تمرینات جبر خطی

1- فرض کنید عملگر T بر $\mathbb{R}^3$ در پایه استاندارد با ماتریس زیر نمایش داده شده است. نشان دهید T هیچ بردار دوری ندارد.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2- فرم گویای هر یک از ماتریس های حقیقی زیر را بیابید ($c\epsilon\mathbb{R}$)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} c & 0 & -1 \\ 0 & c & 1 \\ -1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

3- فرض کنید A , B ماتریس های 3×3 روی میدان F باشند. نشان دهید A , B متشابهند اگر و تنها اگر دارای چندجمله ای های ویژه و مینیمال یکسان باشند.

4- فرض کنید $A\epsilon\ M_{n\times n}(\mathbb{C})$. اگر همه مقادیر ویژه A حقیقی باشند نشان دهید A با یک ماتریس با درایه های حقیقی متشابه است.

5- اگر $C\big(f(x)\big)$ ماتریس همراه چندجمله ای $f(x)$ با ضرایب در میدان F باشد، نشان دهید $f(x)$ چندجمله ای ویژه ماتریس $C\big(f(x)\big)$ می باشد.

6- فرض کنید T , U عملگرهای پوچ توان بر فضای برداری V باشند که با یکدیگر جا به جا می شوند، یعنی $TU = UT$. نشان دهید $T + U$ و TU نیز پوچ توان هستند.

7- فرض کنید U , W زیر فضاهای فضای برداری V باشند و $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه ای برای U باشد. نشان دهید $\{\alpha_1 + W, \dots, \alpha_n + W\}$ پایه ای برای فضای خارج قسمتی V/W است و نتیجه بگیرید که $U \cong V/W$.

8- فرم ژردن متناظر عملگر مشتق گیری روی فضای برداری شامل چندجمله ای های با درجه حداکثر 3 روی میدان $\mathbb{C}$ را بیابید.

9- اگر T یک عملگر خطی بر فضای برداری V باشد و $\alpha \epsilon V$، نشان دهید $Z(T,\alpha)$ اشتراک تمام زیر فضاهای T-پایای V شامل α می باشد.

10- همه ی فرم های ژردن ممکن برای ماتریس حقیقی A که چندجمله ای های ویژه و مینیمال آن به صورت زیر هستند را بیابید.

$$m_A(x) = (x-3)^2(x-5)^2 \; ; \;\; f_A(x) = (x-3)^4(x-5)^4$$

11- فرض کنید N یک عملگر خطی پوچ توان بر فضای برداری متناهی البعد V_F باشد. نشان دهید تعداد جمعوندهای مستقیم در تجزیه دوری N برابر با پوچی N است.

12- فرض کنید T یک عملگر خطی بر فضای برداری متناهی البعد V_F است. نشان دهید هر بردار غیر صفر V_F یک بردار دوری برای T است اگر و تنها اگر چندجمله ای ویژه T روی F تحویل ناپذیر باشد. (یعنی نتوان آن را به حاصلضرب چندجمله ای های با درجه کمتر تجزیه کرد.)

13- فرض کنید $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. اگر $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ و $f(A,B) = tr(A^T M B)$ نشان دهید f یک فرم دوخطی روی V است و سپس ماتریس نشان دهنده f در پایه

$$B = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

را بیابید.

14- فرض کنید f یک فرم دوخطی روی V است و $S \subseteq V$. تعریف کنید

$$S^{\perp} = \{v \in V : f(u,v) = 0 \; \forall u \in S\}, \;\; S^{\intercal} = \{v \in V : f(v\,,u) = 0 \; \forall u \in S\},$$

الف) نشان دهید $S^{\intercal}$ و $S^{\perp}$ زیرفضاهای V هستند.

ب) اگر $S_1 \subseteq S_2$ آنگاه $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$ و $S_2^{\intercal} \subseteq S_1^{\intercal}$.

ج) $\{0\}^{\intercal} = \{0\}^{\perp} = \mathrm{V}$.

15- فرض کنید f یک فرم دوخطی روی V است. ثابت کنید

$rank(f) = \dim V - \dim V^{\intercal} = \dim V - dim\, V^{\perp}$ و سپس نتیجه بگیرید $\dim V^{\intercal} = \dim V^{\perp}$.