپ)

و یا

$$۲+\frac{۲۴}{۶۰}+\frac{۱۱}{(۶۰)^{۲}}+\frac{۴۵}{(۶۰)^{۳}}$$

(از چپ به راست)

همچنین در جهت صعود هر ۶۰ درجه را یك واحد از مرتبهٔ بالاتر محسوب می‌داشتند و آن

را واحد مرتبهٔ یك بار مرفوع یا به طور خلاصه مرفوع می نامیدند و هر ۶۰ واحد «یکبار مرفوع» را یك واحد از مرتبهٔ بالاتر قرار می دادند و آن را واحد مرتبهٔ دوبار مرفوع یا مثانی و مرتبهٔ بعد از آن را سه بار مرفوع یا مثالث و مرتبهٔ بعدی را چهار بار مرفوع یا مرابع و غیره می نامیدند.

بنابراین وقتی در کتابهای ریاضی قدیمی عددی را به شکل زیر می بینیم

دوبار مرفوع	مرفوع	درجه	دقیقه	ثانیه	ثالثه
ید	ب	نو	مب	کا	لح

(از راست به چپ بخوانید)

و یا به شکل

ید ب نو مب کا لح (ثالثه)

مقصود عدد زیر می باشد

$$۱۴\times(۶۰)^{۲}+۲\times(۶۰)+۵۶+\frac{۴۲}{(۶۰)}+\frac{۲۱}{(۶۰)^{۲}}+\frac{۳۸}{(۶۰)^{۳}}$$

(از چپ به راست بخوانید)

۱۷۶. تبصره. گفتیم که نوشتن اعداد با حساب جمل با نوشتن آنها در دستگاه شصتگانی تفاوت دارد (← ش ۱۷۳)، مثلا عدد ۱۶۳ در حساب جمل به صورت قسج نوشته می شود در صورتی که همین عدد در دستگاه شصتگانی به شکل زیر نشان داده می شود

مرفوع	درجه
ب	مج

یعنی

$$۲\times۶۰+۴۳$$

۱۷۷. عدد مفرد و عدد مجرد. کاشانی هر عدد را که دستگاه شصتگانی فقط در یك مرتبه واقع باشد یعنی به صورت $a(۶۰)^k$ نوشته شود (a یکی از اعداد ۱ تا ۵۹ و k عددی است صحیح و مثبت یا منفی) عدد مفرد می نامد.[۱] مثلا ۴۰ درجه عددی است مفرد و همچنین ۲۳

۱) مفتاح، ص ۶۴: «ویسمی مفرداً ماکان فی مرتبة واحدة ای ماکان قسماً واحداً من الارقام الستین فی ایّ سلسلة ←

رابعه عدد مفرد است.

عدد مجرد عبارت است از هر یك از قوای صحیح مثبت یا منفی شصت. مثلا یك ثانیه عدد مجرد است و همچنین یك درجه عدد مجرد می باشد.

۱۷۸. قرارداد مهم. چون در کتاب حاضر ناچاریم که اعداد دستگاه شصتگانی را طوری بنویسیم که خواننده به‌آسانی بتواند ارزش آنها را دریابد:

ارقام شصتگانی را با ارقام هندی (معمولی) و مراتب را برخلاف قدما از چپ به راست می نویسیم و بین هردو مرتبهٔ متوالی یك «،» (ویرگول) قرار می دهیم و قسمت صحیح عدد را از قسمت کسری آن با علامت «;» (نقطه ویرگول) جدا می سازیم.

مثلا دومین عدد مذکور در شمارهٔ ۱۷۵ یعنی

ید ب نو مب کا لح (ثالثه)

و یا

$$14\times(60)^2+2\times(60)+56+\frac{42}{(60)}+\frac{21}{(60)^2}+\frac{38}{(60)^3}$$

را چنین می نویسیم

۱۴,۲,۵۶ ; ۴۲,۲۱,۳۸

همچنین وقتی می نویسیم

۱۷,۰,۴۱ ; ۲۲,۳۹

یعنی

$$17\times(60)^2+0+41+\frac{22}{60}+\frac{39}{(60)^2}$$

۱۷۹. پس از این توضیح و قرارداد خاطر نشان می کنیم که یونانیان اعداد را در دستگاه شمار شصتگانی خالص نمی نوشتند بلکه دستگاه عدد نویسی آنان ترکیبی بود از دستگاههای شصتگانی و دهگانی. بطلمیوس در مجسطی طول سال را بر حسب روز، به صورت زیر نوشته است[1]

۳۶۵ ۱۴ ۴۸

یعنی

$$365 + \frac{14}{(60)} + \frac{48}{(60)^2}$$

کان و مجرداً ماکان عقده واحدا و مرکباً ماکان فی مرتبتین اوازید.»

۱) لوکی R ص ۴۱.

یعنی در واقع قسمت صحیح عدد را در دستگاه دهگانی و قسمت کسری آن را در دستگاه شصتگانی نوشته است. چنین دستگاه عددنویسی را لوکی دستگاه ذوجیاتین[1] نامیده است.[2]

۱۸۰. در برخی از کتابهای ریاضی اسلامی که از زمانهای پیش از عصر کاشانی به دست ما رسیده است نیز غالباً محاسبات، مخصوصاً درمورد ضرب و تقسیم، در دستگاه شصتگانی خالص دیده نمی‌شود، اما کاشانی در *مفتاح الحساب* و سایر آثار خود همهٔ اعمال و حتی استخراج ریشهٔ nُم را یا در دستگاه دهگانی خالص و یا در دستگاه شصتگانی خالص انجام داده است. برای آنکه تفاوت بین این دو روش محاسبه روشن شود یك مثال از عمل ضرب از کتاب *المقنع فی‌الحساب‌الهندی*نسوی* و یك مثال از کتاب *استخراج الاوتار* بیرونی* و یك مثال از کتاب *مفتاح الحساب* کاشانی را در اینجا می‌آوریم.

۱۸۱. نسوی در باب چهارم از مقالهٔ چهارم کتاب *المقنع*[3] برای ضرب کردن دو عدد

درجه	دقیقه	ثانیه		درجه	دقیقه	ثانیه
(۴	۱۵	۲۰)	و	(۶	۲۰	۱۳)

ابتدا هر عدد را بر حسب جنس کوچکترین مرتبهٔ آن در دستگاه دهگانی می‌نویسد

ثانیه   درجه   دقیقه   ثانیه
۱۵۳۲۰ = ۴ ، ۱۵ ، ۲۰

ثانیه   درجه   دقیقه   ثانیه
۲۲۸۱۳ = ۶ ، ۲۰ ، ۱۳

و سپس این اعداد را که در دستگاه دهگانی نوشته شده است در هم ضرب می‌کند

$$۱۵۳۲۰ \times ۲۲۸۱۳ = ۳۴۹\ ۴۹۵\ ۱۶۰$$

و بعد حاصل را در دستگاه شصتگانی می‌نویسد (یعنی حاصل را بر ۶۰ تقسیم می‌کند و باز خارج قسمت را بر ۶۰ تقسیم می‌کند و عمل را آنقدر ادامه می‌دهد تا خارج قسمت از ۶۰

1) amphibisch

۲) لوکی R ص ۴۲.

۳) نسخهٔ خطی *المقنع فی الحساب الهندی* شمارهٔ ۵۵۶/۶ لیدن روی برگ ۷۸.

کوچکتر شود. باقیمانده‌های این تقسیمات به ترتیب از جنس رابعه[۱] و ثالثه و ثانیه و دقیقه و درجه خواهد بود)

درجه   دقیقه   ثانیه   ثالثه   رابعه

۲۶ ، ۵۸ ، ۱ ، ۵۹ ، ۲۰ = ۳۴۹ ۴۹۵ ۱۶۰ رابعه

چنانکه دیده می‌شود نسوی عمل ضرب را در دستگاه شصتگانی انجام نمی‌دهد.

۱۸۲. همچنین بیرونی در غالب آثار خود اعمال ضرب و تقسیم و استخراج جذر اعداد شصتگانی را در دستگاه دهگانی انجام می‌دهد، یعنی ابتدا اعداد شصتگانی را در دستگاه دهگانی می‌نویسد و اعمال را در دستگاه اخیر انجام می‌دهد و سپس نتیجه را به دستگاه شصتگانی می‌برد.

مثلا در فصل اول از مقالهٔ دوم کتاب *استخراج الاوتار*[۲] وقتی می‌خواهد عدد (ندج ثانیه) را به قوهٔ ۲ برساند ابتدا این عدد را در دستگاه دهگانی می‌نویسد

ثانیه   دقیقه   ثانیه   دقیقه   ثانیه

۳۲۴۳ = ۵۴   ۳ = ند   ج

سپس حاصل را مجذور می‌کند

(۳۲۴۳)^۲=۱۰٬۵۱۷٬۰۴۹

در مقالهٔ دوم آن کتاب[۳] نیز همهٔ محاسبات در دستگاه دهگانی انجام شده است.[۴]

۱۸۳. اما کاشانی در مقالهٔ سوم *مفتاح الحساب* که مربوط به حساب منجمان است همهٔ اعمال تضعیف و تنصیف و جمع و تفریق و ضرب و تقسیم و استخراج جذر و حتی استخراج ریشه nم را کاملا در دستگاه شصتگانی خالص انجام می‌دهد[۵] و برای هر یك از این اعمال قبلا قاعدهٔ عمل را به وجه کلی بیان می‌کند و بعداً مثال می‌آورد، و نیز در *رسالهٔ محیطیه*[۶] همهٔ اعمال را در دستگاه شصتگانی خالص انجام می‌دهد.

---

۱) زیرا حاصلضرب ثانیه‌ها از جنس رابعه‌ها می‌باشد

$$\frac{۱}{(۶۰)^۲}\times\frac{۱}{(۶۰)^۲}=\frac{۱}{(۶۰)^۴}$$

۲) جزو رسائل بیرونی چاپ حیدرآباد، صفحهٔ ۱۱۷.   ۳) از صفحهٔ ۱۱۷ تا صفحهٔ ۱۳۳ چاپ فوق.

۴) برای مثالهای دیگر رجوع کنید به کتاب تحدید *نهایات الاماکن* بیرونی، نسخهٔ خطی شمارهٔ ۳۳۸۶ ایاصوفیا صفحهٔ ۶۱ تا ۶۷ (عکس این نسخهٔ خطی نفیس را دوست گرامی آقای دکتر منوچهر ستوده به نویسنده اهدا کرده است).

۵) مفتاح، ص ۶۳ تا ۷۸.   ۶) بخش چهارم کتاب حاضر.

اکنون یك مثال از عمل ضرب را از کتاب *مفتاح الحساب* به‌عنوان نمونه در اینجا می‌آوریم[۱]

در این مثال کاشانی دو عدد[۲]

(۳۸ , ۴۰ ,۱۵ ; ۲۴) و (۲۰ ; ۵۱ , ۹ , ۱۳)

را به‌وسیلهٔ شبکهٔ ضرب مطابق با نمونه‌ای که در بخش اول کتاب حاضر در مورد عددهای صحیح گفتیم (← ش ۱۱۱) در هم ضرب کرده است (← اول صفحهٔ ۱۲۰).

حاصل این ضرب با قراردادی که در شمارهٔ ۱۷۸ بیان کردیم به صورت زیر نوشته می‌شود.

۵ ,۱۹ ,۲۲ ,۵۴ ; ۴۴ ,۲۷ ,۵۰ ,۴۰

در این شبکه حاصلضرب هر دو عدد مفرد (← ش ۱۷۷) که در خارج جدول به محاذات دو ضلع فوقانی نوشته شده است در مربعی که از تلاقی مستطیلهای روبروی آن دو عدد تشکیل شده نوشته شده است. مثلا حاصلضرب ۱۵ دقیقه در ۵۱ درجه می‌شود ۷۶۵ دقیقه یعنی ۱۲ درجه و ۴۵ دقیقه و دو عدد اخیر در مربع وسط جدول نوشته شده و به‌وسیلهٔ قطر مربع از یکدیگر جدا شده است.

بنابر آنچه گذشت می‌توان گفت که قواعد اعمال حساب در دستگاه شصتگانی در عهد کاشانی و در کتاب *مفتاح الحساب* به درجهٔ کمال خود رسیده بوده است.[۳]

۱۸۴. این نکتهٔ جالب توجه را نیز ناگفته نگذریم که کاشانی در باب سوم مقالهٔ سوم *مفتاح الحساب* که مربوط به ضرب اعداد شصتگانی است، آنجا که از جدول ضرب اعداد شصتگانی گفتگو می‌کند، دربارهٔ جنس مراتب می‌گوید[۴]: «هرگاه برای درجه (عدد) صفر و برای «یکبار مرفوع» و دقیقه عدد یك و برای «دوبار مرفوع» و ثانیه عدد دو و برای «سه بار مرفوع» و ثالثه عدد سه و به همین قیاس برای مراتب دیگر عدد بگیریم اینها فاصله‌های مراتب از درجه هستند و اعداد مراتب نامیده می‌شوند.»

مقصود کاشانی از اصطلاح اعداد مراتب نماینده‌های قوای ۶۰ است وقتی که عدد

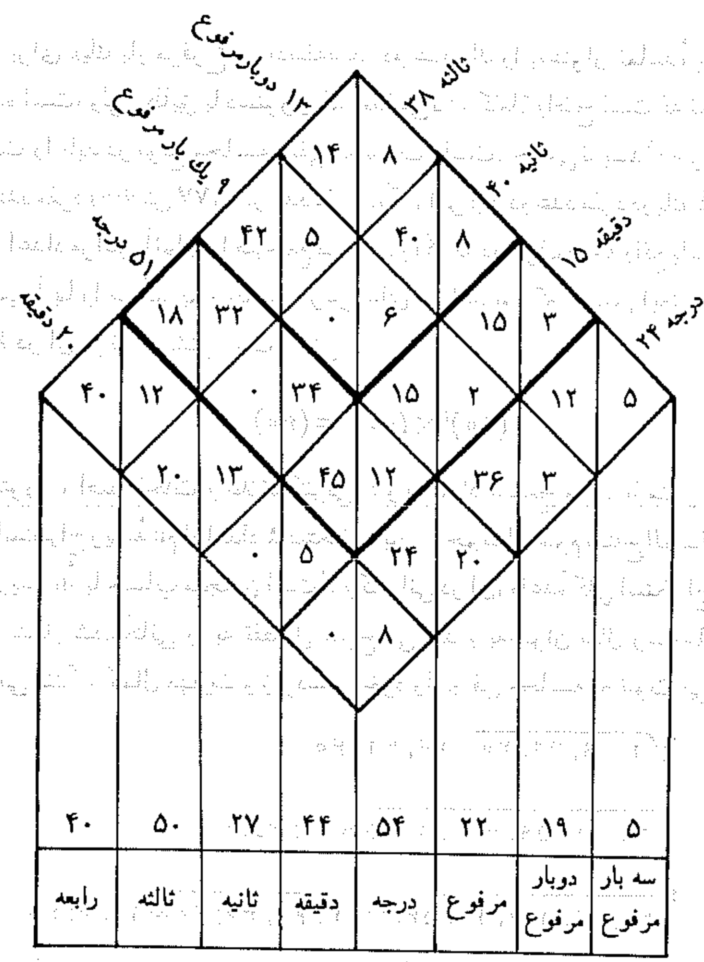
---

۱) *مفتاح*، ص ۶۹ و ۷۰.

۲) برای آگاهی یافتن از روش مادر نوشتن اعداد شصتگانی رجوع کنید به شمارهٔ ۱۷۸ کتاب حاضر.

۳) برای کسب اطلاع از تاریخچهٔ محاسبه در دستگاه شصتگانی به‌وسیلهٔ ریاضیدانان اسلامی رجوع کنید به لوکی *R*، صفحات ۶۴ تا ۹۰.

۴) *مفتاح*، ص ۶۷: «واذا اخذنا للدرج صفراً و للمرفوع المرة و الدقیقة واحدا و للمثانی و الثانیة اثنین و للمثالث و الثالثة ثلثة و علی هذا القیاس فهی ابعاد المراتب عن الدرج سمیت اعداد المراتب.»



شصتگانی به صورت زیر نوشته شود

$$a_n\times(60)^n+\dots+\underset{\text{دوبار مرفوع}}{\underset{\uparrow}{a_2}}\times(60)^2+\underset{\text{یك بار مرفوع}}{\underset{\uparrow}{a_1}}\times(60)^1+\underset{\text{درجه}}{\underset{\uparrow}{a_0}}\times(60)^0+a_{-1}\times$$

$$\underset{\text{دقیقه}}{\underset{\uparrow}{(60)^{-1}}}+a_{-2}\times\underset{\text{ثانیه}}{\underset{\uparrow}{(60)^{-2}}}+\dots+a_{-m}\times(60)^{-m}$$

کاشانی برای نمایندهٔ ۶۰ درعدد a_0 (درجه) صفر را اختیار کرده یعنی در واقع $(60)^0$ را مساوی با یك گرفته و برای صفر مفهوم قوهٔ یك عدد را قائل شده است و تا آنجا که اطلاع داریم در بین ریاضیدانان دورهٔ اسلامی کاشانی نخستین کس است که این کار را کرده است.

اگرچه برای «یك بار مرفوع» و «دقیقه» هر دو عدد یك را به‌عنوان نمایندهٔ پایهٔ شصت اختیار کرده است، ولی مطابق با دستوری که بعداً می‌دهد کاملا واضح است که نماینده‌های قوای شصت را باید در موقع محاسبه منفی محسوب داشت. چه می‌نویسد[۱]: «برای ضرب کردن یك عدد مفرد (← ش ۱۷۷) در عدد مفرد دیگر، اگر این دو عدد مفرد در یك طرف درجه واقع باشند اعداد مراتب آنها را با هم جمع می‌کنیم و اگر در دو طرف درجه واقع باشند تفاضل اعداد مراتب آنها را می‌گیریم و حاصل از مرتبه‌ای خواهد بود که عددش (یعنی قدر مطلق نمایندهٔ ۶۰ در آن مرتبه) بیشتر است» یعنی

$$(۶۰)^i \times (۶۰)^j = (۶۰)^{i+j}$$

در این دستور، با اصطلاحات و علائم کنونی، i و j اعداد صحیح مثبت یا منفی هستند.

۱۸۵. استخراج ریشهٔ nمُ از اعداد شصتگانی. باب پنجم مقالهٔ سوم *مفتاح الحساب* دربارهٔ استخراج ریشهٔ nمُ با حساب منجمان است[۲]، و کاشانی در آن، قاعدهٔ کلی استخراج ریشهٔ nمُ در دستگاه شمار شصتگانی را به تفصیل شرح می‌دهد و به‌عنوان مثال ریشه‌های زیر را استخراج می‌کند[۳] و کمال مهارت و زبردستی خود را در فن محاسبه به ثبوت می‌رساند.[۴]

$$\sqrt{۱۰,\ ۹,\ ۴۹,\ ۲۰} = ۲۴,\ ۴۱;\ ۴۰$$

$$\sqrt[۳]{۱۸,\ ۵۲;\ ۵۹,\ ۴۳,\ ۵۱,\ ۲۵} = ۱۰;\ ۲۵,\ ۳۰$$

$$\sqrt[۶]{۳۴,\ ۵۹,\ ۱,\ ۷,\ ۱۴,\ ۵۴,\ ۲۳,\ ۳,\ ۴۷,\ ۳۷;\ ۴۰} = ۱۴,\ ۰;\ ۳۰$$

کاشانی در آخر این باب می‌نویسد[۵]: «ما در رسالهٔ خود موسوم به محیطیه جذرهای اعداد کثیرالارقام را حساب کرده و در آن نکات ظریفی به کار برده‌ایم.»

۱۸۶. در سال ۱۹۵۱ میلادی عبدالقادر داخل رساله‌ای دربارهٔ باب پنجم از مقالهٔ سوم

---

۱) مفتاح، ص ۶۷: «ثم اذا ضربنا مفردا فی مفرد تجمع عددی مرتبتی المضروبین ان کانافی احد طرفی الدرج فالمجموع عدد مرتبة الحاصل فی ذلك الطرف و نأخذ الفضل بینهماان اختلفا فهو عدد مرتبة فی الطرف الذی له الفضل.»

۲) برای کسب اطلاع از تاریخچهٔ استخراج ریشهٔ nمُ توسط دانشمندان اسلامی رجوع کنید به لوکی A

۳) *مفتاح* ص ۷۴ تا ۷۸.

۴) قرارداد برای چگونگی نوشتن اعداد شصتگانی در کتاب حاضر در شمارهٔ ۱۷۸ نوشته شده است.

۵) مفتاح، ص ۷۷: «وقد استخرجنا فی رسالتنا المسماة بالمحیطیة جذور کثیرة الارقام و استعملنا فیها نکات غریبة.»

مفتاح الحساب نوشت و رسالهٔ او در سال ۱۹۶۰ توسط دانشگاه امریکایی بیروت چاپ شد.[۱]

داخل در فصل اول رسالهٔ خود حساب جمل را که توسط کاشانی به کار رفته شرح می‌دهد و در فصل دوم آن روش موسوم به روفینی ـ هورنر[۲] را که مربوط به محاسبهٔ ریشه‌های حقیقی کثیرالجمله‌های عددی است با علائم و اصطلاحات کنونی بیان می‌کند. در فصل سوم آن رساله عکس صفحاتی از نسخهٔ خطی *مفتاح الحساب* که متعلق به دانشگاه پرینستن است با ترجمهٔ تحت‌اللفظی مطالب آن به انگلیسی آمده است. داخل در فصلهای چهارم و پنجم تفسیر مفصل و جامعی از اصطلاحات خاص و متن باب پنجم مقالهٔ سوم *مفتاح الحساب* آورده است و خدمت بسیار ارزنده‌ای به تاریخ ریاضیات نموده است.

۱۸۷. موضوع باب ششم مقالهٔ سوم *مفتاح‌الحساب* تحویل اعداد از دستگاه شمار شصتگانی به دستگاه دهگانی و معرفی کسرهای اعشاری است که کاشانی خود مخترع آنها است، و چون این موضوع از لحاظ تاریخ ریاضیات اهمیت دارد، ما بحث در آن را موضوع بخش ششم کتاب حاضر قرار می‌دهیم.

نگاهی به مقالهٔ چهارم *مفتاح الحساب*

۱۸۸. موضوع مقالهٔ چهارم *مفتاح الحساب* اندازه‌گیری ابعاد و سطح و حجم شکلهای هندسی است. در این مقاله کاشانی علاقهٔ خود را به فن محاسبه و مهارت خود را در این باب بار دیگر نشان داده، و ازجمله، سطح هر یك از چند ضلعیهای منتظم مهم و حجم چند وجهی‌های منتظم را، هم در دستگاه شمار شصتگانی و هم در دستگاه دهگانی، حساب کرده است، و اگرچه دستورهایی را که برای محاسبهٔ سطح و حجم داده به ساده‌ترین صورت خود در نیاورده لیکن نتیجهٔ محاسباتش بسیار دقیق است.

کاشانی جدول جیب را درجه به درجه (از یك درجه تا نود درجه)[۳] و روش به کار بردن آن و نیز جدولهای مفید دیگری را در این مقاله آورده و جدول مضر بهای عدد پی (π) را که خود، با دقتی که سالها بعد از زمان وی بی‌رقیب مانده حساب کرده و نتیجه را، هم در دستگاه

---

۱) داخل: *رساله*.

2) Ruffini Horner

۳) مفتاح، ص ۱۱۶ ـ دربارهٔ جدول جیب خاطرنشان می‌کنیم که اصطلاح جیب که ریاضیدانان دورهٔ اسلامی به کار می‌بردند با اصطلاح کنونی سینوس (sinus) فرق دارد، و جیب هر زاویه مساوی با ۶۰ برابر سینوس آن است زیرا قدما شعاع دایرهٔ مثلثاتی را ۶۰ می‌گرفته‌اند و ما اکنون آن را واحد می‌گیریم (رجوع کنید به شمارهٔ ۱۹۶ کتاب حاضر).

شصتگانی و هم در دستگاه دهگانی، به‌اختصار ثبت کرده است.[۱]

همچنین طریقهٔ تعیین وزن مخصوص اجسام را بیان کرده[۲] و جداولی برای این کار از کتاب *میزان الحکمه* تألیف عبدالرحمان‌خازنی* اقتباس و آنها را تصحیح کرده و روش به کار بردن آنها را نوشته است.[۳]

چون بحث در مطالب و نقادی این مقاله از *مفتاح الحساب* به تفصیل می انجامد ما ناچار برای رعایت جانب اختصار فقط برخی از اصطلاحات و تعریفات مفید و دستورهای آن مقاله را در اینجا می آوریم.

۱۸۹. مرکز مثلث نقطه‌ای است از سطح مثلث که از هر سه ضلع آن به یك فاصله باشد[۴] (= مرکز دایرهٔ محاطی مثلث).

کاشانی می گوید که مرکز مثلث در حقیقت مرکز دایرهٔ محیطی آن است و مرکز دایرهٔ محاطی را چون در مساحت مورد احتیاج است مجازاً مرکز مثلث نامیده‌اند.

۱۹۰. معیّن. چهار ضلعیی است که اضلاع آن با هم مساوی و زوایای آن با هم مختلف باشند[۵] (= لوزی).

۱۹۱. شبیه‌المعیّن. چهار ضلعیی است که اضلاع روبروی آن دوبدو متساوی و متوازی باشند ولی با دو ضلع دیگر مساوی نباشند. (= متوازی الاضلاع).

۱۹۲. ذوزنقة واحده = ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه.

۱۹۳. ذوالیمینین. چهار ضلعی محدبی است که دو ضلع مجاور آن با هم مساوی و دو ضلع دیگر آن نیز با هم مساوی ولی با دو ضلع اول مختلف باشند.[۶] البته در چنین چهار ضلعی فقط زوایای روبرو با هم مساویند و زوایای مجاور با هم مساوی نیستند. کاشانی می گوید که اگر دو

---

۱) *مفتاح*، ص ۱۰۹ و ۱۱۰.

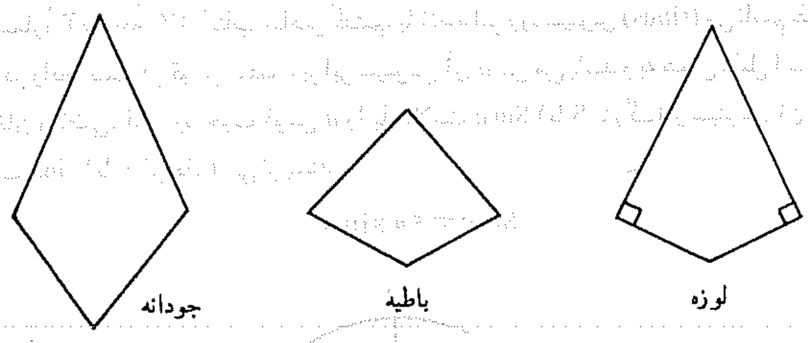
۲) برای کسب اطلاع مختصر از کارهای ابوریحان بیرونی و خازنی دربارهٔ تعیین وزن مخصوص اجسام رجوع کنید به الدومیلی S، صفحات ۱۰۰ و ۱۰۱. کسانی که بخواهند در این باره اطلاعات مبسوطی کسب کنند باید به مقالات ویدمان (Eilhard Wiedemann) که به زبان آلمانی در این موضوع نوشته و فهرست کامل آنها و نشانی آنها در جلد چهاردهم مجلهٔ *ایسیس* (*Isis*) سال ۱۹۳۰ صفحات ۱۷۱ تا ۱۸۶ ثبت شده است رجوع کنند.

۳) دربارهٔ ترجمهٔ فارسی کتاب *میزان الحکمه* رجوع کنید به قربانی: *درریاضیدان ایرانی*، یادداشت ذیل صفحهٔ ۱۹.

۴) *مفتاح*، ص ۸۸. ۵) *مفتاح*، ص ۹۶.

۶) *مفتاح*، ص ۹۶: «واما ان یکون فیه ضلعان متجاوران متساویین و کذا الآخران والاولان یخالفان الآخرین و وقع تقاطع قطراه فی داخله سمی بذی الیمینین و یکون فیه لامحاله زاویتان متقابلتان متساویتین فقط. اما قائمتین فیسمیه البنایون باللوزه و اما منفرجین و یسمیه‌النجارون جودانه و اما حادتین و نسمیه الباطیة.»

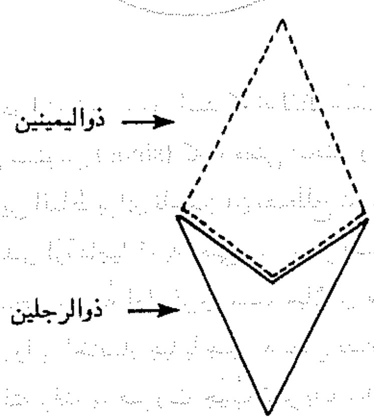
زاویهٔ متساوی قائمه باشند بنایان آن را لوزه می نامند، و اگر منفرجه باشند نجارها آن را جودانه می گویند، و اگر حاده باشند ما آن را باطیه[1] می نامیم.



اقسام ذوالیمینین

۱۹۴. ذوالرجلین چهارضلعیی است که چون بر ذوالیمینین افزوده شود، آن را تمام می کند و به صورت معین درمی آورد. یعنی در واقع چهار ضلعی مقعری است که دو ضلع مجاور آن با هم و دو ضلع دیگر آن نیز با هم مساوی باشند.[2]

۱۹۵. منحرف. آن چهارضلعی است که به این صورتها نباشد[3] (چهارضلعی نامشخص).



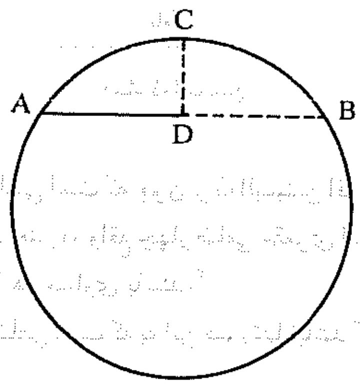
---

۱) باطیه = بادیه.
۲) مفتاح، ص ۹۶: «و تمام ذی الیمینین الی المعین نسمیه بذی رجلین.»
۳) مفتاح، ص ۹۶: «و مالم یکن علی هذه الاشکال سمی منحرفاً.»

۱۹۶. جیب. نصف وتر یك قوس را جیب نصف آن قوس نامند.[1] در شکل زیر AD جیب قوس AC است (C وسط قوس AB و D وسط پاره‌خط AB است).

در اینجا لازم است این نکته را خاطر نشان کنیم که در محاسبات، اصطلاح جیب چنانکه در ذیل شمارهٔ ۳ صفحهٔ ۹۷ کتاب حاضر گفتیم، با آنچه امروزه سینوس (sinus) می نامیم تفاوت دارد. در واقع جیب هر قوس شصت برابر سینوس آن قوس می باشد و به همین دلیل است که مورخان ریاضی، امروزه جیب قوس a را با علامت $\mathrm{Sin}\, a$ (با S بزرگ) و سینوس آن را با علامت $\sin a$ (با s کوچك) می نویسند.

$$\mathrm{Sin}\, a = 60 \sin a$$



شاید ذکر این نکته هم در اینجا به مورد باشد که نه لفظ جَیْب عربی که به‌معنی گریبان و یخه است، و نه لفظ لاتینی سینوس (sinus) که به معنی انحناء و سطح خمیده است، هیچیك تناسبی با مفهوم تابعی که این الفاظ برای نامیدن آن مصطلح شده است ندارند. علت این امر این است که در آغاز نام هندی اَرْدْهاجیا که به معنی نصف وتر است توسط آرْیَبْهَطْ ریاضیدان هندی که در اواخر قرن پنجم و نیمهٔ اول قرن ششم میلادی می‌زیست برای نامیدن تابع مذکور به کار رفت و بعد آن را به اختصار جیا یا جیو (به معنی نصف وتر) نامیدند و این لفظ در نزد ریاضیدانان اسلامی رفته رفته به صورت جَیْب تحریف شد و در قرن دوازدهم میلادی گراردوس کرمونسیس[2] ایتالیایی هنگامی ترجمهٔ آثار ریاضی اسلامی اصل این لفظ را به

---

۱) مفتاح، ص ۱۰۶: «و نصف و ترالقوس جیب لنصف ذلك القوس.»

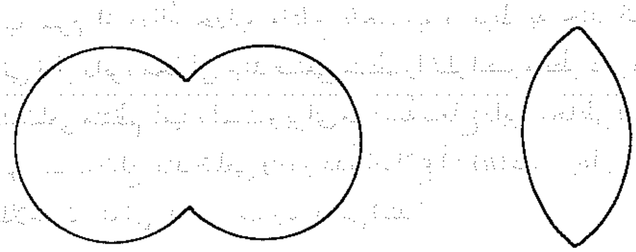
2) Gerardus Cremonensis

خطا «جیب» عربی پنداشت و آن را به لفظ سینوس لاتینی که کمابیش همان معنی جیب عربی را می‌دهد ترجمه کرد.[۱]

۱۹۷. سهم. عمود خارج از وسط یك قوس به وتر آن قوس را بعضی سهم آن قوس و بیشتر ریاضیدانان سهم نصف آن قوس می‌نامند.[۲]

۱۹۸. اهلیلجی. عبارت است از سطح محصور بین دو قوس متساوی کوچکتر از نیمدایره و متعلق به دو دایرهٔ متساوی.[۳]

۱۹۹. شلجمی. یعنی سطح محصور بین دو قوس متساوی بزرگتر از نیمدایره و متعلق به دو دایرهٔ متساوی.[۳]

شلجمی

اهلیلجی

۲۰۰. حلقهٔ مسطحه. عبارت است از سطح محصور بین دو دایرهٔ متحدالمرکز[۴] (= تاج).

۲۰۱. هلالی و نعلی. سطح محصور بین دو قوس دایره که از نیمدایره بیشتر نباشند (متعلق به دو دایرهٔ متقاطع خواه متساوی و خواه نامتساوی) و تحدب آنها در یك جهت باشد هلالی نامیده می‌شود. اگر دو قوس مذکور از نیمدایره بیشتر باشند شکل نعلی نامیده می‌شود.[۵]

۲۰۲. ضلع الکره. آنچه امروزه قاچ کروی می‌نامیم یعنی جسم محصور بین سطح کره و سطوح دو نیمدایرهٔ عظیمهٔ آن.[۶]

---

۱) مصاحب. حکیم خیام، ذیل صفحهٔ ۹۳؛ سمیث H، ج ۲، ص ۶۱۵ و ۶۱۷.

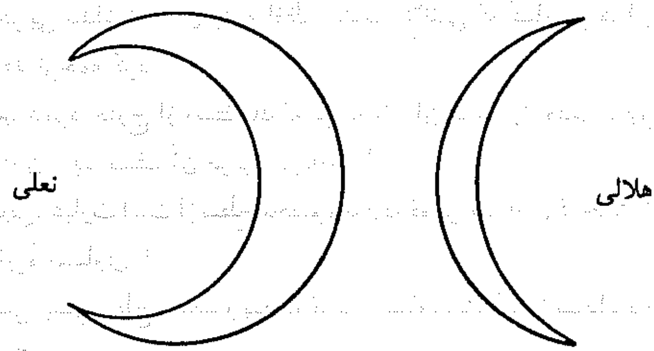
۲) مفتاح، ص ۱۰۶: «والعمود الخارج من منتصف القوس علی منتصف الوتر سهم لتلك القوس عندبعض و لنصف القوس عندالاکثرین.»

۳) مفتاح، ص ۱۰۶: «الاهلیلجی هوالمحاط بقوسین متساویین من دائرتین متساویتین کل منهما اصغر من نصف المحیط وان کانا اکثر فنسمیه بالشلجمی.»

۴) مفتاح ص ۱۰۶: «الحلقة المسطحه هی سطح محیط به دائرتین مرکزهما واحد.»

۵) مفتاح، ص ۱۰۷: «الهلالی سطح مستویحیط به قوسان لیسا اکثر من النصف من دائرتین اما متساویتین او مختلفتین محدبهما الی جهة واحدة و ماکان کل واحد من القوسان اکثر من النصف سمی نعلیا.»

۶) مفتاح، ص ۱۲۰: «ضلع الکره هوما احاط به نصفا عظیمتین و سطح کروی یکون نصف قطرها مساویالنصف قطر الدائرتین و هویشبه اضلاع البطیخ.»



۲۰۳. باب سوم از مقالهٔ چهارم *مفتاح الحساب* مربوط به چند ضلعیهای منتظم است.[۱] کاشانی قطر دایرهٔ محاطی چند ضلعی منتظم را قطر اقصر و قطر دایرهٔ محیطی آن را قطر اطول چند ضلعی منتظم نامیده است و برای محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطی (r) و شعاع دایرهٔ محیطی (R) بر حسب ضلع چند ضلعی (a) و عدهٔ اضلاع آن (n) دستورهایی داده است که با علائم و اصطلاحات کنونی به صورت زیر درمی‌آیند[۲]

$$R = \frac{a}{۲\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}}$$

و

$$r = \frac{a}{۲}\operatorname{cotg}\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

و برای محاسبهٔ مساحت (S) چند ضلعی منتظم از رابطهٔ

$$\frac{S}{a^۲} = \frac{n}{۴}\operatorname{cotg}\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

استفاده کرده و مقدار $\frac{n}{۴}\operatorname{cotg}\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ را برای مثلث متساوی‌الاضلاع و پنج ضلعی و شش ضلعی و هفت ضلعی و هشت ضلعی و نه ضلعی و ده ضلعی و دوازده ضلعی و پانزده ضلعی و

---

۱) *مفتاح*، ص ۱۰۰ تا ۱۰۶.

۲) *مفتاح*، ص ۱۰۴ و ۱۰۵: «و اما استخراج الابعاد ... و اما بالحساب و هوان نقسم مائة و ثمانين اما على عدد الاضلاع فماخرج نأخذجيبه وجيب تمامه ثم نضرب ذرعان ضلع واحد فى جيب تمامه تارة وفى ستين اخرى ونقسم كل واحد على جيبه خرج من الاول مقدار نصف قطر الدائرة الداخلة و من الثانى نصف قطرالدائره الخارجة.»

شانزده ضلعی منتظم هم در دستگاه شمار شصتگانی و هم با کسرهای اعشاری که خود مخترع آنها است حساب کرده و در دو جدول قرار داده است تا برای محاسبهٔ مساحت S مربع ضلع یعنی a^2 را در اعداد مذکور ضرب کنند. در اینجا ما خلاصهٔ جدولی را که در دستگاه دهگانی حساب شده است نقل می‌کنیم.[1]

۰ر۴۳۳۰۱۲	×	مربع یك ضلع آن	=	مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع
۱ر۷۲۰۴۷۷	×	مربع یك ضلع آن	=	مساحت پنج ضلعی منتظم
۲ر۵۹۸۰۷۶	×	مربع یك ضلع آن	=	مساحت شش ضلعی منتظم
۳ر۶۳۳۹۱۴	×	مربع یك ضلع آن	=	مساحت هفت ضلعی متنظم
۴ر۸۲۸۴۴۷	×	مربع یك ضلع آن	=	مساحت هشت ضلعی منتظم
۶ر۱۸۱۸۲۵	×	مربع یك ضلع آن	=	مساحت نه ضلعی منتظم
۷ر۶۹۴۹۰۹	×	مربع یك ضلع آن	=	مساحت ده ضلعی منتظم
۱۱ر۱۹۶۱۵۲	×	مربع یك ضلع آن	=	مساحت دوازده ضلعی منتظم
۱۷ر۶۴۲۳۶۳	×	مربع یك ضلع آن	=	مساحت پانزده ضلعی منتظم
۲۰ر۱۰۹۳۵۸	×	مربع یك ضلع آن	=	مساحت شانزده ضلعی منتظم

مثلا برای محاسبهٔ مساحت شش ضلعی منتظمی که طول هر ضلع آن ۲۰ ذراع و نیم باشد کافی است مربع عدد ۲۰ر۵ یعنی ۴۲۰ر۲۵ را در عدد ۲ر۵۹۸۰۷۶ که در جدول است ضرب کنیم تا مساحت آن به دست آید

$$S = ۱۰۹۱ر۸۴۱۴۳۹$$

۲۰۴. علاوه بر این در مورد بعضی از چند ضلعیهای منتظم روابطی را که مابین ضلع (a) و مساحت (S) و شعاع دایرهٔ محاطی (r) برقرار است به دست می‌دهد تا بتوان آنها را ازروی یکدیگر حساب کرد. و گاهی هر یك از این روابط را به چند شکل بیان می‌کند.

مثلا در مثلث متساوی الاضلاع[2]

$$S=\sqrt{3\left(\frac{a}{2}\right)^4}=\sqrt{\frac{h^4}{3}}$$

و

$$\text{طول ارتفاع} = h=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

---

۱) مفتاح، ص ۱۰۳. ۲) مفتاح، ص ۹۵ (فصل سوم).

و در مورد شش ضلعی منتظم[1]

$$S=\sqrt{12r^4}$$

و

$$S=\frac{\sqrt{27a^4}}{2}$$

و

$$2r=\sqrt{3a^2}$$

و

$$(S)^2=a^3(6a)\left(1+\frac{1}{8}\right)$$

و در مورد هشت ضلعی منتظم[2]

$$S=(2r)^2-a^2=2a^2+\sqrt{2a^2}\times 2a=2a^2(1+\sqrt{2})$$
$$2r=\sqrt{2a^2}+a=a(\sqrt{2}+1)$$
$$a=\sqrt{2(2r)^2}-2r=2r(\sqrt{2}-1)$$

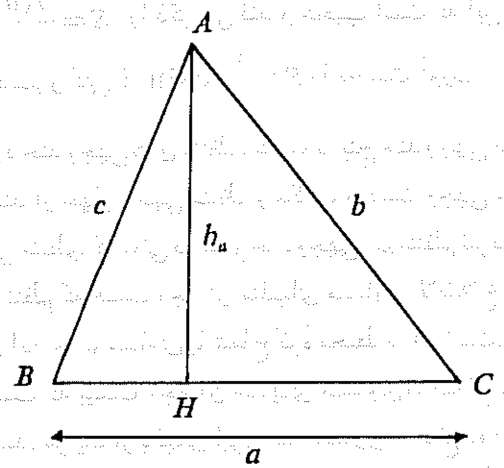
۲۰۵. کاشانی برای محاسبهٔ مساحت مثلث غیرمشخص و استخرج بعضی از ابعاد آن برحسب ابعاد دیگر، دستورهایی می‌دهد[3] که اگر اضلاع مثلث را a و b و c و شعاع دایرهٔ محاطی آن را r و ارتفاع نظیر رأس A را $AH=h_a$ و مساحت مثلث را S و نصف محیط آن را P بنامیم آنها را به صورتهای زیر می‌توان نوشت

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$S=\frac{r(a+b+c)}{2}$$
$$h_a=c\sin B$$

اگر اضلاع مثلث معلوم باشند و بخواهیم فاصلهٔ پای ارتفاع AH را مثلا از رأس B پیدا کنیم

$$BH=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$$

۱) مفتاح، ص ۱۰۵ (فصل چهارم). ۲) مفتاح، ص ۱۰۵ (فصل پنجم). ۳) مفتاح، ص ۸۸ تا ۹۵



(این همان دستور معروف $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ است که در آن به جای $c\cos B$ مقدار BH قرار گرفته است).

اگر یك ضلع (c) ودو زاویه از مثلث معلوم باشد واضح است که زاویهٔ سوم نیز معلوم است و

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}$$

و

$$b=\frac{a\sin B}{\sin C}$$

(و اینها در واقع همان دستور کلی $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ هستند).

و اگر دو ضلع b و c و زاویهٔ بین آنها معلوم باشد و بخواهیم ضلع دیگر را حساب کنیم

$$a^2=(b\pm c\cos A)^2+c^2\sin^2 A$$

(و این نیز در واقع همان دستور $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ است که اگر A منفرجه باشد علامت $-2bc\cos A$ مثبت می‌شود).

کاشانی دستور $r=\frac{bc\sin A}{a+b+c}$ را از خود می‌شمارد[1] و برای محاسبهٔ مساحت مثلث

---

۱) مفتاح، ص ۹۴ و ۹۵: «ومنها العمود الخارج عن مرکز المثلث... و اما بالحساب فنضرب احد الضلعین فی الاخر و نقسم الحاصل علی مجموع الاضلاع الثلثة فماخرج نضربه فی جیب الزاویة التی محیط بها المضروبان و نقسم الحاصل علی الستین فما خرج فهو العمود الخارج عن مرکز المثلث علی کل واحد من اضلاعه... ضربناه فی نصف

←

دستور $S=\frac{r(a+b+c)}{۲}$ را ذکر می‌کند و عجیب است که این دو دستور را با هم مقایسه نمی‌کند تا دستور کلی $S=\frac{۱}{۲}bc\sin A$ را به‌دست آورد.

۲۰۶. در مورد چند وجهی‌های منتظم، علاوه بر پنج چند وجهی منتظم معروف (اجسام افلاطونی) که عبارتند از چهار وجهی منتظم و مکعب و هشت وجهی منتظم و بیست وجهی منتظم و دوازده وجهی منتظم، کاشانی دو قسم چند وجهی نیم منتظم نیز در نظر می‌گیرد[۱]: یکی چهارده وجهی نیم منتظم که هشت وجه آن مثلثهای متساوی‌الاضلاع و شش وجه دیگر آن مربع هستند. هر یال این جسم مساوی با شعاع کرهٔ محیط بر آن است. و یکی دیگر سی و دو وجهی نیم منتظم است که بیست وجه آن مثلثهای متساوی‌الاضلاع و دوازده وجه آن پنج ضلعی منتظم می‌باشند. هر یك از یالهای این جسم مساوی با ضلع ده ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ عظیمهٔ کرهٔ محیطی چند وجهی است (← آخرین شکل از مقالهٔ سیزدهم *تحریر اصول اقلیدس* و ذیل شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۱۰۸ کتاب حاضر).

۲۰۷. کاشانی برای هر یك از هفت جسم منتظم یا نیم منتظم مذکور یال را برحسب شعاع کرهٔ محیطی جسم و برعکس، و همچنین حجم جسم را حساب کرده است. اما دستورهایی که داده همه به‌ساده‌ترین صورت خلاصه نشده‌اند و در اینجا چند مثال از محاسبات کاشانی را برای نمونه می‌آوریم و معادل آنها را با قراردادهای کنونی می‌نویسیم:

الف) حجم چهار وجهی منتظم برحسب شعاع کرهٔ محیطی آن مساوی است با[۲]

$$\frac{۲}{۹}\times ۲R\times\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۲}{۳}(۲R)^{۲}}\sqrt{\frac{۱}{۲}(۲R)^{۲}}$$

این دستور پس از ساده کردن به‌صورت زیر درمی‌آید

$$V_{۴}=\frac{۸}{۲۷}R^{۳}\sqrt{۳}$$

→ مجموع الاضلاع... و هوالمساحة... و استخراج هذاالعمود بهذا الطریق مما استنبطناه.»

۱) مفتاح، ص ۱۳۰ تا ۱۳۳.

۲) مفتاح، ص ۱۲۸: «اما الاول فهو ذو اربع قواعد مثلثات متساویات فی‌الکرة... والعمل فیه ان نربع قطرالکرةالمحیطة به و نأخذ جذر ثلثیه و کذاجذر نصف مربع‌القطر فالاول ضلع القاعده و الثانی عمود مثلث القاعدة نضرب احدهما فی نصف‌الاخر یحصل مساحة احدی قواعده نضربه فی تسعی قطرتلك الکرة یحصل المساحة.»

ب) طول یال بیست وجهی منتظم برحسب شعاع کرهٔ محیطی آن مساوی است با[۱]

$$a_{۲۰}=\sqrt{\left[R-\sqrt{\frac{۱}{۲۰}(۲R)^۲}\right]^۲+\frac{۱}{۵}(۲R)^۲}$$

این مقدار پس از ساده کردن به‌صورت زیر درمی‌آید

$$a_{۲۰}=\frac{R}{۵}\sqrt{۱۰(۵-\sqrt{۵})}$$

ج) طول یال دوازده وجهی منتظم برحسب شعاع کرهٔ محیطی آن مساوی است با[۲]

$$a_{۱۲}=\sqrt{۵\times\frac{۱}{۱۲}\times(۲R)^۲}-\sqrt{\frac{۱}{۱۲}(۲R)^۲}$$

این دستور پس از ساده کردن به‌صورت زیر درمی‌آید

$$a_{۱۲}=\frac{۱}{۳}R(\sqrt{۱۵}-\sqrt{۳})$$

د) قطر کرهٔ محیطی دوازده وجهی منتظم برحسب یال آن ازدستور زیر حاصل می‌شود[۳]

$$(۲R)^۲=d^۲=۳\left(a+\sqrt{a^۲+\frac{a^۲}{۴}}-\frac{a}{۲}\right)^۲$$

این دستور پس از ساده کردن به‌صورت زیر درمی‌آید

$$d=\frac{a}{۲}(\sqrt{۱۵}+\sqrt{۳})$$

هـ) یال سی و دو وجهی نیم منتظم بر حسب شعاع کرهٔ محیطی آن مساوی

---

۱) مفتاح، ص ۱۲۹: «واما الرابع فهو ذو عشرین قاعدة مثلثات متساویات الاضلاع فی الکرة والعمل فیه ان نربع قطر تلك الکرة و نأخذ نصف عشره و ننقص جذره عن نصف قطر الکرة فمابقی نحفظه و نزید مربعه علی خمس مربع القطر و نأخذ جذرالمجموع فهوضلع قاعدةالمجسم.»

۲) مفتاح، ص ۱۳۰: «واما الخامس فهو ذو اثنی عشرة قاعدة مخمسات متساویات الاضلاع والزوایا وقع فی الکرة والعمل فیه ان نأخذ نصف سدس مربع القطر و نحصل جذره ثم نضرب ذلك اعنی نصف السدس المذکور فی خمسة دائماً و نأخذ جذرالحاصل و ننقص منه‌الجذر السابق فما بقی فهوضلع مخمس‌القاعدة.»

۳) مفتاح، ص ۱۳۰: «وان کان ضلعه (یعنی ضلع دوازده وجهی منتظم) معلوماً و قطرالکرةالمحیطة مجهولا نربع‌الضلع و نزید علی ذلك المربع ربعه و نأخذ جذرالمجموع و ننقص عنه نصف‌الضلع فمابقی نزید علی‌الضلع المعلوم و نضرب مربع مابلغ فی‌الثلثة دائماً فالحاصل هو مربع قطرالکرةالتی یحیط بالمجسم.»

است با[1]

$$a_{۳۲}=\sqrt{\frac{(۲R)^۲}{۱۶}\times ۵}-\sqrt{\frac{(۲R)^۲}{۱۶}}$$

این دستور پس از ساده کردن به‌صورت زیر درمی‌آید

$$a_{۳۲}=\frac{R}{۴}(\sqrt{۵}-۱)$$

۲۰۸. کاشانی در پایان فصل هفتم از باب هفتم از مقالهٔ چهارم خاطرنشان می کند که معمولا در کتابهای مربوط به اندازه‌گیری سطح و حجم، دستور محاسبهٔ حجم این اجسام را نمی نویسند و می گوید که او این دستورها را از کتاب *اصول اقلیدس*[2] استخراج کرده و اعداد حاصل را در جدولی قرار داده است. این اعداد در جدول مذکور در دستگاه شصتگانی نوشته شده است.[3] در واقع کاشانی طول یالها و قطر کرهٔ محیطی یا طول ارتفاع اجسام مذکور را در دستگاه شصتگانی با پنج رقم (یعنی تا خامسه) حساب کرده و در جدول مذکور قرار داده است.

۲۰۹. باب هشتم از مقالهٔ چهارم *مفتاح الحساب* دربارهٔ چگونگی محاسبهٔ حجم بعضی از اجسام از روی وزن آنها است و در آن کاشانی پس از بیان اینکه چگونه حجم اجسام را به‌وسیلهٔ وزن آنها تعیین می کنند دو جدول تشکیل داده است که در آنها نام سی جسم از قبیل طلا و جیوه و سرب و غیره را ثبت کرده و در مقابل آنها در یك جدول وزن آب هم حجم صدمثقال از هر جسم و در دیگری وزن هر جسم را در صورتی که حجم آن مساوی با حجم صدمثقال طلا باشد نوشته است.

در آخر این باب کاشانی خاطرنشان می کند که عمادالدین خوام بغدادی (= ابن خوام*) دو جدول از نسبتهای فلزات و جواهر و بعضی از مایعات را از کتاب *میزان الحکمه* اقتباس کرده و در *رسالة البهائیة* آورده است و در بسیاری از نسخه‌های خطی آن رساله این جدولها را

---

۱) مفتاح، ص ۱۳۱: «و اما السابع فهوذواثنتین و ثلثین قاعدةیکون عشرون منها مثلثات متساویات الاضلاع و اثنتی عشرة منها مخمسات اضلاعها اضلاع تلك المثلثات فكل واحد منها مساولضلع المعشر الواقع فی اعظم دائرة وقعت فی الكرة والعمل فیه ان نقسم مربع قطر الكرة علی ستة عشر و نأخذ جذرالخارج من القسمة ثم نضرب الخارج من القسمة فی خمسة و نأخذ جذرالحاصل و ننقص منه الجذرالسابق فما بقی فهو ضلع قاعدةالمجسم».

۲) تحریر *اصول اقلیدس* توسط خواجه نصیرالدین طوسی، مقالهٔ سیزدهم از شکل (قضیهٔ) ۱۳ تا آخر آن مقاله و یا ← هیث: سیزده *مقاله*، ج ۳، صفحات ۴۶۷ تا ۵۱۱.

۳) مفتاح، ص ۱۳۳.

نسخه‌نویسان غلط ثبت کرده‌اند و هیچیك از دوشارح آن رساله[۱] به این اشتباهات اشاره نکرده‌اند و کمال‌الدین فارسی* در شرح خود گفته است که راهی برای تصحیح این جدولها ندارد و کاشانی آنها را از روی کتاب *میزان‌الحکمه* تصحیح کرده است.

۲۱۰. یکی از بابهای جالب توجه *مفتاح‌الحساب* باب نهم مقالهٔ چهارم آن است که موضوع آن محاسبهٔ حجم بناها و عمارات است و کاشانی در مقدمهٔ این باب می‌نویسد که[۲]: «اصحاب این فن فقط حجم طاق و ازج را، آن هم به وجه ناقصی، در کتابهای خود می‌نویسند، و من همهٔ این محاسبات را آنطور که باید و شاید ذکر می‌کنم زیرا احتیاج به اندازه‌گیری حجم عمارات بیش از سایر حجمها است.»

در این باب کاشانی طاق و ازج و قبه و مقرنس (و انواع آن) را تعریف کرده و سطح و حجم هر یك را حساب کرده و محاسبات را، هم در دستگاه شمار دهگانی، و هم در دستگاه شصتگانی انجام داده و کسانی که مایل باشند از این محاسبات آگاه شوند باید به کتاب *مفتاح‌الحساب* (صفحات ۱۳۹ تا ۱۵۵) رجوع کنند.

نگاهی به مقالهٔ پنجم *مفتاح‌الحساب*

۲۱۱. باب اول مقالهٔ پنجم دربارهٔ جبر و مقابله و مشتمل بر ده فصل است. در فصل اول کاشانی علم جبر و مقابله و اصطلاحات مقدماتی آن را تعریف می‌کند و ما بعضی از آن تعریفها و اصطلاحات را با معادل کنونی آنها در اینجا می‌آوریم

جبر و مقابله علم به قانونی است که به‌وسیلهٔ آن بسیاری از مجهولات عددی از معلومات مخصوص با روش ویژه‌ای شناخته می‌شود.[۳]

مسئلةالجبریه= معادله.[۴]

---

۱) مقصود یکی کمال‌الدین فارسی است که *اساس القواعد فی‌اصول‌الفوائد* را در شرح *فوائدالبهائیه* نوشته و دیگری عمادالدین کاشانی است که شرح دیگری بر *فوائدالبهائیة* نوشته است (رجوع کنید به قربانی: *دوریاضیدان ایرانی*، صفحات ۱۷ تا ۱۹).

۲) *مفتاح*، ص ۱۳۹: «فی مساحةالابنیة و العمارات و لم یذکر فیها اصحاب هذا الفن سوی الطاق و الازج و ذلك ایضاً لیس علی ما ینبغی فاوردتها علی ما ینبغی مع سائره لان الاحتیاج بمساحةالعمارات اکثر من سائرها.»

۳) *مفتاح*، ص ۱۵۵: «علم الجبر و المقابلة هو علم بقانون یعرف منه کثیر من المجهولات العددیة من معلوماتها المخصوصة بوجه مخصوص.»

۴) *مفتاح*، ص ۱۵۶: «و اذا انتهی العمل الی التعادل یقال له المسئلةالجبریة» به‌همین اعتبار است که شش معادلهٔ درجهٔ اول و دوم را که بین قدما مشهور بوده «الست الجبریة» و یا «المسائل الست» می‌نامیدند (رجوع کنید به شمارهٔ ۲۱۴ متن و به‌ذیل شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۱۱۲ کتاب حاضر).

متعادلان= دو طرف معادله.

استثناء= جملهٔ منفی.

زاید = مثبت.

ناقص = منفی.

معنی جبر. اگر در یك طرف معادله یا هر دو طرف آن جملهٔ کم کردنی (استثناء) وجود داشته باشد آن جمله را حذف می‌کنیم و مثل آن را به‌طرف دیگر می افزائیم و ماندهٔ یك طرف را با مجموع طرف دیگر معادل می‌کنیم و این معنی جبر است.[۱]

مثال. معادلهٔ $x^۲ - ۲x = ۱۵$ پس از عمل جبر چنین می‌شود

$$x^۲ = ۱۵ + ۲x$$

معنی مقابله. اگر یك جمله در هر دو طرف معادله مشترك باشد آن جمله را از دو طرف معادله حذف می‌کنیم و این معنی مقابله است.[۲]

معنی اعمال رد و تکمیل. اگر در یکی از دو طرف معادله ضریب جملهٔ بزرگترین درجه بزرگتر از یك (یا کوچکتر از یك) باشد دو طرف معادله را به آن ضریب تقسیم (یا در عکس آن ضریب ضرب) می‌کنیم تا ضریب بزرگترین درجه مساوی با یك شود. اگر ضریب مذکور بزرگتر از یك باشد عمل را رد و اگر کوچکتر از یك باشد عمل را تکمیل می نامند.[۳]

مثال رد. معادلهٔ $۵x^۲ + ۱۰x = ۳۰$ پس از عمل رد چنین می‌شود

$$x^۲ + ۲x = ۶$$

مثال تکمیل. معادلهٔ $\frac{۱}{۲} x^۲ + ۵x = ۷$ پس از عمل تکمیل چنین می شود

$$x^۲ + ۱۰x = ۱۴$$

۲۱۲. در فصلهای دوم و سوم این باب کاشانی قاعدهٔ جمع و تفریق کثیر‌الجمله‌ها را بیان می‌کند، و در فصل چهارم آن به بیان قاعدهٔ ضرب کثیر‌الجمله‌ها می پردازد و مثلاً حاصلضرب

۱) مفتاح، ص ۱۵۶: «و ان کان فی احدالمتعادلین اوفی کلیهما استثناء نطرح المستثنی براسه حتی یبقی المستثنی منه وحده، ای یصیر تاما ثم نزید مثل المستثنی المطروح علی الاخر و تعادل بین الباقی والمجموع فهو معنی الجبر.»

۲) مفتاح، ص ۱۵۶: «و اذا کان جنس واحد موجود فی کل من المتعادلین نسقط المشترك من کل منهما و نعادل بین الباقیین... و هذا معنی المقابلة»

۳) مفتاح، ص ۱۵۷.

$$\left(x^3-x^2+2x+5-\frac{1}{x}\right)(x^3+2x^2-x-4)$$

را مساوی با

$$x^6+x^5-x^4+6x^3+11x^2-15x-19+\frac{4}{x}$$

می‌یابد[۱] و برای این کار جدولی تشکیل می‌دهد که با علائم کنونی معادل است با

مضروب

$-\frac{1}{x}$	$-x^2$	x^3	$2x$	5	
$-x$	$-2x^4$	$2x^5$	$4x^3$	$10x^2$	$2x^2$
$-x^2$	$-x^5$	x^6	$2x^4$	$5x^3$	x^3
$\frac{4}{x}$	$4x^2$	$-4x^3$	$-8x$	-20	-4
	x^3	$-x^4$	$-2x^2$	$-5x$	$-x$

مضروب فیه

درجدول مذکور واو عطف (و) به جای علامت جمع و حرف (الّا) به‌جای علامت تفریق به‌کار رفته و به‌جای علامت + (علامت عدد مثبت) دو حرف (ید) که مشتق از کلمهٔ (زاید) است گذاشته شده و به‌جای علامت− (علامت عدد منفی) دو حرف (قص) که مشتق از کلمهٔ (ناقص) است به‌کار رفته.

قسطنطنیه

در اینجا باید متذکر شوم که ابن‌قنفوذ* از مردم قسطنطنیه در قرن هشتم هجری و قلصادی* از اعراب اندلس در قرن نهم هجری نیز علائم و رموز جبری در آثار خود به‌کار برده‌اند.[۲]

۲۱۳. در فصل پنجم این باب کاشانی قاعدهٔ تقسیم یك جمله‌ای بر یك جمله‌ای و کثیرالجمله بر یك جمله‌ای را شرح می‌دهد[۳] و در فصل ششم آن قاعدهٔ استخراج جذر از یك جمله‌ایها و کثیرالجمله‌ها (در صورتی که مربع کامل باشند) را بیان می‌کند[۴] و چندین مثال

۱) مفتاح، ص ۱۶۱.
۲) قربانی: *ابن قنفوذ*؛ قربانی: *علامتهای جبری*.
۳) مفتاح، ص ۱۶۲.
۴) مفتاح، ص ۱۶۳.

می‌آورد که از جملهٔ آنها است

$$\sqrt{4x^2+20x^3+25x^4}=5x^2+2x$$

و

$$\sqrt{4x^2+20x^3+41x^4+40x^5+16x^6}=2x+5x^2+4x^3$$

و

$$\sqrt{4x^2+20x^3+41x^4+52x^5+46x^6+24x^7+9x^8}=$$
$$2x+5x^2+4x^3+3x^4$$

در واقع کاشانی در بیان قاعدهٔ استخراج جذر کثیرالجمله‌ها از اتحاد

$$(a+b+c+\cdots)^2=a^2+b^2+c^2+\cdots+2ab+2ac+2bc+\cdots$$

استفاده کرده است.

۲۱۴. در فصل هفتم این باب کاشانی معادلات ششگانهٔ جبری (المسائل الست) را به‌طریق زیر تعریف کرده است[1].

مفردات: $\left.\begin{array}{l} ax=c \\ ax^2=bx \\ ax^2=c \end{array}\right\}$ مقترنات: $\left.\begin{array}{l} ax^2+bx=c \\ ax^2+c=bx \\ ax^2=bx+c \end{array}\right\}$

و در فصل هشتم همین باب به حل آنها پرداخته است.

۲۱۵. مطلب جالب توجه در این باب (باب اول از مقالهٔ پنجم) این است که کاشانی ظاهراً به کلی از کارهای جبری خیام* بی‌اطلاع بوده است، چه در فصل هفتم همین باب نوشته است[2]: «اما اگر تعادل بین چهار جنس متوالی، مانند عدد و شیء و مال و کعب باشد یعنی بعضی از این چهار، معادل بعضی دیگر از آنها باشد، اقسام آن منحصر در بیست و پنج مسأله (یعنی معادله) است[3] و شش تا از آنها همانست که گذشت و نوزده مسأله می‌ماند و شارح

---

۱) این معادلات از قرن سوم هجری به بعد بین ریاضیدانان اسلامی معروف بوده است.

۲) مفتاح، ص ۱۶۶، ۱۶۷: «و اما ان کانت التعادل بین اربعة اجناس...» (ترجمهٔ این عبارات را از کتاب حکیم عمرخیام بعنوان *عالم جبر* تألیف دکتر مصاحب، ص ۱۳۴ اقتباس کرده‌ام.

۳) برای فهرست این بیست و پنج معادله رجوع کنید به «مصاحب: حکیم خیام» ص ۱۴۵ و ۱۴۶.

بهائیه[1] آورده است که امام شرف‌الدین مسعودی نوزده مسأله غیر از شش مسأله مشهور را حل کرده و طریق استخراج مجهول را در آنها آشکار ساخته است.

در واقع شرف‌الدین طوسی* (مظفر بن محمدبن مظفر) مؤلف رساله‌ای است موسوم به *رسالةالجبر و المقابله*[2] و اخیراً (در سال ۱۹۷۴ میلادی) پروفسور رشدی راشد خلاصهٔ بخشی از این رساله را به‌دست آورده و آن را به‌تفصیل مورد بررسی قرار داده است.[3]

شادروان دکتر مصاحب نوشته‌است[4]: «این نوزده مسأله همانها است که خیام آنها را حل کرده و بسیار محتمل است که تحقیقات خیام به امام شرف‌الدین مسعودی نسبت داده شده باشد.» امّا اکنون می‌دانیم که هم خیام معادلات مذکور را با قطوع مخروطی حل کرده و هم آنچه شارح *بهائیه* دربارهٔ شرف‌الدین طوسی* نوشته صحیح است.

۲۱۶. کاشانی سپس می‌نویسد[5]: «و هرگاه عدهٔ اجناسی که بعضی از آنها با بعضی دیگر معادل می‌شوند پنج باشد، یعنی از عدد تا مال مال، عدهٔ معادلات حاصل منحصر به نود و پنج صنف است که ذکر بیست و پنج صنف آنها گذشت و باقی می‌ماند هفتاد صنف و پیشینیان چگونگی استخراج مجهول را به‌وسیلهٔ آنها ذکر نکرده‌اند تا چه رسد به اینکه عدهٔ اجناس از پنج بیشتر باشد.»

توضیح. قدما عدد (a)، یعنی جملهٔ ثابت در معادله، و شیء (x) و مال (x^2) و کعب (x^3) و مال مال (x^4) و غیره را اجناس می‌نامیدند.[6] پس اگر عدهٔ اجناسی که بعضی از آنها یا همهٔ آنها در معادله داخل می‌شوند پنج باشد معادله از درجهٔ اول یا دوم یا سوم یا چهارم خواهد بود و چون قدما اعداد منفی را به‌کار نمی‌بردند ناچار مثلا معادلاتی از قبیل

$$x^2+bx=a \quad \text{و} \quad x^2+a=bx \quad \text{و} \quad bx+a=x^2$$

---

۱) مقصود از شارح *بهائیه* کمال‌الدین فارسی است که کتاب *اساس‌القواعد فی‌اصول‌الفوائد* را در شرح کتاب *الفوائدالبهائیه فی قواعدالحسابیه* تألیف ابن‌خوام نوشته است (رجوع کنید به قربانی: *فارسی‌نامه*، ص ۲۲ـ۲۳).

۲) *کشف‌الظنون* (چاپ استانبول) ستون ۸۵۷: «رسالةالجبر و المقابله شرف‌الدین محمدبن محمدالمسعودی وهی نافعه وافیه.»

۳) رشدی راشد: *حل معادلات*.

۴) مصاحب: *حکیم خیام*، ص ۱۳۵ و ذیل صفحهٔ ۱۳۴.

۵) مفتاح، ص ۱۶۷: «وان کانت الاجناس المتعادلة بعضها مع بعض خمسة اعنی من العدد الی مال المال فینحصر فی خمس و تسعین مسئلة ویکون خمس وعشرون منها ما سبق ذکرها بقی سبعون ولم یبین المتقدمون کیفیة استخراج المجهول منها فضلاً عما جاوزالاجناس من الخمسة.»

۶) مثلا در معادلهٔ $ax^2=x^3$ دو جنس و در معادلهٔ $a+cx^2=x^3$ سه جنس و در معادله $ax^4+bx^3=cx^2+dx+e$ پنج جنس وجود دارد.

را سه صنف مختلف از معادلهٔ درجهٔ دوم محسوب می‌داشتند. کاشانی می‌گوید که انواع مختلف معادلات درجات اول و دوم و سوم و چهارم نود و پنج نوع است که بیست و پنج نوع از آنها از درجات اول و دوم و سوم هستند و قدما آنها را حل کرده‌اند و باقی می‌ماند هفتاد نوع دیگر که کسی آنها را حل نکرده است.

۲۱۷. کاشانی سپس می‌افزاید[1]: «ما چگونگی استخراج مجهول را به‌وسیلهٔ هفتاد صنفی که احدی از متقدمان و متأخران متعرض آنها نشده است استنباط کردیم و همچنین نوزده معادله‌ای را که گفته شده است که امام شرف‌الدین مسعودی استخراج کرده حل کردیم، و ایکاش می‌دانستم که آنچه من یافته‌ام ساده‌تر از آن است که مسعودی یافته یا آنچه او یافته ساده‌تر است یا آنچه یافته‌ایم با هم موافق هستند، و نیز مسائل (معادلات) بسیاری غیر از آنها یافته‌ایم، مثل آنکه یکی از دو طرف معادله از یك جنس (=درجه) و طرف دیگر از دو جنس یا سه جنس باشد ولو آنکه درجات آنها از هم دور باشد[2] و به سبب زیادی اعمال و طولانی بودن بحث در آنها نمی‌توان آنها را در این مختصر آورد و انشاءالله تعالی آنها را در کتاب جداگانه‌ای خواهیم آورد.[3]

۲۱۸. در فصل نهم همین باب کاشانی حل معادلاتی از قبیل

$$\pm ax^{n+2} \pm bx^{n+1} \pm cx^{n} = 0$$

را به حل معادلهٔ درجهٔ دوم منجر می‌کند.[4] مثلاً حل معادلهٔ $x^5+8x^4=6x^3$ را به حل معادلهٔ $x^2+8x=6$ مبدل می‌سازد بدون آنکه از ریشهٔ $x=0$ معادلهٔ مذکور گفتگو کند.

۲۱۹. سپس در فصل دهم همین باب معادلاتی از قبیل $ax^n=bx^m$ را مورد بحث قرار می‌دهد و می‌گوید انواع این معادلات بیشمار است و قاعده‌ای از خود برای حل آنها بیان می‌کند و آن قاعده این است[5]

---

۱) *مفتاح*، ص ۱۶۷: «و قداستنبطنا کیفیة استخراج المجهول بالمسائل السبعین التی لم یتعرضها احد من المتقدمین و المتأخرین و کذابالتسع عشرة التی قیل استخرجها الامام شرف الدین المسعودی ولیت شعری هذا ابسط مما استخرجه او هواو کانا متوافقین اولاً و ایضاً استنبطنا مسائل کثیرة غیرها کماکان احدالمتعادلین جنساً واحداً و الآخر جنسا اوجنسین اوثلثة، ولو کانامتباعدین فی الرتبة، و لکثرةالاعمال و المباحث فیها لایلیق بهذاالمختصر و سنوردها فی کتاب مفرد انشاءالله تعالی.»

۲) رجوع کنید به شمارهٔ ۲۱۹ کتاب حاضر.

۳) ظاهراً عمر کاشانی برای نوشتن این کتاب کفاف نداده است.

۴) *مفتاح*، ص ۱۷۰.

۵) *مفتاح*، ص ۱۷۰: «وانا استنبطت قاعدة یخرج منها جمیعها وهی ان نقسم عدد ماکان عدد منزلته اقل علی عدد ماکان عدد منزلته اکثر فما خرج نحفظه و نأخذ التفاضل بین عددی منزلتی الجنسین المتعادلین و نأخذ الضلع الاول من

←

اگر $n>m$ باشد داریم

$$x^{n-m}=\frac{b}{a}$$

و از آنجا

$$x=\sqrt[n-m]{\frac{a}{b}}$$

مثال. حل معادلهٔ $4x^6=64x^2$ داریم $x^4=16$ پس $x=2$ البته کاشانی ریشهٔ صفر و ریشهٔ منفی ۲− را در نظر نمی‌گیرد.

۲۲۰. مطلب جالب توجه در این فصل (فصل ۱۰ از باب اول از مقالهٔ پنجم) این است که کاشانی در ضمن حل معادلهٔ $5x^3=40$ می‌گوید ۴۰ را بر ۵ تقسیم می‌کنیم می‌شود ۸ و کعب آن را می‌گیریم، زیرا تفاضل بین درجات عدد و قوهٔ سوم ۳ است.[1] یعنی در واقع کاشانی می‌گوید $5x^3=(40)^0$ و درجهٔ مقدار ثابت ۴۰ را صفر می‌داند یعنی در اینجا صفر را به‌منزلهٔ قوهٔ عدد ثابت چهل محسوب داشته و صفر را جزو اعداد به‌حساب آورده است (و رجوع کنید به شمارهٔ ۱۰۵ (الف) کتاب حاضر).

۲۲۱. باب دوم از مقالهٔ پنجم *مفتاح‌الحساب* دربارهٔ استخراج مجهول به‌طریق حساب خطأین است.[2] کاشانی می‌گوید که این روش در صورتی به‌کار می‌آید که حل مسأله به یك معادلهٔ درجهٔ اول منتهی شود یعنی معادلهٔ مسأله به‌صورت $ax+b=c$ درآید، اما اگر استخراج مجهول منجر به‌ضرب کردن مجهول در خودش و یا تقسیم مجهول بر خودش شود و یا به استخراج جذر یا کعب یا امثال آنها احتیاج پیدا شود دیگر این روش را نمی‌توان به‌کاربست.

خلاصهٔ این روش[3] با علائم و اصطلاحات کنونی این است که برای حل معادلهٔ

$$ax+b=c \qquad (1)$$

دو عدد دلخواه مختلف x_1 و x_2 را در معادله به‌جای x می‌گذاریم. اگر یکی از این دو عدد در معادله صدق کند که همان عدد جواب مسأله است و گرنه مثلا خواهیم داشت

المحفوظ علی انه من مضلع یکون عدد منزلته بقدر التفاضل بین عددی منزلتی الجنسین المتعادلین فهوشیء المجهول.»

۱) مفتاح، ص ۱۷۱: «لان التفاضل بین منزلتی العدد والکعب ثلثة و هی عدد منزلةالکعب.»

۲) مفتاح، ص ۱۷۱.

۳) برای کسب اطلاع از تاریخچهٔ این روش در قرون وسطی رجوع کنید به یوشکویچ-رزنفلد، ص ۹۱ تا ۹۷.

$$ax_1+b=c+d_1 \qquad (۲)$$

و

$$ax_2+b=c+d_2 \qquad (۳)$$

در این صورت d_1 را خطای اول و d_2 را خطای دوم می‌نامیم.

اگر دو طرف معادلهٔ (۱) را به‌ترتیب از دو طرف معادلات (۲) و (۳) کم کرده حاصلها را بر هم تقسیم کنیم حاصل می‌شود

$$\frac{x_1-x}{x_2-x}=\frac{d_1}{d_2}$$

و از آنجا ریشهٔ معادله به‌دست می‌آید

$$x=\frac{x_1d_2-x_2d_1}{d_2-d_1}$$

البته چون کاشانی فقط اعداد مثبت را در نظر می‌گیرد می‌گوید که اگر هر دو خطا بر c اضافه یا هر دو از آن کم شوند (یعنی اگر d_1 و d_2 هر دو مثبت و یا هر دو منفی باشند) برای یافتن ریشهٔ معادله باید تفاضل حاصلضربهای $|d_2|x_1$ و $|d_1|x_2$ را برتفاضل $|d_1|$ و $|d_2|$ تقسیم کرد. اما اگر یکی از خطاها بر c اضافه و دیگری از آن کم شود (یعنی اگر d_1 و d_2 مختلف‌العلامه باشند) برای یافتن ریشهٔ معادله باید مجموع حاصلضربهای $|d_2|x_1$ و $|d_1|x_2$ را بر مجموع $|d_1|$ و $|d_2|$ تقسیم کرد.

۲۲۲. باب سوم از مقالهٔ پنجم *مفتاح‌الحساب* مختص به ایراد پنجاه قاعده است که به‌قول کاشانی برای استخراج مجهولات به‌کار می‌آیند. مؤلف برای هیچیك از این قاعده‌ها برهان نیاورده است و از این پنجاه قاعده فقط چهار قاعده را از استنباطات خود می‌داند که عبارتند از قاعده‌های هفتم، نهم، پانزدهم و شانزدهم که ذیلا به آنها اشاره می‌کنیم.

قاعدهٔ هفتم[۱] همان دستور محاسبهٔ جملهٔ nاُم و مجموع n جمله از یك تصاعد حسابی است که اگر جملهٔ اول تصاعد را a و جملهٔ nاُم را l و تفاضل ثابت (قدرنسبت) را d بنامیم به‌صورت زیر درمی‌آید

---

۱) مفتاح، ص ۱۷۷: «اذا اردنا جمع الاعداد المتزایده من الواحد و غیرها بتفاضلات متساویات و هذه القاعده مما استنبطناه...»

$$l=a+(n-۱)d$$

و

$$S_n=\frac{n(a+l)}{۲}$$

قاعدهٔ نهم[۱] دستور محاسبهٔ مجموع تضاعیف واحد یعنی مجموع n جمله از یك تصاعد هندسی است که جملهٔ اول آن واحد و قدر نسبت آن ۲ باشد

$$۱+۲^۱+۲^۲+۲^۳+۲^۴+\dots+۲^{n-۱}=۲^n-۱$$

مثال

$$۱+۲+۲^۲+۲^۳+۲^۴+۲^۵+۲^۶+۲^۷+۲^۸=۲^۹-۱=۵۱۲-۱=۵۱۱$$

همین قاعده را کاشانی در قاعدهٔ پانزدهم (خواهد آمد) تعمیم داده است.

کاشانی در اینجا به‌عنوان مثال دوم مسألهٔ تضعیف خانه‌های شطرنج را حل کرده است.[۲]

قاعدهٔ پانزدهم[۳] دستور محاسبهٔ مجموع قوای متوالی یك عدد دلخواه است که کاشانی آن را به‌صورتهای زیر بیان کرده

$$\sum_{۱}^{n}a^k=۱^۱+a^۲+\dots+a^n=\frac{a\times a^n-a}{a-۱}=\frac{a(a^n-۱)}{a-۱}=\frac{a^n-a}{a-۱}+a^n$$

مثال

$$۴^۱+۴^۲+\dots+۴^۵=۱۳۶۴$$

کاشانی همین دستور را در موردی که عدد a کوچکتر از واحد و به شکل $\frac{p}{q}$ باشد به‌صورت زیر درآورده است

$$\sum_{۱}^{n}\left(\frac{p}{q}\right)^k=\frac{(q^n-p^n)p}{(q-p)q^n}$$

مثال

$$\frac{۳}{۴}+\left(\frac{۳}{۴}\right)^۲+\left(\frac{۳}{۴}\right)^۳+\left(\frac{۳}{۴}\right)^۴=\frac{۳(۴^۴-۳^۴)}{۴^۴(۴-۳)}=\frac{۳(۲۵۶-۸۱)}{۲۵۶}=۲\frac{۱۳}{۲۵۶}$$

---

۱) مفتاح، ص۱۷۸: «اذا اردنا ان نجمع الاعداد الحاصله من تضاعیف الواحد و غیره و هذه ایضاً مما استنبطناه.»

۲) برای کسب اطلاع بیشتر در این باره رجوع کنید به: قربانی، *مسألهٔ شطرنج*.

۳) مفتاح، ص۱۸۳: «اذا اردنا جمع المضلعات المتوالیة لای عدد کان مع الضلع الاول و هذا مما استنبطناها.»

قاعدهٔ شانزدهم[۱] دستور محاسبهٔ a^m است وقتی که m عددی بزرگ باشد و نخواهیم قوای متوالی a را حساب کنیم. مثلا کاشانی برای محاسبه ۵^۸ آن را به‌صورت زیر درمی‌آورد.

$$۵^{۸}=[(۵^{۲})^{۲}]^{۲}=[(۲۵)^{۲}]^{۲}=(۶۲۵)^{۲}=۳۹۰۶۲۵$$

و همچنین برای محاسبهٔ ۳^۱۴ می‌نویسد

$$۳^{۱۴}=۳^{۲+۴+۸}=۳^{۲}\times(۳^{۲})^{۲}\times[(۳^{۲})^{۲}]^{۲}=۹\times۸۱\times۶۵۶۱=۴\ ۷۸۲\ ۹۶۹$$

۲۲۳. تبصرهٔ ۱. برخی قانونهای جالب توجه دیگر مربوط به محاسبهٔ مجموع سلسله‌ها نیز در جزو این پنجاه قاعده هست ولی کاشانی آنها را از خود نمی‌داند و چون هر جا قاعده‌ای ازخود یافته به‌صراحت متذکر شده است معلوم است که این قاعده‌ها را ازدیگران اقتباس کرده است و از آن جمله است دستورهای زیر

قاعدهٔ دهم[۲]

$$\sum_{۲}^{n}(K-۱)K=۱\times۲+۲\times۳+\dots+(n-۱)\,n=\frac{۲}{۳}(n-۱)\,\frac{n(n+۱)}{۲}$$

قاعدهٔ یازدهم[۳]

$$\sum_{۳}^{n}(K-۲)(K-۱)K=۱\times۲\times۳+۲\times۳\times۴+\dots+(n-۲)(n-۱)n=$$

$$\frac{(n-۱)n}{۲}\quad\left[\frac{(n-۱)n}{۲}-۱\right]$$

که مساوی است با

$$\frac{(n-۲)(n-۱)n(n+۱)}{۴}$$

قاعدهٔ دوازدهم[۴]، محاسبهٔ مجموع مربعات اعداد طبیعی از ۱ تا n

---

۱) مفتاح، ص ۱۸۴: «اذا اردنا ان نحصل مضلع عدد یکون عدد منزلته کثیراً من غیر ان نحصل جمیع مضلعاته المتوالیة التی کانت بینها و هذه ایضاً مما استنبطناه.»

۲) مفتاح، ص ۱۸۱: «اذا اردنا جمع حواصل ضروب کل عدد من الاعداد المتوالیة من الواحد فیما یلیه...»

۳) مفتاح، ص ۱۸۲: «اذا اردنا جمع حواصل ضروب کل عدد من الاعداد المتوالیة من الواحد فیما یلیه ثم الحاصل فیما یلیه...»

۴) مفتاح، ص ۱۸۲: «اذا اردنا جمع مربعات الاعداد المتوالیه من الواحد الی کم شئنا...»

$$\sum_{1}^{n} K^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{2n+1}{3}(1+2+\cdots+n)$$

که مساوی است با

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

قاعدهٔ سیزدهم[1]، محاسبهٔ مجموع مکعبات اعداد طبیعی از ۱ تا n

$$\sum_{1}^{n} K^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2 = \left(\sum_{1}^{n} K\right)^2$$

که مساوی است با

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

قاعدهٔ چهاردهم[2]، محاسبهٔ مجموع قوای چهارم اعداد طبیعی از ۱ تا n.[3]

$$\sum_{1}^{n} K^4 = \left(\frac{\sum_{1}^{n} K - 1}{5} + \sum_{1}^{n} K\right) \sum_{1}^{n} K^2$$

یعنی

$$\sum_{1}^{n} K^4 = \left\{\frac{1}{5}\left[\frac{n(n+1)}{2} - 1\right] + \frac{n(n+1)}{2}\right\} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

این عبارت را می‌توان به‌صورت سادهٔ زیر نوشت

$$\sum_{1}^{n} K^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

ابن هیثم مصری* در حدود چهار قرن قبل از کاشانی دستور فوق را به‌صورت زیر به‌دست

---

۱) مفتاح، ص ۱۸۲: «اذا اردنا ان نجمع مکعبات الاعداد المتوالیة من الواحد الی کم شئنا نضرب مجموع تلك الاعداد فی نفسه یحصل المطلوب.»

۲) مفتاح، ص ۱۸۲: «اذا اردنا جمع اموال الاموال للاعداد المتوالیة من الواحد ننقص من مجموع تلك الاعداد واحد اونأخذ خمس الباقی دائماً و نزیده علی مجموع تلك الاعداد فما بلغ نضربه فی مجموع مربعات تلك الاعداد یحصل المطلوب.»

۳) بعضی از مورخان ریاضی این قاعده را به اعتبار اینکه در *مفتاح‌الحساب* آمده است از کاشانی دانسته‌اند ولی کاشانی خود ادعا نمی‌کند که این قاعده از وی باشد (← سمیث H، ج ۲ ص ۵۰۵، کانتور G_1، ص ۷۸۱).

آورده بود[۱].

$$\sum_{1}^{n} K^{4}=\left(\frac{n}{5}+\frac{1}{5}\right) n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[(n+1) n-\frac{1}{3}\right]$$

۲۲۴. تبصرهٔ ۲. قاعدهٔ پنجاهم دربارهٔ استخراج عددهای متحاب[۲] است. کاشانی این اعداد را چنین تعریف می‌کند[۳]: «عددهای متحاب اعدادی هستند که مجموع اجزای هر یك از آنها مساوی با عدد دیگر باشد»[۴] و باید دانست که اجزای هر عدد صحیح غیر اول اعدادی هستند که آن عدد را می‌شمرند (یعنی آن عدد بر آنها قسمت‌پذیر است) و از آن کوچکترند.

کاشانی پس از ذکر قاعدهٔ استخراج عددهای متحاب که اصل آن از ثابت بن قره است دو عدد متحاب معروف ۲۲۰ و ۲۸۴ را به‌دست می‌آورد اما متأسفانه بعداً اشتباه می‌کندو دو عدد ۲۰۲۴ و ۲۲۹۶ را متحاب می‌پندارد و حال آنکه این دو عدد متحاب نیستند.

این اشتباه را کمال‌الدین فارسی در حدود یك قرن پیش از کاشانی در کتاب *تذکرة‌الاحباب فی بیان التحاب* متذکر شده و علّت اشتباه را هم خاطرنشان کرده است.

برای کسب اطلاع بیشتر دربارهٔ عددهای متحاب و قاعدهٔ ثابت بن قره و اشتباه کاشانی رجوع کنید به بخشهای دوم و سوم کتاب «قربانی: *فارسی‌نامه*».

۲۲۵. باب چهارم از مقالهٔ پنجم *مفتاح‌الحساب* که تقریباً یك پنجم همهٔ آن کتاب را شامل است مشتمل بر ۳۹ مسأله است[۵] که کاشانی آنها را با جبر و مقابله یا به‌وسیلهٔ علم مفتوحات[۶]

---

۱) یوشکویچ G، ص۲۹۳؛ یوشکویچ M، ص۱۲۸ـ۱۲۹.

۲) بعضی از مؤلفان این عددها را «اعداد متحابه» نوشته‌اند ولی بیرونی در *التفهیم* (ص۳۷) آنها را «عددهای متحاب» خوانده است.

۳) مفتاح، ص ۱۹۲: «اذا اردنا ان ان نستخرج العددین المتحابین و هما عدد ان یکون مجموع اجزاء کل واحد منهما مساویاللآخر».

۴) در همهٔ کتابهای ریاضی معتبر به‌زبانهای فارسی و عربی و فرانسوی و انگلیسی و آلمانی عددهای متحاب به‌همین قسم تعریف شده است جز در کتاب *مفاتیح العلوم* خوارزمی (ابوعبدالله محمدبن احمدبن یوسف)، چاپ لیدن سال ۱۸۹۵ میلادی ص ۱۸۶، که در آن آمده است: «العددان المتحابان هما الذان اذا جمعت اجزاء کل واحد منهما تساوی مجموعاهما» یعنی عددهای متحاب دو عددی هستند که هرگاه اجزای هر یك از آن دو جمع شود با مجموع آن دو عدد مساوی گردد. البته این درست نیست زیرا مثلا اعداد ۱۰ و ۲۰ در این تعریف صادق هستند، چه مجموع اجزای عدد ۱۰ عبارت است از ۸=۵+۲+۱ و مجموع اجزای عدد ۲۰ مساوی است با ۲۲=۱۰+۵+۴+۲+۱ و مجموع ۸ و ۲۲ مساوی با مجموع ۱۰ و ۲۰ است، اما دو عدد ۱۴ و ۲۰ متحاب نیستند. در مورد تعریف «جزء عدد» رجوع کنید به *کشاف*، ص ۱۸۷؛ *التفیهم* ص ۱۸؛ *بیرونی‌نامه* ص ۸۸

۵) *مفتاح*، صفحات ۱۹۴ تا ۲۴۹ـ کاشانی خود نوشته است که این باب مشتمل بر ۴۰ مسأله است ولی در *مفتاح‌الحساب* چاپی و همهٔ نسخه‌های خطی آن کتاب که من دیده‌ام در این باب ۳۹ مسأله طرح و حل شده که ۲۵ مسأله از آن در فصل اول و ۷ مسأله در فصل دوم و ۷ مسأله در فصل سوم است.

و یا با قاعدهٔ خطأین حل کرده و خود در ابتدای آن گفته است که بعضی از آن مسائل را از کتاب *الفوائدالبهائیه*[۱] اقتباس کرده و آنها را با روشهای گوناگون حل کرده است.

این باب در سه فصل است. فصل اول آن مشتمل بر ۲۵ مسأله است که به معادلات یك مجهولی یا چند مجهولی درجهٔ اول یا دوم و یا به‌معادلات سیّال منجر می شود. به‌عنوان مثال در اینجا مسألهٔ یازدهم این باب را ذکر می کنیم:

۲۲۶. مسأله. می خواهیم عدد ۱۰ را به دو قسمت تجزیه کنیم به‌نحوی که مجموع مربع قسمت اول و خود قسمت دوم یك مربع کامل باشد.[۲]

اگر قسمت اول را x بنامیم ناچار باید قسمت دوم به‌صورت $2xy+y^2$ باشد تا وقتی با x^2 جمع می‌شود مربع کامل شود. در این صورت داریم

$$x+(2xy+y^2)=10 \qquad (1)$$

و از آنجا

$$x=\frac{10-y^2}{1+2y} \qquad (2)$$

و این یك معادلهٔ سیال است یعنی یك معادله است و دو مجهول و بنابراین ممکن است جوابهای متعدد داشته باشد. چون در این گونه معادلات معمولا جوابهای صحیح یا منطق مثبت مورد نظر است اگر بخواهیم جوابهای صحیح مثبت را بیابیم با در نظر گرفتن رابطهٔ (۲) باید اولاً y^2 از ۱۰ کوچکتر باشد یعنی y مساوی با ۱ یا ۲ یا ۳ باشد و ثانیاً $10-y^2$ بر $1+2xy$ قسمت‌پذیر باشد. با اندك دقت معلوم می‌شود که معادلهٔ (۱) فقط یك دستگاه جواب صحیح مثبت دارد که عبارتند از

$$\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

۶) مقصود از علم مفتوحات حل کردن مسائل حساب است بدون استفاده از معادلات جبری (← *مفتاح*، ص ۱۹۴، الباب الرابع).

۱) کتاب *الفوائد البهائیه فی‌القواعدالحسابیه* تألیف ابن‌خوام* عمادالدین بغدادی (عبدالله بن محمدبن عبدالرزاق خوام) یك نسخهٔ خطی از این کتاب در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی موجود است (← *فهرست رضوی*، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۴۶ ش۱۴۵)، و یك نسخه از آن در کتابخانهٔ دانشکدهٔ الهیات موجود است (فهرست الهیات، ج۱، ص ۳۱۹) و عکس آغاز و انجام آن در صفحهٔ ۱۱۷۴ همان فهرست چاپ شده است.

۲) *مفتاح*، ص ۲۰۵: «المثال الحادی عشر، اردنا ان نقسم عشرة بقسمین یکون مجموع مربع قسم منهمامع نفس القسم الاخر مربعاً.»

و در این صورت دو قسمت مطلوب عبارتند از

$$x=۳$$

و

$$۲xy+y^۲=۷$$

و واضح است که

$$۳^۲+۷=۱۶=۴^۲$$

اما اگر جوابهای منطق کسری را هم بخواهیم کافی است که $۱۰-y^۲$ مثبت باشد. مثلاً اگر $y=۲$ باشد حاصل می‌شود $x=\frac{۶}{۵}$ و دو قسمت مطلوب عبارتند از

$$\begin{cases} x=\frac{۶}{۵} \\ ۲xy+y^۲=\frac{۴۴}{۵} \end{cases}$$

و

و واضح است که

$$\left(\frac{۶}{۵}\right)^۲+\frac{۴۴}{۵}=\left(\frac{۱۶}{۵}\right)^۲$$

و اگر $y=۳$ باشد نتیجه می‌شود $x=\frac{۱}{۷}$ و دو قسمت مطلوب عبارتند از

$$\begin{cases} x=\frac{۱}{۷} \\ ۲xy+y^۲=\frac{۶۹}{۷} \end{cases}$$

و

و واضح است که

$$\left(\frac{۱}{۷}\right)^۲+\frac{۶۹}{۷}=\left(\frac{۲۲}{۷}\right)^۲$$

۲۲۷. فصل دوم از باب چهارم[۱] شامل هفت مسأله است در وصایا. در این فصل کاشانی از ابوعلی حبوبی* (ابوعلی حسن بن حارث حبوبی خوارزمی) نام می‌برد[۲] و چند مسأله از مسائل وصایا را با روش او حل می‌کند. این ابوعلی حبوبی معاصر با ابونصر منصوربن

---

۱) مفتاح، ص ۲۲۸ تا ۲۴۰. ۲) مفتاح، ص ۲۲۹ و ۲۳۳.

علی بن عراق و ابوالوفای بوزجانی و بیرونی بوده و کتاب *استقصاء* را دربارهٔ به‌کاربردن جبر و مقابله و خطأین در حساب وصایا نوشته است.

در بخش ششم کتاب حاضر مثالی از مسائل وصایا را که کاشانی در آن کسر اعشاری به‌کار برده است آورده‌ایم.[۱]

۲۲۸. فصل سوم از باب چهارم[۲] مشتمل بر هفت مسألهٔ هندسی است از قبیل اینکه می‌خواهیم نقطه‌ای در داخل مثلثی که طول اضلاع آن معلوم است بیابیم که اگر آن را به سه رأس مثلث وصل کنیم سه مثلث دیگر حاصل شود که مساحت یکی از آنها نصف مساحت دومی و مساحت دومی ثلث مساحت سومی باشد.[۳]

از مطالب جالب این فصل این است که کاشانی در ضمن حل مسائل پنجم و ششم و هفتم آن، کسرهای اعشاری را که خود مخترع آنها است عملاً به‌کار می‌بندد و جوابهای عددی را برحسب کسر اعشاری حساب می‌کند، مثالی از این نوع را در بخش ششم کتاب حاضر خواهیم آورد.[۴]

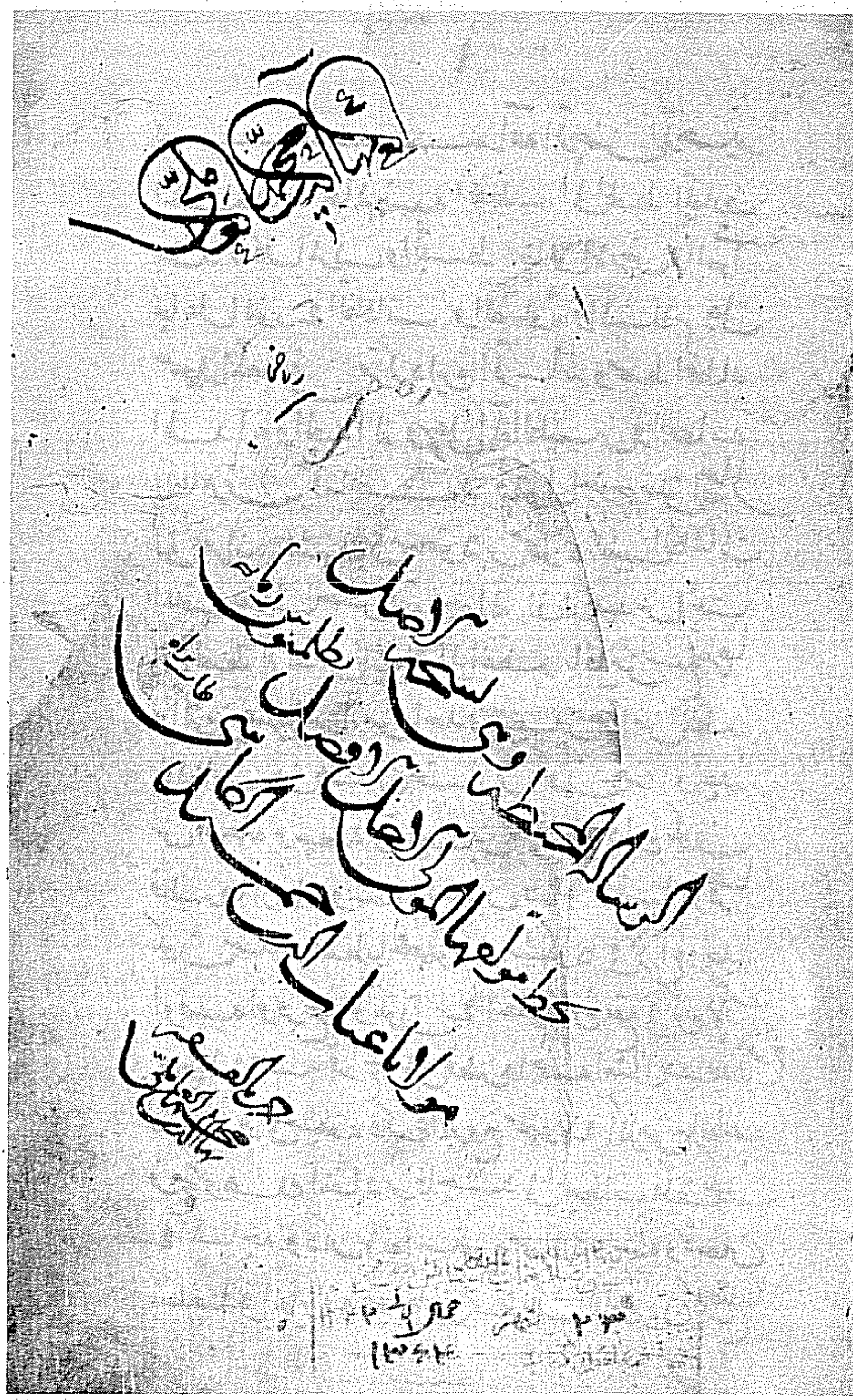
---

۱) ش ۲۹۳ کتاب حاضر. ۲) مفتاح، ص ۲۴۰ تا ۲۴۹.

۳) مفتاح، ص ۲۴۷: «نریدان نضع فی داخل مثلث نقطة و نصل بینها و بین....»

۴) ش ۲۹۴ کتاب حاضر.

عکس برگ اول از نسخهٔ خطی رسالهٔ محیطیه موجود در مشهد، ش ۲۲۹.



عکس برگ دوم از نسخهٔ خطی رسالهٔ محیطیه موجود در مشهد (خط شیخ بهائی)، ش ۲۲۹

١

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله العالم بنسبة القطر الى المحيط العارف
بمقدار كل المركب والبسيط خالق الارض والسموات
جاعل النور في الظلمات والصلوة والسلام على
محمد المصطفى مركز دائرة الرسالة ومحيط اقطار
الهداية والعدالة وعلى آله الطيبين واصحابه
الطاهرين اما بعد فيقول احوج خلق الله تعالى
الى غفرانه جمشيد بن مسعود بن محمود الطبيب الكاشي
الملقب بغياث احسن الله احواله ان ارشميدس اثبت
ان المحيط ازيد من ثلثة امثال القطر باقل من سبع قطرها
واكثر من عشرة اجزاء من احد وسبعين جزءا من القطر
فالتفاوت بين هذين المقدارين يكون جزءا واحدا
من اربعمائة وسبعة وتسعين جزءا ففي دائرة يكون
قطرها اربعمائة وسبعة وتسعين ذراعا او قصبة او فرسخا
يكون مقدار محيطها مجهولا او مشكوكا في ذراع واحد
او قصبة او فرسخ ويكون في اعظم دائرة تقع في كرة الارض
مجهولا في خمسة فراسخ لان قطرها خمسة امثال ذلك المقدار بالفراسخ
تقريبا وفي منطقة فلك البروج مجهولا في اكثر من مائة الف
فرسخ وهذه المقادير فاحشة في المحيطات فكيف يكون
في المساحة وذلك لانه استخرج محيط ذي ستة وتسعين
ضلعا في الدائرة وهو اقل من محيط تلك الدائرة لان كل ضلع

منه

عکس صفحهٔ اول متن رسالهٔ محیطیه از روی نسخهٔ خطی موجود در مشهد، ش ۲۲۹

منه اصغر من القوس التی هو وترها بجمیع الاضلاع اصغر
من المحیط الذی علیه ومحیط مضلع آخر علی الدائرة شبیها به او
واثبت انه اکثر من محیط تلک الدائرة بالشکل الاول من المقالة الاولی
من کتابه والتفاوت بینهما ما ذکر واما ابو الوفا البوزجانی
فانه حصل وتر نصف جزء من اجزاء ثلثمائة وستین من المحیط
بالاجزاء التی بها یکون القطر قک بحساب تقریبی وضربه
فی سبعمائة وعشرین حصل محیط المضلع الذی فی الدائرة واستخرج
محیط المضلع الذی علیها المشابه له وقال اذا کان القطر مائة
وعشرین یکون المحیط ٦ ٧ ٣ ولکسرا اکثر من نط نط ثوالث
واقل من نط نز ند روابع والتفاوت بین المقدارین [illegible]
روابع وهو فی اعظم دائرة تقع فی الارض یکون قریبا بالف
ذراع ومع ذلک انه غلط فی مقدار وتر نصف الجزء لانه
اخذ ٠ لا له ند نه وما هو بصحیح والصحیح
٠ لا لد نو نح لو وسنورد تبیینه واما ابو الریحان
البیرونی فانه حصل وتر جزء من ثلثمائة وستین من
المحیط وحصل محیط ذی مائة وثمانین ضلعا فی الدائرة
وهو نط مح [illegible] ومحیط شبیهه علیها [illegible] نط و
واخذ نصف مجموعهما محیط الدائرة وحوله الی الرقوم
الهندیة علی ان القطر واحد وکذلک یعتقد فی مثل
اعظم دائرة تقع فی الارض قریبا بفرسخ ومع ذلک غلط
فی وتر الجزء لانه حسبه [illegible] لو وینبغی

عکس صفحهٔ دوم متن رسالهٔ محیطیه از روی نسخهٔ خطی موجود در مشهد، ش ۲۲۹

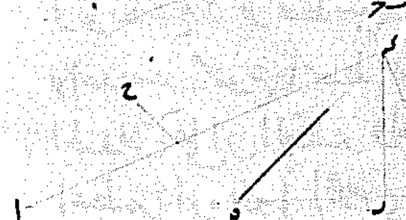
ان يكون ـ ه ا ط لو ك وقد وضع جيب جزء واحد
الذي هو نصف وتر الجزئين في جدول الجيب في قانونه
المسعودي ا ـ مط مح وهو صحيح وغلط في ضعفه
ولما كانت هذه الاعمال مختلفة اردنا ان نستخرج
محيط الدائرة بالاجزاء التي يكون بها القطر معلوما بحيث
يتيقن لنا ان التفاوت بينه وبين ما هو الحق لا يعتد
بشعرة واحدة التي هي سدس عرض شعرة معتدلة في
مثل دائرة يكون قطرها ستمائة الف مثل لقطر
الارض فحررت هذه الرسالة مشتملة على استخراجه
وسميتها المحيطية واوردتها في فصول عشرة وخاتمة مستعينا
بالله العزيز الوهاب وهو الهادي الى طريق الصواب

ولا يعتد بما كان اصغر منها

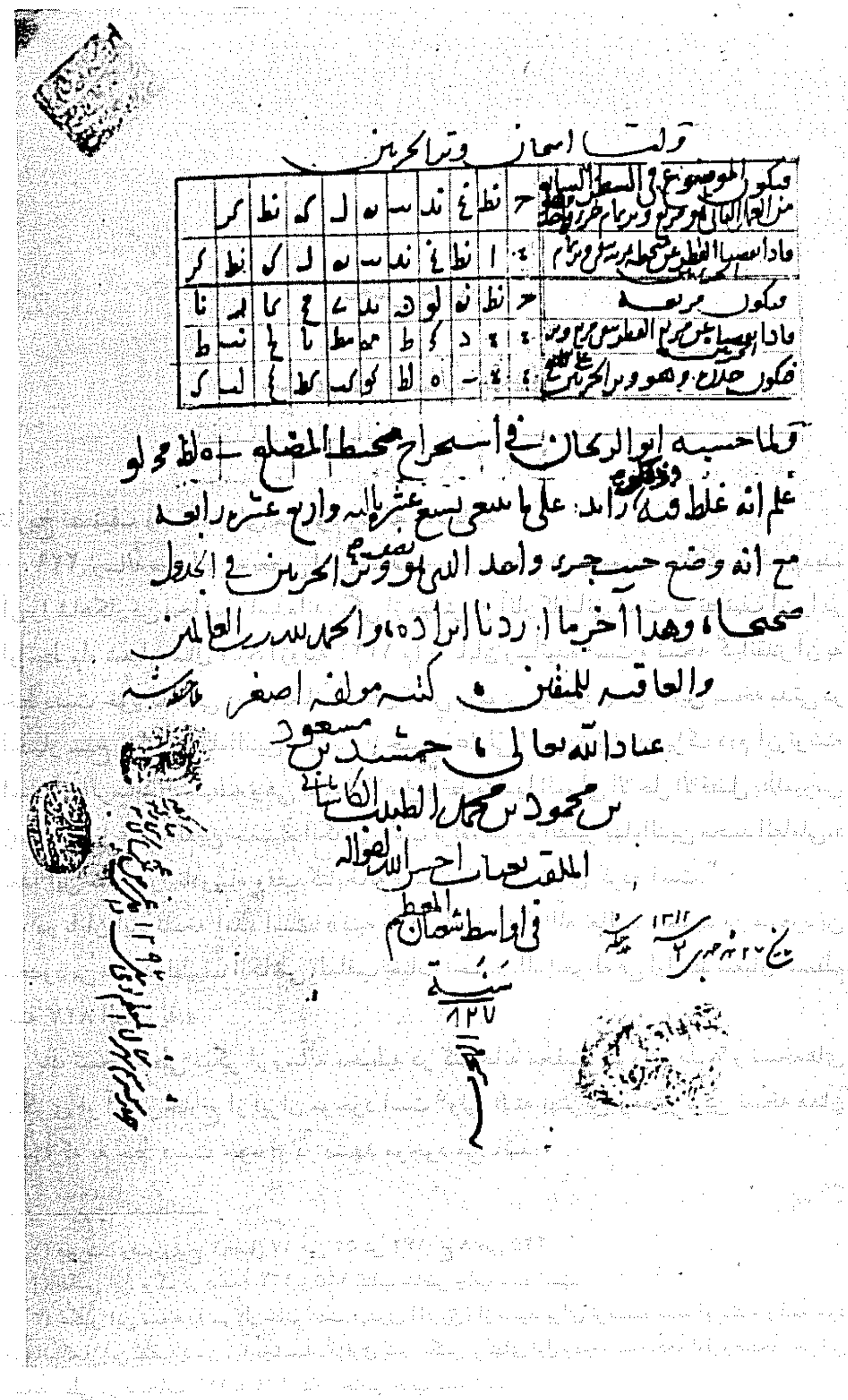
الفصل الاول في معرفة وتر قوس هي مجموع
القوس المعلومة الوتر ونصف تمامها الى نصف الدور
اقول ان سطح مجموع القطر ووتر كل قوس كانت اقل من نصف المحيط
في نصف القطر يساوي مربع وتر قوس كانت مساوية
لمجموع القوس الاول ونصف تمامها الى نصف الدور وليكن
نرسم على خط اب نصف دائرة اجب ونصل وتر اج
كيف اتفق وننصف جب

كل راجع

تمامها الى نصف الدور بـ
على نقطة د و
نصل اد والاعوج



عکس صفحهٔ سوم متن رسالهٔ محیطیه از روی نسخهٔ خطی موجود در مشهد، ش ۲۲۹



فلما حسبه ابو الريحان في استخراج محيط المضلع [illegible] لو علم انه غلط فيه زائد على ما ينبغي بتسع عشرة ثالثة واربع عشرة رابعة مع انه وضع حيث جيب واحد الذي هو وتر الجزئين في الجدول صحيحا، وهذا آخر ما اردنا ايراده، والحمد لله رب العالمين والعاقبة للمتقين. كتبه مؤلفه اصغر [illegible] عباد الله تعالى جمشيد بن مسعود بن محمود بن محمد الطبيب الكاشاني الملقب بغياث احسن الله احواله في اواسط شعبان المعظم سنة ٨٢٧

عکس صفحهٔ آخر متن رسالهٔ محیطیه موجود در مشهد، ش ۲۲۹

بخش چهارم

سیری در *رسالهٔ محیطیه*

تاریخ تصنیف و نسخه‌های موجود *رسالهٔ محیطیه*

۲۲۹. *رسالهٔ محیطیه* که بعضی از ریاضیدانان و مورخان مغرب زمین، چنانکه خواهیم دید، آن را شاهکار فن محاسبه نامیده‌اند، یکی از مهمترین آثار کاشانی است که تصنیف آن را در اواسط ماه شعبان سال ۸۲۷ (ژوییه ۱۴۲۴ م) به پایان رسانیده است و نسخهٔ گرانقدر آن به خط دست خود کاشانی در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی موجود است.[1] این نسخه مدتی در اختیار شیخ بهائی (بهاءالدین محمد بن حسین عاملی*) بوده و او در برگ دوم آن نوشته است[2]: «*الرسالة المحیطیه* و هی نسخة الاصل بخط مؤلفها المولی الاجل الافضل بطلمیوس زمانه مولانا غیاث‌الدین جمشید الکاشی طاب ثراه، حرره الفقیر بهاءالدین محمد العاملی.» بعداً این نسخه را نادرشاه وقف کتابخانهٔ آستانهٔ قدس رضوی کرده است.[3]

در پایان این نسخه آمده است: «کتبه مؤلفه، اصغر عبادالله تعالی، جمشید بن مسعود بن محمود بن محمد الطبیب الکاشی الملقب بغیاث احسن الله احواله فی اواسط شعبان المعظم سنة ۸۲۷ الهجریة.»

یك نسخهٔ خطی دیگر از *رساله محیطیه* در کتابخانهٔ مجلس شورای ملی [4] و نسخه‌های دیگری از آن در خارج از ایران موجود است [5] ولی البته بهترین و معتبرترین نسخه همان است که به خط دست خود او در مشهد موجود می‌باشد.

---

۱) فهرست رضوی، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۵۲ ش ۱۶۲؛ ج ۸ ص ۴۲۵.

۲) عکس این برگ در صفحهٔ ۱۲۴ و ۱۲۵ کتاب حاضر چاپ شده است.

۳) عکس این نسخه را سرکار خانم عفت مهدوی (آذرین) از مشهد برای نویسنده هدیه آوردند و وظیفهٔ خود می‌دانم که از این لطف ایشان در اینجا سپاسگزاری کنم. عکس برگهای اول و دوم و سه صفحهٔ اول و صفحهٔ آخر این نسخهٔ خطی در صفحات ۱۲۴ تا ۱۲۹ کتاب حاضر چاپ شده است.

۴) فهرست مجلس، ج ۲ ص ۴۰۹ ش ۳/ ۶۴۲. ۵) لوکی *L*، ص ۳۵ و شمارهٔ ۲۳۰ کتاب حاضر.

ترجمه‌های *رساله محیطیه*

۲۳۰. *رسالهٔ محیطیه* را نخستین بار دانشمند خاورشناس آلمانی پاول لوکی از روی نسخهٔ خطی شمارهٔ ۷۵۶ موزهٔ نظامی استانبول در سال ۱۹۴۹ میلادی به زبان آلمانی ترجمه کرد و شرح بسیار محققانه‌ای دربارهٔ آن نوشت. این ترجمه و شرح به ضمیمهٔ قسمت اساسی متن عربی *رسالهٔ محیطیه*، متأسفانه بعد از درگذشت لوکی، در سال ۱۹۵۳ میلادی در برلین به چاپ رسید.[1]

لوکی در شرح *رسالهٔ محیطیه* نهایت دقت و موشکافی را به کار برده و جز در یکی دو مورد بسیار جزئی نکته‌ای را فروگذار نکرده است. به‌وسیلهٔ انتشار همین ترجمه و شرح لوکی بود که مورخان و ریاضیدانان مغرب زمین متوجه اهمیت و ارزش آثار کاشانی شدند[2] و همهٔ ما ایرانیان باید از آن دانشمند فقید سپاسگزار باشیم. همین ترجمه بعداً اساس ترجمهٔ روسی *رسالهٔ محیطیه* (شرحش خواهد آمد) واقع شد.

۲۳۱. لوکی در مقدمهٔ این ترجمه می‌نویسد[3]:

«*رسالهٔ محیطیه* کاشانی شاهکاری در فن محاسبهٔ شصتگانی است. کاشانی در آغاز این رساله با بیانی فصیح و روشن از ارشمیدس و از رساله‌ای که دربارهٔ محاسبهٔ (محیط) دایره به ابوالوفای (بوزجانی*) منسوب است و همچنین از بیرونی* (ابوریحان) گفتگو می‌کند و سپس به محاسباتی که نظم و ترتیب در آن مراعات شده و ماهرانه مدون گردیده می‌پردازد و در طی این محاسبات به کمك دو کثیرالاضلاع منتظم محاطی و محیطی که عدهٔ اضلاع هر یك از آنها $۳×(۲)^{۲۸}$ است[4] نسبت محیط دایره را به قطر آن بسیار دقیقتر از آنچه پیشقدمان وی می‌دانسته‌اند به دست می‌آورد. از سبك کاشانی در حساب شصتگانی و وارسی و کنترلی که دربارهٔ عملیات به کار می‌بندد و نوعی که خطاهای وارد در محاسبات را تخمین می‌زند می‌توان به آنچه در قلمرو علم حساب (تا زمان وی) حاصل شده بود و نقایصی که هنوز وجود داشت پی برد.

کاشانی مقدار تقریبی دو پی «2π» را در دستگاه شصتگانی مساوی با[5]

۶;۱۶,۵۹ ,۲۸ ,۱ ,۳۴ ,۵۱ ,۴۶ ,۱۴ ,۵۰

---

۱) لوکی *L*.

۲) بیشتر مورخان ریاضی در آثار خود، با استفاده از کتاب لوکی، به محاسبهٔ عدد π توسط کاشانی اشاره می‌کنند.

۳) لوکی *L*، ص VII.

۴) $۳×(۲)^{۲۸} = ۸۰۵۳۰۶۳۶۸$.

۵) در بارهٔ نوشتن اعداد در دستگاه شصتگانی در این کتاب رجوع کنید به شمارهٔ ۱۷۸.

بدست آورد که همهٔ ارقام شصتگانی آن درست است. کاشانی می‌خواست که کسانی که در آن عصر منجم نبودند و با حساب شصتگانی آشنایی نداشتند بتوانند از مقدار عدد π استفاده کنند و موفق شد که نتیجهٔ محاسبات خود را به کسرهای اعشاری که اختراع نوینی (توسط خود کاشانی) بود تبدیل کند.

کاشانی تعلیم می‌دهد که چگونه با در دست داشتن مقدار

$$2\pi = 6{,}283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5$$

و به فرض معلوم بودن قطر دایره می‌توان محیط آن را حساب کرد و برعکس با معلوم بودن محیط دایره می‌توان قطر آن را به دست آورد و به این ترتیب کاشانی نشان می‌دهد که، تا آنجا که ما اطلاع داریم، وی نخستین کسی است که کسرهای اعشاری را اختراع کرده و طرز نوشتن آنها و روش عملی محاسبه با آنها را تعلیم داده است.» (پایان نوشتهٔ لوکی)

۲۳۲. در سال ۱۹۵۶ میلادی رزنفلد و یوشکویچ متن عربی *رسالهٔ محیطیه* و ترجمه و شرح آن را به زبان روسی منتشر کردند.[۱] نسخهٔ خطی *رسالهٔ محیطیه* که مورد استفادهٔ آنان بوده است در بسیاری از مواضع مغلوط است که البته عده‌ای از آن غلطها را تصحیح کرده‌اند.

نویسندهٔ کتاب حاضر نیز *رسالهٔ محیطیه* را ازروی نسخهٔ اصل به زبانهای فارسی و فرانسوی ترجمه و شرح کرده ولی هنوز به چاپ نرسیده است.

فصلهای *رسالهٔ محیطیه*

۲۳۳. *رسالهٔ محیطیه* دارای مقدمه وده فصل و خاتمه است به شرح زیر:

مقدمه (ترجمهٔ فارسی آن خواهد آمد).

فصل اول در تعیین وتر مجموع دو قوس که اولی وترش معلوم و دومی مساوی با نصف تمام (= مکمل) اولی تا نیمدایره باشد.[۲]

فصل دوم در تعیین محیط کثیرالاضلاع محاطی دلخواه و محیط کثیرالاضلاع محیطی مشابه با آن.[۳]

فصل سوم در اینکه محیط (دایره) را به چند ضلع (= جزو متساوی) تقسیم می کنیم و علم

---

۱) رزنفلد و یوشکویچ، ص ۲۶۵ تا ۳۰۷ (ترجمهٔ روسی) وص ۳۶۷ تا ۳۷۵ (شرح و حواشی) وص ۳۳۸ تا ۴۲۴ (متن عربی).

۲) فی معرفة و ترقوس هی مجموع القوس المعلومة الوتر ونصف تمامها الی نصف الدور.

۳) فی معرفة محیط ای مضلع یکون فی الدائره و محیط المضلع الذی علیها المشابه‌له.

را تا چه مرتبه (شصتگانی) ادامه می‌دهیم تا آنکه (طول) محیط قسمی برای ما حاصل شود که در دایرهٔ مذکور (تفاوت) به مویی نرسد.[۱]

فصل چهارم در اعمال.

فصل پنجم در استخراج (طول) یك ضلع از کثیر الاضلاع (منتظم) محاط در دایره که عدهٔ اضلاع آن ۴۸، ۱۲، ۱۶، ۸، ۲، و ۱ باشد.[۲]

فصل ششم در استخراج محیط کثیرالاضلاع (منتظم) محاط در دایره و (محیط) کثیرالاضلاع مشابه با آن و محیط بر دایره که عدهٔ اضلاع هر یك ۸۰۵۳۰۶۳۶۸ باشد.[۳]

فصل هفتم در آنچه از فروگذاشتن کسرهای زاید یا باقی (ناقص) در آخرین رقمهای اعمال پیش حاصل می‌شود.[۴]

فصل هشتم در تبدیل اندازهٔ محیط (دایره) به ارقام هندی به فرض آنکه شعاع دایره معلوم باشد.[۵]

فصل نهم در چگونگی اعمال با دو جدول.

فصل دهم در شناختن تفاوت بین آنچه نزد ریاضیدانان مشهور و مستعمل است و آنچه ما به دست آورده‌ایم.[۶]

خاتمه در اثبات غلط ابوالوفا و ابوریحان.[۷]

ترجمهٔ فارسی مقدمهٔ *رسالهٔ محیطیه*

این مقدمه را از روی نسخهٔ اصل متن عربی *رسالهٔ محیطیه* به فارسی برگردانده‌ام و اعداد را در دستگاه شصتگانی مطابق با قرارداد شمارهٔ ۱۷۸ کتاب حاضر (از چپ به راست) نوشته‌ام و برای سهولت ارجاع مقدمه را به چهار جزء تقسیم کرده و در آغاز هر جزء یك شماره قرار داده‌ام.

---

۱) فی انا نقسم المحیط بکم ضلعا و نستقصی فی العمل الی ایه مرتبة لیحصل لنا المحیط بحیث لایعتد بشعره فی مثل الدائره المذکوره.

۲) فی استخراج ضلع واحد من المضلع الذی یکون اضلاعه فی الدائره ا ب ح یو یب مح (این عدد در دستگاه شصتگانی نوشته شده است ← ش ۱۷۸ کتاب حاضر).

۳) فی استخراج محیط المضلع الذی فی الدایره والذی علیها المتشابهان اللذان یکون عدد اضلاع کل واحد منهما ۸۰۰۳۳۵۱۶۸ (این عدد در نسخهٔ خطی محیطیه اشتباهاً چنین نوشته شده و صحیح آن همان است که در متن نوشتیم).

۴) فی ما یعتد من اهمال الکسور الزایده اوالباقیه فی آخر مراتب الاعمال السابقة.

۵) فی تحویل المحیط الی الرقوم الهندیة.

۶) فی معرفه التفاوت بین ماهوالمشهور و المستعمل عند القوم و بین ماحصلناه.

۷) فی اثبات غلط ابی الوفاء و ابی الریحان.

بسم‌الله الرحمن الرحیم

۲۳۴. «ستایش خداوندی را سزد که از نسبت قطر به محیط آگاه است[۱] و اندازهٔ هر مرکب و بسیط را می‌شناسد و آفرینندهٔ زمین و آسمانها و قراردهندهٔ نور در تاریکی است. و درود و سلام بر محمد مصطفی که مرکز دایرهٔ رسالت و محیط اقطار رهنمایی و دادگری است و بر خاندان و یاران پاك او باد.[۲]

اما بعد نیازمندترین بندگان خدای تعالی به آمرزش وی جمشید پسر مسعود پسر محمود، طبیب کاشانی ملقب به غیاث که خداوند احوال او را نیکو گرداند می‌گوید: ارشمیدس ثابت کرده است که محیط (دایره) از سه برابر قطرش به اندازهٔ کمتر از $\frac{۱}{۷}$ و بیشتر از $\frac{۱۰}{۷۱}$ قطر، بزرگتر است.[۳] پس تفاوت بین این دو مقدار $\frac{۱}{۴۹۷}$(قطر) است. پس دایره‌ای که قطرش ۴۹۷ ذراع یا قصب[۴] یا فرسنگ باشد مقدار محیطش در حدود یك ذراع یا قصب یا فرسنگ مجهول و مشکوك است و دایرهٔ عظیمه‌ای که بر کرهٔ زمین واقع باشد محیطش در حدود پنج فرسنگ مجهول است زیرا قطر آن برحسب فرسنگ تقریباً پنج برابر مقدار مذکور می‌باشد[۵] و در فلك البروج (در محیط...) در حدود بسیار بیش از صد هزار فرسنگ مجهول است[۶]، و این مقادیر که در محیطها (این اندازه) زیاد هستند در مساحت (ها) چه خواهند بود[۷]؟ این به علت آن است که وی (= ارشمیدس) محیط ۹۶ ضلعی (منتظم) محاط در دایره را استخراج کرده

---

۱) اشارهٔ لطیفی است به اصم بودن نسبت قطر دایره به محیط آن ($\frac{۱}{\pi}$). کاشانی در *مفتاح الحساب* (ص ۱۰۷) پس از تعیین مقدار تقریبی نسبت محیط دایره به قطر (عدد π) دربارهٔ آن نسبت می‌نویسد: «لکنه بالحقیقة لایعرفه الاالله تبارك و تعالی» یعنی هیچکس جز خداوند مقدار حقیقی عدد پی را نمی‌داند.»

۲) «الحمدللهّ العالم بنسبة القطر الی المحیط. العارف بمقدار کل المرکب و البسیط. خالق الارض و السموات، جاعل النور فی الظلمات و الصلوة و السلام علی محمد المصطفی مرکز دایرة الرسالة و محیط اقطار الهدایة و العدالة و علی آله الطیبین و اصحابه الطاهرین.» (← ص ۱۲۶).

۳) یعنی نسبت محیط هر دایره به قطرش کمتر از $۳\frac{۱}{۷}$ و بیشتر از $۳\frac{۱۰}{۷۱}$ است (← هیث: *آثار ارشمیدس*، ص ۹۳).

۴) قصب، و به عربی قصبه، واحدی بوده است که در مساحی به کار می‌برده‌اند و ظاهراً آن را به فارسی «ناب» می‌گفته‌اند (← *دایرةالمعارف اسلام*، چاپ جدید، مقالهٔ «ذراع»).

۵) بنابراین کاشانی قطر کرهٔ زمین را تقریباً ۲۴۸۵= ۴۹۷ × ۵ فرسنگ محسوب داشته است.

۶) بنابراین کاشانی قطر فلك البروج را بیش از ۴۹۷۰۰۰۰۰=۱۰۰۰۰۰ × ۴۹۷ فرسخ گرفته است. بیرونی در *التفهیم* (ص ۱۵۹) قطر فلك البروج را ۴۴ ۹۶۰ ۰۰۵ فرسنگ و چهار دانك نوشته است.

۷) مقصود این است که وقتی در طول (محیط) که یك بعد دارد این اندازه اختلاف حاصل می‌شود البته در اندازهٔ سطحها و حجمها که دارای دو و سه بعد هستند اختلاف فوق‌العاده زیاد خواهد بود.

است و آن از محیط دایره کوچکتر می‌باشد زیرا هر ضلع آن از قوس روبروی آن کوچکتر است و مجموع اضلاع آن از محیط دایره کوچکتر می‌باشد و (ارشمیدس) محیط چند ضلعی دیگری را که مشابه با اولی و محیط بر (همان) دایره است استخراج کرده و به مدد قضیهٔ اول نخستین مقالهٔ کتاب خود به ثبوت رسانیده است که آن از محیط دایرهٔ مذکور بزرگتر است و تفاوت بین آنها (= در محیط) همان است که گفته شد.»[1]

۲۳۵. «و اما ابوالوفای بوزجانی وتر نصف $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره (= وتر قوس نیم درجه) را به فرض آنکه قطر دایره ۱۲۰ باشد به حساب تقریبی به دست آورده و آن را در ۷۲۰ ضرب کرده تا محیط ۷۲۰ ضلعی (منتظم) محاط در دایره حاصل شود و (نیز) محیط ۷۲۰ ضلعی محیطی مشابه با اولی را استخراج کرده و گفته است که اگر قطر ۱۲۰ باشد محیط آن ۳۷۶ و کسری می‌شود و این کسر از (۵۹, ۱۰, ۵۹;۰) بیشتر[2] و از (۱۲, ۵۴, ۲۳, ۵۹;۰) کمتر است و تفاوت بین این دو مقدار (۱۲, ۵۵, ۱۲, ۰;۰) می‌باشد. و این (تفاوت) در دایرهٔ عظیمه‌ای که بر کرهٔ زمین واقع باشد تقریباً به هزار ذراع بالغ می‌شود. با این حال او (= بوزجانی) در مقدار وتر (قوس) نیم درجه اشتباه کرده است، زیرا او این (وتر) را

(۵۵, ۵۴, ۵۵, ۲۴, ۳۱;۰)

گرفته و این درست نیست و صحیح آن چنین است

(۳۶, ۳۸, ۵۶, ۲۴, ۳۱;۰)

---

۱) برای کسب اطلاع از کارهای ارشمیدس دربارهٔ اندازه‌گیری نسبت محیط دایره به قطر آن به یکی از منابع زیر رجوع کنید:

هیث: *آثار ارشمیدس* ص ۹۱ تا ۹۸؛ تحریر مقالهٔ تکسیر *دایرهٔ* ارشمیدس توسط خواجه نصیرالدین طوسی که به ضمیمهٔ *تحریر الکرة والاسطوانه* در جزو رسائل طوسی در حیدرآباد چاپ شده است (صفحات ۱۲۷ تا ۱۳۳، بیشتر ارقام در آنجا غلط چاپ شده است) تحریر کتاب *معرفة مساحة الاشکال* بنوموسی توسط طوسی چاپ حیدرآباد، صفحات ۶ تا ۹.

۲) همهٔ کسرهایی که در این بخش کتاب بین پرانتزها گذاشته شده در دستگاه شصتگانی (از چپ به راست) نوشته شده است. قرارداد چگونگی نوشتن این کسرها را در شمارهٔ ۱۷۸ شرح داده‌ایم و باز به‌عنوان مثال توضیح می‌دهیم که

نط ی نط (ثالثه) $= \frac{۵۹}{(۶۰)^۳} + \frac{۱۰}{(۶۰)^۲} + \frac{۵۹}{(۶۰)} = (۰;۵۹, ۱۰, ۵۹)$

نط کج ند یب (رابعه) $= \frac{۱۲}{(۶۰)^۴} + \frac{۵۴}{(۶۰)^۳} + \frac{۲۳}{(۶۰)^۲} + \frac{۵۹}{(۶۰)} = (۰;۵۹, ۲۳, ۵۴, ۱۲)$

و دلیل این را بعداً خواهیم گفت.»[1]

۲۳۶. «و اما ابوریحان بیرونی وتر دوجزء از ۳۶۰ قسمت محیط (= وتر قوس دودرجه) را حساب کرده و محیط ۱۸۰ ضلعی (منتظم) محاطی را مساوی با

(۶; ۱۶, ۵۹, ۱۰, ۴۸, ۰)

و محیط ۱۸۰ ضلعی (منتظم) محیطی مشابه با آن را مساوی با

(۶; ۱۷, ۱, ۵۸, ۱۹, ۶)

حساب کرده و نصف مجموع این دو را محیط دایره گرفته است و آن را به فرض آنکه قطر دایره[2] واحد باشد با ارقام هندی به کسری که مخرج آن چندرقمی است تبدیل کرده است. و این در دایره‌ای که مساوی با دایرهٔ عظیمهٔ واقع بر کرهٔ زمین باشد تقریباً به یك فرسنگ می‌رسد. با این حال وی (= بیرونی) در وتر (قوس) دودرجه اشتباه کرده است زیرا او این وتر را

(۰; ۲, ۵, ۳۹, ۴۳, ۳۶)

گرفته در صورتی که باید آن را

(۰; ۲, ۵, ۳۹, ۲۶, ۲۲)

گرفته باشد. و باید دانست که او (= بیرونی) جیب قوس یك درجه را که نصف وتر قوس دو درجه است در جدول جیب (کتاب) *قانون مسعودی* خود

(۰; ۱, ۲, ۴۹, ۴۳)

ثبت کرده و این درست است اما دو برابر آن را غلط حساب کرده است.»[3]

۲۳۷. «چون این اعمال (= محاسبات) مختل بود خواستیم محیط دایره را به فرض معلوم بودن قطر آن بر حسب واحد معینی چنان استخراج کنیم که بر ما یقین حاصل شود که در دایره‌ای که قطرش ششصد هزار برابر قطر زمین باشد تفاوت بین نتیجهٔ حساب ما و آنچه حق است (= مقدار واقعی محیط) به یك مو نرسد، مویی که ضخامتش یك ششم عرض یك دانه جو متوسط است، و آنچه کوچکتر از آن (= تفاوتی که کمتر از یك مو) باشد قابل اهمیت

---

۱) برای شرح و نقادی آنچه کاشانی در این مقدمه دربارهٔ بوزجانی نوشته است رجوع کنید به شمارهٔ ۲۳۸ کتاب حاضر.

۲) در متن چنین است ولی ظاهراً باید نیم قطر یعنی شعاع دایره باشد زیرا چنانکه خواهیم دید (ش ۲۳۹) بیرونی قطر را ۲ گرفته است.

۳) برای شرح و نقادی آنچه کاشانی در این مقدمه دربارهٔ بیرونی نوشته است رجوع کنید به شمارهٔ ۲۳۹ کتاب حاضر.

نیست. و این رساله را مشتمل بر استخراج محیط در ده فصل و یك خاتمه نوشتم و آن را *محیطیه* نامیدم در حالی که از خداوند عزیز وهاب یاری می‌طلبم و اوست هدایت کنندهٔ به راه راست.» (پایان)

شرح و نقادی مقدمهٔ *رسالهٔ محیطیه*

۲۳۸. دربارهٔ بوزجانی. معلوم نیست که محاسباتی را که کاشانی به بوزجانی نسبت داده (← ش ۲۳۵) از کدامیك از آثار او استخراج کرده است. به احتمال بسیار قوی این قول کاشانی مبتنی بر عباراتی از تحریر مقالهٔ تکسیر *الدائرة* ارشمیدس توسط خواجه نصیرالدین طوسی است. خواجهٔ طوسی در تحریر مقالهٔ مذکور در پایان شکل دوم می‌نویسد:[1]

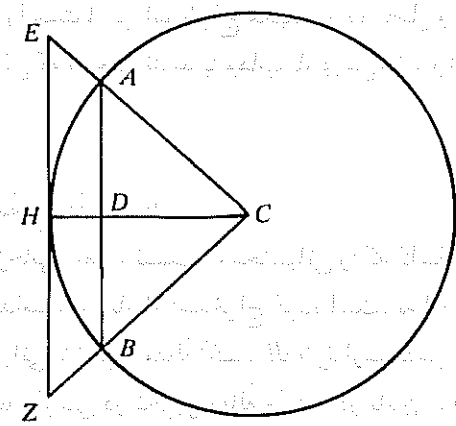
«منجمان روش دیگری (برای محاسبهٔ نسبت محیط دایره به قطر آن) دارند و آن این است که وتر قوس کوچکی از محیط دایره را بر طبق اصولی که در کتاب مجسطی و کتابهای نجومی برهانی دیگر آمده است استخراج می‌کنند و آن وتر را ضلعی از کثیرالاضلاع (منتظم) محاط در دایره می‌گیرند و با استفاده از اینکه، نسبت این ضلع به عمودی که از مرکز دایره بر آن فرود آید مساوی است با نسبت ضلع کثیرالاضلاع محیط بر دایره (و مشابه با کثیرالاضلاع مذکور) به شعاع دایره، طول این ضلع را نیز حساب می‌کنند و از روی مقادیر حاصل دو مقدار به دست می‌آورند به قسمی که محیط دایره از یکی از آن دو مقدار بزرگتر و از دیگری کوچکتر است و از این رو محیط دایره را با تقریب زیاد استخراج می‌کنند.

مثلا فرض کنیم که C مرکز دایره و قوس AB مساوی با $\frac{۱}{۷۲۰}$ محیط آن دایره باشد و وتر AB را وصل کنیم. مقدار وتر AB مطابق با حساب ابوالوفای بوزجانی براساس اصول مذکور مساوی است با

(۰;۳۱, ۲۴, ۵۵, ۵۴, ۵۵)

و اگر قطر (دایره) را ۱۲۰ جزء بگیریم این اندازهٔ وتر قوس نیم درجه است. اگر این وتر را ضلع ۷۲۰ ضلعی (منتظم) محاط در دایره بگیریم محیط این

۱) تحریر مقاله تکسیر *الدائرة* ارشمیدس توسط خواجه نصیرالدین طوسی در پایان کتاب *الکرة والاسطوانه* جزو *الرسائل التسع* طوسی، چاپ حیدرآباد، ص ۱۳۱: «اقول وللمنجمین طریق آخر وهوانهم یحصلون وتر قوس صغیرة یکون جزءاً من محیط...»



کثیرالاضلاع مساوی خواهد بود با[1]

(۳۷۶ ;۵۹ ,۱۰ ,۵۹)

و اگر وتر نیم درجه را نصف کنیم...» (پایان)

ملاحظه می‌شود که به احتمال قوی کاشانی در انتقادی که از بوزجانی کرده به همین نوشته نظر داشته است. اما ویکه ثابت کرده است[2] که عددی که خواجه نصیر طوسی از قول بوزجانی آن را مساوی با وتر AB گرفته است در واقع جیب نیم درجه است (و نه وتر نیم درجه) که بوزجانی در *مجسطی* خود آن را به دست آورده و بنابراین اشتباهی که کاشانی به بوزجانی نسبت می‌دهد درست نیست. ویکه می‌نویسد: «می‌توان فرض کرد که محرر رساله (= طوسی) فقط خواسته که مثالی از محاسبهٔ عددی برای روش منجمان در مورد محاسبهٔ تقریبی محیط دایره آورده باشد و در ذکر این مثال نه به صحت عددی که آورده توجه داشته و نه به دقت نتیجهٔ حاصل از آن.»

۲۳۹. دربارهٔ بیرونی. آنچه کاشانی در بارهٔ محاسبهٔ محیط دایره توسط بیرونی نوشته است مربوط به باب پنجم از مقالهٔ سوم کتاب *قانون مسعودی* است و ما برای مزید فایده همهٔ آن باب را در اینجا می‌آوریم. بیرونی در این باب می‌نویسد[3]:

---

۱) توجه کنید که قسمت صحیح این عدد در دستگاه دهگانی و قسمت کسری آن در دستگاه شصتگانی نوشته شده است (← شمارهٔ ۱۷۹ کتاب حاضر) قدما این عدد را چنین می‌نوشتند: ۳۷۶ (نط ی نط).

۲) ویکه R، ص ۳۰۳؛ و نیز ← لوکی L ص ۴۳ به بعد.

۳) *قانون مسعودی*، ج ۱ صفحات ۳۰۳ و ۳۰۴ (این فصل از کتاب *قانون مسعودی* و مخصوصاً اعداد آن بسیار غلط چاپ شده است. این اعداد را با استفاده از منابع دیگر تصحیح کرده‌ام (← شوی T، ص ۳۱ به بعد) مطالبی را که از

←

محیط دایره را به ۳۶۰ جزء و هر یك از این اجزا را به واحدهای شصتگانی تقسیم کرده‌اند و اصل این مطلب ناشی از این است که عدد ۳۶۰ واسطهٔ عددی بین عدهٔ روزهای سال شمسی و عدهٔ روزهای سال قمری است[۱]، بدون آنکه این امر (= تقسیم دایره به ۳۶۰ جزء) اضطراری باشد، و محیط دایره به قطر آن دارای نسبتی است و همچنین اندازهٔ محیط هم به اندازهٔ قطر نسبتی دارد اگرچه این نسبت اصم است.

برای دانستن این نسبت به وجه تقریبی دایره‌ای به قطر AC و به مرکز H رسم می کنیم و از نقطهٔ A عمود AT را بر قطر AC اخراج می کنیم و H را به Z وصل می کنیم[۲] و امتداد می‌دهیم تا عمود مرسوم را در نقطهٔ T قطع کند. چون ZS (یعنی عمود مرسوم از نقطهٔ Z بر AC) نصف ضلع صدوهشتاد ضلعی (منتظم محاط در دایره) یعنی نصف وتر روبروی قوس دو درجه است می‌دانیم که[۳]

$$۲\ ZS = (۰ ;۲ ,۵ ,۳۹ ,۴۳ ,۳۶)$$

و از این رو مجموع اضلاع صدوهشتاد ضلعی (منتظم) محاطی مساوی است با

$$(۶ ;۱۶ ,۵۹ ,۱۰ ,۴۸)$$

و اگر قطر دایره را ۲ بگیریم داریم

$$\frac{\text{قطر}}{(۶;\ ۱۶,\ ۵۹,\ ۱۰,\ ۴۸)} = \frac{۱}{(۳;\ ۸,\ ۲۹,\ ۳۵,\ ۲۴)} \qquad (۱)$$

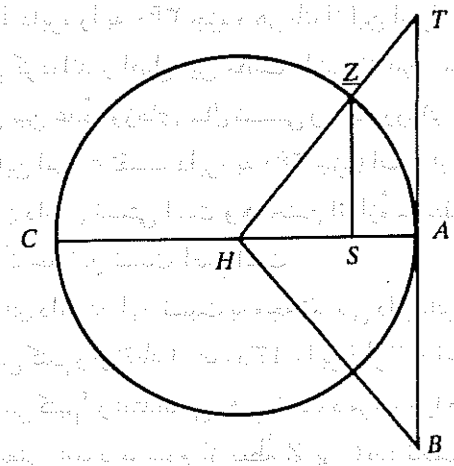
و محیط دایره از مجموع اضلاع این صدوهشتاد ضلعی (منتظم) محاطی بزرگتر است. پس

→ قانون مسعودی اخذ کرده‌ام با استفاده از علائم و اصطلاحات کنونی طوری به فارسی برگردانده‌ام که آسانتر قابل استفاده باشد).

۱) این دلیل که بیرونی برای تقسیم دایره به ۳۶۰ درجه می‌آورد جالب توجه است ولی فرضی بیش نیست.

۲) در متن عربی *قانون مسعودی* انتخاب نقطهٔ Z روی دایره بیان نشده است ولی از مطالب بعدی معلوم می‌شود که بیرونی زاویهٔ AHZ را مساوی با یك درجه اختیار کرده است.

۳) معلوم نیست چرا بیرونی در اینجا برای وتر روبروی قوس دو درجه مقداری اختیار کرده که از مقدار واقعی آن بزرگتر است، و این همان انتقادی است که کاشانی کرده است (← ش ۲۳۶) بیرونی جیب قوس یك درجه را که نصف وتر روبروی قوس دو درجه است درجدول جیوب *قانون مسعودی* (ج ۱ ص ۳۰۸) صحیح نوشته است و آن مساوی است با (۰;۱ ,۲ ,۴۹ ,۴۳) که دو برابرش می شود (۰;۲ ,۵ ,۳۹ ,۲۶) و اگر این عدد را صحیح اختیار کرده بود نتیجهٔ محاسباتش دقیقتر می شد.



$$\frac{\text{قطر}}{\text{محیط}} < \frac{1}{(۳;\ ۸,\ ۲۹,\ ۳۵,\ ۲۴)}$$

و چون داریم

$$\frac{ZS}{SH} = \frac{TA}{AH}$$

پس نتیجه می‌شود[1]

$$TA = (۰;\ ۱,\ ۲,\ ۵۰,\ ۱۹,\ ۴۳)$$

و بنابراین

$$BT = ۲AT = (۰;\ ۲,\ ۵,\ ۴۰,\ ۳۹,\ ۲۶)$$

و این BT ضلع صدوهشتاد ضلعی (منتظم) محیطی است که مجموع اضلاع آن مساوی است با

$$(۶;۱۷,۱,۵۸,۱۹)$$

پس

---

۱) در متن *قانون مسعودی* (ج ۱، ص ۳۰۴) به جای مقدار AT به غلط (۱۱, ۴۳, ۴۹, ۲, ۱;۰) که جیب یك درجه است نوشته شده در صورتی که TA ظل یك درجه است و مقدار آن چنانکه از دو برابرش (یعنی مقدار BT) معلوم می‌شود باید (۴۳, ۱۹, ۵۰, ۲, ۱;۰) باشد که ما در ترجمه نوشتیم. باوجود این، این مقدار هم از مقدار واقعی ظل یك درجه بیشتر است. بیرونی خود در جدول اظلال *قانون مسعودی* (ج ۱ ص ۳۴۱) مقدار ظل یك درجه را (۱۷, ۵۰, ۱,۲;۰) نوشته است ولی در اینجا دو برابر آن را بیش از مقداری که خود به دست آورده محسوب داشته است.

$$\frac{\text{قطر}}{\text{مجموع اضلاع ۱۸۰ ضلعی محیطی}} = \frac{۱}{(۳;\ ۸,\ ۳۰,\ ۵۹,\ ۱۰)} \qquad (۲)$$

و محیط دایره از مجموع اضلاع این صدوهشتاد ضلعی (منتظم) محیطی کوچکتر است. پس

$$\frac{\text{قطر}}{\text{محیط}} > \frac{۱}{(۳;\ ۸,\ ۳۰,\ ۵۹,\ ۱۰)}$$

بنابر آنچه گذشت نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{(۳;\ ۸,\ ۲۹,\ ۳۵,\ ۲۴)} > \frac{\text{قطر}}{\text{محیط}} > \frac{۱}{(۳;\ ۸,\ ۳۰,\ ۵۹,\ ۱۰)}$$

بنابراین محیط دایره بین دو مقدار (۲۴, ۳۵, ۲۹, ۸; ۳) و (۳;۸,۳۰,۵۹,۱۰) محصور است که تفاوتشان فقط یك ثانیه و $\frac{۲}{۵}$ ثانیه است. و بهتر است که همانگونه که بطلمیوس در مقالهٔ ششم مجسطی عمل کرده است نصف (واسطهٔ عددی) آنها را بگیریم تا نسبت قطر به محیط مساوی شود با

$$\frac{\text{قطر}}{\text{محیط}} = \frac{۱}{(۳;\ ۸,\ ۳۰,\ ۱۷,\ ۱۶,\ ۴۶,\ ۳۰)} \qquad (۳)$$

کسور شصتگانی مخرج سمت راست تساوی (۳) از $\frac{۱}{۷}$ کوچکتر است و تفاضل آن با $\frac{۱}{۷}$ تقریباً $\frac{۱}{۱۲۹}$ کسر $\frac{۱}{۷}$ است.[۱]

---

۱) اگر کسرهای شصتگانی مخرج طرف راست تساوی (۳) را a بنامیم
$(a = ۰;۸, ۳۰, ۱۷, ۱۶, ۴۶, ۳۰)$

ابوریجان می‌گوید

$$\frac{۱}{۷} - a = \frac{۱}{۱۲۹} \times \frac{۱}{۷}$$

و این کاملاً درست است زیرا که اگر a را برحسب کسر اعشاری حساب کنیم حاصل می‌شود

$$a \approx ۰٫۱۴۱۷۴۶$$

اما

$$\frac{۱}{۷} \approx ۰٫۱۴۲۸۵۷$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۷} - a = ۰٫۰۰۱۱۱۱$$

رابطهٔ (۳) را می‌توان چنین نوشت[۱]

$$\frac{\text{قطر}}{\text{محیط}}=\frac{۵۱۸\ ۴۰۰\ ۰۰۰}{۱\ ۶۲۸\ ۶۸۱\ ۴۷۱} \qquad (۴)$$

و اگر محیط دایره را چنانکه معمول است ۳۶۰ جزء بگیریم قطر آن می‌شود[۲]

$$۱۱۴+\frac{۹۵۴\ ۳۱۲\ ۳۰۶}{۱\ ۶۲۸\ ۶۸۱\ ۴۷۱}$$

به قسمی که

$$\frac{\text{قطر}}{\text{محیط}}=\frac{۱۱۴}{۳۶۰}+\frac{۹۵۴\ ۳۱۲\ ۳۰۶}{۱\ ۶۲۸\ ۶۸۱\ ۴۷۱\times ۳۶۰}$$

(پایان آنچه از قانون مسعودی اخذ و ترجمه شد).

۲۴۰. عکس مقدار سمت راست تساوی (۳) مساوی است با ۳ر۱۴۱۷۴۲ و عکس مقدار سمت راست رابطهٔ (۴) مساوی است با ۳ر۱۴۱۷۴۴ و چون بیرونی قطر را مساوی با ۲ گرفته است این دو عدد مقدارهای تقریبی عدد پی (π) هستند. بنابراین مقادیر تقریبی که از محاسبهٔ ابوریحان بیرونی برای عدد پی (π) به دست می‌آید کمی بیشتر از مقدار تقریبی

پس

$$a<\frac{۱}{۷}$$

اما

$$\frac{۱}{۱۲۹}\times\frac{۱}{۷}\approx ۰٫۰۰۱۱۰$$

واضح می‌شود که

$$\frac{۱}{۷}-a=\frac{۱}{۱۲۹}\times\frac{۱}{۷}$$

۱) اگر کسر طرف راست رابطهٔ (۳) را به صورت

$$\frac{۱}{۳+\frac{۸}{(۶۰)}+\frac{۳۰}{(۶۰)^۲}+\frac{۱۷}{(۶۰)^۳}+\frac{۱۶}{(۶۰)^۴}+\frac{۴۶}{(۶۰)^۵}+\frac{۳۰}{(۶۰)^۶}}$$

بنویسیم و اعمال لازم را در دستگاه دهگانی انجام دهیم و صورت و مخرج کسر حاصل را به ۹ ساده کنیم کسر سمت راست رابطهٔ (۴) حاصل می‌شود.

۲) زیرا اگر در رابطهٔ (۴) محیط را ۳۶۰ بگیریم حاصل می‌شود

$$\text{قطر}=\frac{۵۱۸\ ۴۰۰\ ۰۰۰\times ۳۶۰}{۱\ ۶۲۸\ ۶۸۱\ ۴۷۱}=۱۱۴+\frac{۹۵۴\ ۳۱۲\ ۳۰۶}{۱\ ۶۲۸\ ۶۸۱\ ۴۷۱}$$

۳٫۱۴۱۶۶ است که دقیقتر است و یونانیان و هندیان پیش از وی برای پی حساب کرده بودند. علت این امر این است که بیرونی همانطور که گفتیم مقدار وتر روبروی قوس دو درجه و همچنین ظل یك درجه را زیادتر از مقادیر واقعی آنها که خود وی در جدول جیوب و جدول اظلال *قانون مسعودی* حساب کرده اختیار کرده است، و اگر این دو مقدار را صحیح اختیار می‌کرد نتیجهٔ محاسباتش دقیقتر می‌شد.

باوجود این، مطالب این فصل از *قانون مسعودی* نشان می‌دهد که ریاضیدانان دورهٔ اسلامی خود روش جدیدی برای محاسبهٔ نسبت قطر دایره به محیط آن و در نتیجه برای محاسبهٔ عدد (π) داشته‌اند. بیرونی در اینجا مستقیماً راه روشن و عملی حل مسأله را نشان می‌دهد و روش وی بسیار بهتر از روشی است که ابن هیثم مصری در رسالهٔ *تربیع دایره* خود به کار برده است.[۱]

۲۴۱. برای کسب اطلاع از تاریخچه عدد پی (π) به یکی از منابع زیر رجوع کنید:

سمیث H ج ۲ صفحات ۳۰۷ تا ۳۱۳؛ قربانی: *تاریخ پی* و به صفحات ۹۱ تا ۹۷ کتاب زیر[۲]:

Howard Eves: *An Introduction to the History of Math.*, 1964; Holt, Rinehart and Winston, New York.

خلاصهٔ مطالب *رسالهٔ محیطیه* با اصطلاحات کنونی

۲۴۲. در فصل اول محیطیه کاشانی قضیه زیر را که اساس همهٔ محاسبات بعدی وی در رسالهٔ مذکور است ثابت کرده:

قضیه. *اگر روی نیمدایرهٔ به قطر $AB=2r$ و به مرکز O قوس دلخواه AG را در نظر بگیریم و وسط قوس GB را که مکمل قوس AG است نقطهٔ D بنامیم و AD را رسم کنیم رابطهٔ زیر برقرار است*

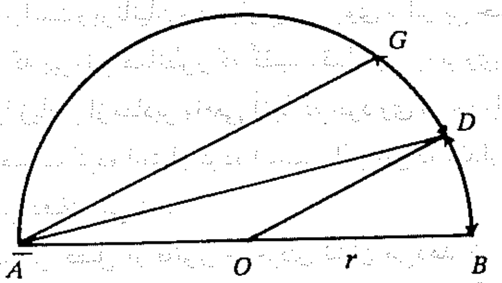
$$r(2r+AG)=\overline{AD}^2 \qquad (1)$$

و نتیجه گرفته است که اگر شعاع دایره و طول وتر AG معلوم و نقطهٔ D وسط قوس BG باشد می‌توان وتر AD را حساب کرد.

---

۱) شوی T، ص ۳۲ ذیل شمارهٔ ۲.

۲) و یا ترجمهٔ فارسی آن: هاورد و. ایوز، *آشنایی با تاریخ ریاضیات*، ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی‌اصل، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۳، ج۱، ص ۱۱۱ تا ۱۲۰.



۲۴۳. تبصره. اگر اندازهٔ قوس AG را برحسب رادیان 2φ بنامیم و شعاع دایره را واحد بگیریم خواهیم داشت

$$AG = 2\sin\varphi$$

و

$$AD = 2\sin\frac{1}{2}\left(2\varphi + \frac{\pi - 2\varphi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

و رابطهٔ (۱) شمارهٔ قبل یعنی رابطه‌ای که کاشانی صحت آن را در سال ۸۲۷ (۱۴۲۴ م) ثابت کرده به صورت زیر درمی‌آید

$$2 + 2\sin\varphi = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

و از آنجا

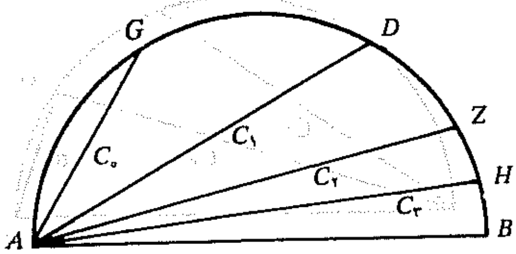
$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \sin\varphi}{2}}$$

و این همان رابطهٔ مثلثاتی است که نخستین بار در اروپا توسط لامبرت[1] در سال ۱۷۷۰ میلادی (یعنی ۳۴۶ سال بعد از کاشانی) به دست آمد.[2]

۲۴۴. در فصل دوم محیطیه کاشانی دایره‌ای به قطر $AB=2r$ را در نظر می گیرد و قوس AG را مساوی با ۶۰ درجه اختیار می کند و وسط قوس BG را نقطهٔ D و وسط قوس BD را نقطهٔ Z و وسط قوس BZ را نقطهٔ H می نامد و می گوید با استفاده از قضیه‌ای که در فصل اول ثابت شد می توان وتر AD را از روی AG و وتر AZ را از روی AD و وتر AH را از روی AZ حساب کرد و عمل را تا هر جا لازم باشد ادامه داد.

1) J. H. Lambert.

۲) یوشکویچ G، ص ۳۱۴؛ لوکی L، ص ۵۰.



در واقع با اصطلاحات و علائم کنونی کاشانی روش محاسبهٔ وترهای روبروی قوسهای زیر را بیان کرده است

$$\widehat{AG}=a_0=60^\circ$$

$$\widehat{AD}=a_1=180^\circ-60^\circ=120^\circ$$

$$\widehat{AZ}=a_2=180^\circ-\frac{60^\circ}{2}=150^\circ$$

$$\widehat{AH}=a_3=180^\circ-\frac{60}{2^2}=165^\circ$$

و به‌طور کلی

$$a_n=180^\circ-\frac{60^\circ}{2^{n-1}} \tag{2}$$

اگر وتر روبروی قوس a_n را C_n بنامیم محاسبهٔ هر یك از وترهای C_n از روی وتر ماقبل آن C_{n-1} به‌وسیلهٔ قضیهٔ مذکور انجام می‌گیرد

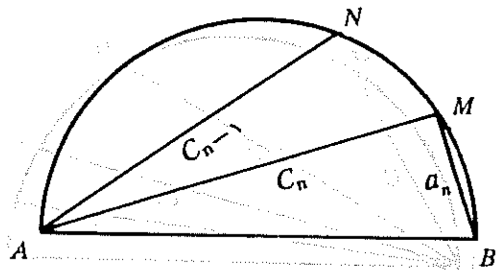
$$(C_n)^2=r(2r+C_{n-1})$$

و از آنجا

$$C_n=\sqrt{r(2r+C_{n-1})} \tag{3}$$

اکنون روی شکل وتر AM را C_n فرض می‌کنیم و وتر BM را a_n می‌نامیم. پس از آنکه C_n از روی دستور (۳) حساب شد چون مثلث AMB قائم‌الزاویه است می‌توان a_n یعنی BM را حساب کرد

$$a_n=\sqrt{(2r)^2-(C_n)^2} \tag{4}$$



اما a_n درست مساوی با ضلع 3×2^n ضلعی منتظم محاطی است زیرا با در نظر گرفتن تساوی (۲) داریم

$$\widehat{MB}=180^\circ-\widehat{AM}=180^\circ-\left(180^\circ-\frac{60^\circ}{2^{n-1}}\right)=\frac{60^\circ}{2^{n-1}}=\frac{360^\circ}{3\times2^n}$$

پس قوس MB مساوی با $\frac{1}{3\times2^n}$ محیط دایره و وتر MB مساوی با ضلع 3×2^n ضلعی منتظم محاطی است.

بنابر آنچه گذشت: به ازای هر مقدار دلخواه n (n عددی است صحیح و مثبت) می‌توان a_n یعنی ضلع 3×2^n ضلعی محاطی را حساب کرد.

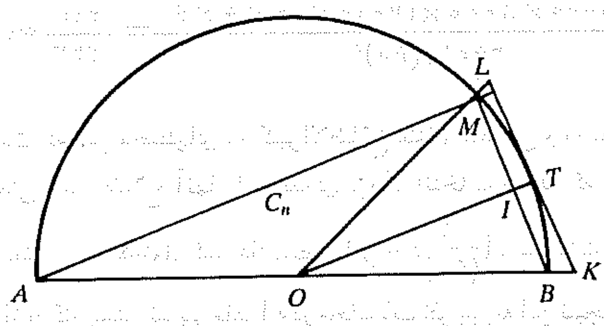
۲۴۵. برای محاسبهٔ ضلع 3×2^n ضلعی منتظم محیطی کاشانی به طریق زیر عمل کرده است:

فرض کنیم BM ضلع 3×2^n ضلعی منتظم محاطی باشد. اگر وسط قوس BM را نقطه T بنامیم و OT را رسم کنیم تا BM را در نقطهٔ I قطع کند و در نقطه T مماسی بر دایره رسم کنیم تا متداد OM را در نقطهٔ L و امتداد OB را در نقطهٔ K قطع کند KL ضلع 3×2^n ضلعی منتظم محیط بر دایره و مشابه با 3×2^n ضلعی منتظم محاطی مذکور خواهد بود. کاشانی صحت رابطه

$$\frac{OI}{OT-OI}=\frac{BM}{KL-BM}$$

را ثابت کرده و گفته است که چون OI نصف AM است اگر AM و BM معلوم باشند (و طریقهٔ محاسبهٔ آنها را قبلاً در شمارهٔ ۲۴۴ دیدیم) می‌توان KL را به‌وسیله رابطهٔ (۵) حساب کرد. بنابراین به ازای هر مقدار دلخواه n می‌توان KL یعنی ضلع 3×2^n ضلعی منتظم محیطی را به دست آورد.

۲۴۶. در فصل سوم محیطیه هدف مؤلف این است که عدهٔ اضلاع کثیرالاضلاع منتظم



محاطی را طوری تعیین کند و در اعمال مربوط به محاسبهٔ طول محیط آن به اندازه‌ای دقت به کار برد که همانگونه که در مقدمه (شماره ۲۳۷) گفته است در دایره‌ای که قطرش ششصدهزار برابر قطر کرهٔ زمین باشد اختلاف بین محیط کثیرالاضلاع و محیط دایره به یك مو نرسد. بدواً خاطرنشان می کنیم که کاشانی واحدهای زیر را برای طولها به کار می برد:

(تقریباً شش کیلومتر) ۱۲۰۰۰ ذراع = ۱ فرسنگ

(تقریباً ۵۰ سانتی‌متر) ۲۴ اصبع = ۱ ذراع

۶ برابر عرض یك دانه جو = ۱ اصبع (انگشت)

۶ شعره = ضخامت جو

ضخامت موی یال اسب = شعره

کاشانی گفته است که دایره‌ای که قطرش ششصدهزار برابر قطر کرهٔ زمین باشد طول محیطش نیز ششصدهزار برابر محیط کرهٔ زمین است و به فرض آنکه طول محیط کرهٔ زمین ۸۰۰۰ فرسنگ باشد[1] محیط دایرهٔ مذکور را که ۸۰۰۰×۶۰۰۰۰۰ فرسنگ است در ۱۲۰۰۰ ضرب کرده تا برحسب ذراع معلوم شود و سپس حاصل را به ترتیب در ۲۴ و ۶ و ۶ نیز ضرب کرده تا اندازهٔ محیط به ترتیب برحسب اصبع و ضخامت جو و عرض مو به دست آید و پس از آنکه اندازهٔ محیط دایرهٔ مذکور برحسب مو معلوم شد یك درجه یعنی $\frac{۱}{۳۶۰}$ آن را گرفته و نشان داده است که یك ثامنه [یعنی $\frac{۱}{(۶۰)^۸}$] آن تقریباً مساوی با $\frac{۴}{۵}$ ضخامت یك مو است

۱) در ذیل شمارهٔ ۵ صفحهٔ ۱۳۴ دیدیم که کاشانی قطر زمین را ۲۴۸۵ فرسنگ محسوب داشته پس به حساب او محیط کرهٔ زمین می‌شود $۷۸۰۵ \approx \pi \times ۲۴۸۵$ و کاشانی عدد ۷۸۰۵ را گرد کرده و آن را ۸۰۰۰ گرفته است.

$$\frac{۶۰۰۰۰۰ \times ۸۰۰۰ \times ۱۲۰۰۰ \times ۲۴ \times ۶ \times ۶}{۳۶۰ \times (۶۰)^{۸}} = \frac{۲۰۰}{۲۴۳} \approx \frac{۴}{۵}$$

و نتیجه گرفته است که اگر محیطهای دو کثیرالاضلاع منتظم محاطی و محیطی را طوری استخراج کند، یعنی عدهٔ اضلاع آنها را به قدری بزرگ انتخاب نماید، که تفاوت بین دو محیط به‌یك ثامنه[یعنی‌مرتبهٔ هشتم‌از کسرهای‌شصتگانی $= \frac{۱}{(۶۰)^{۸}}$] نرسد منظور وی حاصل خواهد شد و پس از به کار بستن تدابیر ماهرانه در محاسبات تقریبی به این نتیجه رسیده است که باید در دایرهٔ به شعاع ۶۰ واحد کثیرالاضلاعی محاط کند که طول هر ضلع آن از ۸ رابعه [$= \frac{۸}{(۶۰)^{۴}}$] بیشتر نباشد و جدولی‌تشکیل‌داده که در یك طرف‌آن ۱۲۰درجه را ۲۸بار نصف کرده و در طرف دیگر آن عدهٔ اضلاع کثیرالاضلاع را، ابتدا ازمثلث، ۲۸ بار دو برابر کرده و عدهٔ اضلاع آن را

$$۳ \times ۲^{۲۸} = ۸۰۵\,۳۰۶\,۳۶۸$$

یافته است[۱] و بالاخره به این نتیجه رسیده که باید طول ضلع ۳×۲^{۲۸} ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع ۶۰ واحد را حساب کند (البته در *محیطیه* همهٔ محاسبات در دستگاه شصتگانی صورت گرفته است) و با ذکر دلیل نشان داده است که برای آنکه نتیجهٔ محاسباتش به اندازهٔ کافی دقیق باشد باید هر عمل را در دستگاه شصتگانی تا مرتبهٔ ثامنة عشر [$= \frac{۱}{(۶۰)^{۱۸}}$] ادامه دهد.

۲۴۷. در فصل چهارم محیطیه که مفصلترین فصلهای آن است کاشانی با استفاده از دستور (۳) شمارهٔ ۲۴۴ یعنی

$$C_n = \sqrt{r(۲r + C_{n-۱})} \qquad (۳)$$

به ترتیب

$$C_۱ = \text{وتر } ۱۲۰^\circ$$
$$C_۲ = \text{وتر } ۱۵۰^\circ$$
$$C_۳ = \text{وتر } ۱۶۵^\circ$$

---

۱) این عدد در آغاز فصل ششم *محیطیه* اشتباهاً ۱۶۸ ۲۳۵ ۸۰۰ ثبت شده است.

و بالاخره

وتر روبروی قوس مکمل $\frac{۱}{۸۰۵۳۰۶۳۶۸}$ (دایره) $C_{۲۸}=$ را حساب کرده است. این فصل مشتمل بر ۲۸ عمل است و در هر یك از آنها کاشانی، با گرفتن جذر، یکی از C_nها را حساب کرده و خود در آغاز این فصل نوشته است که تا از صحت هر عمل اطمینان کامل حاصل نکرده به عمل بعدی نپرداخته است و در ذیل هر عمل استخراج جذر، حاصل جذر را مربع و با باقیماندهٔ جذر جمع کرده و به این نحو عمل را امتحان کرده و از درستی آن مطمئن شده است.

کاشانی $C_{۲۸}$ را با ۱۸ رقم کسری شصتگانی مساوی با

$$C_{۲۸}=۱,۵۹;۵۹,۵۹,۵۹,۵۹,۵۹,۵۹,۵۹,۵۹,۵۰,۴۷,۵۲,۱۲,۳۰,۴۸,۳۷,۴۹,۵۴,۴۰$$

حساب کرده است.

اگر شعاع دایره را مساوی با واحد بگیریم $C_{۲۸}$ در دستگاه دهگانی مساوی است با[۱]

$$C_{۲۸}=\sqrt{۲+\sqrt{۲+\cdots+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}}$$

که در آن عدهٔ رادیکالها ۲۸ است.

۲۴۸. در فصل پنجم محیطیه کاشانی با استفاده از دستور (۴) شمارهٔ ۲۴۴ یعنی

$$a_n=\sqrt{(۲r)^۲-(C_n)^۲} \qquad (۴)$$

ضلع ۳×۲^{۲۸} ضلعی منتظم محاطی را در دستگاه شصتگانی با ۱۴ رقم کسری (شصتگانی) مساوی با عدد زیر به دست آورده است

$$a_{۲۸}=۰;۰,۰,۰,۶,۴,۱,۱۴,۵۹,۳۶,۱۴,۳۳,۳۶,۱۹,۲۵$$

---

۱) زیرا $C_۱$ ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی است وداریم $C_۱=\sqrt{۳}$ و از دستور (۳) شمارهٔ ۲۴۴ به ترتیب حاصل می‌شود

$$C_۲=\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$$

و

$$C_۳=\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}$$

و

$$C_۴=\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}}$$ وغیره

اگر شعاع دایره را واحد بگیریم $a_{۲۸}$ در دستگاه دهگانی مساوی است با

$$a_{۲۸}=\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۲+\cdots+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}}}$$

که در آن عدهٔ رادیکالها ۲۸ است.

۲۴۹. در فصل ششم محیطیه کاشانی $a_{۲۸}$ را در ۳×۲^{۲۸} ضرب کرده و محیط ۳×۲^{۲۸} ضلعی منتظم محاطی و سپس از روی آن با استفاده از دستور (۵) شمارهٔ ۲۴۵ محیط ۳×۲^{۲۸} ضلعی منتظم محیطی را نیز حساب کرده است و نصف مجموع این دو محیط را طول محیط دایره گرفته و آن مساوی است با

در دستگاه شصتگانی و با حروف جمل

یک بار مرفوع	اجزاء	دقیقه	ثانیه	ثالثه	رابعه	خامسه	سادسه	سابعه	ثامنه
و	یو	نط	کح	ا	لد	نا	مو	ید	ن

در دستگاه شصتگانی و با قرارداد شمارهٔ ۱۷۸ کتاب حاضر عدد فوق مساوی است با

۶,۱۶;۵۹,۲۸,۱,۳۴,۵۱,۴۶,۱۴,۵۰

یعنی

$$۶\times۶۰+۱۶+\frac{۵۹}{۶۰}+\frac{۲۸}{(۶۰)^{۲}}+\frac{۱}{(۶۰)^{۳}}+\frac{۳۴}{(۶۰)^{۴}}+\frac{۵۱}{(۶۰)^{۵}}+\frac{۴۶}{(۶۰)^{۶}}+\frac{۱۴}{(۶۰)^{۷}}+\frac{۵۰}{(۶۰)^{۸}}$$

کاشانی مقدار محیط را که در دستگاه شصتگانی حساب کرده در مصراع اول بیت زیر به نظم درآورده است:

وَیـوْنَطْ کَح اَلَـدْ نـامُـوفیـدَنُ محیط حیث نصف القـطرسینُ

و از بیم آنکه مبادا نساخان در نوشتن این اعداد اشتباه کنند و نتیجهٔ محاسبات وی به هدر رود، و نیز برای آنکه در موقع محاسبه بتوانند از مضر بهای محیط استفاده کنند، مقدار محیط را در اعداد صحیح از یك تا شصت ضرب کرده و این مضارب را در جدولی ثبت نموده است به

قسمی که اگر مثلاً کسی ۵۸ برابر محیط را بخواهد می تواند از جدول مذکور آن را به دست آورد.

۲۵۰. ضمناً کاشانی به این نکته اشاره کرده است که اگر شعاع دایره را به جای ۶۰ مساوی با واحد بگیریم همان عدد باز اندازهٔ محیط (یعنی در واقع عدد 2π) خواهد بود اما باید همهٔ مرتبه‌های آن را یك بار تنزل دهیم. یعنی مثلاً دقیقه‌ها را ثانیه و ثانیه‌ها را ثالثه و بالاخره ثامنه‌ها را تاسعه محسوب داریم. بنابراین مقدار عدد 2π به حساب کاشانی و در دستگاه شصتگانی با قراری که در شمارهٔ ۱۷۸ گذاشته‌ایم عبارت است از

$$2\pi=6;16,59,28,1,34,51,46,14,50$$

همهٔ مراتب کسرهای شصتگانی این عدد دقیق است. با این حال کاشانی در فصل هفتم *محیطیه* بار دیگر به تفصیل ثابت می کند که آنچه در مراتب آخر اعداد در موقع محاسبه از آنها صرف نظر کرده است در نتیجهٔ نهایی محاسبات خللی وارد نمی آورد و در آخر این فصل می نویسد[1]: «و در این باره به تفصیل پرداختم تا معلوم شود که آنچه از کسرهای زاید و ناقص در آخرین مراتب این اعمال از آنها چشم‌پوشی شده آن اندازه نیست که در مقدار محیط به یك تاسعهٔ کامل [$=\frac{1}{(60)^9}$] برسد».

۲۵۱. در فصل هشتم *محیطیه* کاشانی مقدار محیط دایره را به فرض آنکه شعاع آن واحد باشد، یعنی در واقع مقدار 2π، را در دستگاه شمار دهگانی و با کسرهای اعشاری که خود مخترع آنها است به دست آورده است به این شرح[2]

$$2\pi= 6{,}283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5$$

همهٔ شانزده رقم اعشاری این عدد دقیق است و این نهایت دقت کاشانی را در محاسبه می‌رساند. باز برای آنکه در اثر اهمال نسخه نویسان در ارقام این عدد خللی وارد نیاید و ضمناً در حین محاسبه بتوانند از مضارب 2π استفاده کنند کاشانی مقدار 2π را در اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰ ضرب و حاصلها را در جدولی ثبت کرده است. به قسمی که اگر مثلاً کسی بخواهد

---

۱) «قداطنبت الکلام فیه لیعلم ان اهمال الکسور الزائدة اوالناقصة فی آخر مراتب هذه الاعمال لایعتدالی تاسعة واحدة تامة فی مقدارالمحیط.»

۲) این مقدار 2π را کاشانی در ۱۴۲۴ میلادی به دست آورده است. بعداً در اروپا ویت (Viète) در سال ۱۵۷۹ میلادی یعنی در حدود ۱۵۵ سال بعد از کاشانی فقط یازده اعشاری دقیق π را به دست آورد و آدرین (Adrian Romian) در سال ۱۵۹۳ فقط ۱۵ رقم اعشاری دقیق π و لودلف (Ludolf) در ۱۶۱۰ سی و پنج رقم اعشاری دقیق آن را حساب کردند.

مقدار 6π را بداند می‌تواند آن را از روی جدول مذکور به دست آورد.

کاشانی به خوبی از اهمیت کار خود در محاسبهٔ 2π آگاه بوده و برای آنکه نتیجهٔ کارش محفوظ بماند ارقام آن را (از چپ به راست) هم در یك بیت عربی و هم در یك بیت فارسی به نظم درآورده است

به عربی

و بَخْجا حَهَج صَزْ اَزَطْه حُوَةٌ محیطُ لقطر هو اثنان منه[1]

به فارسی

شش و دو هشت و سه یك هشت و پنج و سه صفری

بهفت و یك زا و نه پنج و هشت و شش پنج است[2]

۲۵۲. در فصل نهم محیطیه کاشانی روش استفاده از جدولهای مضارب 2π را در دستگاههای شمار شصتگانی و دهگانی شرح داده و راه محاسبهٔ محیط دایره را در صورتی که قطر آن معلوم باشد و همچنین روش محاسبهٔ قطر را در صورتی که محیط دایره معلوم باشد نشان داده و دو مثال عملی نیز آورده است. یکی محاسبه محیط دایره‌ای که قطرش $\frac{1}{8}$ ۶۵۰۸۴۴ ذراع یا فرسنگ باشد و دیگری محاسبهٔ قطر دایره‌ای که محیطش $\frac{1}{8}$ ۶۵۰۸۴۴ ذراع باشد.

۲۵۳. در فصل دهم کاشانی عددی را که خود برای π حساب کرده و آنچه قبل از وی برای π محسوب می‌داشته‌اند مقایسه کرده و گفته است که معمولاً عدد π را مساوی با $\frac{1}{7}$ ۳ می‌گیرند و تفاوت $\frac{1}{7}$ ۳ را با آنچه خود برای π به دست آورده حساب کرده و نشان داده است که اگر محیط دایره‌ای را که شعاع آن ۳۶۰۰ ذراع باشد با دو مقدار مذکور حساب کنند تفاوت بین آنها به $\frac{1}{10}$ ۹ ذراع می‌رسد و در دایره‌ای که شعاعش $\frac{1}{8}$۷۰۷۳ برابر قطر کرهٔ زمین باشد این اختلاف به ۱۷۷ برابر قطر کرهٔ زمین بالغ می‌شود و به این نحو ظاهر ساخته است که نتیجهٔ محاسبات او تا چه اندازه به حقیقت نزدیك است.

۲۵۴. در خاتمهٔ محیطیه کاشانی برای آنچه در مقدمهٔ آن رساله دربارهٔ اشتباهات منسوب

---

۱) در مصراع اول کلمهٔ صَزْ مرکب از صاد حرف اول صفر و زا یعنی رقم ۷ می‌باشد.

۲) در مصراع دوم زا به معنی رقم ۷ است.

به ابوالوفای بوزجانی و ابوریحان بیرونی گفته بود دلیل آورده است.
در قسمت اول خاتمه با ذکر دلیل و اتکای به قضایایی از مقالهٔ اول مجسطی بطلمیوس وتر قوس یك درجه و سی دقیقه را حساب کرده و با استفادهٔ از آن مقداری را که خود برای وتر ۳۰ دقیقه به دست آورده با مقداری که منسوب به بوزجانی است مقایسه نموده و نشان داده است که مقداری که او به دست آورده درست تر است و بالاخره در قسمت دوم آن وتر قوس دو درجه را حساب کرده و آن را با نتیجهٔ محاسبهٔ بیرونی مقایسه نموده است.

بخش پنجم

بررسی رسالهٔ وتروجیب

۲۵۵. کاشانی در مقدمهٔ *مفتاح الحساب* در ضمن ذکر اسامی تألیفات خود از این رساله نام برده و نوشته است[۱]: «و رساله‌های دیگر تصنیف کردم مانند... و رسالهٔ وتروجیب در استخراج آن دو برای یك سوم قوسی که وتر و جیب آن معلوم باشد و این نیز یکی از مسائلی است که بر پیشینیان دشوار بوده چنانکه صاحب مجسطی (= بطلمیوس) در آن کتاب گفته است که برای به دست آوردن آن راهی نیست.»

از متن اصلی این رساله متأسفانه نشانه‌ای در دست نیست اما چنانکه خواهیم دید بر آن شرحهایی نوشته‌اند و از روی آنها می‌توان قسمت اساسی آن را به دست آورد.

بحث در وجود رسالهٔ وتروجیب

۲۵۶. در اینجا باید دربارهٔ عبارت نادرستی که در حاشیهٔ *مفتاح الحساب* چاپی آمده است توضیحی بدهیم:

در حاشیهٔ صفحهٔ سوم *مفتاح الحساب* چاپی دربارهٔ کاشانی نوشته شده است[۲]: «جیب یك درجه را تا تاسعه در غایت درستی و دقت به طریق جبر و مقابله (از راهی) غیر از مسائل ششگانه (= المسائل الست) استخراج کرد اما به علت کوتاهی عمرش موفق نشد رساله را به پایان برساند.»

---

۱) مفتاح ص ۲ و ۳: «و صنفت رسائل اخری مثل الرسالة المسماة بسلم السماء...و رسالة الوتر والجیب فی استخراجهما لثلث القوس المعلومة الوتر و الجیب و ذلك ایضا مما صعب علی المتقدمین کما قال صاحب المجسطی فیه ان لیس الی تحصیله سبیل.»

۲) استخرج جیب درجه واحده الی التاسعه فی غایة الصحة و الدقة بطریق الجبر و المقابله بغیر المسائل الست لکن لم یوفق لاتمام الرسالة لفقر عمره و کتب الحکیم الفیلسوف قاضی زاده الرومی...»

۲۵۷. به دلایل زیر این ادعا که کاشانی رسالهٔ وتروجیب را به پایان نرسانده درست نیست:

اولاً چنانکه گفتیم کاشانی خود در مقدمهٔ *مفتاح الحساب* به صراحت رسالهٔ وتروجیب را از تألیفات خود می‌شمارد و گذشته از این به تصنیف چنان رساله‌ای مباهات می‌کند و می‌نویسد: «این نیز یکی از مسائلی است که بر پیشینیان دشوار بوده است.» با در نظر گرفتن اینکه کاشانی *مفتاح الحساب* را به الغ بیك اهدا کرده و علاوه بر اینکه الغ بیك خود ریاضیدان بوده است در آن زمان پانصد کس در سمرقند به ریاضیات مشغول بوده‌اند و در بیست موضع درس ریاضیات می‌گفته‌اند[1] باور کردنی نیست که کاشانی در مقدمهٔ کتابی که می‌خواسته است آن را به سلطان وقت اهدا کند، آن هم با داشتن همکارانی که با وی رقابت می‌کرده‌اند و در چنان محیط علمی، ادعای بی‌اساسی مبنی بر تصنیف رسالهٔ وتروجیب کرده و حتی به آن تفاخر نموده باشد.

علاوه بر این در حاشیهٔ برگ ۳۲ از نسخهٔ *زیج خاقانی* تألیف کاشانی که در دیوان هند (ایندیا افیس) موجود است عبارتی از کاشانی نقل شده[2] و در آن از قول کاشانی آمده است که: «قدما راهی برای محاسبهٔ دقیق جیب ثلث زاویه‌ای که جیب آن معلوم باشد نیافته‌اند و ما طریقه‌ای یافتیم و رساله‌ای دربارهٔ آن نوشتیم و جیب زاویهٔ یك درجه را با آن طریقه حساب کردیم.»

ثانیاً. قاضی زادهٔ رومی که رسالهٔ وتروجیب را تحریر کرده است (شرحش خواهد آمد) در مقدمهٔ این تحریر نوشته‌است[3]:

> «این رساله‌ای است در استخراج جیب یك درجه با اعمالی متکی بر قاعده‌های هندسی و حسابی که برادر ارجمند و یکتای زمان خود جمشید پسر مسعود طبیب، ملقب به غیاث کاشانی به آن ملهم شده است... اما چون در سخن او ایجازی است که از حد لغز هم گذشته و تصرفاتی دیده می‌شود که از کثرت تعقید راه فهم را بر بسته و به جایی رسیده است که به راهنمایی نیاز پیدا کرده است، بر من از راه برادری واجب آمد که آنچه را او گفته شرح و بسط

---

۱) رجوع شود به شمارهٔ ۷۷ کتاب حاضر. ۲) آبو، ص ۲۸.

۳) قاضی‌زاده: ص ۳۸: «و بعد فهذه رسالة فی استخراج جیب درجة واحدة باعمال مؤسسة علی قواعد هندسية حسابية قد ألهم به الاخ الاعز وحيد زمانه جمشیدبن مسعود الطبیب الملقب بغیاث الکاشی... لکن لما کان فی کلامه ایجاز تجاوز حد الالغاز و تصرفات سدت سبيل الفهم بالتعقید و ادت مایحتاج الی التسدید و جب علی من طریق الاخوة أن أبسط ما ذکره واکشف ماستره واحل العقد و اسدد الاود و ابین التصرفات و ابرهن علی المقدمات...»

دهم و هرچه را پوشیده گذارده باز نمایم و دشواری آن را هموار سازم و تصرفات وی را بیان کرده بر مقدمات آن برهان آورم...»[۱]

ملاحظه می‌شود که گذشته از آنکه قاضی‌زادهٔ رومی که معاصر و همکار و شاید رقیب کاشانی بوده در این مقدمه سخنی از ناتمام ماندن رسالهٔ وتروجیب کاشانی به میان نیاورده، از سیاق عبارات فوق کاملا واضح است که وی رسالهٔ کاشانی را در دست داشته و گفته‌های او را شرح و بسط داده است. علاوه بر این قاضی‌زاده پس از عباراتی که ترجمهٔ آن را آوردیم مطالبی می‌نویسد[۲] که مطالعهٔ آن کوچکترین تردیدی در اینکه وی متن رسالهٔ وتروجیب کاشانی را در دست داشته است باقی نمی‌گذارد: «در سیاق سخن ترتیب کلام او (= کاشانی) را مراعات کردم... و سخن او را با عبارات خود او آوردم.»

ثالثاً. ملاعبدالعلی بیرجندی در شرح *زیج الغ بیك* می‌نویسد[۳]:

«و افضل المهندسین مولانا غیاث الحق والدین جمشید الکاشی ره که اصل رصد سمرقند از آثار طبع لطیف اوست ملهم شده بطریق استخراج جیب یك درجه و در آن باب رساله‌ای انشا نموده...» سپس بیرجندی قسمت اساسی و مهم رسالهٔ مذکور را به فارسی برگردانده است[۴] و در پایان آن می‌نویسد: «و چون در نسخهٔ اصل بعضی ارقام را از این عمل در جدول آورده و بعضی را ترك کرده ما این عمل را نیز از سر گرفته استخراج کردیم تا اگر ناظر را اشتباهی واقع شود رجوع به آن نماید.»

از این عبارات به خوبی واضح است که بیرجندی متن رسالهٔ وتروجیب کاشانی را در اختیار داشته است.

۲۵۸.تبصره. در جزو مجموعهٔ خطی شمارهٔ ۱۷۵۱ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران رساله‌ای به فارسی موجود است موسوم به *رساله در معرفت وترثلث قوس معلومة الوتر* تألیف میرزا ابوتراب بن احمد که بنا به قول عباس اقبال آشتیانی از ریاضیدانان عهد محمد شاه قاجار بوده است.[۵]

---

۱) این ترجمه با مختصر تصرفاتی از مقالهٔ آقای محیط طباطبائی اقتباس شده است (← محیط: *غیاث الدین*، ص ۲۴).

۲) قاضی‌زاده: ص ۳۹: «و اسوق الکلام مراعیاً لترتیب کلامه... ثم اذکر کلامه بعباراته.»

۳) بیرجندی: شرح زیج، روی برگ ۴۰.

۴) بیرجندی: شرح زیج، پشت برگ ۴۱ تا پشت برگ ۴۲.

۵) مصاحب: حکیم خیام، ذیل صفحهٔ ۱۵۲.

میرزا ابوتراب در مقدمهٔ رسالهٔ مذکور نوشته است:

«... و سایر مهندسان نیز عدم امکان استنباط آن را مسلم داشته‌اند مگر فاضل مهندس بارع غیاث‌الدین جمشید الکاشانی که بعد از اعمال قواعد هندسیه و استعمال جبر و مقابله طریقه‌ای بجهت آن استنباط و در رسالهٔ وتر و جیب ایراد نموده و امیر شهید میرزا الغ بیك به همان طریقه از وتر شش درجه وتر دو درجه را استنباط و از آن جیب یك درجه را به تحقیق بیرون آورده و وضع جدول جیب را در زیج به همان قانون کرده است.» مؤلف مذکور پس از تمهید دو مقدمه روش کاشانی را شرح داده و در آغاز آن می نویسد: «و بعد از تمهید این دو مقدمه شروع در مقصد می‌شود. اما طریقهٔ موروثه از مهندس فاضل غیاث‌الدین جمشید. پس به جهت آن فرض کنیم قوس اب جـ د...»

شرحهایی که بر رسالهٔ وتر و جیب نوشته‌اند

۲۵۹ (الف). قاضی زادهٔ رومی رسالهٔ وتر و جیب کاشانی را به زبان عربی تحریر کرده است و عنوان کامل این تحریر این است: «رسالة فی استخراج جیب الدرجة الواحده علی التحقیق الحقیق استخرجه افضل المهندسین غیاث‌الدین جمشید القاسانی حرره و نقحه فی هذه الرسالة قاضی زاده الرومی مؤلف شرح چغمینی.»

این رساله در سال ۱۲۹۹ هـ.ق. در تهران به چاپ سنگی رسیده و در آخر بعضی از نسخه‌های چاپی کتاب *مفتاح الحساب* دیده می‌شود.

از این رساله چند نسخهٔ خطی در ایران موجود است: دو نسخهٔ خطی در کتابخانهٔ ملی ملك[۱] در جزو مجموعه‌های شمارهٔ ۳۵۳۶/۱ و ۳۱۸۰ و یك نسخهٔ خطی ناقص به شمارهٔ ۱۵۳۱ (۱۵۱۹) در کتابخانهٔ مجلس شورای ملی[۲] یك نسخهٔ خطی نیز از این رساله در کتابخانهٔ خدیویه مصر موجود است[۳] با این عنوان *رسالة فی استخراج جیب درجة واحده باعمال مؤسسة علی قواعد هندسیة و حسابیة* این تحریر قاضی‌زاده در سال ۱۹۶۰ میلادی به‌زبان روسی ترجمه شده است.[۴]

---

۱) شخصاً دیده‌ام.

۲) فهرست مجلس، ج ۴ ص ۲۳۳ شمارهٔ ۱۵۳۱ (۱۵۱۹).

۳) *فهرست الکتب العربیة المحفوظة بالکتبخانه الخدیویة المصریة*، ج ۵ ص ۲۱۰.

۴) یوشکویچ G، ذیل صفحهٔ ۳۲۳ وص ۴۴۳ش ۱۷۵ a. یوشکویچ M، ص ۱۸۵ ش ۱۴۹ و نیز ص ۱۷۶ ش ۸۹.

۲۶۰ (ب). چون الغ بیك درباب دوم از مقالهٔ دوم زیج خود دربارهٔ «معرفت جیب و سهم» گفتگو کرده است، کسانی که *زیج الغ بیك* را شرح کرده‌اند وقتی به باب مذکور رسیده‌اند و دربارهٔ روش استخراج جیب یك درجه به بحث پرداخته‌اند از رسالهٔ وتر و جیب کاشانی نام برده و مطالب آن را تشریح کرده‌اند.

از جمله ملاعبدالعلی بیرجندی قسمت مهم رسالهٔ وترو جیب کاشانی را در شرحی که بر *زیج الغ بیك* نوشته است نقل کرده. همچنین میرم چلبی در شرح *زیج الغ بیك* موسوم به «دستور العمل و تصحیح الجدول» دربارهٔ رسالهٔ وتر و جیب کاشانی بحث کرده است.[۱]

نظر به اهمیت رسالهٔ وتر و جیب کاشانی این قسمت از شرح میرم چلبی (یا خلاصهٔ آن) به زبانهای فرانسوی و آلمانی و روسی و انگلیسی ترجمه شده است به این شرح:

ترجمهٔ فرانسوی توسط سدیو در ۱۸۵۳ میلادی صورت گرفت[۲] و در ۱۸۵۴ میلادی وپکه نیز در مقاله‌ای[۳] روش کاشانی را در استخراج جیب یك درجه مورد بحث قرار داد و آن را روش چلبی نامید. ترجمهٔ آلمانی مختصری از شرح میرم چلبی در ۱۹۲۲ میلادی توسط کارل شوی انجام یافت.[۴]

در ۱۹۵۴ میلادی آبو مقالهٔ بسیار جالب و مفیدی دربارهٔ شرح میرم چلبی راجع به رسالهٔ وتر و جیب کاشانی نوشت و در آن، قسمت اساسی و مهم رسالهٔ وتر و جیب را تفسیر و توجیه کرد[۵] بالاخره رزنفلد و یوشکویچ فصل مذکور از شرح میرم چلبی را در ۱۹۵۶ میلادی به زبان روسی ترجمه و تفسیر کردند.[۶]

برای کسب اطلاع از عقیدهٔ دانشمندان اروپایی دربارهٔ رسالهٔ وتر و جیب کاشانی رجوع کنید به شمارهٔ ۲۲ کتاب حاضر.

خلاصه‌ای از آنچه بیرجندی دربارهٔ رسالهٔ وتر و جیب نوشته است

۲۶۱. گفتیم که اصل رسالهٔ وتر و جیب کاشانی از بین رفته است ولی می‌توان قسمت اساسی و مهم آن را از روی شرحهایی که بر آن رساله نوشته‌اند (و ذکرش گذشت ← ش ۲۵۹ و ۲۶۰) به دست آورد. چون همهٔ بحثهایی که تاکنون در این باره صورت گرفته است

۱) میرم چلبی: ص ۴۳ به بعد.
۲) سدیو A، صفحات ۳۳۳ تا ۳۵۶، سدیو P ذیل صفحات ۶۹ تا ۸۳.
۳) وپکه D، صفحات ۱۵۵ به بعد و ۱۶۸ به بعد.
۴) شوی B، ذیل صفحات ۳۸۶ تا ۳۹۹. ۵) آبو.
۶) رزنفلد و یوشکویچ: صفحات ۳۱۱ تا ۳۱۹ (ترجمهٔ روسی) و صفحات ۳۷۵ تا ۳۷۹ (تفسیر)

متکی بر شرح میرم چلبی بر *زیج الغ بیك* است و، از طرف دیگر، تحریر قاضی‌زادهٔ رومی به زبان عربی است و تاکنون ندیده‌ایم که کسی از گفته‌های بیرجندی که به فارسی است در این باره استفاده کرده باشد، و حال آنکه آنچه وی در این مورد نوشته بسیار مفید و جامع و در واقع خلاصهٔ رسالهٔ وتروجیب کاشانی است و از بعضی جهات بر تفسیر قاضی‌زاده رومی مزیت دارد، بهتر دیدیم که در کتاب حاضر آنچه را بیرجندی دربارهٔ این رساله نوشته است اساس قرار دهیم. بنابراین ابتدا گفته‌های بیرجندی را عیناً و بدون تغییر (حتی در رسم‌الخط) از کتاب شرح *زیج الغ بیك* او در اینجا می آوریم و در حاشیهٔ صفحات برخی از توضیحات لازم را اضافه می کنیم و سپس آن را با اصطلاحات و علائم قراردادی کنونی بیان می کنیم.[1]

۲۶۲. بیرجندی می نویسد[2]:

«از قواعد سابق جیب بسیاری از قسی را استخراج توان کرد و چون جیب سه درجه بان قواعد معلوم میتوان کرد قسی را که از سه باشد تا بنود بتفاضل سه سه هم بقواعد مذکور معلوم توان کرد اما بعضی از آن قبیل است که جیب آن اصلا از این قواعد معلوم نتوان کرد مگر آنکه جیب یکدرجه را با جیب قوس معلومی ملاحظه کنند و از آن هر دو جیب مطلوب حاصل کنند و اگر جیب یکدرجه معلوم باشد جیوب تمام از آن معلوم توان کرد و قدما طریق استعلام آن بیان نتوانستند نمود. محقق طوسی در تحریر مجسطی میفرماید لیس الی معرفت وتر ثلث القوس المعلومة الوترمن جهة الخطوط (یعنی بالبراهین الهندسی) طریق و وتر قوس شش درجه معلوم است، اگر وتر ثلث او که دو درجه است معلوم شود جیب یکدرجه که نصف وتر دو درجه است معلوم می شود. و ایشان (= الغ بیك) جیب یك درجه بتقریب بیرون آورده‌اند و بنای جدول بر آن نهاده‌اند. و افضل المهندسین مولانا غیاث الحق والدین جمشید الکاشی ره که اصل رصد سمرقند از آثار طبع لطیف او است ملهم شده بطریق استخراج جیب یکدرجه و در آن باب رسالهٔ انشاء نموده و مصنف (= الغ بیك) ره طریقی دیگر در باب جیب درجهٔ واحد بیان فرموده و در آن باب رسالهٔ دیگر نوشته و ما اولا طریق تقریبی را بیان کنیم.»

---

۱) نوشتهٔ بیرجندی علاوه بر آنکه نمونهٔ جالب توجهی از انشای کتابهای ریاضی قدیمی فارسی است شامل تعریف بعضی اصطلاحات از قبیل «جبر» و «مقابله» و «تکمیل» و «منحط کردن» وغیره است و رسم‌الخط آن در نسخهٔ خطی مذکور نیز جالب است مثلا شیء را همه جا بدون همزه نوشته است.

۲) بیرجندی، شرح زیج، روی برگ ۴۰.

۲۶۳. بیرجندی پس از بیان دو طریق تقریبی یکی از قول صاحب *کشف الحقایق*[1] و دیگری از قول خواجه نصیرالدین طوسی (در تحریر *مجسطی*) چنین می‌نویسد[2]:

«و چون طریق استخراج جیب یك درجه بتقریب معلوم شد طریق استخراج آن به برهان نیز ایراد کنیم و آن دو طریق است یکی آنکه سلطان المهندسین غیاث‌الدین جمشید استخراج کرده و دیگر آنکه سلطان شهید سعید مصنف ره بیان فرموده و ما این هر دو را بر سبیل اختصار ایراد کنیم.

اما به جهت طریق اول (یعنی طریق کاشانی) فرض کنیم که قوس ا ب ج د شش‌درجه است و آن را به سه قسم متساوی کنیم برنقطه‌های ب و ج وترهای اب و اج و اد و ب ج و ب د و ج د وصل کنیم و از جیب پانزده درجه و هیژده درجه که سابقاً معلوم شد جیب سه درجه استخراج کردیم بود.[3]

جـ ح کد لجـ نط لد کح ید ن (ثامنه)

پس آن را مضاعف ساختیم حاصل شد وتر[4] اد

و یو مط ز نط ح نو کط م (ثامنه)

و مطلوب معرفت وتر ا ب است که (وتر روبروی قوس) دو درجه است.

پس می‌گوییم که در شکل دوم از مقالهٔ اول *مجسطی* مبین شده است که هر ذواربعة اضلاع که در دایره واقع شود مجموع دو سطح هر ضلع در مقابل او

---

۱) *کشف الحقایق* در شرح *زیج ایلخانی* از حسن بن محمد نیشابوری معروف به نظام اعرج است و یك نسخهٔ خطی از آن در مشهد موجود است (فهرست رضوی، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۲۸ ش ۱۱۴).

۲) بیرجندی، شرح زیج، پشت برگ ۴۱ سطر ماقبل آخر به بعد.

۳) یعنی

$$\text{Sin}3^\circ = ۳;۸ ,۲۴ ,۳۳ ,۵۹ ,۳۴ ,۲۸ ,۱۴ ,۵۰$$

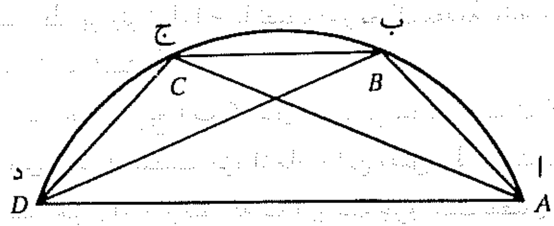
رجوع کنید به شماره‌های ۱۷۸ و ۱۹۶ کتاب حاضر.

۴) یعنی

۶;۱۶ ,۴۹ ,۷ ,۵۹ ,۸ ,۵۶,۲۹ ,۴۰

برای سهولت بیان در این بخش از کتاب این عدد را (αثامنه) خواهیم نامید و باید متوجه بود که

$$(\alpha \text{ ثامنه}) = ۶ + \frac{۱۶}{۶۰} + \frac{۴۹}{(۶۰)^۲} + \frac{۷}{(۶۰)^۳} + \frac{۵۹}{(۶۰)^۴} + \frac{۸}{(۶۰)^۵} + \frac{۵۶}{(۶۰)^۶} + \frac{۲۹}{(۶۰)^۷} + \frac{۴۰}{(۶۰)^۸}$$



مساوی سطح یکی از دو قطر اوست در دیگری[۱] و از شکل چهاردهم همان مقاله مستفاد میشود که مربع وتر نصف قوسی مساوی سطح نصف قطر است در فضل قطر بر وتر تمام اصل آن قوس تا نصف دور[۲] و ظاهر است که ا ب و ج د متساویند و همچنین ا ج و ب د پس حاصلضرب ا ب در ج د مربع باشد که در اصطلاح اهل جبر و مقابله آنرا مال گویند و حاصلضرب ب ج که مجهول است یعنی شیء در اصطلاح جبر و مقابله در ا د باشد اینقدر از اشیا

و یو مط ز نط ح نو کط م

و مجموع این دو حاصل مساوی مربع ا ج است یعنی سطح ا ج در ب د بحکم مقدمهٔ اولی[۳] و مربع ا ب مساوی سطح نصف‌قطر است که شصت است در

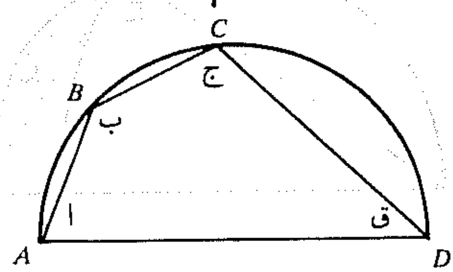
---

۱) قضیهٔ معروف بطلمیوس در چهار ضلعی محاطی

$$AB\times CD+BC\times AD=AC\times BD$$

۲) یعنی اگر AG قطر دایره و نقطه B وسط قوس AC باشد

$$\overline{AB}^2=\frac{AG}{2}(AG-GC)$$



۳) یعنی اگر فرض کنیم که قوس AD مساوی با ۶ درجه باشد و آن را در نقاط B و C به سه قسمت متساوی کنیم و

$$AB=BC=CD$$

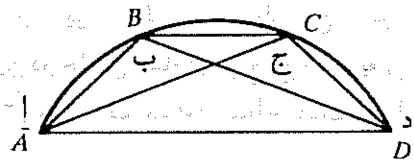
را x بگیریم خواهیم داشت

$$x^2+x\times(\text{وتر شش درجه})=\overline{AC}^2=\overline{BD}^2$$

←

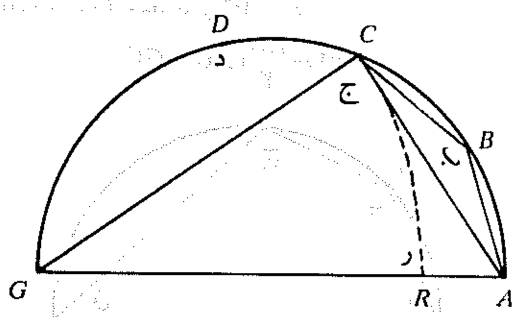
فضل قطر بر وتر تمام اج تا نصف دور بحکم مقدمهٔ ثانیه چه قوس اج ضعف قوس اب است.[1]

پس چون مربع اب که مال است بر شصت قسمت کنند خارج قسمت جزوی باشد از شصت جزو از مال و این فضل قطر است بر وتر تمام (قوس) اج پس چون آنرا از قطر که صدو بیست جزو است نقصان کنند باقی ماند وتر تمام اج صدو بیست جزو الا یك جزو از شصت جزو از مال[2] و در علم جبر و مقابله مقرر شده است که چون مربع عددی خواهند که در آن استثنا باشد اول مستثنی منه را در نفس او ضرب کنند پس مستثنی را در نفس او ضرب کنند و هر دو را جمع کنند و ضعف حاصلضرب مستثنی را در مستثنی‌منه از مجموع مذکور استثنا کنند[3] پس بجهت معرفت وتر اج اول مربع ۱۲۰ گرفتیم بود →



۱) یعنی اگر از روی قطر GA طول GR را مساوی GC جدا کنیم و شعاع دایره را ۶۰ بگیریم داریم

$$AB^{۲}=\frac{AG}{۲}(AG-GC)=۶۰AR$$



۲) یعنی در شکل بالا

$$GR=AG-AR=۱۲۰-\frac{x^{۲}}{۶۰}$$

که در آن

$$x=AB$$

۳) مقصود اتحاد زیر است

$$(a-b)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-۲ab$$

۱۴۴۰۰ و چون آن را مرفوع کنند چهار مرفوع مره باشد که چهار مال است[۱] و مربع جزوی از شصت جزو از مال جزوی باشد از سه هزار و ششصد جزو از مال مال[۲] زیرا که حاصلضرب جزو مال در نفس او جزو مال المال است و ضعف حاصلضرب صدو بیست در جزوی از شصت جزو مال چهار مال است.[۳] پس مربع وتر تمام (قوس) اج چهار مرفوع مره باشد از درجات و جزوی از ۳۶۰۰ جزو از مال مال الا چهار مال[۴] و چون مربع وتر قوسی از مربع قطر اسقاط کنند مربع وتر تمام آن قوس تا نصف دور بماند چه از قطر و این دو وتر مثلث قائم‌الزاویه حاصل شود که وتر آن زاویهٔ قائمه قطر بود زیرا که زاویهٔ نصف دایره قائمه است چنانچه مبین شده است در ثالثهٔ اصول، و مربع وتر قائمه مساوی مجموع دو مربع دو ضلع او است بشکل عروس[۵]؛ و هم درعلم جبر و مقابله مقرر شده است که چون در عدد استثنا باشد و خواهند که آنرا از عدد دیگر نقصان کنند اول مستثنی را حذف کنند و مثل مستثنی بر منقوص منه زیاده کنند پس آن عدد را نقصان کنند.[۶] پس می‌گوئیم مربع قطر چهار مال است. پس چهار مال مستثنی است، ازمنقوص نقصان کردیم و بر منقوص منه که چهار مال است اضافه کردیم، پس منقوص منه هشت مال شد، پس چون

---

۱) یعنی اگر عدد ۱۴۴۰۰ را در دستگاه شمار شصتگانی بنویسیم می‌شود ۰, ۰, ۴ [یعنی $4\times(60)^2$].

۲) یعنی

$$\left(\frac{x^2}{60}\right)^2=\frac{x^4}{3600}$$

۳) یعنی

$$2\times120\times\frac{x^2}{60}=4x^2$$

۴) یعنی در شکل ذیل صفحهٔ ۱۶۲

$$\overline{GC}^2=4\times(60)^2+\frac{x^4}{3600}-4x^2$$

(GC وتر تمام قوس AC است).

۵) مقصود به کار بردن قضیهٔ فیثاغورس است در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وتر آن قطر دایره و دو ضلع زاویهٔ قائمه آن دو وتر از دایره باشند، و می‌خواهد بگوید که در شکل ذیل صفحهٔ ۱۶۲

$$\overline{AC}^2=\overline{AG}^2-\overline{GC}^2$$

۶) یعنی

$$a-(b-c)=a+c-b$$

مربع وتر تمام اج از آن اسقاط کردیم باقی ماند مربع وتر اج چهار مال الا جزوی از ۳۶۰۰ جزو از مال مال[1] و سابقاً گفتیم که مربع وتر اج مساوی سطح اب در ج د است که مال است و سطح ب ج در اد که آن هست از اشیا این قدر

و یو مط ز نط ح نو کط م

پس چهار مال الا جزوی از سه هزار و ششصد جزو از مال مال معادل باشد با مالی و این قدر اشیا که مذکور شد[2]؛ و چون مستثنی از معادل اول اسقاط کنند و مثل آن بر معادل ثانی اضافه کنند چهار مال معادل شود با یك مال و این قدر اشیا

و یو مط ز نط ح نو کط م

و جزوی از سه هزاروششصد جزو از مال مال[3] و این عمل را جبر گویند، و چون آنچه مشترك است در متعادلین، و آن یك مال است، حذف کنند بماند سه مال معادل این قدر اشیا

و یو مط ز نط ح نو کط م

ثامنه و جزوی از سه هزار و ششصد جزو از مال مال[4] و این عمل را مقابله گویند، و هم از قواعد آن علم است که چون در یکی از متعادلین کسری باشد، آن کسر تمام سازند و مثل آن بر معادل دیگر اضافه کنند و این عمل را تکمیل

---

۱) ظاهراً عبارت افتادگی دارد ولی مطلب کاملا روشن است. مقصود این است که از رابطهٔ

$$\overline{AC}^{۲}=\overline{AG}^{۲}-\overline{GC}^{۲}$$

با در نظر گرفتن اینکه

$$AG=۱۲۰$$

و ملحوظ داشتن مقدار $\overline{GC}^{۲}$ از رابطهٔ ذیل شمارهٔ ۴ صفحهٔ ۱۶۳ حاصل می‌شود

$$\overline{AC}^{۲}=۴x^{۲}-\frac{x^{۴}}{۳۶۰۰}$$

۲) یعنی

$$۴x^{۲}-\frac{x^{۴}}{۳۶۰۰}=x^{۲}+x\times(\text{ثامنه } \alpha)$$

در مورد (α ثامنه) رجوع کنید به ذیل شمارهٔ ۴ صفحهٔ ۱۶۰.

۳) یعنی از معادلهٔ قبل نتیجه می‌شود

$$۴x^{۲}=x^{۲}+x\times(\text{ثامنه } \alpha)+\frac{x^{۴}}{۳۶۰۰}$$

۴) یعنی از معادلهٔ اخیر حاصل می‌شود

$$۳x^{۲}=x\times(\text{ثامنه } \alpha)+\frac{x^{۴}}{۳۶۰۰}$$

گویند. پس چون تکمیل کسر کنند در این مقام ده هزار و هشتصد مال و آن سه مرفوع مرتین بود از مال[1] معادل شود باین قدر اشیا

و یو مط ز نط ح نو کط م

ساد سه و یک‌مال‌مال[2] زیرا که چون سه را در سه هزار و ششصد ضرب کنند ده هزاروهشتصد شود و چون ارقام این اعداد در سه هزار و ششصد ضرب کنند هر رقمی به دو مرتبه رفع شود. مثلا سه هزار و ششصد ثامنه شصت سابعه است که یك سادسه باشد و علی هذاالقیاس.

ودر همان علم مبین است که اجناس که عبارت از عدد است و شی و مال و کعب و مال مال و غیرذلك همه بر یك نسبت اند. نسبت واحد باشی چون نسبت شی است با مال و چون نسبت مال به کعب و چون کعب با مال مال[3] پس اگر اجناس را از هر دو جانب، یعنی از هر دو متعادلین، منحط گیرند در مقصود تفاوت نکند، و چون چنین کنند یعنی یکمرتبه منحط گیرند در این مقام ۳ مرفوع مرتین از اشیا_ معادل شود با این عدد

و یو مط ز نط ح نو کط م

---

۱) یعنی

$$۱۰۸۰۰x^{۲}=۳\times(۶۰)^{۲}x^{۲}$$

طرف راست در دستگاه شصتگانی چنین نوشته می‌شود

$$(۳,\ ۰,\ ۰)x^{۲}$$

۲) یعنی اگر دو طرف معادلهٔ مذکور در ذیل شمارهٔ ۴ ص ۱۶۴ را در ۳۶۰۰ ضرب کنیم حاصل می‌شود

$$۳\times(۶۰)^{۲}x^{۲}=(\text{سادسه }\alpha)\times x+x^{۴}$$

زیرا چون (ثامنه) را در ۳۶۰۰ ضرب کنند از جنس سادسه [یعنی $\frac{۱}{(۶۰)^{۶}}$] می‌شود و باید متوجه بود که

$$(\text{سادسه }\alpha)=۶\times(۶۰)^{۲}+۱۶\times(۶۰)+۴۹+\frac{۷}{۶۰}+\frac{۵۹}{(۶۰)^{۲}}+\frac{۸}{(۶۰)^{۳}}+\frac{۵۶}{(۶۰)^{۴}}+\frac{۲۹}{(۶۰)^{۵}}+\frac{۴۰}{(۶۰)^{۶}}$$

۳) یعنی

$$\frac{۱}{x}=\frac{x}{x^{۲}}=\frac{x^{۲}}{x^{۳}}=\frac{x^{۳}}{x^{۴}}$$

سادسه و یك کعب[1]. پس از تصرفات مذکور منتهی شد این مسئله باشیا که معادل است با عدد و کعب[2]، و این از شش مسئلهٔ مشهور[3] آن علم نیست. لیکن اگر عدد و کعب بر عدد اشیا قسمت کنند خارج قسمت آن شی مجهول بود[4] چه قسمت، تجزیهٔ مقسوم است باحاد مقسوم علیه. پس خارج قسمت عدد و کعب بر عدد اشیا نصیب واحد باشد از مقسوم علیه که اشیا است.

و بجهت آنکه کعب داخل قسمت شود طریق بدیع اختراع فرموده[5] و آن چنان است که اول بعضی عدد را بر عدد اشیا قسمت کرده و مکعب خارج قسمت را با باقی عدد جمع کرده پس بعضی دیگر را از عدد مجموع قسمت کرده بر عدد اشیا و مکعب مجموع هر دو خارج قسمت حاصل کرده و مکعب خارج قسمت اول رااز این مکعب اسقاط کرده آنچه باقی مانده آن را با عدد مجموع جمع کرده پس بعضی دیگر از عدد مجموع ثانی بر عدد اشیا قسمت کرده و مکعب مجموع خارجهای قسمت را حاصل کرده و فضل این مکعب اخیر را بر مکعب آن دو خارج قسمت بگرفته و آن را با باقی هم از مجموع ثانی جمع کرده، بعد از آن بعضی دیگر از مجموع ثالث قسمت کرده بر عدد اشیا بر همین منوال تا بآخر عمل کرده تا از عدد مقسوم مقدار غیر معتدٌ به باقی مانده پس عمل را قطع کرده.

و چون در نسخهٔ اصل بعضی از ارقام را از این عمل در جدول آورده و بعضی را ترك کرده ما این عمل را نیزازسر گرفته استخراج کردیم تا اگر ناظر

---

۱) یعنی اگر دو طرف معادلهٔ مذکور در ذیل شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۱۶۵ را به x تقسیم کنیم حاصل می‌شود

$$۳\times(۶۰)^۲x=(\text{سادسه}\ \alpha)+x^۳$$

۲) یعنی معادلهٔ مسئله به صورت

$$ax=b+x^۳$$

درآمد.

۳) مقصود معادلات ششگانهٔ جبری است (المسائل الست) رجوع کنید به شمارهٔ ۲۱۴ کتاب حاضر.

۴) یعنی از معادلهٔ مذکور در ذیل شمارهٔ ۱ همین صفحه حاصل می‌شود

$$x=\frac{(\text{سادسه}\ \alpha)+x^۳}{۳\times(۶۰)^۲}$$

۵) این قسمت مهمترین قسمت رسالهٔ وتروجیب است و شرح آن را با اصطلاحات کنونی بعداً خواهیم دید (← ش ۲۶۷).

را اشتباهی واقع شود رجوع بآن نماید و جدول در صفحهٔ آینده تحریر یافته و آنچه در جدول اخیر مسطور است خارج قسمت است اعنی

ب ه لط کو کب کط کح لب نب لج

ثامنه. چون آن را تنصیف کنند حاصل آید

ا ب مط مج یا ید مد یو کو یو »

و این جیب یك درجه است.

(پایان آنچه از شرح بیرجندی اقتباس شد).

تفسیر رسالهٔ وتروجیب کاشانی با اصطلاحات و علائم کنونی

۲۶۴. از شرحی که بیرجندی بر رسالهٔ وتروجیب کاشانی نوشته است نتیجه می‌شود که مطالب رسالهٔ مذکور را می‌توان به دوجزء تقسیم کرد: یکی روش به دست آوردن معادلهٔ مسئله یعنی معادلهٔ

$$x=\frac{(\alpha \text{ سادسه})+x^{۳}}{۳\times(۶۰)^{۲}} \qquad (۱)$$

که‌درآن مجهول x وتر قوس دو درجه از دایره است[۱] و یکی دیگر چگونگی حل این معادله با روش کاشانی که قسمت مهم و اساسی رسالهٔ مذکور است، و ما اینك به‌طور خلاصه و با اصطلاحات کنونی قبلا چگونگی به دست آوردن معادلهٔ (۱) را بیان می‌کنیم و سپس به شرح و بیان روش کاشانی در حل آن می‌پردازیم.[۲]

الف. به دست آوردن معادلهٔ (۱) یعنی معادلهٔ $x=\frac{(\alpha \text{ سادسه})+x^{۳}}{۳\times(۶۰)^{۲}}$

۲۶۵. نیمدایره‌ای به مرکز H و به قطر AHG مساوی با $۲r$ رسم و فرض می‌کنیم که

وتر رو به روی قوس دو درجه = وتر CD = وتر BC= وتر AB

(البته روی شکل اندازه‌های حقیقی در نظر گرفته نشده است).

بنابراین AD وتر قوس ۶ درجه است. کاشانی ابتدا جیب ۳ درجه را از روی تفاضل جیب ۱۸ درجه و جیب ۱۵ درجه که قبلا آنها را می‌دانسته به دست آورده و آن را در ۲ ضرب کرده و

---

۱) در مورد مقدار (αسادسه) رجوع کنید به ذیل شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۱۶۵ .

۲) و نیز رجوع کنید به شوی B، ذیل صفحات ۳۸۶ تا ۳۸۹؛ و یوشکویچ G، صفحات ۳۲۱ تا ۳۲۳.

وتر قوس ۶ درجه یعنی طول AD را مساوی با عدد زیر در دستگاه شمار شصتگانی حساب کرده است[1]

$$AD = (\alpha\text{ثامنه}) = ۶;۱۶,۴۹,۷,۵۹,۸,۵۶,۲۹,۴۰$$

و وتر روبروی قوس دو درجه یعنی

$$AB=BC=CD$$

را x یعنی مجهول مسئله گرفته است و برای تشکیل دادن معادلهٔ مسئله به طریق زیر عمل کرده

از قضیهٔ بطلمیوس در چهار ضلعی محاطی $ABCD$ حاصل می‌شود

$$AB.CD+BC.AD=AC.BD$$

و چون

$$AB=BC=CD$$

و

$$AC=BD$$

پس

$$\overline{AB}^2+BC\times AD=\overline{AC}^2$$

یعنی

$$x^2+x\times(\text{وتر شش درجه})=AC^2=BD^2 \qquad (۲)$$

اکنون اگر از قطر AG طول GR رامساوی با CG جدا و پاره‌خطهای BG و BR را رسم کنیم از دو مثلث متشابه ABH و ARB نتیجه می‌شود[2]

$$\frac{AR}{AB}=\frac{AB}{AH}$$

و از آنجا

$$\frac{\overline{AB}^2}{r}=AR$$

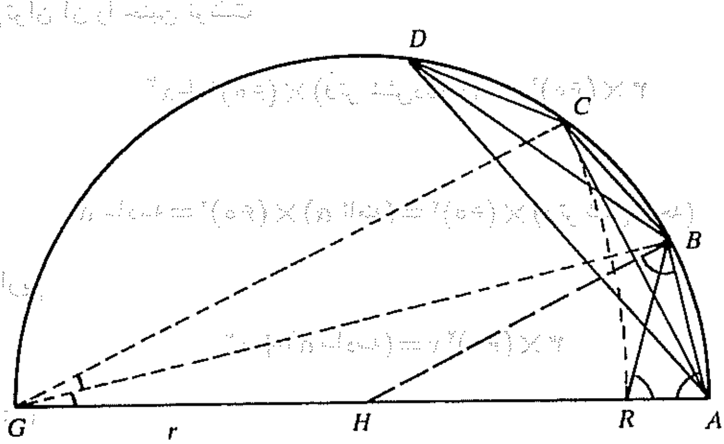
---

۱) رجوع کنید به ذیل شمارهٔ ۴ ص ۱۶۰ و قرارداد شمارهٔ ۱۷۸ کتاب حاضر.

۲) این دو مثلث هر دو متساوی‌الساقین هستند زیرا AH و BH شعاعهای دایره می‌باشند و

$$BR=BC=AB$$

(مساوی بودن BC با BR با در نظر گرفتن اینکه BG نیمساز زاویهٔ AGC و محور تقارن چهار ضلعی $BRGC$ است واضح می‌شود) و زوایای مجاور به قاعده در هر دو مثلث متساوی‌الساقین مذکور با هم مساویند.



بنابراین اگر شعاع دایره را ۶۰ واحد بگیریم داریم

$$GR = AG - AR = ۱۲۰ - \frac{\overline{AB}^{۲}}{۶۰} \qquad (۳)$$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACG با در نظر گرفتن رابطهٔ (۳) و اینکه $GC = GR$ داریم

$$\overline{AC}^{۲} = \overline{AG}^{۲} - \overline{GC}^{۲} = (۱۲۰)^{۲} - \left(۱۲۰ - \frac{\overline{AB}^{۲}}{۶۰}\right)^{۲}$$

یعنی

$$\overline{AC}^{۲} = ۴\overline{AB}^{۲} - \frac{\overline{AB}^{۴}}{۳۶۰۰} \qquad (۴)$$

اکنون اگر در رابطهٔ (۴) مقدار $AC^{۲}$ را از رابطهٔ (۲) بگذاریم حاصل می‌شود

$$x^{۲} + x \times (\text{وتر شش درجه}) = ۴x^{۲} - \frac{x^{۴}}{۳۶۰۰}$$

که پس از تقسیم کردن طرفین بر x و ساده کردن حاصل می‌شود

$$\text{وتر شش درجه} = ۳x - \frac{x^{۳}}{۳۶۰۰} \qquad (۵)$$

که می‌توان آن را چنین نوشت

$$۳ \times (۶۰)^{۲} x = (\text{وتر شش‌درجه}) \times (۶۰)^{۲} + x^{۳}$$

اما

$$(\text{وتر شش‌درجه}) \times (۶۰)^{۲} = (\alpha\ \text{ثامنه}) \times (۶۰)^{۲} = \alpha\ \text{سادسه}$$

پس داریم

$$۳ \times (۶۰)^{۲} x = (\alpha\ \text{سادسه}) + x^{۳}$$

و از آنجا

$$x = \frac{(\alpha\ \text{سادسه}) + x^{۳}}{۳ \times (۶۰)^{۲}} \qquad (۱)$$

و این همان معادله‌ای است که می‌خواستیم (یعنی معادلهٔ مسئله).

۲۶۶. تبصره. چون در استدلال فوق هیچ‌جا از مقدار عددی $AB=x$ که وتر روبروی قوس دو درجه است استفاده نکردیم می‌توانیم به طور کلی x را وتر روبروی قوس $۲a$ درجه و AD را، که در حالت خاص مساوی با وتر قوس شش درجه اختیار شده است، وتر روبرون قوس $۶a$ درجه فرض کنیم. در این صورت با در نظر گرفتن اینکه شعاع دایره را ۶۰ واحد گرفته‌ایم حاصل می‌شود

$$AB = ۲ \times ۶۰ \sin a = ۱۲۰ \sin a$$

و

$$AD = ۲ \times ۶۰ \sin ۳a = ۱۲۰ \sin ۳a$$

و چون این مقادیر را در معادلهٔ (۵) قرار دهیم حاصل می‌شود

$$۱۲۰ \sin ۳a = ۳ \times ۱۲۰ \sin a - \frac{(۱۲۰ \sin a)^{۳}}{۳۶۰۰}$$

و یا پس از اختصار

$$\sin ۳a = ۳ \sin a - ۴ \sin^{۳} a$$

و این همان اتحاد مثلثاتی معروف است که $\sin 3a$ را برحسب $\sin a$ به‌دست می‌دهد و کاشانی آن را در حالت خاص ثابت کرده و به کار برده است.

ب. روش کاشانی در حل معادله (۱)

۲۶۷. اکنون می‌پردازیم به شرح روش بدیع و جالب توجهی که کاشانی برای حل معادلهٔ (۱) اختراع کرده[1] و بیرجندی آن را نقل کرده است و مطالب را طوری بیان می‌کنیم که کسانی هم که با محاسبه در دستگاه شصتگانی آشنایی ندارند از عهدهٔ فهم آن بر آیند. معادلهٔ

$$x = \frac{(\text{سادسه}\ \alpha) + x^{3}}{(3 \times 60)^{2}} \qquad (1)$$

را برای سهولت بیان به شکل کلی زیر می‌نویسیم

$$x = \frac{q + x^{3}}{p} \qquad (1)'$$

و فراموش نمی‌کنیم که در مسألهٔ مورد بحث اعداد p و q در دستگاه شمار شصتگانی چنین نوشته می‌شوند

$$p = 3, 0, 0$$

یعنی در واقع

$$p = 3 \times (60)^{2}$$

و

$$q = 6, 16, 49; 7, 59, 8, 56, 29, 40$$

یعنی در دستگاه اعشاری

---

۱) این روش به وجوه مختلف در منابع زیر مورد بحث و بررسی قرار گرفته است: سدیو A، صفحات ۳۵۵ و ۳۵۶؛ سدیو P، صفحات ۸۲ تا ۸۳ (همان مطالب سدیو A است)؛ ویکه D، صفحات ۱۶۷ تا ۱۷۶ (بحثی است مفصل و در آن از سلسله‌ها استفاده شده)، هانکل G، صفحات ۲۸۹ تا ۲۹۳؛ آبو، صفحات ۲۴ تا ۲۹ (بهترین و روشنترین شرحی است که در این باره نوشته شده و در آن محاسبات در دستگاه شصتگانی صورت گرفته است) یوشکویچ G، صفحات ۳۲۱ تا ۳۲۴؛ کانتور G_1، ص ۷۸۲ و ۷۸۳.

$$q=6\times(60)^2+16\times(60)+49+\frac{7}{(60)}+\frac{59}{(60)^2}+\frac{8}{(60)^3}+\frac{56}{(60)^4}+\frac{29}{(60)^5}+\frac{40}{(60)^6}$$

اکنون فرض می‌کنیم که جواب معادلهٔ $'(1)$ در دستگاه شصتگانی به صورت

$$x=a+b+c+\cdots$$

باشد که در آن a و b و c و... ارزش نسبی ارقام شصتگانی عدد x هستند.[1] باید a و b و c و... را یکی پس از دیگری تعیین کنیم.

چون x وتر روبروی قوس ۲ درجه است، مقدار آن نسبت به شعاع دایره که ۶۰ فرض می‌شود کوچك است و مکعب آن یعنی x^3 بسیار کوچك است و می‌توان در تقریب اول مکعب آن (که باید در معادلهٔ اصلی بر 3×60^2 نیز تقسیم شود) صرف نظر کرد و x را تقریباً مساوی با $\frac{q}{p}$ گرفت. پس نخستین مقدار تقریبی x که آن را x_1 می‌نامیم عبارت است از

$$x_1=\frac{q}{p}\approx a$$

به این طریق معلوم می‌شود که[2]

$$x_1=\frac{6\times(60)^2+16(60)+49+\cdots}{3\times(60)^2}$$

و یا

---

۱) همان‌گونه که مثلا در دستگاه دهگانی عدد ۳۲٫۴۷۶ را می‌توان چنین نوشت

$$3\times10+2+\frac{4}{10}+\frac{7}{(10)^2}+\frac{6}{(10)^3}$$

و آن را به صورت $a+b+c+d+e$ نشان داد. در اینجا

$a=3\times10$ و $b=2$ و $c=\frac{4}{10}$ و $d=\frac{7}{(10)^2}$ و $e=\frac{6}{(10)^3}$

۲) توجه کنید که اگر صورت کسر x_1 را در دستگاه شصتگانی بر مخرج آن تقسیم کنیم خارج قسمت ۲ و باقیمانده، صورت آخرین کسر طرف راست رابطهٔ (۶) است.

$$x_۱=۲+\frac{۱۶\times(۶۰)+۴۹+\cdots}{۳\times(۶۰)^۲} \qquad (۶)$$

یعنی ارزش نسبی نخستین رقم شصتگانی x مساوی با ۲ درجه (واحد) است.

اینك که نخستین رقم شصتگانی x یعنی a را یافتیم برای تعیین ارزش نسبی دومین رقم آن در طرف چپ معادلهٔ $'$(۱) به جای x مقدار $a+b+\cdots$ را که به حقیقت نزدیکتر است و در طرف راست آن مقدار تقریبی a را قرار می‌دهیم، حاصل می‌شود

$$a+b+\cdots=\frac{q+a^۳}{p}$$

و از آنجا[1]

$$b+\cdots=\frac{q-ap+a^۳}{p}$$

یعنی[2]

$$b+\cdots=\frac{[۶\times(۶۰)^۲+۱۶\times(۶۰)+۴۹+\cdots]-[۲\times۳\times(۶۰)^۲]+(۲)^۳}{۳(۶۰)^۲}$$

$$\approx\frac{۱۶\times(۶۰)+۴۹+\cdots+۸}{۳\times(۶۰)^۲}=\frac{۵}{(۶۰)}+\frac{۱\times(۶۰)+۴۹+\cdots+۸}{۳\times(۶۰)^۲} \qquad (۷)$$

یعنی ارزش نسبی دومین رقم شصتگانی x مساوی $\frac{۵}{۶۰}$ یعنی ۵ دقیقه است.

پس دومین مقدار تقریبی x که آن را $x_۲$ می‌نامیم تعیین شد

$$x_۲=a+b$$

---

۱) پس b از تقسیم کردن $q-ap+a^۳$ بر p معین می‌شود. باقیماندهٔ این تقسیم یعنی $(q-ap+a^۳)-bp$ بعداً به کار خواهد آمد.

۲) توجه کنید که اگر در دستگاه شصتگانی صورت کسر $b+\ldots$ را بر مخرج آن تقسیم کنیم خارج قسمت ۵ دقیقه و باقیمانده، صورت آخرین کسر طرف راست رابطهٔ (۷) است.

برای تعیین ارزش نسبی سومین رقم شصتگانی x این بار در طرف چپ معادله $'(1)$ به جای x مقدار $a+b+c+\ldots$ را که به حقیقت نزدیکتر است و در طرف راست آن مقدار تقریبی $a+b$ را قرار می‌دهیم حاصل می‌شود

$$a+b+c+\ldots=\frac{q+(a+b)^{3}}{p}$$

و از آنجا

$$c+\ldots=\frac{q+(a+b)^{3}-(a+b)p}{p}$$

که می‌توان آن را چنین نوشت[1]

$$c+\ldots=\frac{(q-ap+a^{3})-bp+[(a+b)^{3}-a^{3}]}{p}$$

علت اینکه مقدار $c+\ldots$ را به شکل فوق در آوردیم این است که مقدار

$$(q-ap+a^{3})-bp$$

را که باقیماندهٔ تقسیم $q-ap+a^{3}$ بر p است قبلا حساب کرده‌ایم (رجوع شود به ذیل شمارهٔ ۱ و ۲ صفحهٔ ۱۷۳) و کافی است که $(a+b)^{3}-a^{3}$ را حساب کنیم و بر آن بیفزاییم و سپس حاصل را بر p تقسیم کنیم تا ارزش نسبی رقم c به دست آید. این بار پس از محاسبه معلوم می‌شود که

$$c=\frac{۳۹}{(۶۰)^{۲}}$$

پس سومین مقدار تقریبی x که آن را x_{3} می‌نامیم تعیین شد

$$x_{3}=a+b+c$$

---

۱) از این رو قاعده‌ای که بیرجندی از قول کاشانی نقل کرده است واضح می‌شود. (← صفحهٔ ۱۶۶ کتاب حاضر از سطر ششم به بعد).

با همین روش می توان ارزش نسبی سایر ارقام شصتگانی x را تا هر جا بخواهیم حساب کرد[۱] و به این ترتیب حاصل می شود

$$x_1 = a$$

$$x_2 = \frac{q + a^3}{p} = \frac{q + (x_1)^3}{p}$$

$$x_3 = \frac{q + (a+b)^3}{p} = \frac{q + (x_2)^3}{p}$$

بالاخره

$$x_n = \frac{q + (x_{n-1})^3}{p}$$

و عمل را تا هر اندازه که بخواهیم می توانیم ادامه دهیم. در هر عمل فقط باید مقدار تقریبی x را که در عمل ماقبل آن به دست آورده‌ایم به قوهٔ ۳ رسانده و یك عمل تقسیم انجام دهیم.

۲۶۸. مزیت روش کاشانی بر روشهای دیگر محاسبهٔ جیب یك درجه، که اصل آنها از بطلمیوس است، این است که در آن روشها دقتی که می توان در محاسبه به دست آورد محدود است و محاسبات فوق‌العاده پیچیده وطولانی است[۲] در صورتی که چنانکه گفتیم، روش کاشانی، اولا در هر عمل فقط یك بار عمل به قوهٔ سه رساندن و یك بار عمل تقسیم لازم است و ثانیاً عمل را تا هر درجه از دقت که بخواهیم می توانیم ادامه دهیم.

۲۶۹. کاشانی با روش فوق وتر روبروی قوس دو درجه را در دستگاه شصتگانی تا رقم تاسعهٔ آن به شرح زیر حساب کرده است

وتر روبروی قوس دو درجه = ۲ ;۵ ;۳۹, ۲۶, ۲۲, ۲۹, ۲۸, ۳۲, ۵۲, ۳۳

و آن را نصف کرده و جیب یك درجه را به دست آورده است.

---

۱) بیرجندی چگونگی همهٔ این محاسبات را در طی جدولی در شرح *زیج الغ بیك* (پشت برگ ۴۳) ثبت کرده است.

۲) آبو، ص ۲۴.

جیب یك درجه = ۶۰ sin۱° = ۱;۲,۴۹,۴۳,۱۱,۱۴,۴۴,۱۶,۲۶,۱۷

۲۷۰. اگر مقدار مذکور جیب یك درجه را به ۶۰ تقسیم کنیم و حاصل را در دستگاه شمار دهگانی بنویسیم سینوس یك درجه با ۲۲ رقم اعشاری به دست می‌آید

sin۱° = ۰, ۰۱۷ ۴۵۲ ۴۰۶ ۴۳۷ ۲۸۳ ۵۱۰ ۳۷۱ ۲

که هفده رقم اعشاری آن با مقدار واقعی سینوس یك درجه موافق است.

۲۷۱. در پایان این بخش عقیدهٔ یوشکویچ را دربارهٔ روش کاشانی در محاسبهٔ جیب یك درجه از کتاب تاریخ ریاضیات وی می‌آوریم[1]:

> روش کاشانی در حل عددی معادلات جبری، از حیث شایستگی، مانند کارهای خیام دربارهٔ نظریهٔ کلی معادلات درجهٔ سوم، سرآمد آثار ریاضیدانان دورهٔ اسلامی است.[2]

---

۱) یوشکویچ *G*، ص ۳۲۳، یوشکویچ *M* ص ۱۶۲.

۲) و نیز رجوع کنید به شمارهٔ ۲۲ کتاب حاضر. در آنجا عقیدهٔ لوکی را دربارهٔ رسالهٔ وتروجیب خواهید یافت

بخش ششم

کاشانی و کسرهای اعشاری

مقدمه

در آغاز این بخش باید این مطلب را خاطرنشان کنم که در چاپ اول این کتاب که در سال ۱۳۵۰ هـ.ش منتشر شد، نوشتم که «کاشانی نخستین مخترع کسرهای اعشاری است.» امّا در نتیجهٔ پژوهشهایی که اخیراً به عمل آمده معلوم شده است که اولاً نطفهٔ مفهوم کسرهای اعشاری در کتاب *الفصول فی‌الحساب الهندی* که تألیف آن در سال ۳۴۱ هجری توسط ابوالحسن احمد بن ابراهیم اقلیدسی[۱] صورت گرفته، دیده شده است. ثانیاً خود کسرهای اعشاری در کتاب *القوامی فی‌الحساب الهندی* که تألیف آن در سال ۵۶۸ هجری توسط ابونصر سموأل بن یحیی مغربی[۲] انجام یافته، به وضوح به کار رفته است.[۳]

با این حال نگارنده شك ندارد که کاشانی از این دو کتاب اطلاع نداشته و همانگونه که خود ادعا کرده است کسرهای اعشاری را به قیاس با کسرهای شصتگانی (ستّینی) اختراع کرده و نام این کسرها را هم او «اعشاری» گذاشته است. گذشته از این کاشانی در حالی که از اهمّیت اختراع خود کاملا آگاه بوده، چنانکه خواهیم دید، کسرهای اعشاری را به طور مرتب وپیگیر درآثار خود به کار برده و استعمال آنها را به دیگران نیز توصیه کرده است. مطلب جالب توجه این است که کتاب سموأل، تا آنجا که اطلاع داریم، تأثیری در انتشار کسرهای اعشاری نداشته است و حال آنکه این کسرها پس از انتشار کتاب *مفتاح الحساب* توسط کاشانی جزو مطالب درسی شد و رواج آنها را مدیون کاشانی هستیم.

---

۱) برای کسب اطلاع از احوال و آثار او رجوع کنید به‌شمارهٔ ۴۹ از کتاب (قربانی: زندگینامه *ریاضیدانان دورهٔ اسلامی*).

۲) برای کسب اطلاع دربارهٔ احوال و آثار او رجوع کنید به شماره ۸۹ کتاب (قربانی: زندگینامهٔ *ریاضیدانان دورهٔ اسلامی*)

۳) رجوع کنید به مقالهٔ *استخراج ریشهٔ nم و اختراع کسرهای اعشاری*، نوشتهٔ پروفسور رشدی راشد در جلد ۱۸ سال ۱۹۷۸ (صفحات ۱۹۱ تا ۲۴۳) مجلهٔ *Archive for History of Exact Sciences*

مفهوم کسرهای اعشاری پیش از عصر کاشانی

۲۷۲. بارها دیده شده است که مدتها پیش از آنکه اختراع یا کشف مهمی دربارهٔ موضوع معینی صورت گیرد، دانشمندانی بوده‌اند که دربارهٔ آن موضوع الهام کم و بیش مبهمی داشته‌اند. درمورد کسرهای اعشاری نیز پیش از آنکه کاشانی در اوایل سدهٔ نهم هجری (نیمهٔ اول سدهٔ پانزدهم میلادی)، چنانکه خواهیم دید، به وجهی روشن و صریح کسرهای اعشاری را وضع و تعریف کند و آگاهانه آنها را در محاسبات خود به‌کار بندد، دانشمندان احتیاج به وجود چنین کسرهایی را حس می کرده‌اند و بدون توجه به اینکه اختراع مهمی در حال تکوین است آنها را به کار می برده‌اند.

۲۷۳. نخستین بار که در تاریخ ریاضیات به مفهوم کسرهای اعشاری و یا بهتر بگوییم به نطفهٔ این مفهوم برمی خوریم چنانکه در مقدمهٔ فوق خاطرنشان کردم در کتاب *الفصول فی الحساب الهندی* تألیف اقلیدسی* (ابوالحسن احمد بن ابراهیم) است. این کتاب در سال ۳۴۱ هجری تألیف شده و در سال ۱۹۷۳ میلادی توسط دکتر احمد سعیدان مورد تحقیق قرار گرفته و در اردن به چاپ رسیده است.

ریاضیدان و منجم ایرانی کوشیار بن لبان گیلی[۱] نیز که در نیمهٔ دوم سدهٔ چهارم و احیاناً اوایل سدهٔ پنجم هجری می زیسته در مقاله‌ای موسوم به *مقاله فیمایحتاج الیه من الحساب الهندی فی صناعة النجوم* همین مفهوم را به نحو دیگری به کار برده‌است. یك نسخه از این مقاله به شمارهٔ ۲۰۹۲/۴ در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران موجود است.[۲]

کوشیار گیلانی درباب هشتم این مقاله می نویسد[۳]:

---

۱) برای کسب اطلاع از احوال و آثار او رجوع کنید به شمارهٔ ۱۳۴ کتاب (قربانی: *زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی*

۲) یك نسخهٔ دیگر نیز از این کتاب باعنوان کتاب *فی اصول حساب اللهند* در کتابخانهٔ ایاصوفیا در استانبول به شمارهٔ ۴۸۵۷ موجود است که متن عربی و ترجمهٔ انگلیسی آن به چاپ رسیده است (← لوی وپترولك). این دونسخه با هم تفاوتهای زیادی دارند و نسخهٔ دانشگاه تهران از برخی جهات اصیلتر است. آنچه درمتن کتاب حاضر از کتاب کوشیار نقل کرده‌ام از نسخهٔ دانشگاه تهران استخراج شده است و این مطالب در نسخهٔ موجود در ایاصوفیا وجود ندارد.

۳) نسخهٔ خطی پشت برگ ۳۳* «الجذر بالاصفار، نضع المال المجذور (و نقدم) قبله اصفا را عددها زوج و کلما کانت الاصفار اکثر کان الجذر ادق. ثم نستخرج جذره ولاتعنا بما تفضل منه و نعزل من مراتب الحاصل بعدد نصف الاصفار المقدمه و ما بقی منها فهو الجذر. ثم نضرب المراتب المعزولة فی ستین و نعزل من مراتب المبلغ بعدد نصف الاصفار المقدمه ومابقی فهو کسور الجذر. ثم نضرب المراتب المعزولة ایضافی ستین و نعزل من مراتب المبلغ بعدد نصف الاصفار المقدمه و ما بقی فهو کسور الکسور. و نعمل کذلك الی ان تصیر المراتب التی نعزلها اصفاراً کلها.»

* رجوع کنید به قربانی: *ریاضیدانان ایرانی*، ص ۱۹۰ و ۱۹۱ در آنجا عکس این برگها را خواهید یافت.

«برای گرفتن جذر به‌وسیلهٔ صفرها (استخراج الجذر بالاصفار) عددی را که می‌خواهیم جذر آن را بگیریم می‌نویسیم و در سمت راست آن یک عدهٔ زوج صفر می‌گذاریم و هر چه عدهٔ صفرها بیشتر باشد جذر دقیقتر خواهد بود. سپس جذر را استخراج می‌کنیم و به باقیماندهٔ آن اهمیت نمی‌دهیم و از طرف راست جذر به نصف عدهٔ صفرهایی که قبلا در سمت راست عدد گذاشته بودیم رقم کنار می‌گذاریم، آنچه باقی ماند (قسمت صحیح) جذر مطلوب است. سپس ارقامی را که کنار گذاشته‌ایم در ۶۰ ضرب می کنیم و از سمت راست حاصل به نصف عدهٔ صفرهای مذکور رقم کنار می‌گذاریم آنچه در سمت چپ باقی ماند کسر (= دقیقه‌های) جذر خواهد بود. باز ارقامی را که (در بار دوم) کنار گذاشته بودیم در ۶۰ ضرب می کنیم و از طرف راست عدد حاصل به نصف عدهٔ صفرهای مذکور رقم کنار می‌گذاریم آنچه ماند کسر کسر (= ثانیه‌های) جذر خواهد بود و عمل را ادامه می‌دهیم تا همهٔ ارقامی که باید از سمت راست کنار بگذاریم صفر شوند.»

کوشیار گیلانی از عدد ۲۴ به طریق زیر مطابق با قاعدهٔ فوق جذر تقریبی استخراج کرده است

$$\sqrt{۲۴}=\frac{۱}{۱۰۰}\sqrt{۲۴۰۰۰۰}\approx\frac{۱}{۱۰۰}\times ۴۸۹$$

سپس از دو رقم سمت راست عدد ۴۸۹ صرف نظر کرده و قسمت صحیح جذر را مساوی با ۴ گرفته است. یعنی در واقع $\frac{۴۸۹}{۱۰۰}$ را به ۸۹ر۰+۴ تجزیه کرده و ۴ را که قسمت صحیح جذر است بیرون آورده. آنگاه برای تعیین قسمت کسری جذر، چون هنوز کسرهای اعشاری اختراع نشده بوده، $\frac{۸۹}{۱۰۰}$ را به دستگاه شصتگانی برده و آن را معادل با ۵۳ دقیقه و ۲۴ ثانیه یافته است

$$\sqrt{۲۴}=۴^\circ+۵۳'+۲۴''=۴+\frac{۵۳}{۶۰}+\frac{۲۴}{(۶۰)^۲}$$

از آنچه گذشت کاملا هویداست که کوشیار گیلانی به وجهی ناخودآگاه مفهوم کسرهای اعشاری را به کار بسته است.

کوشیار گیلانی نظیر همین قاعده را برای گرفتن کعب در باب دوازدهم مقالهٔ مذکور بیان کرده و آن را *استخراج الکعب بالاصفار* نامیده است.

بعد از کوشیار گیلانی همین استخراج جذر و کعب به‌وسیلهٔ صفرها، یعنی در واقع به کار بستن مفهوم کسرهای اعشاری، در دو کتاب حساب دیگر نیز دیده می‌شود یکی کتاب *شمارنامه* (به فارسی) تألیف حاسب طبری (محمد بن ایوب، وفات ۴۸۵) و یکی دیگر کتاب *المقنع فی الحساب الهندی* (به عربی) تألیف نسوی (ابوالحسن علی بن احمد، وفات ۴۷۳) است که ابتدا آن را به فارسی نوشته بود و بعد خود آن را به عربی برگرداند و این هر دو مؤلف نیز ایرانی و از ریاضیدانان قرن پنجم هجری بوده‌اند.

۲۷۴. *شمارنامه* تا آنجا که اطلاع داریم هنوز توسط محققان مغرب زمین مورد بررسی قرار نگرفته و در چاپی هم که از آن در ایران به عمل آمده است مطالب مهم ریاضی آن مورد توجه قرار نگرفته و چنانکه باید مورد تفسیر واقع نشده (و در بسیاری از مواضع مغلوط چاپ شده) است. عنوان بابهای چهاردهم و پانزدهم از فصل سوم *شمارنامه* به ترتیب «در جذر گرفتن به اصفار» و «در کعب گرفتن به اصفار» است[۱] و خلاصهٔ فصل چهاردهم آن این است که اگر بخواهیم جذر تقریبی عدد اصمی را با دقت بیشتری بگیریم باید یك عدهٔ زوج (مثلا ۲ یا ۴ یا ۶ و غیره) صفر در سمت راست آن عدد بگذاریم[۲] و از عدد حاصل، مطابق با قاعدهٔ معمول، جذر تقریبی تا یك واحد بگیریم و از باقیماندهٔ جذر صرف نظر کنیم، آن‌گاه به عدهٔ نصف صفرهایی که قبلا در سمت راست عدد گذاشته بودیم از سمت راست جذر رقم جدا کنیم، آنچه در سمت چپ ماند قسمت صحیح جذر مطلوب است.

حاسب طبری به‌عنوان مثال از عدد ۵ درجه به طریق زیر جذر استخراج کرده

$$\sqrt{۵}=\frac{۱}{۱۰۰۰}\sqrt{۵۰۰۰۰۰۰}\approx\frac{۱}{۱۰۰۰}\times ۲۲۳۶$$

سپس از سه رقم سمت راست عدد ۲۲۳۶ صرف نظر کرده و قسمت صحیح جذر را مساوی با ۲ گرفته است یعنی در واقع $\frac{۲۲۳۶}{۱۰۰۰}$ را به ۲۳۶ر۰ + ۲ تجزیه کرده و ۲ را که قسمت صحیح

---

۱) *شمارنامه*، صفحات ۱۰۵ تا ۱۰۸ (در صفحهٔ ۱۰۶ *شمارنامهٔ* چاپی اعداد ۰۲۱ و ۱۴۱ سطرهای هشتم و نهم غلط است و باید ۰۲ و ۱۴ باشد).

۲) به همین علت است که این روش را «جذر گرفتن به اصفار» نامیده است. ضمناً خاطر نشان کرده که هر چه عدهٔ صفرها بیشتر باشد جذر دقیقتر خواهد بود.

جذر است گرفته و آن‌گاه برای تعیین قسمت کسری جذر، چون هنوز کسرهای اعشاری اختراع نشده‌بوده، $\frac{236}{1000}$ را به دستگاه شصتگانی برده و آن را معادل با ۱۴ دقیقه و ۹ ثانیه و ۳۶ ثالثه یافته است

$$\sqrt{5^\circ}=2^\circ, 14', 9'', 36'''=2+\frac{14}{60}+\frac{9}{(60)^2}+\frac{36}{(60)^3}$$

از آنچه گذشت کاملا هویداست که حاسب طبری نیز به وجهی ناخودآگاه مفهوم کسرهای اعشاری را به‌کار بسته است.

همچنین حاسب طبری در باب پانزدهم فصل سوم *شمارنامه* از عدد ۱۲ درجه به‌طریق زیر کعب گرفته است[1]

$$\sqrt[3]{12}=\frac{1}{100}\sqrt[3]{12000000}\approx\frac{1}{100}\times 228=2^\circ, 16', 48''$$

یعنی در واقع کعب ۱۲ را ۲۸ر۲ یافته و کسر اعشاری ۲۸ر۰ را به کسر شصتگانی تبدیل کرده است.

۲۷۵. وامانسوی درباب ششم ازمقالهٔ چهارم کتاب *المقنع*[2] که عنوان آن «فی جذر الدرج والدقائق و مادونهامن الکسور» و موضوع آن استخراج جذر کسرهای شصتگانی است، همان روش «جذر گرفتن به اصفار» را به کار برده و آن را «استخراج الجذر بالاصفار» نامیده و به‌عنوان مثال از عدد ۱۷ درجه به طریق زیر جذر گرفته است

$$\sqrt{17^\circ}=\frac{1}{100}\sqrt{(170000)^\circ}\approx\frac{1}{100}\times 412^\circ=4^\circ, 7', 12''$$

یعنی در واقع جذر ۱۷ را مساوی با ۱۲ر۴ یافته و قسمت کسری ۱۲ر۰ را به کسرهای شصتگانی تبدیل کرده و او هم به وجهی ناخودآگاه مفهوم کسرهای اعشاری را به کار بسته است.

---

۱) *شمارنامه*، ص ۱۰۷.

۲) نسخهٔ خطی شمارهٔ (Warn) 556 کتابخانهٔ لیدن پشت برگ ۷۸ و رجوع کنید به قربانی: *نسوی نامه* ص ۱۱۳ـ۱۱۵.

۲۷۶. روش جذر گرفتن به اصفار را که کوشیار گیلانی و حاسب طبری و نسوی به‌کار برده‌اند با علائم و اصطلاحات کنونی به‌وسیلهٔ دستور زیر می‌توان بیان کرد

$$\sqrt{a}=\frac{۱}{(۱۰)k}\sqrt{a\times(۱۰)^{۲k}}$$

و روش کعب گرفتن به اصفار حاسب طبری چنین می‌شود

$$\sqrt[۳]{a}=\frac{۱}{(۱۰)^{k}}\sqrt[۳]{a\times(۱۰)^{۳k}}$$

و به‌طور کلی

$$\sqrt[n]{a}=\frac{۱}{۱۰^{k}}\sqrt[n]{a\times(۱۰)^{nk}}$$

۲۷۷. این نکته را هم ناگفته نگذاریم که روش جذر گرفتن به اصفار در ترجمهٔ لاتینی یک کتاب عربیِ شناخته نشده که در نیمهٔ اول قرن دوازدهم میلادی صورت گرفته نیز دیده شده است.[۱]

اما در آثار ریاضیدانان اروپایی نخستین بار دو قرن بعد از حاسب طبری ونسوی یعنی در نیمهٔ اول قرن سیزدهم میلادی در کتاب *Algorithmus demonstratus* تألیف Jordanus به این روش برمی‌خوریم. اصل اسلامی این روش احیاناً به قبل از عهد طبری ونسوی می‌رسد (اگر از زمان خوارزمی شروع نشده باشد[۲])

۲۷۸. روش استخراج کعب به اصفار. نسوی همان روش مذکور در شمارهٔ ۲۷۶ را دربارهٔ کسرهای شصتگانی نیز به‌کار برده و برای استخراج جذر ۲۶ درجه و ۱۷ دقیقه چنین عمل کرده است.[۳]

$$\sqrt{۲۶^{\circ}۱۷'}=\frac{۱}{۶۰}\sqrt{(۲۶^{\circ}۱۷')\times(۶۰)^{۲}}=\frac{۱}{۶۰}\sqrt{۹۴۶۲۰''}=\frac{۱}{۶۰}\times۳۰۷'=۵^{\circ}۷'$$

اما به‌کار بردن این روش دربارهٔ کسرهای شصتگانی مدتها پیش از کوشیار و طبری ونسوی و

۱) سارتن *F*. ۲) سارتن *F* و سوتر *U*، ص ۱۱۹.
۳) قربانی: *نسوی نامه*، ص ۱۱۱ـ۱۱۲.

باز هم توسط ریاضیدانان ایرانی صورت گرفته است.

در پایان کتاب *معرفة مساحة الاشکال* تألیف بنوموسی و تحریر خواجه نصیرالدین طوسی[1] که به زبان عربی است، در ضمن شکل (= قضیهٔ) هجدهم که مربوط به تثلیث زاویه است مطلب زیر دیده می‌شود[2]:

«پس از این باید طریق به دست آوردن کعب تقریبی را بیان کنیم تا بتوانیم آن را درمورد لزوم در محاسبه به کار بریم و روشی اختیار کنیم که بزرگترین تقریب ممکن از آن به دست آید. یعنی اگر بخواهیم که تفاوت بین کعب تقریبی و کعب حقیقی مثلاً کمتر از یك دقیقه یا یك ثانیه باشد بتوانیم آن را حساب کنیم. روش عمل از این قرار است: مکعب را به اجزا یعنی ثالثه‌ها یا سادسه‌ها یا تاسعه‌ها و غیره تبدیل می کنیم و اگر آن عدد مکعب کامل بود کعب آن را استخراج می کنیم والا نزدیکترین عدد مکعب به عدد مفروض را می یابیم و کعب آن را می گیریم. اگر اجزای عدد مفروض بر حسب ثالثه باشد کعب از جنس دقیقه است و اگر بر حسب سادسه باشد کعب از جنس ثانیه خواهد بود و به این ترتیب مسائل حل می شود.»

به طور خلاصه یعنی برای استخراج کعب از عدد a که در دستگاه شصتگانی نوشته شده است به‌طریق زیر عمل می کنیم

$$\sqrt[۳]{a}=\frac{۱}{(۶۰)^{k}}\sqrt[۳]{a\times(۶۰)^{۳k}}$$

و ملاحظه می شود که در مثالی که در آغاز این شماره از نسوی آوردیم کعب به همین روش استخراج شده است. دستور فوق همان است که صورت کلی آن را در شمارهٔ ۲۷۶ نوشتم.

تبصره. ریاضیدانانی که نامشان ذکر شد (اقلیدسی و کوشیار و حاسب طبری ونسوی) در سده‌های چهارم و پنجم هجری می زیستند. در سدهٔ ششم هجری، چنانکه در مقدمهٔ این بخش خاطرنشان کردم، سموأل بن یحیی مغربی کسرهای اعشاری را در کتاب *القوامی فی الحساب الهندسی* به کار برده است.

---

۱) در جزو رسائل طوسی در حیدرآباد دکن به سال ۱۳۵۹ هـ.ق چاپ شده (صفحهٔ ۲۵).

۲) «ینبغی‌لنا ان نصف بعد ذلك تقریب ضلع المکعب لینطبق...». این عبارت را کارادوو به فرانسوی ترجمه کرده (← کارادوو U) و همهٔ کتاب *معرفة مساحة الاشکال* بنوموسی را سوتر به آلمانی برگردانده است (← سوتر G). وما عبارات فوق را طوری به فارسی برگردانده‌ایم که برای خواننده به آسانی قابل فهم باشد.

اختراع کسرهای اعشاری توسط کاشانی

۲۷۹. پیش از آنکه اروپاییان با *رسالهٔ محیطیه* و کتاب *مفتاح الحساب* کاشانی آشنایی پیدا کنند در کتابهای تاریخ ریاضیات اختراع کسرهای اعشاری را معمولاً به سیمون استون[۱] بلژیکی درسال ۱۵۸۵ میلادی، بورگی[۲] سوئیسی در حدود سال ۱۵۹۲ میلادی، و ویت[۳] فرانسوی که از ۱۵۴۰ تا ۱۶۰۳ می‌زیست و دیگران نسبت می‌دادند.[۴]

نخستین بار پاول لوکی آلمانی در کتابی که در سال ۱۹۴۴ دربارهٔ *مفتاح الحساب* نوشت و در سال ۱۹۵۱ به چاپ رسید[۵] به جهانیان اعلام کرد که کسرهای اعشاری را نخستین بار غیاث‌الدین جمشید کاشانی ریاضیدان ایرانی در سال ۱۴۲۳ میلادی یعنی در حدود یك قرن و نیم قبل از اروپاییان اختراع کرده است و چنانکه پیش از این هم گفتیم خانم نائله رجائی در سال ۱۹۵۱ میلادی رسالهٔ پایان‌نامهٔ دکترای خود را در دانشگاه آمریکایی بیروت دربارهٔ اختراع کسرهای اعشاری توسط کاشانی، نوشت.[۶]

۲۸۰. اینك برای روشن شدن موضوع اختراع کسرهای اعشاری توسط کاشانی ترجمهٔ آزاد فارسی مطالبی چند از کتاب *مفتاح الحساب* و *رسالهٔ محیطیه* وی را که در آنها به اختراع این کسرها و چگونگی ملهم شدن او به آنها اشاره شده است ذکر می‌کنیم تا بتوانیم با استناد به آنها بحث را دنبال کنیم.[۷] کاشانی در باب اول از مقالهٔ سوم *مفتاح الحساب* در ضمن تعریف کسرهای شصتگانی می‌نویسد[۸]:

> «همانگونه که در حساب با ارقام هندی (= شمار دهگانی) هر بار ۱۰ را مرفوع کرده به طرف چپ می‌بریم[۹] در اینجا هر بار ۶۰ را مرفوع کرده به‌طرف راست می‌بریم[۱۰] و همانگونه که در آنجا نخستین مرتبهٔ اعداد صحیح یکان نامیده می‌شود در اینجا نخستین مرتبهٔ اعداد صحیح درجات، به اسم مکان،

---

1) Simon Stevin 2) Bürgi 3) Viète

۴) و نیز رجوع کنید به قربانی: *نخستین مخترع*، ص ۷۴۸. ۵) لوکی R.

۶) رجائی: *رساله*. ۷) در تهیهٔ این قسمت، از کتاب لوکی R بسیار استفاده کرده‌ام.

۸) *مفتاح*، ص ۶۴: «فکما ان فی الحساب بالارقام الهندیة یرفع بکل عشرة الی الیسار فهیهنا یرفع بکل ستین الی الیمین و کما ان هناك یسمی اول مراتب الصحاح بالاحاد فهیهنا یسمی بالدرج باسم المکان و کما ان سلسلة المراتب هناك کانت واحدة فهیهنا سلسلتان احد یهما فی جانب الصعود والاخری فی جانب النزول والدرج وسط بین السلسلتین و نحن جعلناها هناك ایضا سلسلتین فمراتب السلسلتین کلها متوالیة علی نسبة واحدة.»

۹) یعنی هر ۱۰ واحد از یك مرتبه را یك واحد از مرتبهٔ بعدی محسوب می‌داریم.

۱۰) یعنی مثلاً هر ۶۰ ثالثه را یك ثانیه و هر ۶۰ ثانیه را یك دقیقه و هر ۶۰ دقیقه را یك درجه می‌گیریم (باید متوجه بود که در قدیم اعداد در دستگاه شصتگانی از طرف راست به‌چپ نوشته می‌شده است).

خوانده می‌شود و همانگونه (= بااین تفاوت) که آنجا سلسلهٔ مراتب یکی است (اما) اینجا دو سلسله هست که یکی در طرف صعود و دیگری در طرف نزول است و درجات بین دو سلسله قرار دارند و ما آنجا نیز دو سلسله وضع کردیم به قسمی که همهٔ مرتبه‌های هر دو سلسله به یك نسبت هستند.»

از مطالب فوق نتیجه می‌شود که تا زمان کاشانی عددنویسی در دستگاه شمار دهگانی فقط منحصر به نوشتن عددهای صحیح بوده و کسرهای دهگانی وجود نداشته است. اما می‌دانیم که کسرهای شصتگانی موجود بوده و آنها را در دنبال عددهای صحیح از راست به چپ می‌نوشته‌اند و درجات حد فاصل بین مرتبه‌های صحیح و مرتبه‌های کسری بوده است مثل

له ك يو يز كط مح يب رابعه

یعنی

دوبار مرفوع	مرفوع	درجه	دقیقه	ثانیه	ثالثه	رابعه
	۲۰	۱۶	۱۷	۲۹	۴۸	۱۲

که می‌توان آن را مطابق با قرارداد شمارهٔ ۱۷۸ کتاب حاضر از چپ به راست چنین نوشت

۳۵,۲۰,۱۶;۱۷,۲۹,۴۸,۱۲

کاشانی می‌گوید در شماره دهگانی تا زمان وی یك سلسله مراتب صعودی وجود داشته که همان‌گونه که امروزه معمول است از چپ به راست نوشته می‌شده مثل

$$۷۵۶۳=۷\times(۱۰)^{۳}+۵\times(۱۰)^{۲}+۶\times(۱۰)+۳$$

و وی یك سلسلهٔ نزولی از کسرهای اعشاری در شمار دهگانی وضع کرده است و مرتبهٔ یکان را حد فاصل بین عددهای صحیح و کسرهای اعشاری قرار داده. یعنی مثلا ۷۵۶۳ واحد و ۲۹۱ هزارم را به‌صورت زیر مجسم کرده است

$$۷\times۱۰^{۳}+۵\times(۱۰)^{۲}+۶\times(۱۰)+۳+\frac{۲}{(۱۰)}+\frac{۹}{(۱۰)^{۲}}+\frac{۱}{(۱۰)^{۳}}$$

۲۸۱. به طوری که در شمارهٔ ۱۶۱ بیان کردیم کاشانی در باب اول از مقالهٔ دوم مفتاح

می نویسد[۱]

«منجمان کسرهای معطوفه‌ای به کار می‌برند[۲] که مخرجهای متوالی آنها شصت و قوای متوالی شصت است تا هر جا بخواهند و آنها را به ترتیب دقیقه‌ها و ثانیه‌ها و ثالثه و رابعه‌ها و غیره می نامند و ما به قیاس حساب منجمان کسرهایی ایراد کردیم که مخرجهای متوالی آنها ده و قوای متوالی ده می‌باشد تا هر جا بخواهیم و آنها را به ترتیب «اعشار» و «دومین اعشار» و «سومین اعشار» و چهارمین اعشار نامیدیم».

از این رو پیداست که کاشانی از روی کسرهای شصتگانی به اختراع کسرهای اعشاری ملهم شده و همان‌گونه که منجمان عدد ۶۰ و قوای ۶۰ را برای مخرجهای کسرهای شصتگانی اختیار کرده‌اند او عدد ۱۰ و قوای ۱۰ را مخرج گرفته و بدان‌سان که منجمان $\frac{۱}{۶۰}$ را دقیقه و $\frac{۱}{۶۰^۲}$ را ثانیه و $\frac{۱}{۶۰^۳}$ را ثالثه و غیره نامیده‌اند او $\frac{۱}{۱۰}$ رااعشار (=دهم) و $\frac{۱}{۱۰^۲}$ را دومین اعشار (= صدم) و $\frac{۱}{۱۰^۳}$ را سومین اعشار (= هزارم) و غیره گفته است.

۲۸۲. موضعی از *مفتاح الحساب* که کاشانی در آن با صراحت و روشنی کامل از اختراع کسرهای اعشاری گفتگو کرده و به تعریف آنها پرداخته است آغاز باب ششم از مقالهٔ سوم آن کتاب است که در آنجا می نویسد[۳]:

---

۱) *مفتاح*، ص ۴۲: «والمنجمون استعملوا کسورا معطوفة...» ← ذیل شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۸۰ کتاب حاضر.

۲) مقصود از کسرهای معطوفه کسرهایی است که از عطف دو یا چند کسر حاصل شود (← ذیل شمارهٔ ۴ صفحهٔ ۷۸) مثلا کاشانی «۳ دقیقه و ۴ ثانیه و ۵ ثالثه» را که می‌توان به صورت $\frac{۳}{۶۰}+\frac{۴}{(۶۰)^۲}+\frac{۵}{(۶۰)^۳}$ نوشت کسرهای معطوفه می نامد.

۱) *مفتاح*، ص ۷۹: «الباب السادس فی تحویل الارقام الستینیة الی الهندیه وبالعکس صحاحاً و کسوراً و تحویل کسورها الی مخرج آخر و معرفة الکسورالتی وضعناها علی قیاس الکسورالستینیة و لنقدم هذالما استخر جنانسبة المحیط الی القطر فی رسالتنا المسماة بالمحیطیة و بلغنا الکسور الی التاسعه، اردنا ان نحولها الی الرقوم الهندیة لئلا یعجز المحاسب الذی لم یعرف حساب المنجمین، اخذنا کسر المحیط من مخرج هو عشرة الاف مکررة خمس مرات وهذا عدد مجرد فکانا قسمنا الواحد الصحیح عشرة اقسام وقسمنا کل عشر عشرة اقسام ثم کل قسم منها عشرة اقسام هکذا بالغاً مابلغ فسمینا الاقسام الاولی اعشاراً لکونها کذلك و الثانیة ثانی الاعشار والثالثة ثالث الاعشار و هکذا بالغا مابلغ لیکون مراتب الکسور و الصحاح علی نسبة واحده علی قیاس حساب المنجمین و سمیناها بالکسور الاعشاری. وینبغی ان یکتب الاعشار فی یمین الاحاد و ثانی الاعشار فی یمین الاعشار و ثالث الاعشار فی یمین ثانیها هکذا الی حیث بلغ، فیکون الصحاح و الکسور فی سطر واحد و العمل به فی الضرب والقسمة و استخراج الضلع الاول من المضلعات و غیر ها علی قیاس حساب المنجمین کما اوردنا بعضها فیماسبق؛ و کذایکون معرفة جنسیة المراتب علی قیاس معرفة جنسیة مراتب حسابهم، اعنی یکون عدد مرتبة الاحاد صفراً و للعشرات و الاعشار واحداً و للمأت و ثانی الاعشار اثنین و للألوف و ثالث الاعشار ثلثة و لعشرات الالوف و رابع الاعشار اربعة و هلم جرا.»

«باب ششم در تحویل ارقام شصتگانی به ارقام هندی و برعکس، و تحویل کسرهای آنها به‌مخرج دیگر و شناسایی کسرهایی که ما به قیاس کسرهای شصتگانی وضع کردیم.

و قبلا متذکر می‌شویم که پس از آنکه نسبت محیط (دایره) را به‌قطر (آن) در رسالهٔ خودمان که موسوم به محیطیه است استخراج کردیم و کسرهای (شصتگانی) آن را تا تاسعه ($=\frac{1}{60^9}$) رساندیم خواستیم که آن (کسرها)را به ارقام هندی تحویل کنیم (= دردستگاه شمار دهگانی بنویسیم) تا محاسبی که حساب منجمان (= حساب دردستگاه شصتگانی) را نمی‌داند در حساب درنماند. ما کسر محیط (= قسمت کسری عدد 2π) را با مخرجی گرفتیم که ده برابر هزار است که پنج بار تکرارشود[1] و این عددی است مجرد[2]. پس واحد صحیح را به ده قسمت (متساوی) تقسیم کردیم وهر عشر ($=\frac{1}{10}$)را نیز به ده قسمت (متساوی) تقسیم کردیم و بازهر قسمت را به ده قسمت متساوی تقسیم کردیم و عمل را به همین ترتیب ادامه دادیم و قسمتهای اول را اعشار نامیدیم، چه این گونه بودند، و قسمتهای دوم را اعشار دوم و قسمتهای سوم را اعشار سوم نامیدیم و قس علی هذا تامراتب کسرها و مراتب صحیح به قیاس حساب منجمان به یك نسبت باشند[3] و آنها را کسرهای اعشاری نامیدیم.

و باید اعشار در سمت آحاد و اعشار دوم در سمت راست اعشار اول و اعشار سوم در سمت راست اعشار دوم نوشته شوند و همین طور تا آخر و قسمت صحیح و کسری روی یك سطر نوشته شوند.

و عمل با آنها (= عمل با کسرهای اعشاری) در ضرب و تقسیم و استخراج ریشهٔ nم و جز آنها مطابق با حساب منجمان است همان گونه که قبلا بعضی از آنها را ذکر کردیم و همچنین شناسایی جنس مراتب آنها به قیاس شناسایی جنس مراتب حساب منجمان است یعنی عدد مرتبهٔ آحاد صفر است وعدد مرتبهٔ دهگان و اعشار (= دهمها) یك و عدد مرتبهٔ صدگان و اعشار

---

۱) یعنی $10^{16} = 10\times(1000)^5$.

۲) عدد مجرد یعنی $(10)^n$ ← شمارهٔ ۹۹ کتاب حاضر.

۳) یعنی همان گونه که مثلا واحد مرتبهٔ یکان یك دهم واحد مرتبهٔ دهگان است واحد مرتبهٔ دهم (اعشار) نیز یك دهم واحد مرتبهٔ یکان باشد و قس علی هذا.

دوم (= صدمها) ۲ و برای مرتبهٔ هزارگان و مرتبهٔ اعشار سوم (هزارمها) ۳ و برای مرتبهٔ ده‌هزارگان و اعشار چهارم (ده هزارمها) ۴ است و غیره.[۱]

و در ضرب دو عدد مفرد[۲] اگر مرتبه‌های مضروب و مضروب فیه در یك طرف مرتبهٔ یکان باشند عدد مرتبهٔ حاصلضرب مساوی بامجموع اعداد مرتبه‌های آنها در طرف مجموع است و اگر در دو طرف مرتبهٔ یکان باشند عدد مرتبهٔ حاصلضرب مساوی با تفاضل اعداد مرتبه‌های آنها در طرف فاضل می‌باشد[۳] و در تقسیم دو عدد مفرد هر گاه عدد مرتبهٔ مقسوم از عدد مرتبهٔ مقسوم علیه بزرگتر باشد مرتبهٔ خارج قسمت متعلق به طرفی (از سلسله‌های صعودی و نزولی قوای ده) است که عدد آن بیشتر است والامتعلق به طرف دیگر است، و در صورتی که مقسوم و مقسوم علیه هر دو در یك طرف مرتبهٔ یکان باشند مرتبهٔ خارج قسمت مساوی با تفاضل اعداد مرتبه‌های مقسوم و مقسوم علیه است و اگر در دو طرف مرتبهٔ یکان واقع باشند عدد مرتبهٔ خارج قسمت

---

۱) عدد هر مرتبه یعنی قوهٔ ده در آن مرتبه. مثلا عدد مرتبهٔ هزارگان (10^3) عدد ۳ است. اماچون کاشانی اعداد منفی را به‌کار نمی‌برده مثلا عدد مرتبهٔ هزارم ($\frac{1}{10^3}$)را نیز ۳ گرفته است با این تفاوت که مرتبهٔ هزارگان را از سلسلهٔ صعودی و مرتبهٔ هزارم (اعشار سوم) را از سلسلهٔ نزولی محسوب داشته. ضمناً این مطلب شایان توجه است که کاشانی قوهٔ ۱۰ را در مرتبهٔ یکان صفر گرفته (عدد مرتبهٔ آحاد صفر است) و برای صفر نیز مفهوم عدد قائل شده است و تا آنجا که اطلاع داریم قبل از کاشانی کسی برای صفر این مفهوم را در نظر نگرفته است (ورجوع کنید به‌شماره‌های ۱۰۶ و ۲۲۰ کتاب حاضر).

۲) در دستگاه دهگانی، به‌قول کاشانی، عدد مفرد یعنی عددی که به صورت

$$a\times\frac{1}{10^n} \quad \text{و یا} \quad a\times(10)^n$$

نوشته شود که در آنها a عدد صحیح یك رقمی است.

۳) مقصود این است که در ضرب دو عدد مفرد $a\times10^n$ و $b\times10^m$ قاعده‌های زیر که با مثال عددی بیان می‌شوند حکمفرما است (علت اینکه باید چند حالت در نظر گرفت این است که قوای منفی به کار نرفته است)

$$a(10^5)\times b(10^3)=ab(10^8)$$

$$a\left(\frac{1}{10^5}\right)\times b\left(\frac{1}{10^3}\right)=ab\left(\frac{1}{10^8}\right)$$

$$a(10^5)\times b\left(\frac{1}{10^3}\right)=ab(10^2)$$

$$a(10^3)\times b\left(\frac{1}{10^5}\right)=ab\left(\frac{1}{10^2}\right)$$

مساوی با مجموع مرتبه‌های مقسوم و علیه است»[۱].

۲۸۳. خلاصه کاشانی، چنانکه خود می‌گوید، برای آنکه کسانی که با حساب منجمان یعنی محاسبه با کسرهای شصتگانی (دقیقه و ثانیه و ثالثه و غیره) آشنایی ندارند بتوانند محاسبات کسری را نیز در دستگاه دهگانی انجام دهند با الهام گرفتن از کسرهای شصتگانی که در آنها واحد هر مرتبه ۶۰ برابر واحد مرتبهٔ بعدی است (یعنی مثلاً هر دقیقه ۶۰ ثانیه و هر ثانیه ۶۰ ثالثه است) کسرهایی اختراع کرده که در آنها واحد هر مرتبه ۱۰ برابر واحد مرتبهٔ بعدی است (یعنی مثلاً یك دهم ده برابر یك صدم و یك صدم ده برابر یك هزارم است) و آنها را کسرهای اعشاری نامیده است. با این تفاوت که منجمان کسرهای شصتگانی را از راست به چپ می‌نویسند ولی کاشانی می‌گوید که کسرهای اعشاری را باید مطابق با اعداد دستگاه دهگانی از چپ به راست و در دنبال عدد صحیح نوشت، و مراتب نزولی این کسرها را کاشانی اعشار و اعشار دوم و اعشارسوم و غیره نامیده است.

۲۸۴. مشاهده می‌شود که در حالی که کاشانی محاسبه با اعداد صحیح و کسرها را در دستگاه شصتگانی و همچنین محاسبه با اعداد صحیح را در دستگاه دهگانی از پیشینیان خود می‌داند اختراع کسرهای اعشاری را با صراحت کامل از اختراعات خود می‌شمارد و می‌گوید که این کسرها را به قیاس کسرهای شصتگانی اختراع کرده است، و می‌بینیم که حتی نام کسر اعشاری را کاشانی برای این کسرها وضع کرده است.

کاشانی کاملا به‌اهمیت اختراع خود واقف بوده و هوشیارانه کسرهای اعشاری را هم در *رسالهٔ محیطیه* و هم در *مفتاح الحساب* در ضمن محاسبات به کار برده و چون این اختراع تازه و نو بوده، هر جا فرصتی به دست آورده توضیحی دربارهٔ آن داده است تا رفته‌رفته دیگران با آن آشنا شوند.

از جمله پس از آنکه در *رسالهٔ محیطیه* نسبت محیط دایره به‌قطر آن یعنی عدد π را

---

۱) یعنی در تقسیم دو عدد مفرد "$a\times10$" و "$b\times10$" قاعده‌های زیر که با مثالهای عددی بیان می‌شوند حکمفرماست

$$a(10^5):b(10^2)=\frac{a}{b}(10^3)$$

$$a(10^5):b\left(\frac{1}{10^2}\right)=\frac{a}{b}(10^7)$$

$$a(10^3):b(10^5)=\frac{a}{b}\left(\frac{1}{10^2}\right)$$

$$a\left(\frac{1}{10^3}\right):b\left(\frac{1}{10^5}\right)=\frac{a}{b}(10^2)$$

و غیره

برحسب کسرهای شصتگانی تا تاسعه ($=\frac{1}{60^9}$)، چنانکه در بخش چهارم کتاب حاضر دیدیم، حساب کرده است، در فصل هشتم آن رساله آن عدد را به دستگاه اعشاری تبدیل کرده و 2π را مساوی با

$$2\pi = ۶٫۲۸۳\ ۱۸۵\ ۳۰۷\ ۱۷۹\ ۵۸۶\ ۵$$

به دست آورده و برای آنکه خوانندهٔ رساله با این اختراع جدید آشنا شود بلافاصله نوشته است[۱]:

«و بدان که آن ۲ که در آخرین مرتبهٔ کسرها است[۲] به منزلهٔ دقیقه‌ها برای عدد صحیح ۶ است بنابر آنکه ده دقیقه یك واحد صحیح باشد و اگر بخواهیم، این مرتبه را اعشار می‌نامیم، و آن ۸ که در سمت راست آن است به منزلهٔ ثانیه‌ها است و آن را اعشار دوم می‌نامیم و آن ۳ که بعد از آن است به منزلهٔ ثالثه‌ها است و آن را اعشار سوم می‌نامیم و به همین ترتیب، به قیاس حساب نجوم، و برای این ما آن کسر را از مخرج مفرد گرفتیم و آن واحد است و این روش را در حساب هندی مااختراع کرده‌ایم.»

ازدقت در مطالب فوق آشکار می‌شود که اینکه کاشانی می‌گوید که کسرهای اعشاری را به قیاس حساب منجمان اختراع کرده با حقیقت وفق می‌دهد.

۲۸۵. کاشانی برای نوشتن کسرهای اعشاری به چند طریق زیر عمل کرده و اگرچه او ممیز را اختراع نکرده ولی کسرهای اعشاری را تقریباً به شکلی که امروزه معمول است می‌نوشته.

وی قسمتهای صحیح و اعشاری را با رنگهای مختلف، مثلاً سیاه و سرخ، روی یك سطر می‌نوشته و یا قسمت صحیح را با خط ریز و قسمت اعشاری را با خط درشت می‌نوشته (بالخفاء و الجلاء) و یا اینکه اسامی صحیح و کسر را بالای قسمتهای صحیح و کسری ثبت می‌کرده و آنها را با خط قائم ازیکدیگر جدا می‌نموده است. مثلا ۲۵ر۴۲۰ را این گونه نوشته

---

۱) واعلم ان الاثنین اللذین فی آخر مراتب الکسور هما بمنزلة الدقایق للستة الصحاح علی ان عشر دقایق یکون واحداً صحیحاً و ان شئنا نسمی هذه المرتبه بالاعشار و الثمانیة التی عن یمینها بمنزلة الثوانی و نسمیها بثانی الاعشاروالثلثة بعدها بمنزلة الثوالث و نسمیها بثالث الاعشار وعلی هذا بقیاس حساب النجوم و لهذا اخذنا من مخرج مفرد و هو واحد. و هذا الطریق فی الحساب الهندی مما استنبطناه.»

۲) مقصود رقم ۲ درعدد ... ۶,۲۸۳۱ است که بلافاصله در سمت راست ممیز قرار دارد.

صحیح	کسر
۴۲۰	۲۵

گاهی نیز پس از نوشتن عدد، نام آخرین مرتبهٔ اعشاری را ثبت می‌کرده و با این روش کاملا می‌توان قسمت صحیح عدد را از قسمت اعشاری آن تشخیص داد. مثلا کاشانی عدد ۸۳ر۳۴۸۹ را به صورت زیر نوشته است

۸۳۳۴۸۹ رابع الاعشار

یعنی رقم ۹ سمت راست از جنس اعشار چهارم (ده هزارم) است و یا به عبارت دیگر عدد فوق چهار رقم اعشاری دارد و بنابراین ارقام اعشاری آن عبارتند از ۳۴۸۹ و قسمت صحیح آن ۸۳ است.

چند مثال از کاربرد کسرهای اعشاری توسط کاشانی

گفتیم که کاشانی کسرهای اعشاری را هوشیارانه در آثار خود به کار برده است. وی برای آنکه مزیت این گونه کسرها را در محاسبات عملا به ثبوت رساند در مواضع مختلف از *مفتاح الحساب* و *رسالهٔ محیطیه* روش محاسبه با آنها را ذکر کرده و مثالهای مختلف آورده است. از جمله:

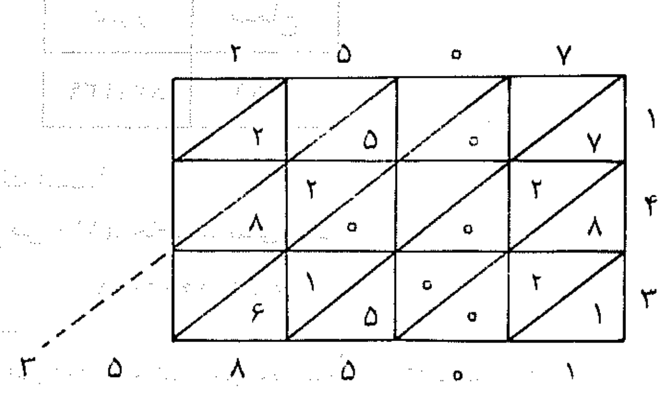
۲۸۶. **مثال ۱.** (*مفتاح* ص ۵۴)، عمل ضرب ۲۵ر۰۷×۱۴ر۳ را به‌وسیلهٔ شبکهٔ ضرب انجام داده و در شبکهٔ مزبور ارقام اعشاری را درشت و ارقام قسمت صحیح را ریز نوشته و حاصلضرب یعنی ۳۵۸ر۵۰۱ را به دو صورت زیر نشان داده است

حاصلضرب

۳۵۸ ۵۰۱

یا

۳۵۸
۵۰۱
۱۰۰۰



۲۸۷. مثال ۲. (مفتاح، ص ۸۲ و ۸۳)، کاشانی عدد (ح کط مد ثالثه) را که در دستگاه شصتگانی نوشته شده به دستگاه اعشاری تحویل کرده و جواب را

۱۴۱۵۹۳ سادس الاعشار

یعنی ۱۴۱۵۹۳ر۰ یافته است.

همچنین عدد اعشاری ۳۷۶ر۰ را به دستگاه شصتگانی برده و جواب را

کب لج لو ثالثه

یعنی

$$\frac{۲۲}{۶۰}+\frac{۳۳}{(۶۰)^۲}+\frac{۳۶}{(۶۰)^۳}$$

به دست آورده است.

۲۸۸. مثال ۳. (مفتاح ص ۸۴)، برای تبدیل اعداد از دستگاه شصتگانی به دستگاه اعشاری و برعکس کاشانی جدولی تشکیل داده است تا کار سهل باشد.

۲۸۹. مثال ۴. (مفتاح ص ۱۰۳)، برای محاسبهٔ مساحت n ضلعی منتظم کاشانی مقدار $\frac{n}{۴}\mathrm{cotg}\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ را برای چند ضلعیهای منتظم مهم حساب کرده تا برای محاسبهٔ مساحت S چند ضلعی، مربع ضلع آن را در عدد مذکور ضرب کنند (رجوع کنید به شمارهٔ ۲۰۳ کتاب حاضر).

مثلا مساحت شش ضلعی منتظمی را که طول هر ضلع آن ۵ر۲۰ ذراع باشد حساب کرده و جواب را به صورت

کسور	صحاح
۸۴۱۴۳۹	۱۰۹۱

یعنی ۸۴۱۴۳۹ر۱۰۹۱ یافته است.[۱]

۲۹۰. مثال ۵. (مفتاح ص ۱۱۰)، حاصلضرب‌های عدد

$$\pi = ۳٫۱۴۱۵۹۳۱$$

۱) در مفتاح الحساب چاپی (ص ۱۰۴) ارقام کسری این عدد اشتباهاً ۸۴۱۰۷۹ نوشته شده است.

یعنی مقدار تقریبی نسبت محیط دایره به قطر آن را در اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰ در جدولی قرار داده است تا در موقع محاسبه از آن استفاده کنند.

۲۹۱. مثال ۶. (*مفتاح* ص ۱۱۰)، حاصلضرب های عدد

$$\frac{\pi}{۴}=۰٫۷۸۵۳۹۸۲۵۱$$

یعنی نسبت مساحت دایره به مربع قطر آن را در جدولی قرار داده است.

۲۹۲. مثال ۷. (*مفتاح*، ص ۱۱۲)، مساحت دایره‌ای را که شعاع آن ۷۷ ذراع باشد به دو طریق حساب کرده و جواب را مساوی با

$$۱۸۶۲۶٫۵۰۴۸۹۷$$

به دست آورده است.

۲۹۳. مثال ۸. (*مفتاح*، ص ۲۳۹)، کاشانی در مثال هفتم از فصل دوم از باب چهارم *مفتاح الحساب* که مربوط به وصایا است مسألهٔ زیر را مطرح کرده:

«مردی سه پسر داشت و وصیت کرد که پس از مرگش به اندازهٔ سهم ارث هر یك از فرزندانش به شخصی معین و به اندازهٔ جذر تفاضل ثلث ماترك و سهم هر یك از فرزندان را به شخص دیگری بدهند. باید سهم هر یك را تعیین کرد.»

برای حل مسأله کاشانی ماترك را مساوی با ۱۰۰۰ دینار و سهم شخص دوم را x گرفته و معادلهٔ مسأله را به صورت زیر تشکیل داده است.

$$۴\left(۳۳۳\frac{۱}{۳}-x^{۲}\right)+x=۱۰۰۰$$

و ریشهٔ مثبت این معادله را مساوی با ۹٫۲۵۴۵ به دست آورده و این سهم شخص دوم است و سهم شخص اول و هر یك از فرزندان را مساوی با ۲۴۷٫۶۸۶۴ حساب کرده است.

۲۹۴. مثال ۹. (*مفتاح*، صفحات ۲۴۴ تا ۲۴۷)، در مثالهای پنجم و ششم و هفتم از فصل سوم از باب چهارم از مقالهٔ پنجم *مفتاح الحساب* کاشانی سه مسألهٔ محاسبهٔ هندسی را حل کرده و در آنها کسرهای اعشاری را به‌کار برده و جوابها را برحسب کسر اعشاری حساب کرده است و ما به‌عنوان نمونه صورت مسألهٔ مثال هفتم مذکور را در اینجا به اختصار می‌نویسیم (*مفتاح* ص ۲۴۷):

«می‌خواهیم در داخل مثلثی که طول اضلاع آن معلوم است نقطه‌ای بیابیم که اگر آن را به

رأسهای مثلث وصل کنیم سه مثلث به دست آید که مساحت اولی نصف مساحت دومی و مساحت دومی ثلث مساحت سومی باشد.»

۲۹۵. مثال ۱۰. در فصل هشتم *رسالهٔ محیطیه* کاشانی مقدار 2π را چنانکه قبلا گفتیم با ۱۶ رقم اعشاری دقیق به دست آورده و مضارب 2π را در اعداد از ۱ تا ۱۰ حساب و در جدولی ثبت کرده است. و در فصل نهم همان رساله روش به کار بردن جدول مذکور را شرح داده و به‌عنوان مثال طول محیط دایره‌ای را که قطرش ۶۵۰۸۴۴ر۱۲۵ ذراع باشد به دو نوع حساب کرده و آن را مساوی با

۴ ۰۸۹ ۳۷۴٫ ۲۴۳ ۴۶۴ ۱۵۴ ۱۹

به دست آورده است، و همچنین قطر دایره‌ای را که طول محیطش مساوی با ۶۵۰۸۴۴ر۱۲۵ ذراع باشد حساب کرده و آن را مساوی با ۰۶ر۵۸۵ ۳ ۱۰۳ به دست آورده است.

فهرست منابع و مآخذ*

(به ترتیب الفبایی علائم اختصاری آنها)

آبو A

Aaboe,Asger: «Al-Kashi's Iteration Method for the determination of sin 1°», *Scripta Mathematica*, vol. 20, 1954, pp. 24-29

اریستیدمار

Aristide Marre: «Le Talkhys d'Ibn Albanna», *Atti de'Nuovi Lincei*, vol. 17, 1864, pp. 289-319.

استوری P = ستوری P

Storey, C. A. *Persian Literature*, vol. II, part I, London, 1958.

اسمیث H = سمیث P

Smith, D. E. *History of Mathematics*, 2 vol., vol I, 1951; vol. II, 1953, U.S.A.

التفهیم

التفهیم لاوائل صناعة التنجیم، تألیف ابوریحان بیرونی، با تصحیح و مقدمه و شرح و حواشی توسط آقای جلال همائی، چاپ تهران ۱۳۱۶ـ۱۳۱۸.

الدومیلی S

Mieli, Aldo: *La science arabe et son rôle dans l'évolution scientifique mondiale*, Leiden, 1966.

الفهرست

کتاب *الفهرست*، تألیف ابوالفرج محمد بن اسحاق معروف به ابن الندیم، چاپ فوگل (Flügel)، جلد اول لایپتزیك ۱۸۷۱ م.

---

*) نام کتابهای دیگری که مورد استفاده واقع شده و در این فهرست نیامده در متن کتاب حاضر یا در ذیل صفحات آن آمده است.

این کتاب را آقای م. تجدد به فارسی ترجمه کرده است: تهران، کتابفروشی ابن‌سینا، ۱۳۴۳ هـ.ش. (در کتاب حاضر از این ترجمه به عنوان «ترجمهٔ فارسی الفهرست» نام برده‌ایم).

ایسیس

Isis. *Official Quarterly Journal of the History of Science Society*.

مجلهٔ ایسیس را دانشمند فقید جرج سارتن در سال ۱۹۱۳ میلادی تأسیس کرد که هنوز هم منتشر می‌شود.

بروکلمان

Brockelmann, Carl: *Geschichte der Arabischen Litteratur*

در کتاب حاضر از چاپ دوم (۱۹۴۳ـ۱۹۴۹) جلدهای اول ودوم کتاب فوق با عنوانهای «بروکلمان G_1» و «بروکلمان G_2» و از متممهای آن با عنوان «بروکلمان S_1» و «بروکلمان S_2» نام برده‌ایم (شماره‌های صفحات G_1 و G_2 که در کتاب حاضر به آنها اشاره شده مربوط به چاپ دوم است).

بیرجندی: شرح زیج

شرح *زیج الغ بیك*، تألیف عبدالعلی بن محمد بن حسین نظام‌الدین بیرجندی، نسخهٔ خطی شمارهٔ ۴۷۳ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران.

تاریخ الحکماء

تاریخ الحکماء، مختصر الزوزنی من کتاب اخبار العلماء باخبار الحکماء تألیف جمال‌الدین علی بن یوسف القفطی، چاپ (Lippert)، لایپتزیك، ۱۹۰۳.

ترجمهٔ فارسی *تاریخ الحکماء* از قرن یازدهم هجری، مقابله و تصحیح و حواشی و مقدمه به کوشش خانم بهین دارائی، تهران ۱۳۴۷.

تحریر اقلیدس

تحریر اصول اقلیدس، توسط خواجه نصیرالدین طوسی، چاپ سنگی تهران، ۱۲۹۸ هـ.ق.

حبیب السیر

تاریخ حبیب‌السیر فی اخبار افراد بشر تألیف غیاث‌الدین خواندمیر، چاپ تهران (کتابفروشی خیام).

داخل: رساله

Dakhel, Abdul-Kader: *Al-Kashi on Root Extraction*, American University of Beirut, 1960.

دایرةالمعارف اسلام

Encyclopédie De L'Islam

چاپ اول، چهار مجلد (و یك جلد ضمیمه)، ۱۹۱۳ـ۱۹۳۴ لیدن، چاپ جدید. تاکنون سه جلد از آن از ۱۹۶۰ به بعد چاپ شده است (این کتاب به زبانهای انگلیسی و آلمانی نیز چاپ شده است. به‌عنوان مقالات آن طوری ارجاع کرده‌ام که بتوان آنها را در هر چاپی که در دسترس باشد پیدا کرد).

دایرةالمعارف فارسی

به سرپرستی آقای دکتر غلامحسین مصاحب، جلد اول (اـ س)، تهران ۱۳۴۵

رجائی: رساله

Raja'i, Na'ila: *The Invention of Decimal Fractions in the East and in the West*

رسالهٔ دکترا است که در سال ۱۹۵۱ در دانشگاه آمریکائی بیروت نوشته شده و متأسفانه هنوز هم به چاپ نرسیده است و من آن را ندیده‌ام ولی چون در متن کتاب از آن اسم برده‌ام در این فهرست ثبت شد.

رزنفلد و یوشکویچ

جمشید غیاث‌الدین الکاشی، *مفتاح الحساب* و *الرسالة المحیطیة*، الترجمه لبوریس رزنفیلد، التحریر لفلادیمیرسیغال و ادولف یوشکیفیتش، الشرح لادولف یوشکیفیتش و بوریس رزنفیلد، موسکو ۱۹۵۶.

مشتمل بر متن عربی *مفتاح الحساب* و رسالهٔ محیطیه و ترجمه وشرح آنها به زبان روسی و همچنین ترجمه و شرح رسالهٔ *دستورالعمل و تصحیح الجدول* تألیف میرم چلبی به زبان روسی.

رشدی راشد: حلّ معادلات جبری

Rashed, R. *Résolution des Equations Numériques et Algèbre: Scharaf-al-Din al Tūsī, Viète*, Archive for History of Exact Sciences, vol: 12, 1974, n° 4, pp244-290

سارتن F

Sarton, George: «The first explanation of decimal fractions», *Isis*, vol. 23, pp. 168-169.

سارتن I

Sarton, George: *Introduction to the History of Science*, vol. I, 1950; vol. II & III (each in 2 parts), 1953, Baltimore.

سدیو A

Sedillot, L. A. «De l'algèbre chez let Arabes» *Journal asiatique*, 5me Série, tame II, 1853, pp. 323-356.

سدیو P

Sedillot, L.A. *Prolégomènes des tables astronomiques d'Oloug-Beg*, Paris, 1853.

سوتر G

Suter, Heinrich: *Über die Geometrie der Sohne des Mûsâ b. Schâkir*, Bibliotheca Mathematica-3F, III, 1902, pp. 259-272.

سوتر M

Suter, Heinrich: *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*, Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften..., X. Heft, Leipzig, 1900.

سوتر U

Suter, Heinrich: *Über das Rechenbuch des Alî ben Ahmed el Nasawî*, Bibliotheca Mathematica 3 Folge, 7. Band, 1906-1907, pp. 113-119.

شمارنامه

شمارنامه، تألیف محمد بن ایوب طبری، انتشارات بنیاد فرهنگ ایران، ۱۳۴۵

شوی B

Schoy, Carl: Beitrage zur arabischen Trigonometrie, *Isis*, vol. V, 1922/23, pp. 364-399.

شوی T

Schoy, Carl: *Die trigonometrischen Lehren des persischen astronomen Abu'l-Raihan Muh. ibn Ahmad al-Bîrûnî*, Hanover 1927.

صاییلی O

Sayili, Aydin: *The Observatory in Islam*, Ankara, 1960.

علم الفلک

علم الفلک، تاریخه عندالعرب فی القرون الوسطی، تألیف کارل نالینو (Carl Nallino)، رم، ۱۹۱۱.

فهرست دانشگاه

فهرست نسخه‌های خطی کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران، تألیف آقای محمد تقی دانش‌پژوه، در پانزده جلد.

فهرست سوم ادبیات

فهرست نسخه‌های خطی کتابخانهٔ دانشکدهٔ ادبیات (تهران)، مجموعهٔ امام جمعهٔ کرمان، نگارش آقای محمد تقی دانش‌پژوه. به جای شمارهٔ اول سال سیزدهم مجلهٔ دانشکدهٔ ادبیات تهران، مهرماه ۱۳۴۴.

فهرست رضوی

فهرست *کتابخانهٔ آستان قدس رضوی*، تألیف آقای عبدالعلی اکتایی، جلد سوم فصل هفدهم.

فهرست مجلس

فهرست *کتابخانهٔ* مجلس *شورای ملی* در ۱۵ جلد.

فهرست میکروفیلمهای دانشگاه

فهرست میکروفیلمهای کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران، تألیف آقای محمد تقی دانش پژوه، تهران ۱۳۴۸ هـ.ش.

قاضی زاده

قاضی زادهٔ رومی (موسی بن محمد بن محمود)، تحریر *رسالة فی استخراج جیب الدرجة الواحده* (تحریر رسالهٔ وتر وجیب کاشانی است در ۱۲ صفحه و در سال ۱۲۹۹ هـ.ق. در تهران به چاپ سنگی رسیده و نسخه‌های چاپی آن در پایان بعضی از نسخه‌های چاپی *مفتاح الحساب* دیده می شود).

قانون مسعودی

القانون المسعودی، تألیف ابوریحان بیرونی، چاپ حیدرآباد ۱۹۵۴ـ۱۹۵۶ در سه جلد.

قربانی: ابن قنفوذ

قربانی، ابوالقاسم: «ابن قنفوذ و رمزها و علامتهای جبری که وی به کار بسته است»، *نشریهٔ علمی و فنی سخن*، شمارهٔ ۲، سال ششم، خرداد ماه ۱۳۴۶ صفحات ۵۷ تا ۹۵.

قربانی: بیرونی نامه

قربانی، ابوالقاسم: *بیرونی نامه*، تحقیق در *آثار ریاضی استاد ابوریحان بیرونی*، شمارهٔ ۱۰۷ از سلسلهٔ انتشارات انجمن آثار ملی، تهران ۱۳۵۳ هـ.ش.

قربانی: تاریخ پی

قربانی، ابوالقاسم: «تاریخ عدد پی در شرق وغرب»، مجلهٔ سخن، دورهٔ ششم، شمارهٔ ۵، تیر ماه ۱۳۳۳ هـ.ش.

قربانی: تحریر استخراج الاوتار

قربانی، ابوالقاسم: *استخراج الاوتار* تألیف استاد ابوریحان بیرونی، شمارهٔ ۱۲۴ از سلسلهٔ انتشارات انجمن آثار ملی، تهران ۱۳۵۵ هـ.ش.

قربانی: دو ریاضیدان ایرانی

قربانی، ابوالقاسم: «دو ریاضیدان ایرانی و شمه‌ای دربارهٔ عددهای متحاب»، از نشریات مرکز

تحقیقات علمی و تاریخی مدرسهٔ عالی دختران ایران، دیماه ۱۳۴۷ هـ.ش.

قربانی: ریاضیدانان

قربانی، ابوالقاسم: «ریاضیدانان ایرانی از خوارزمی تا ابن سینا»، از نشریات مرکز تحقیقات علمی و تاریخی مدرسهٔ عالی دختران ایران، ۱۳۵۰ هـ.ش.

قربانی: زندگینامه

قربانی ، ابوالقاسم : *زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی از سدهٔ سوم تا سدهٔ یازدهم هجری*، نشر دانشگاهی، تهران ۱۳۶۵ هـ.ش.

قربانی: علامتهای جبری

قربانی، ابوالقاسم: «رمزها و علامتهایی که مسلمانان در جبر به کار برده‌اند»، *نشریهٔ علمی وفنی سخن*، شمارهٔ ۱، سال ششم، ۱۳۴۶، صفات ۴ تا ۷.

قربانی: فارسی‌نامه

قربانی، ابوالقاسم: *فارسی نامه*، احوال و آثار کمال‌الدین فارسی ریاضیدان و نورشناس ایرانی» مؤسسهٔ نشر هما، تهران ۱۳۶۲ هـ.ش.

قربانی: قطب‌الدین

قربانی، ابوالقاسم: «قطب‌الدین شیرازی، ریاضیدان بزرگ ایرانی»، مجلهٔ *راهنمای کتاب*، سال یازدهم، شمارهٔ هشتم، صفحات ۴۲۹ تا ۴۳۵.

قربانی: مثلث حسابی

قربانی، ابوالقاسم: «مثلث حسابی خیام (یا پاسکال؟)، دستور دوجمله‌ای خیام (یا نیوتن)»، مجلهٔ سخن، دورهٔ دهم، شمارهٔ ۱۰، ۱۳۳۸، صفحات ۱۰۹۷ تا ۱۱۰۵.

قربانی: مسئلهٔ شطرنج

قربانی، ابوالقاسم: «مسئلهٔ شطرنج»، مجلهٔ سخن، دورهٔ ششم، شمارهٔ ۶، ۱۳۳۴، صفحات ۵۰۳ تا ۵۰۶.

قربانی: نخستین مخترع

قربانی، ابوالقاسم: «نخستین مخترع کسرهای اعشاری»، مجلهٔ سخن، دورهٔ پنجم، شمارهٔ ۱۰، ۱۳۳۳، صفحات ۷۴۷ تا ۷۵۳.

قربانی: نسوی نامه

قربانی، ابوالقاسم: تحقیق در *آثار ریاضی علی بن احمد نسوی*، انتشارات بنیاد فرهنگ ایران، تهران ۱۳۵۱ هـ.ش.

کارادوو *A*

Carra de vaux: *Sur l'histoire de l'arithemétique arabe*, Bibliotheca Mathematica, No 2, 1899, pp. 33-36.

کارادوو *U*

Carra de vaux: *Une proposition du Livre des Fils de Mousa sur les calculs approchés*, Bibliotheca Mathematica, Nouvelle série, 12, pp. 1-2.

کانتور *G*

Cantor, M.: «*Vorlesungen über goschichte der Mathematik*, 4 Band, Nachdruch der dritten Auflage von 1907, Stutgart 1965

کراوزه *S*

Krause, Max: *Stambuler Handschriften islamischer Mathematiker*, Quellen und Studien zur Geschichte der Math. Aastr. U. Physik, Abteilung B. Studien. Band 3, 1936.

کشف الظنون

کشف الظنون عن اسامی الکتب و الفنون، تألیف حاجی خلیفه (مصطفی بن عبدالله کاتب چلبی مورخ و نویسندهٔ ترک) متن عربی این کتاب با ترجمهٔ لاتینی آن در سالهای ۱۸۳۵ تا ۱۸۵۸ در هفت جلد توسط فلوگل چاپ شده است. در استانبول نیز در دو جلد و یک ذیل به چاپ رسیده است (ازهر دو چاپ استفاده کرده‌ام).

کندی *A*

Kennedy, E. S. «Al-Kashi's treatise on astronomical Observational instrument, *Journal of Near Eastern Studies*, vol. 20, 1961, pp. 98-108.

کندی *C*

Kennedy, E.S. «Al-Kâshi's Plate of Conjonction», *Isis*, vol. 38, 1947, pp. 56-59. همین مقاله به فارسی و با عنوان *لوح اتصالات* کاشی در مجلهٔ ایران و آمریکا جلد ۴ صفحات ۵۸ تا ۶۱ به چاپ رسیده است.

کندی *E*

Kennedy, E.S.: «A Fifteenth-Century Lunar Eclipse Computer», *Scripta Mathematica*, vol. 17, 1951, pp. 91-97.

کندی *I*

Kennedy, E.S. «An Islamic Computer for Planetary Latitudes», *Journal of the American Oriental Society*, N. 71, 1951, pp. 13-21.

کندی L

Kennedy, E.S. «A letter of Jamshid al-Kashi to his father, *Scientific research and personnalities at a fifteenth century court,* Orientalia NS, vol. 29, 1960, pp. 191-213.

این مقاله را متأسفانه در اختیار نداشته و از آن استفاده نکرده‌ام ولی چون در متن به آن اشاره کرده‌ام نامش در اینجا ثبت شد.

کندی P

Kennedy,E.S. :«The Planetary Equatorium of Jamshid Ghiyath al-Din al Kashi», *Princeton University Press,* 1960.

کندی T

Kennedy, E.S. «A Fifteenth - Century Planetary Computer al-Kashi's «Tabaq al-Manateq»: I. Motion of the Sun and Moon in Longitude. II. Longitudes, Distances and Equations of Planets», *Isis*, vol. 41, 1950, pp. 180-183-*Isis,* vol 43, 1952, pp. 42-50.

کندی Z

Kennedy, E.S: «A Survey of Islamic Astronomical Tables», *Transactions of the American Philosophical Society,* vol. 46, 1956.

گاندز G

Gandz, Solomon: «The Origin of Ghubar Numeral, or The Arabian Abacus and Articuli», *Isis,* vol. 16, 1931, pp. 393-424.

لب التواریخ

لب التواریخ تألیف یحیی بن عبداللطیف قزوینی، ضمیمهٔ گاهنامهٔ سال ۱۳۱۵ (توسط سید جلال الدین طهرانی).

لوکی A

Luckey, Paul: *Die Ausziehung der n-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik,* Math. Annalen, vol. 120 (1948), pp. 217-274.

لوکی L

Luckey, Paul: *Der: Lehrbrief über den Kreisumfang*, Adhandlungen der deutschen Akadmie der Wissenschaften zu Berlin,Jahrgang 1950,Nr. 6, Berlin, 1953.

لوکی R

Luckey, Paul: *Die Rechenkunst bei Gamsid b. mas ud al-kasi, mit Rückbliken auf altere Geschichte des Rechnens,* Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandas, XXX I, I, Wiesbaden, 1951.

(نوشتن این کتاب را لوکی در سال ۱۹۴۴ به پایان رسانیده بود ولی به علت جنگ جهانی دوم پس

از مرگش در سال ۱۹۵۱ به چاپ رسید).

دوست گرامی جناب آقای دکتر هوشنگ طالع در سال ۱۳۳۶ هـ.ش هنگامی که در آلمان مشغول تحصیل بودند ترجمه‌ای فارسی از این کتاب به خواهش حقیر فراهم آوردند و امیدوارم در آینده آن ترجمه پس از تصحیح و تکمیل به چاپ برسد.

لوی و پتروک

Levey, M.-Petruck, M.: *Kushiyar ibn Labban, Principles of Hindu Reckoning*, A translation with introduction and notes of the Kita fi usul Hisab al-Hind, Madison and Milwaukee, 1956.

محیط: تعلیقات

محیط طباطبائی، محمد: «*تعلیقات، برنامهٔ غیاث‌الدین*»، مجلهٔ آموزش و پرورش، سال دهم، ۱۳۱۹، ش ۳ ص ۵۸ تا ۶۲

محیط: غیاث‌الدین

محیط طباطبائی، محمد: «غیاث‌الدین جمشید کاشانی»، مجلهٔ آموزش و پرورش، سال دهم، ۱۳۱۹، ش ۳ ص ۱ تا ۸ و نیز سال دهم، ش ۴ ص ۱۷ تا ۲۴؛ یا به نقل از آن مجله در *لغت نامه*، ذیل مقالهٔ «غیاث‌الدین جمشید»

محیط: نامه

محیط طباطبائی، محمد: «نامهٔ پسر به پدر، به قلم غیاث‌الدین جمشید کاشانی»، مجلهٔ آموزش و پرورش، سال دهم، ۱۳۱۹، ش ۳ ص ۹ تا ۱۶ و ص ۵۷.

محیطیه

رسالهٔ محیطیه: تصنیف غیاث‌الدین جمشید کاشانی. عکس نسخهٔ خطی موجود در آستان قدس رضوی (فهرست مشهد، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۵۲ ش ۱۶۲) که به خط دست مؤلف است. و نیز رجوع کنید به رزنفلد و یوشکویچ در همین فهرست.

مصاحب: جبر و مقابلهٔ خیام

مصاحب، دکتر غلامحسین: *جبر و مقابلهٔ خیام به انضمام تاریخ علوم ریاضی*، چاپ تهران، ۱۳۱۷ هـ.ش.

مصاحب: حکیم‌خیام

مصاحب، دکتر غلامحسین: *حکیم عمر خیام بعنوان عالم جبر*، چاپ تهران، ۱۳۳۹، هـ.ش، شمارهٔ ۳۸ از سلسلهٔ انتشارات انجمن آثار ملی.

مفتاح

مفتاح الحساب تألیف غیاث الدین جمشید کاشانی، چاپ سنگی تهران ۱۳۰۶ هـ.ق. به ضمیمهٔ رسالهٔ نزهة الحدائق و ذیل آن.

میرم چلبی : دستور

میرم چلبی، محمود بن محمد: دستور العمل وتصحیح الجدول نسخهٔ عکسی شمارهٔ ۲۳۴۶ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران. این نسخهٔ عکسی از روی نسخهٔ خطی شمارهٔ ۸۴۸۹ کتابخانهٔ حمیدیهٔ استانبول تهیه شده است.

نئوگباثر *E*

Neugebauer, O: *The Exact Sciences in Antiquity*, 1957

ویکه *A*

Woepcke,F. *L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits*, Paris, 1851.

ویکه *C*

Woepcke, F. «Analyse et extrait d'un recuil de constructions géometriques par Aboûl Wafâ», *Journal asiatique*, 5e série , tome 5, pp 218-256, 1855.

ویکه *D*

Woepcke, F.: «Discution de deux methodes arabes pour déterminer une valeur approchée de sin 1°», *Journal de math. pures et appliqueés*, tome 19, 1854, pp. 153-303.

ویکه *P*

Woepcke, F.: *Passages relatifs à des sommations de séries de cubes*, Rome, 1864.

ویکه *R*

Woepcke, F.: «Sur une mesure de la circonférance du cercle, due aux astronomes arabes, et fondée sur um calcul d'Aboûl Wafâ», *Journal asiatique*, 5m série, tome 15, pp, 281-320.

ویکه *T*

Woepcke,F.: «Traduction d'un traité d'arithemétique d'Aboul Hasan Alkalsâdi», *Extrait des Atti dell' Accademia Pontifica de' Nuovi Linci*, tome XII, 1859.

هانکل *G*

Hankel, H. *Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*، Leipzig, 1874.

هفت اقلیم

تذکرهٔ هفت *اقلیم* تألیف امین احمدرازی، با تصحیح جواد فاضل، چاپ تهران، کتابفروشی علمی، و نیز نسخهٔ خطی شمارهٔ ۱۹۱۷ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران.

همائی: خیامی نامه

همائی، جلال‌الدین: *خیامی‌نامه*،جلد اول، سلسلهٔ انتشارات انجمن آثار ملی، شمارهٔ ۵۵، تهران ۱۳۴۶.

هیث: آثار ارشمیدس

Heath, T.L. *The Works of Archimedes*, New York.

هیث: سیزده مقاله

Heath, T.L. *The Thirteen book of Euclid's Elements*, 3 vols. New York, 1956.

یوشکویچ *G*

Juschkewitsch,A.P. *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*, Leipzig, 1964.

یوشکویچ *M*

Jouschkewitsch , A. P. : *Les mathématiques arabes*,Paris, 1976.

یوشکویچ و رزنفلد

A.P. Juschkewitsch-B.A.Rosenfeld: *Die Mathematik der Lander des Ostens im Mittelalter* Berlin, 1963.

هانکل G

Hankel, H. Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Leipzig, 1874.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

هیث: آثار ارشمیدس

Heath, T.L. The Works of Archimedes, New York.

هیث: اصول اقلیدس

Heath. T.L. The Thirteen books of Euclid's Elements, 3 vols, New York, 1956.

یوشکویچ G

Juschkewitsch, A.P. Geschichte der Mathematik im Mittelalter, Leipzig, 1964.

یوشکویچ M

Iouchkevitch, A. P.: Les mathématiques arabes, Paris, 1976.

یوشکویچ و رزنفلد

A.P. Juschkewitsch-B.A. Rosenfeld: Die Mathematik der Länder des Ostens im Mittelalter, Berlin, 1963.

فهرست عمومی الفبایی*

در این فهرست، مطالب و اصطلاحات با حروف سیاه و اعلام و اسامی کتابها و رسالات با حروف متن کتاب چاپ شده و برای آنکه اسامی کتابها و رسالات و مجلات از اعلام ممتاز باشد در دنبال هر کتاب یا رساله نوع آن را در پرانتز نوشته‌ایم.

حروف «ذ» اشاره به ذیل صفحات است: ۲۰۱ ذ = ذیل صفحهٔ ۲۰۱

اعدادی که با ارقام سیاه چاپ شده نمایندهٔ صفحاتی از کتاب است که عنوان مورد بحث در آنها جامعتر تعریف شده است.

علامتی نظیر (زندگینامه: ۱۵۹) که در دنبال نام «نسوی» و در داخل پرانتز در این فهرست آمده است یعنی: «برای آگاهی از احوال و آثار نسوی رجوع کنید به شمارهٔ ۱۵۹ از کتاب «قربانی: زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی» چاپ مرکز نشر دانشگاهی، سال ۱۳۶۵

← علامت ارجاع است.

* این فهرست را فرزند ارجمندم آقای منوچهر قربانی فراهم آورده است. خدایش عمر و عزت دهاد.

ث

ج

چ

ح

ز

ف

ق

ی