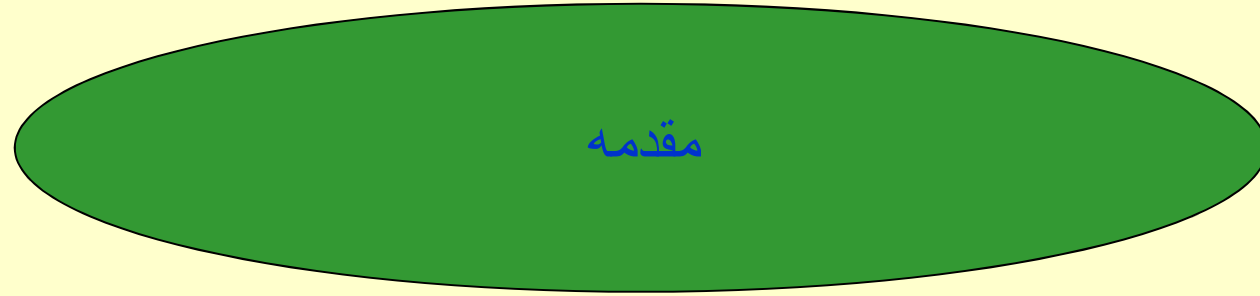


مقدمه



بخش اول درس کنترل غیرخطی:

آشنایی با پدیده های غیرخطی

دکتر ناصر پریز

## آشنایی با پدیده های غیرخطی

اهداف:

- 1- مقایسه سیستمهای خطی و غیرخطی
- 2- آشنایی با پدیده های غیرخطی
- 3- آشنایی با برخی مفاهیم و تعاریف در سیستمهای غیرخطی

آشنایی با پدیده های غیرخطی  
مقدمه - 1

منظور از کلمه غیرخطی (Nonlinear) در این درس چیست؟

- نه خطی (~~Not Linear~~)؟

- نه اجباراً خطی (Not Necessary Linear)

روشهای تحلیل و طراحی که در این درس آموخته می شوند برای سیستمهای خطی نیز قابل اعمال هستند.

## انواع غیرخطیها

از نظر وجودی:

- غیرخطی طبیعی یا ذاتی: نیروی اصطکاک، نیروی گریز از مرکز و ...  
این غیرخطیها اغلب اثرات نامطلوب دارند و لازم است را در مقابله با آنها جبران نمود.

- غیرخطی مصنوعی: این غیرخطیها توسط طراحان جهت بهبود رفتار سیستم عمداً به سیستم اضافه می شوند.

مانند کنترل کننده های تطبیقی و کنترل بهینه مانند کنترل Bang-Bang

از نظر خصوصیات ریاضی:

- نرم: قابلیت خطی شدن را دارند.

- سخت: قابلیت خطی شدن را ندارند.

مقدمه - 1  
آشنایی با پدیده های غیرخطی

از نظر رابطه ورودی و خروجی:

- **غیرخطی استاتیک (بدون حافظه):** خروجی در هر لحظه فقط به ورودی در همان لحظه بستگی دارد. با تابعی غیرخطی از ورودی بیان می شود.

$$y = f(u)$$

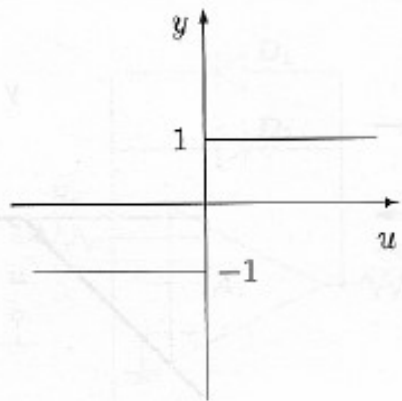
- **غیرخطی دینامیکی (با حافظه):** خروجی در هر لحظه به ورودیهای لحظه های قبل نیز بستگی دارد. با تابعی غیرخطی از ورودی و خروجی و مشتقات آنها بیان می شود. مانند:

$$f(y^{(n)}, \dots, \dot{y}, y, u^{(m)}, \dots, \dot{u}, u) = 0$$

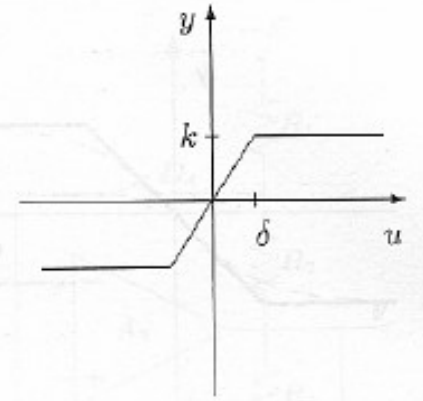
آشنایی با پدیده های  
مقدمه - 7

## بعضی از غیر خطیهای استاتیکی

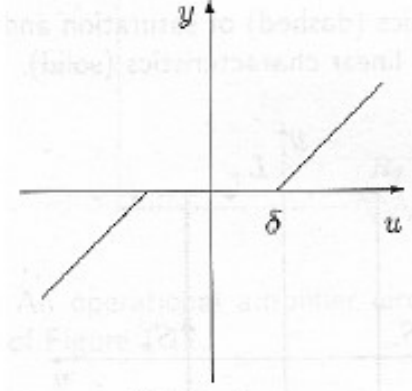
خطی



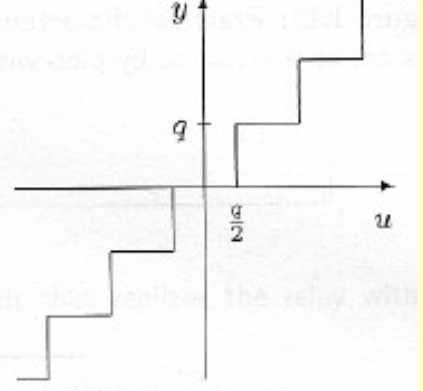
(a) Relay  
(a) Sign



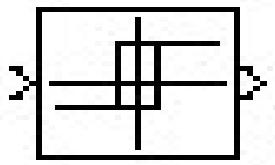
(b) Saturation



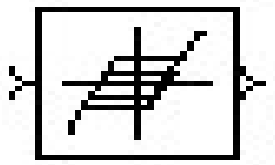
(c) Dead zone



(d) Quantization



Relay



Backlash

Hysteresis

## بعضی از غیر خطیهای دینامیکی

آشنایی با پدیده  
مقدمه - 7

## انواع نیروهای اصطکاک

کلی

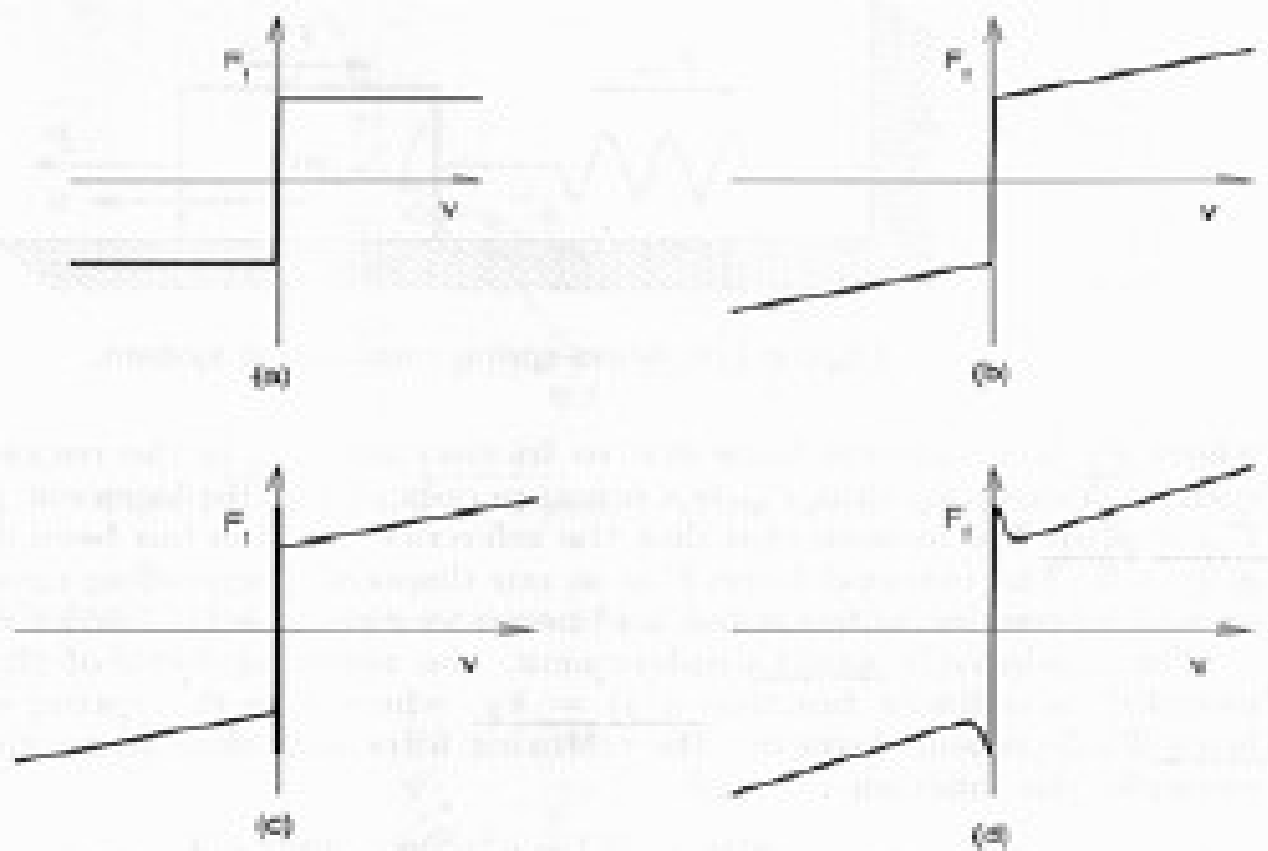


Figure 1.5: Examples of friction models. (a) Coulomb friction; (b) Coulomb plus linear viscous friction; (c) static, Coulomb, and linear viscous friction; (d) static, Coulomb, and linear viscous friction—Stribeck effect.

مقدمه - 7  
آشنایی با پدیده های غیر خطی

## روشهای توصیف سیستمهای غیر خطی دینامیکی:

### State-Space Models

State  $x$ , input  $u$ , output  $y$

General:  $f(x, u, y, \dot{x}, \dot{u}, \dot{y}, \dots) = 0$

Explicit:  $\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x)$

Affine in  $u$ :  $\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x)$

Linear:  $\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$

زمان پیوسته:

$$X_{k+1} = f_k(X_k, U_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

زمان گسسته:

بحث را روی سیستمهای پیوسته متمرکز می کنیم در حالی که برای سیستمهای گسسته نیز برقرارند.



آشنایی با مباحث مقدمه = 7

خطی

Problem

Modeling

Analysis

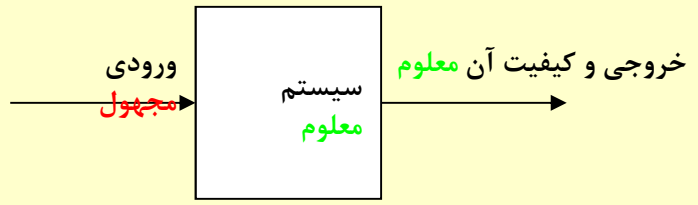
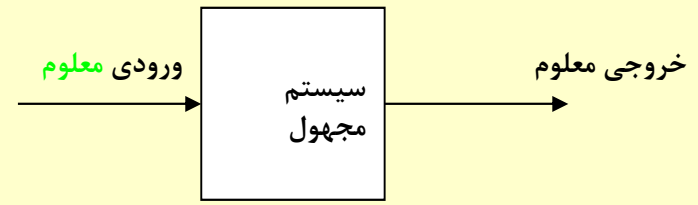
Design (Control)

- **Mathematics, Statistics:**
  - Differential Equations, Linear Algebra, Probability, Stochastic Processes
- **Physics, Chemistry:**
  - Electronics, Electrical Circuits, Electromagnetics, Dynamics, Thermodynamics, Heat Transfer
- **Linear v.s. Nonlinear**

- **Stability**
- **Performance**
- **Robustness**

- **Hardware vs Software**
- **Optimization vs Control**
  - Optimal Control, Robust Control, Adaptive Control, Nonlinear Control

# مسئله شناسایی، تحلیل (آنالیز) و طراحی (سنتز):



آشنایی با پدیده های غیرخطی  
مقدمه - 7

## طبقه بندی سیستمها از نظر ورودی:

$$\dot{X} = f(t, X, U) \quad \text{Forced System}$$

$$\dot{X} = f(t, X) \quad \text{Unforced System}$$

## طبقه بندی سیستمها از نظر وابستگی به زمان:

$$\dot{X} = f(t, X, U) \quad \text{nonautonomous}$$

$$\dot{X} = f(X, U) \quad \text{autonomous}$$

در صورتی که تابع  $f$  بطور واضح به زمان بستگی داشته باشد سیستم را nonautonomous می نامند وگرنه autonomous نامیده می شود.

**چگونه می توان این سیستمهای بالا را به هم تبدیل نمود؟**

آشنایی با  
مقدمه - 7  
مفاهیم غیرخطی

## نقطه تعادل (نقطه کار): Equilibria

**Definition:** A point  $(x^*, u^*, y^*)$  is an equilibrium, if a solution starting in  $(x^*, u^*, y^*)$  stays there forever.

equilibrium point- stationary point – critical point- singular point

Corresponds to putting all derivatives to zero:

General:  $f(x^*, u^*, y^*, 0, 0, \dots) = 0$

Explicit:  $0 = f(x^*, u^*), \quad y^* = h(x^*)$

Affine in  $u$ :  $0 = f(x^*) + g(x^*)u^*, \quad y^* = h(x^*)$

Linear:  $0 = Ax^* + Bu^*, \quad y^* = Cx^*$

Often the equilibrium is defined only through the state  $x^*$

نقطه  $X_0$  از فضای حالت را نقطه تعادل سیستم  $\dot{X} = f(t, X)$  می نامند اگر برای هر  $t \geq t_0$  ،  $\dot{X}_0 = f(t, X_0) = 0$  باشد.

**آیا نقطه تعادل می تواند تابعی از زمان باشد؟**

# Examples of Nonlinear Models

- Examples:
  - Pendulum Equation
  - Tunnel-Diode Circuit
  - Mass-Spring System
  - Negative-Resistance Oscillator
  - Artificial Neural Network

آشنایی  
حقا

## Pendulum - 1

خطی

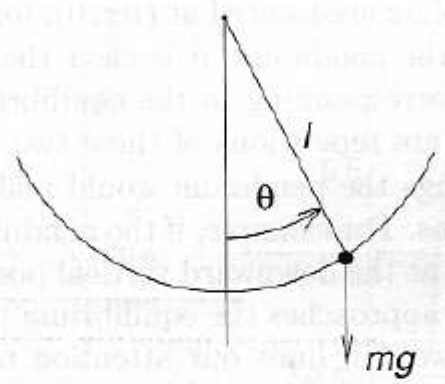


Figure 1.1: Pendulum.

Using Newton's Second Law,  
Write the equation of motion  
in the tangential direction:

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - kl\dot{\theta}$$

State model (let  $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$ ):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \end{aligned}$$

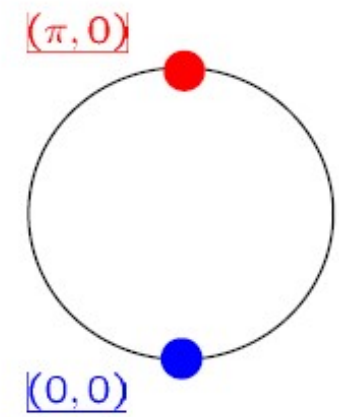
## Pendulum - 2

Equilibrium points (let  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ ):

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \end{aligned}$$

Equilibrium points are  $(n\pi, 0), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  
or, physically,  $(0, 0)$  and  $(\pi, 0)$ .

Question? Which one is stable or unstable?



فقط  
اشياء

## Tunnel-Diode Circuit - 1

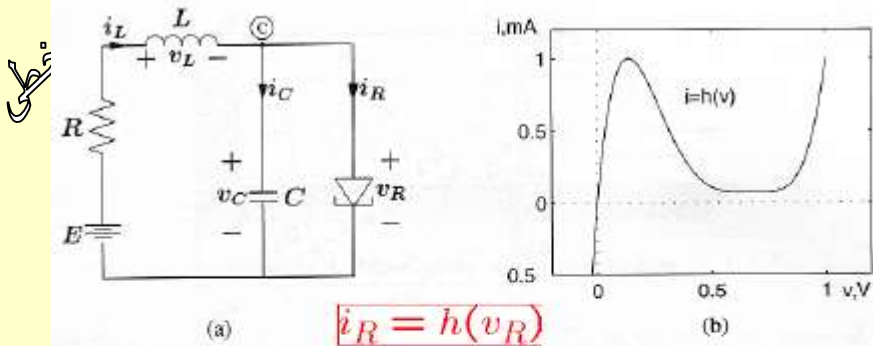


Figure 1.2: (a) Tunnel-diode circuit; (b) Tunnel-diode  $v_R$ - $i_R$  characteristic.

Kirchhoff's current/voltage law:

$$i_C + i_R - i_L = 0 \quad (\text{KCL})$$

$$v_C - E + Ri_L + v_L = 0 \quad (\text{KVL})$$

State model:

- state:  $x_1 = v_C, x_2 = i_L$ , and input:  $u = E$ ,
- $i_C = C \frac{dv_C}{dt}, v_L = L \frac{di_L}{dt}$

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C}[-h(x_1) + x_2]$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}[-x_1 - Rx_2 + u]$$

## Tunnel-Diode Circuit - 2

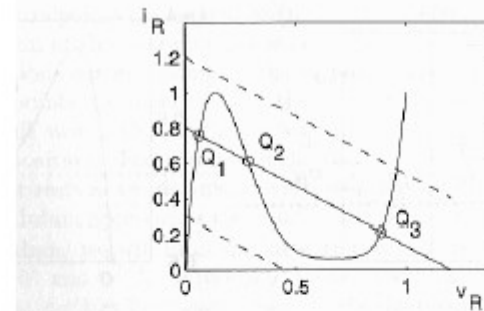


Figure 1.3: Equilibrium points of the tunnel-diode circuit.

Equilibrium points:

$$0 = -h(x_1) + x_2$$

$$0 = -x_1 - Rx_2 + u$$

That is, the roots of:

$$h(x_1) = \frac{E}{R} - \frac{1}{R}x_1$$

اشارة

## Mass-Spring System - 1

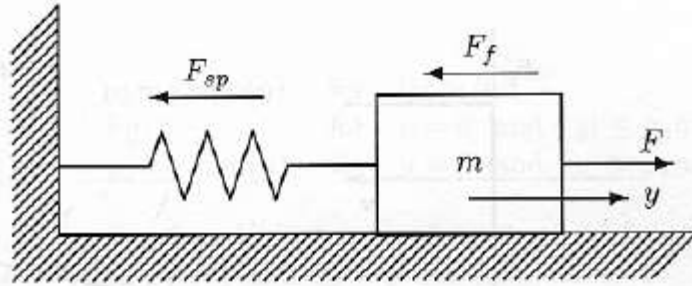


Figure 1.4: Mass-spring mechanical system.

Newton's Law of motion:

$$m\ddot{y} + F_f + F_{sp} = F$$

$F_f$  due to friction:

$$\begin{aligned} \text{Static} &= \text{limit to } \pm \mu_s mg \\ \text{Coulomb} &= \begin{cases} -\mu_k mg, & \text{for } v < 0 \\ \mu_k mg, & \text{for } v > 0 \end{cases} \\ \text{Viscous} &= h(v) \approx cv \end{aligned}$$

## Mass-Spring System - 2

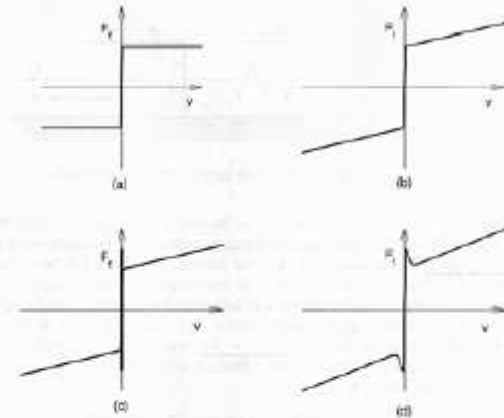


Figure 1.5: Examples of friction models. (a) Coulomb friction; (b) Coulomb plus linear viscous friction; (c) static, Coulomb, and linear viscous friction; (d) static, Coulomb, and linear viscous friction—Stribeck effect.

$F_{sp}$  due to the spring ( $= g(y)$ ):

$$\begin{aligned} g(y) &= ky, \text{ (small } y) \\ &= k(1 - a^2 y^2)y, |ay| < 1, \\ &\quad \text{(softening spring)} \\ &= k(1 + a^2 y^2)y, \\ &\quad \text{(hardening spring)} \end{aligned}$$

مقدمه - 7  
با پیوندهای غیرخطی

## Mass-Spring System - 3

Linear spring, static friction, Coulumb friction,  
linear viscous friction,  $F = 0$ :

$$m\ddot{y} + ky + c\dot{y} + \eta(y, \dot{y}) = 0$$

where:

$$\eta(y, \dot{y}) = \begin{cases} \mu_k mg \operatorname{sign}(\dot{y}), & \text{for } |\dot{y}| > 0 \\ -ky, & \text{for } \dot{y} = 0 \text{ and } |y| \leq \mu_s mg/k \\ -\mu_s mg \operatorname{sign}(y), & \text{for } \dot{y} = 0 \text{ and } |y| > \mu_s mg/k \end{cases}$$

State model (let  $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$ ):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 - \frac{1}{m}\eta(x_1, x_2) \end{aligned}$$

**Remark:**

1. An equilibrium set, rather than points;
2. A discontinuous function of the state.



آشنا  
 7 - رده  
 های غیر خطی

## Negative-Resistance Oscillator - 1

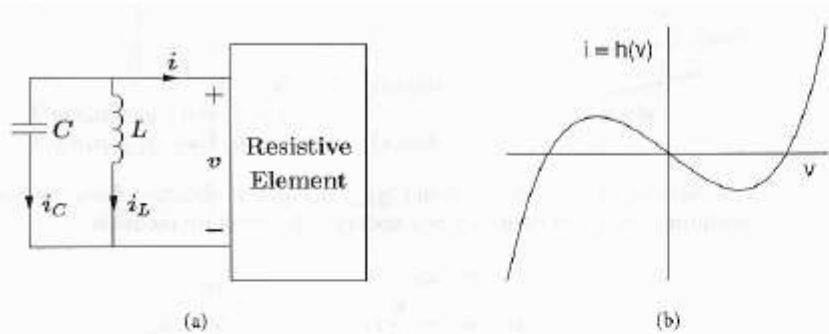


Figure 1.6: (a) Basic oscillator circuit; (b) Typical driving-point characteristic.

Kirchhoff's current law:

$$i_C + i_L + i = 0 \text{ or}$$

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(s) ds + h(v) = 0$$

( $dt$ ) and ( $\times L$ ):

$$CL \frac{d^2v}{dt^2} + v + Lh'(v) \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h'(0) &< 0 \\ h(v) &\rightarrow \infty \text{ as } v \rightarrow \infty \\ h(v) &\rightarrow -\infty \text{ as } v \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

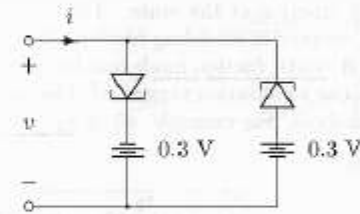


Figure 1.7: A negative-resistance twin-tunnel-diode circuit.

مقدمه - 1  
آشنایی با پدیده های غیرخطی

## Negative-Resistance Oscillator - 2

Let  $\tau = t/\sqrt{CL}$ ,  $\epsilon = \sqrt{L/C}$ :

$$\ddot{v} + \epsilon h'(v)\dot{v} + v = 0$$

The **Lienard's equation**:

$$\ddot{v} + f(v)\dot{v} + g(v) = 0$$

The **Van der Pol equation**:

$$\ddot{v} - \epsilon(1 - v^2)\dot{v} + v = 0$$

# Artificial Neural Network (ANN) - 1

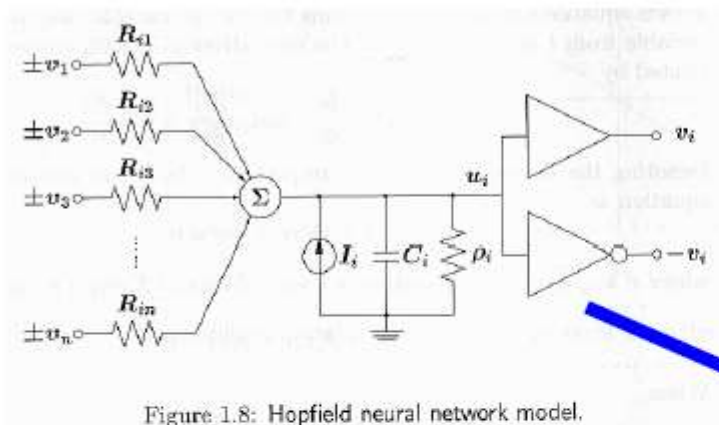
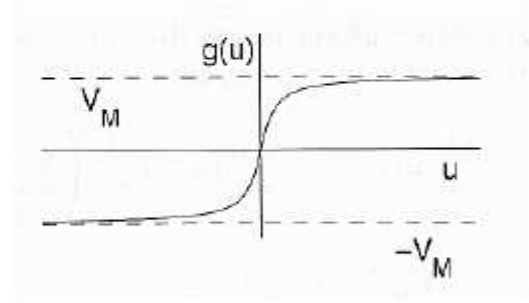


Figure 1.8: Hopfield neural network model.

$$v_i = g_i(u_i)$$



$g_i(\cdot)$ : a sigmoid function:

$$g_i(u_i) = \frac{2V_M}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{\lambda \pi u_i}{2V_M}\right), \lambda > 0$$

$$g_i(u_i) = V_M \frac{e^{\lambda u_i} - e^{-\lambda u_i}}{e^{\lambda u_i} + e^{-\lambda u_i}} = V_M \tanh(\lambda u_i), \lambda > 0$$

آشنا  
 7 - 4  
 ای غیر خطی

## Artificial Neural Network (ANN) - 2

Kirchhoff's current law:

$$C_i \frac{du_i}{dt} = \sum_j \frac{1}{R_{ij}} (\pm v_j - u_i) - \frac{1}{\rho} u_i + I_i$$

$$= \sum_j T_{ij} v_j - \frac{1}{R_i} u_i + I_i$$

State model (let  $x_i = v_i, i = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\dot{x}_i = \frac{dg_i}{du_i}(u_i) \times \dot{u}_i$$

$$= \frac{dg_i}{du_i}(u_i) \times \frac{1}{C_i} \left[ \sum_j T_{ij} x_j - \frac{1}{R_i} u_i + I_i \right]$$

Let  $h_i(x_i) = \frac{dg_i}{du_i}(u_i)|_{u_i=g_i^{-1}(x_i)}$ ,  
 and  $h_i(x_i) > 0, \forall x_i \in (-V_M, V_M)$

Equilibrium points

$$0 = \sum_j T_{ij} x_j - \frac{1}{R_i} g^{-1}(x_i) + I_i$$

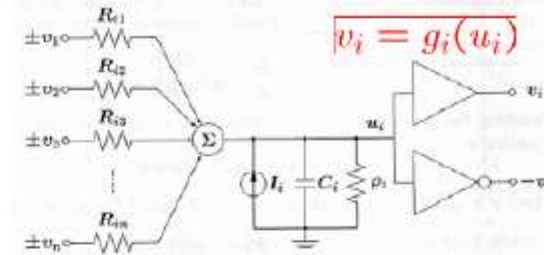


Figure 1.8: Hopfield neural network model.

## برای اینکه سیستم $\dot{X} = f(t, X)$ یک سیستم فیزیکی را بیان کند چه شرایطی باید داشته باشد؟

- 1- معادله حداقل یک جواب داشته باشد. (شرط وجود جواب)
- 2- معادله به ازای مقادیر به اندازه کافی کوچک  $t$  دقیقاً "دارای یک جواب باشد. (شرط وجود جواب منحصر بفرد محلی)
- 3- معادله به ازای هر  $t$  در بازه  $[0, \infty)$  دقیقاً دارای یک جواب باشد. (شرط وجود جواب منحصر بفرد همه جایی global)
- 4- معادله به ازای هر  $t$  در بازه  $[0, \infty)$  دقیقاً دارای یک جواب باشد و جواب آن بطور پیوسته به شرایط اولیه  $X_0$  بستگی داشته باشد. (شرط مناسب بودن)

شرایط از 1 الی 4 قویتر می شوند و بطور ایده ال باید آرزو کرد که سیستم تحت بررسی در شرط 4 صدق کند. بدون قید روی تابع  $f$  هیچکدام از شرایط بالا قابل ارضا نخواهد بود.

آشنایی با پدیده های غیرخطی  
مقدمه - 7

**مثال:**  $\dot{X} = -\text{sign}(X) \quad \forall t \geq 0, X(0) = 0$

هیچ تابع مشتق پذیری وجود ندارد که در معادله بالا صدق کند  
پس شرط 1 برقرار نیست.

$$\dot{X} = \frac{1}{2X} \quad \forall t \geq 0, X(0) = 0$$

$$X(t) = \pm\sqrt{t}$$

شرط 1 برقرار ولی شرط 2 برقرار نیست.

$$\dot{X} = 1 + X^2 \quad \forall t \geq 0, X(0) = 0$$

$$X(t) = \tan(t)$$

شرط 1 و 2 برقرار ولی شرط 3 برقرار نیست.

## Existence Problems

Example: The differential equation

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0$$

has solution

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}, \quad 0 \leq t < \frac{1}{x_0}$$

Solution not defined for

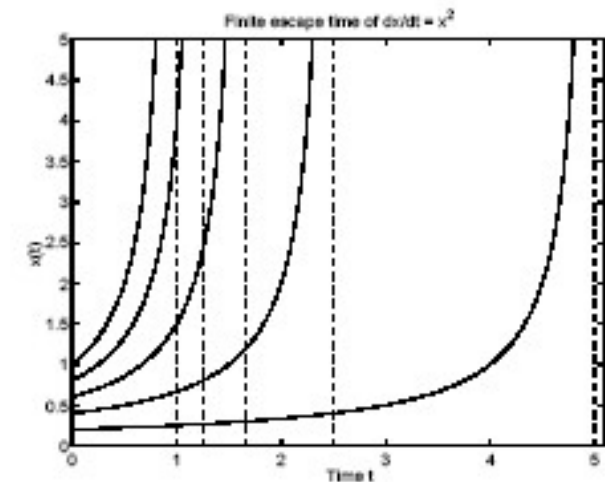
$$t_f = \frac{1}{x_0}$$

Solution interval depends on initial condition!

نقطه

## Finite Escape Time

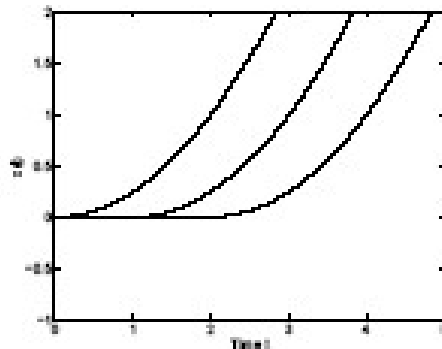
Simulation for various initial conditions  $x_0$



## Uniqueness Problems

Example:  $\dot{x} = \sqrt{x}$ ,  $x(0) = 0$ , has many solutions:

$$x(t) = \begin{cases} (t - C)^2/4 & t > C \\ 0 & t \leq C \end{cases}$$



پاسخ کلی و یکتای سیستم:

$$C = t_0$$

$$x(t) = (t - C + 2\sqrt{x(0)})^2 / 4$$

## Physical Interpretation

Consider the reverse example, i.e., the water tank lab process with

$$\dot{x} = -\sqrt{x}, \quad x(T) = 0$$

where  $x$  is the water level. It is then impossible to know at what time  $t < T$  the level was  $x(t) = x_0 > 0$ .

$$Q = A\dot{h} = -a\sqrt{h}$$

قانون برنولی در خروج مایع از شیر پایین یک مخزن

حل مسئله با فرض شرایط اولیه  $x(t) = (-t + 2\sqrt{x(0)})^2 / 4$

آیا حل مسئله با شرایط نهایی در زمان  $T$  ممکن است؟



# 1 خصوصیات و رفتار سیستمهای خطی

## Linear Systems

**Definition:** Let  $M$  be a signal space. The system  $S : M \rightarrow M$  is linear if for all  $u, v \in M$  and  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$S(\alpha u) = \alpha S(u)$$

scaling

$$S(u + v) = S(u) + S(v)$$

superposition

**Example:** Linear time-invariant systems

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad x(0) = 0$$

$$y(t) = g(t) \star u(t)$$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

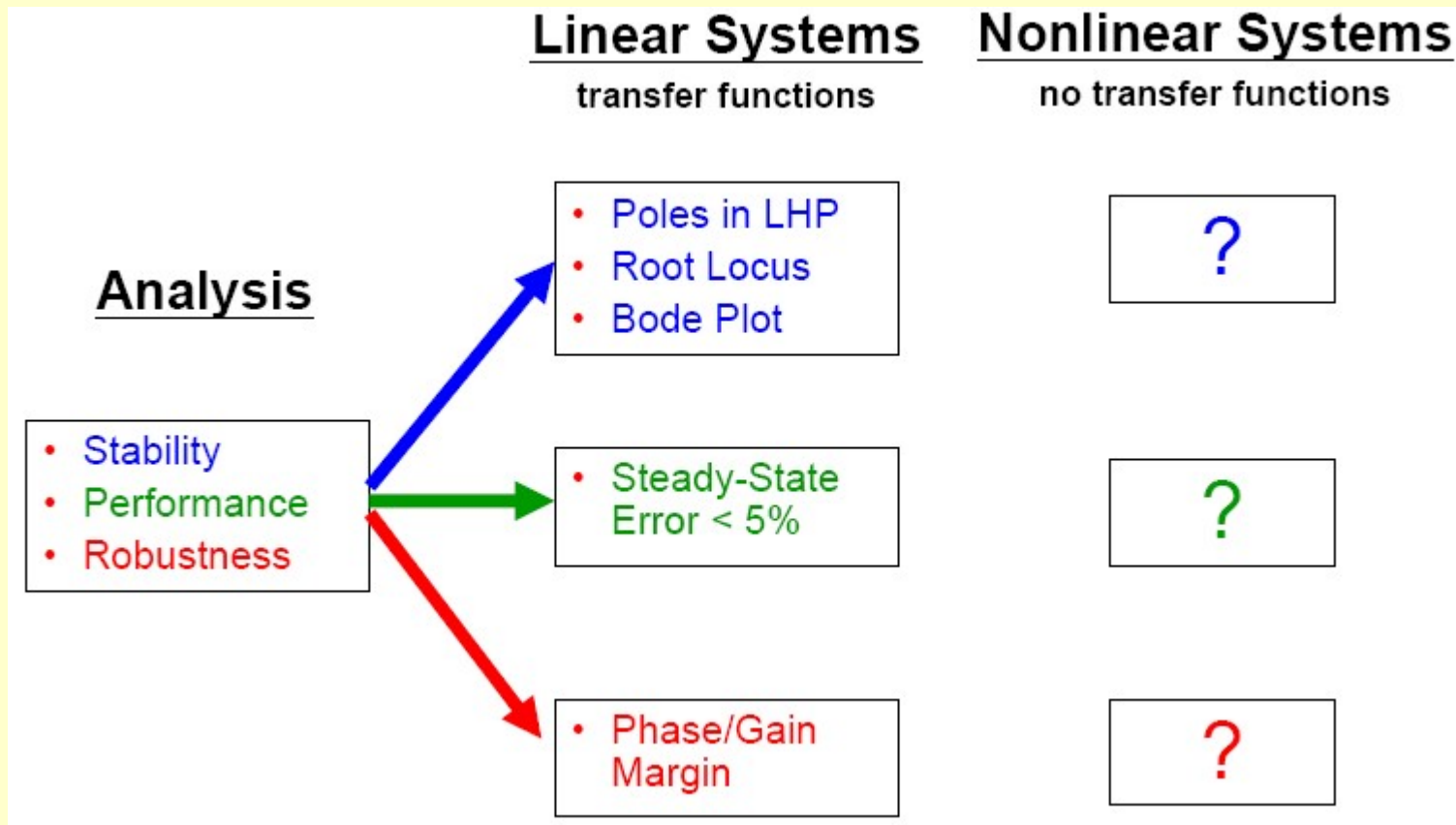
## خصوصیات و رفتار سیستمهای خطی 2

- دارای پاسخ بسته هستند و اگر پاسخ سیستم خطی غیر متغیر با زمان برای یک ورودی غیر صفر معلوم باشد پاسخ برای هر ورودی دیگر قابل محاسبه است.
- ابزار ریاضی فراوانی برای تحلیل و طراحی آنها (غیر متغیر با زمان) وجود دارد و روشهای کلاسیکی برای طراحی کنترل کننده ها خطی ارائه شده است (تبدیل لاپلاس، فوریه، مکان هندسی ریشه ها و ...)
- ریاضیات لازم برای تحلیل و طراحی کنترل کننده های خطی نسبتا ساده است.
- در صورتی که  $\det(A) \neq 0$  باشد فقط دارای یک نقطه تعادل هستند.  
( $\det(A) = 0$  ؟)

### خصوصیات و رفتار سیستمهای خطی 3

- نقطه تعادل پایدار است اگر و فقط اگر تمام مقادیر مشخصه ماتریس  $A$  اکیدا سمت چپ قرار داشته باشد.
- پایداری مجانبی محلی معادل پایداری مجانبی همه جایی است و پایداری ورودی محدود و خروجی محدود را نتیجه می دهد. (?)
- پاسخ گذرای سیستم ترکیبی از موده‌های سیستم است.
- پاسخ نسبت به ورودیها و شرایط اولیه دارای خاصیت جمع آثار است.
- ورودی سینوسی (در سیستم خطی غیر متغیر با زمان و پایدار مجانبی) دارای خروجی حالت ماندگار با همان فرکانس ورودی است. (?)

## خصوصیات و رفتار سیستمهای خطی 4

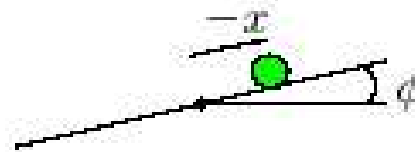


## چرا لازم است سیستمهای غیرخطی را مورد مطالعه قرار دهیم؟

- تقریباً همه سیستمهای فیزیکی غیرخطی هستند. ( تحت شرایطی می توان رفتار آنها را حول نقطه تعادل با مدل خطی بیان نمود و این زمانی است که سیستم خیلی نزدیک به نقطه کار باقی بماند و غیرخطی در نقطه کار مشتق پذیر باشد. به این جهت سیستمهای خطی اهمیت قابل ملاحظه ای در کنترل دارند.)
- دینامیک مدل‌های خطی به اندازه کافی برای توصیف بعضی از پدیده ها غنی نیست. ( نقطه تعادل چندگانه، وابستگی پایداری سیستم به شرایط اولیه و ورودی و ...)

## مثال: سیستم میله و توپ

Example: Positioning of a ball on a beam



Approximate nonlinear model  $\ddot{x}(t) = mg \sin \phi(t)$  gives linear model:

$$\ddot{x}(t) = \frac{5g}{7} \phi(t)$$

Can the ball move 0.1 meter in 0.1 seconds from steady state?

Linear model gives

$$x(t) \approx \frac{50}{7} \frac{t^2}{2} \phi_0 \approx 0.04 \phi_0$$

so that

$$\phi_0 \approx \frac{0.1}{0.04} = 2.5 \text{ rad} = 143^\circ$$

**Clearly outside linear region!**

Must consider nonlinearities such as centripetal force, saturation, friction etc

## چرا غیرخطی؟

• می توان سیستمهای کنترل موجود را اصلاح کرد . اگر سیستم از نقطه کار بیشتر از حیطه خطی خارج شود کنترل کننده خطی توانایی بهبود عملکرد سیستم را از دست خواهد داد در حالی که کنترل کننده های غیرخطی در حوزه وسیعتری عملکرد سیستم را تضمین می کند. (مثال: نیروی جذب به مرکز و کریولیس در کنترل حرکت روبات متناسب با مجذور سرعت است.)

• اگر غیرخطی در نقطه کار سخت باشد نمی توان از تحلیل خطی استفاده نمود. (مثال؟)

• جهت مقابله با عدم قطعیت در مدل. در طراحی کنترل کننده های خطی معمولاً ضروری است فرض شود که پارامترهای مدل به اندازه کافی معلوم است. سیستم کنترل طراحی شده بر اساس مقادیر غیر دقیق پارامتر منجر به ناپایداری و یا عملکرد نامطلوب می شود و این در حالی است که در خیلی از مسایل کنترلی عدم قطعیت در سیستم وجود دارد. منابع عدم قطعیت: متغیر با زمان بودن است (مانند تغییرات دمای هوا و اثر آن بر پرواز هواپیما)، تغییر پارامتر (مانند جرم قطعه جدیدی که روبات برمی دارد) ، تغییر شرایط سیستم یا نقطه کار

• ممکن است با اضافه نمودن عمدی عناصر غیرخطی، عدم قطعیتها را قابل تحمل نمود (کنترل تطبیقی و روبااست غیرخطی)

## چرا غیرخطی؟

- **سادگی در طراحی.** ممکن است یک کنترل کننده غیرخطی خیلی ساده تر از کنترل کننده خطی باشد چون عمیقا در طبیعت فیزیکی سیستم ریشه دارد.
- **هزینه کم کنترل کننده های غیرخطی - بهینه بودن آن** (در کنترل خطی سنسورها و عملگرها در حلقه فیدبک باید دقیق باشند و گران تمام میشوند در حالی که در کنترل غیرخطی با وسایل با دقت کمتر و ارزانتر می توان نتایج بهتری گرفت)



## روشهای تحلیلی حل مسئله در مقایسه با روشهای عددی

- کامپیوترها روز به روز برای شبیه سازی سیستمهای پیچیده قدرتمند می شوند.
- روشهای عددی همراه با بینش کافی درک مفیدی از رفتار سیستم را نتیجه می دهد.

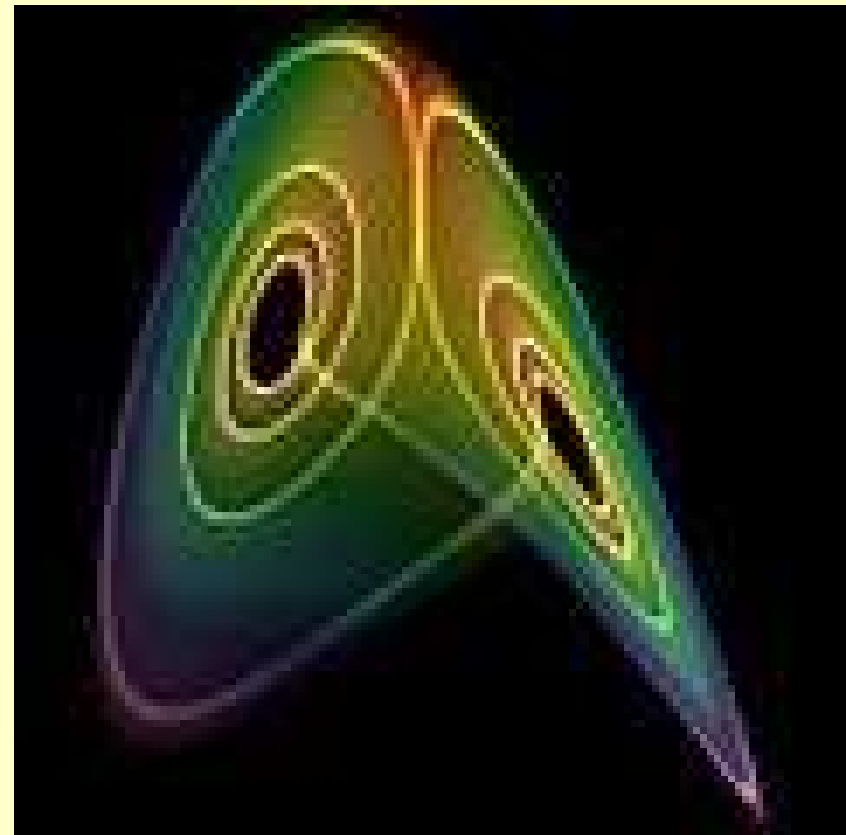
### اما:

- گاهی نمی توان در بررسی خواصی مانند **پایداری و کنترل پذیری** به شبیه سازی استناد نمود چون حالتهای بحرانی گم می شوند.
- روشهای تحلیلی ابزاری به دست می دهند که با استفاده از آنها می توان روش معمول اثبات ریاضی را در مورد سیستمهای غیرخطی اعمال کنیم.
- با روشهای تحلیلی نتایج شگفت آوری به دست می آید که با شبیه سازی قابل رویت نیست. مانند سیستمهای آشوبناک

مثال سیستم آشوبناک: معادلات لورنز

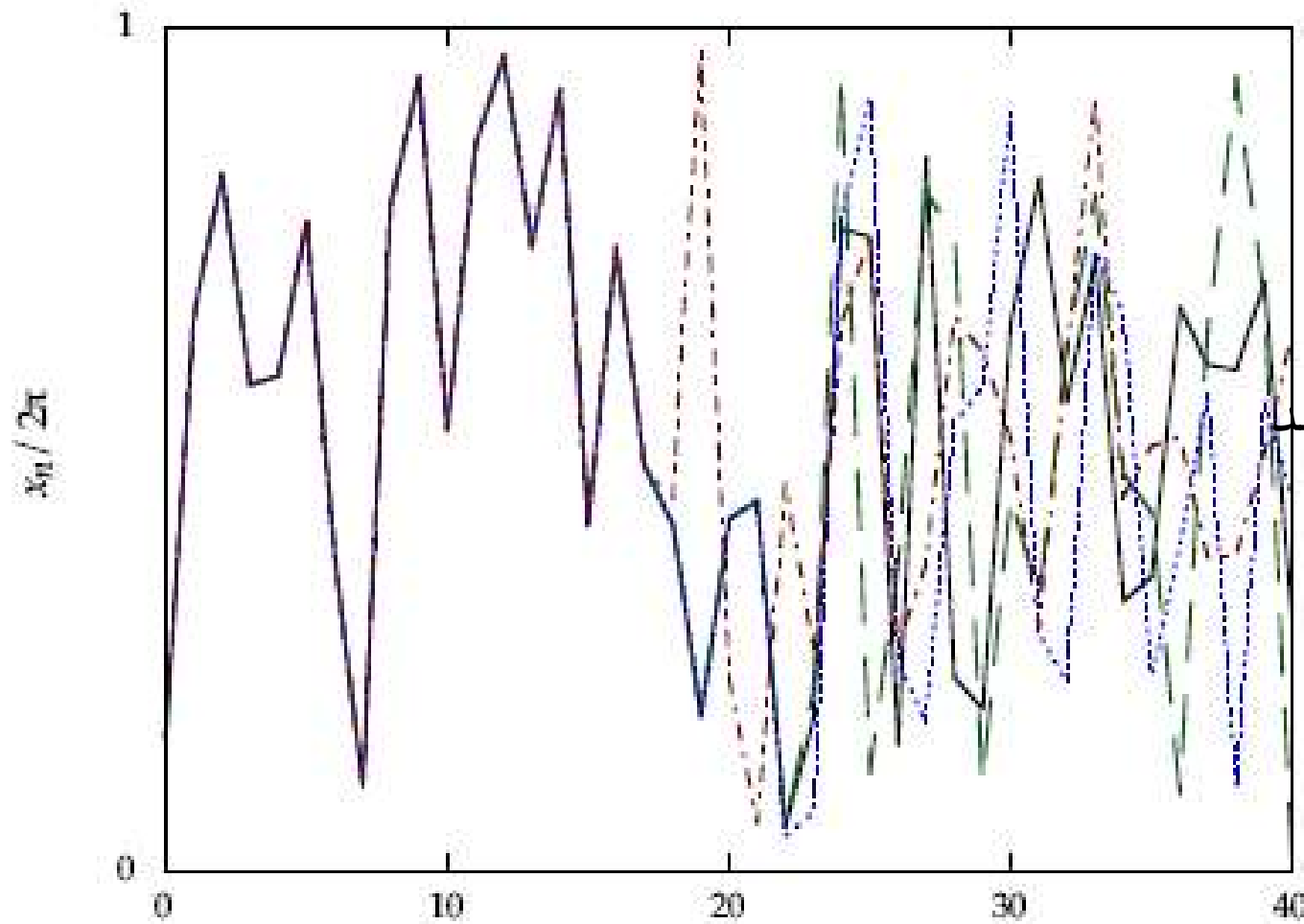
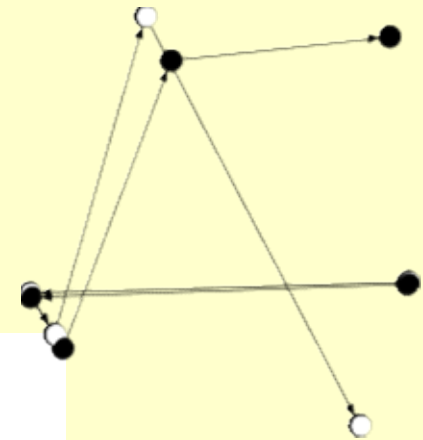
The Lorenz equations also arise in simplified models for lasers, dynamos, thermosyphons, brushless DC motors, electric circuits, chemical reactions and forward osmosis

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z.\end{aligned}$$



$$p_{n+1} = p_n + K \sin x_n$$

$$x_{n+1} = x_n + p_{n+1},$$



نیروی بسیار کم در شرایط  
 در هر مرحله ممکن است  
 در مراحل بعد تفاوت‌های  
 قابل مقایسه نتیجه دهد

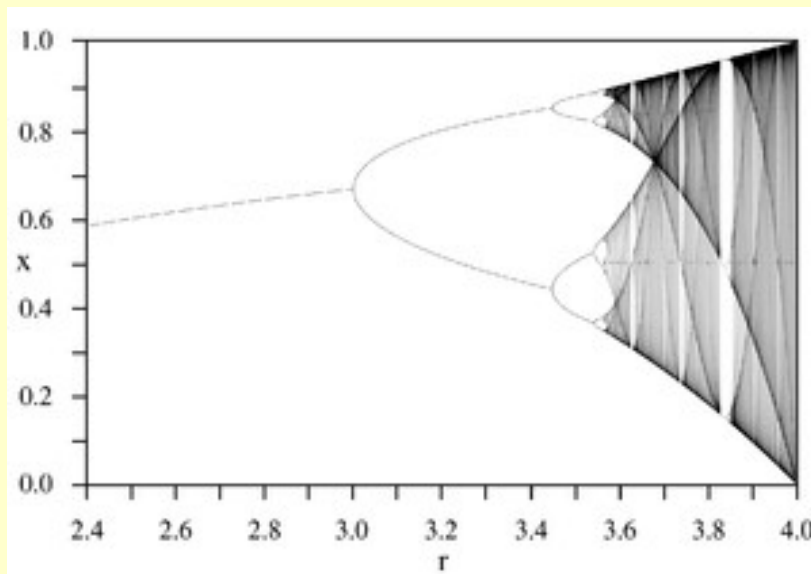
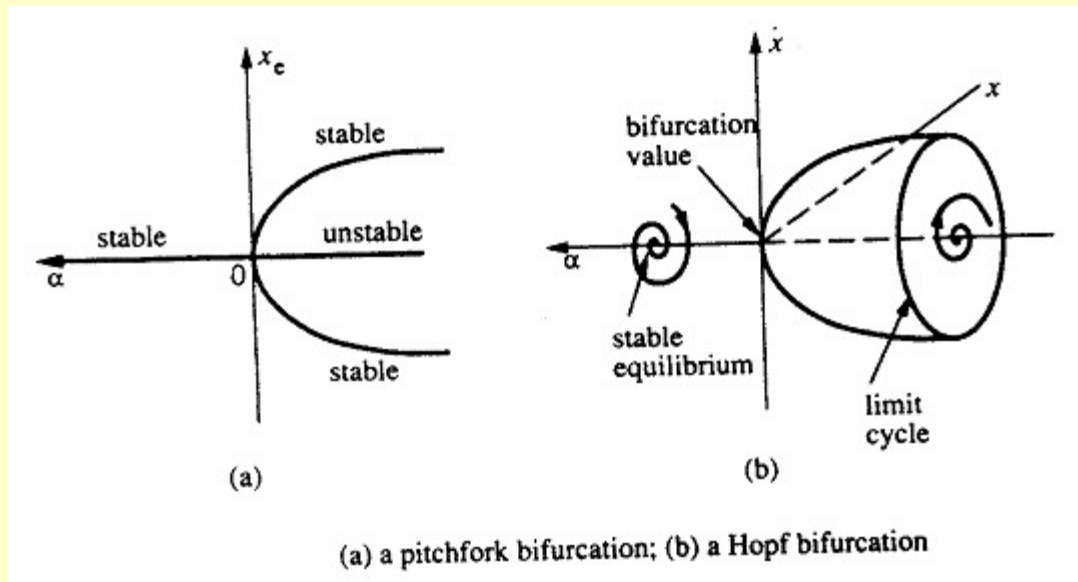
## ◦ example of chaotic systems (chaos )

The same FORTRAN77 code was executed on four modern computers to iterate the standard map for  $K = 10$  and the initial condition  $(x_0, p_0) = (1, 1)$ .

Although nominally the same (64-bit, or around 15-digit) “double precision” numerical representation was used on the different computers, **slight differences in the numerical rounding** methods among the processors are rapidly amplified as the iterations progress. Hence, the trajectories are identical only for the first few iterations, and they become completely uncorrelated after about 25 iterations. The processors employed here were a Motorola PowerPC 750 (solid line), an Intel Pentium III (dashed line), a MIPS/SGI R10000 (dotted line), and a Cray SV1 processor (dash-dotted line).

• انشعاب

## (Bifurcation)



Logistic map

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n).$$

## انشعاب در سیستم‌های غیرخطی

در سیستم‌های دینامیکی غیرخطی، گاهی مواقع تغییر ناگهانی در یک پارامتر، باعث بوجود آمدن تغییر کیفی در رفتار سیستم می‌گردد. بعبارت دیگر، هنگامیکه یک پارامتر نظیر  $\mu$  در سیستم تغییر کرده و از مقدار بحرانی بگذرد، عملکرد سیستم بطور ناگهانی تغییر می‌کند. انواع مختلف تغییرات کیفی در یک سیستم را تقریباً می‌توان بصورت زیر خلاصه کرد :

پایدار  $\longleftrightarrow$  ناپایدار

متقارن  $\longleftrightarrow$  نامتقارن

حرکت ایستا  $\longleftrightarrow$  حرکت پریودیک (منظم)

منظم  $\longleftrightarrow$  نامنظم

منظم  $\longleftrightarrow$  آشفته

این پدیده بعنوان **انشعاب** در سیستم‌های دینامیکی شناخته می‌شود. انشعاب انواع گوناگونی دارد که هر یک از آنها تحت شرایط خاصی بوجود می‌آید.

## بعضی از رفتارها و خواص سیستمهای غیرخطی

- اغلب نمی توان پاسخ بسته سیستمهای غیرخطی را به دست آورد و حتی اگر پاسخ سیستم را برای تعداد زیادی از ورودیها بدانیم نمی توان پاسخ را برای ورودی دیگری از روی آنها به دست آورد .
- تئوری خاصی برای تحلیل همه سیستمهای غیرخطی وجود ندارد.
- ریاضیات لازم برای تحلیل و طراحی چنین سیستمهایی پیچیده است.

- رفتار سیستم غیرخطی در پاسخ به ورودی کاملاً متفاوت با پاسخ سیستم خطی است. مثال: مدل ساده حرکت زیر آب  $\dot{v} + |v|v = u$

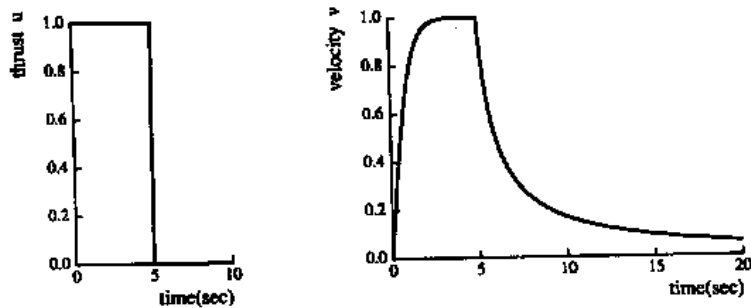


Figure 1.1 : Response of system (1.3) to unit steps

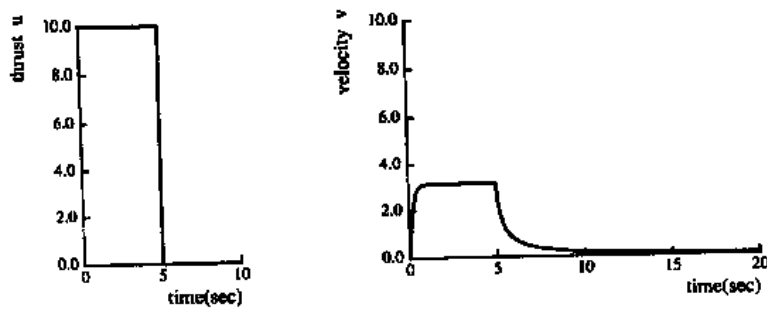


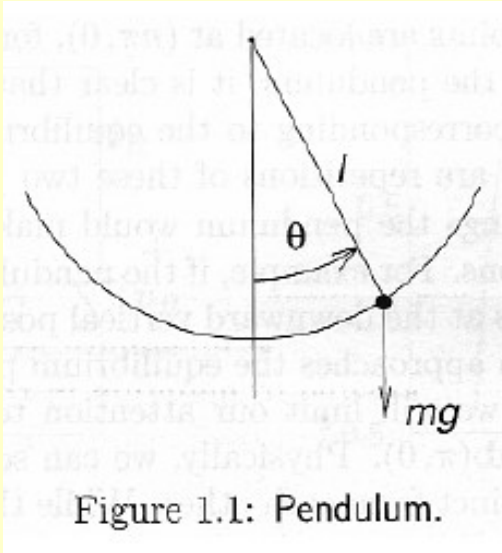
Figure 1.2 : Response of system (1.3) to steps of amplitude 10

$$u = 1 \Rightarrow 0 + |v_f|v_f = 1 \Rightarrow v_f = 1$$

$$u = 10 \Rightarrow 0 + |v_f|v_f = 10 \Rightarrow v_f = \sqrt{10} \approx 3.2$$

- سرعت پاسخ به پالس مثبت بیشتر از پالس منفی است.
- ورودی 10 برابر شده ولی خروجی نه. (پاسخ به دامنه و نوع ورودی بستگی دارد)





• وابستگی دامنه و فرکانس (T) پریود

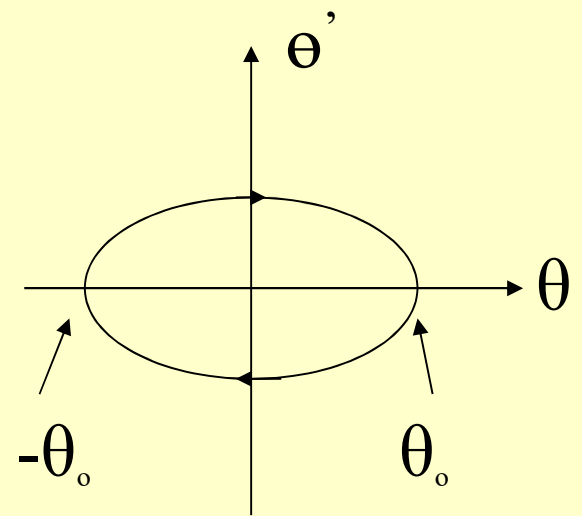
$$\frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2 + mgL\{1 - \cos(\theta)\} = mgh_0$$

$$m = 1kg$$

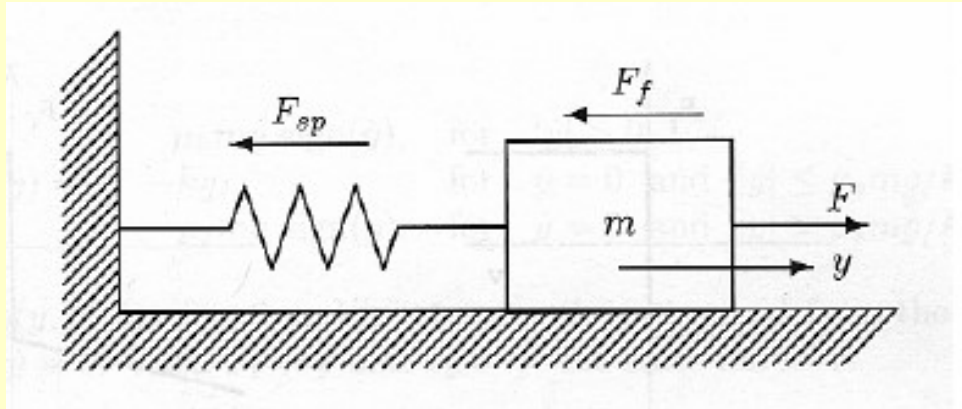
$$L = 1m$$

$$T = \sqrt{\frac{2L}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left\{ \frac{h_0}{L} - 1 + \cos(\theta) \right\}^{-\frac{1}{2}} d\theta$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$



- وابستگی دامنه و فرکانس و پاسخ چند مقداره و جهش فرکانس نوسانات



$$f_{sp} = ky + k'y^3$$

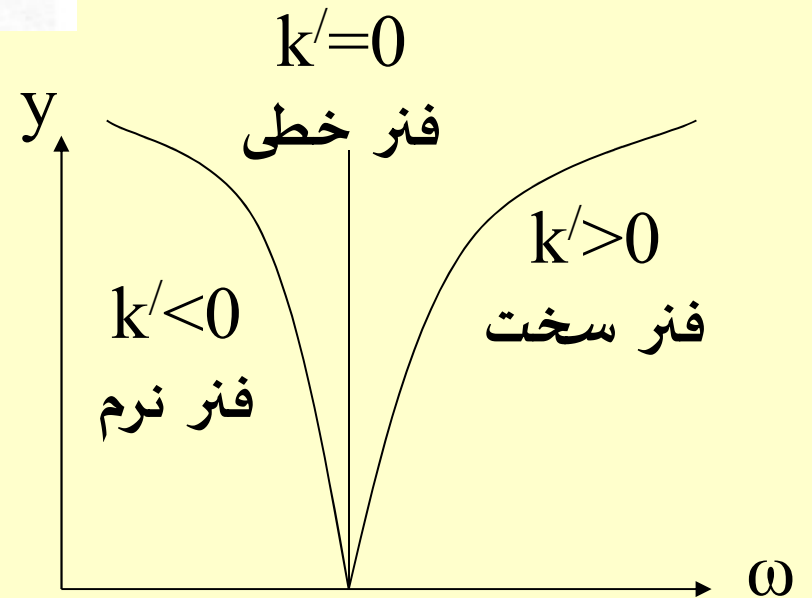
$$f_f = \beta\dot{y}$$

$$m = 1$$

$$\beta = 1$$

$$\ddot{y} + \dot{y} + ky + k'y^3 = F$$

معادله Duffing

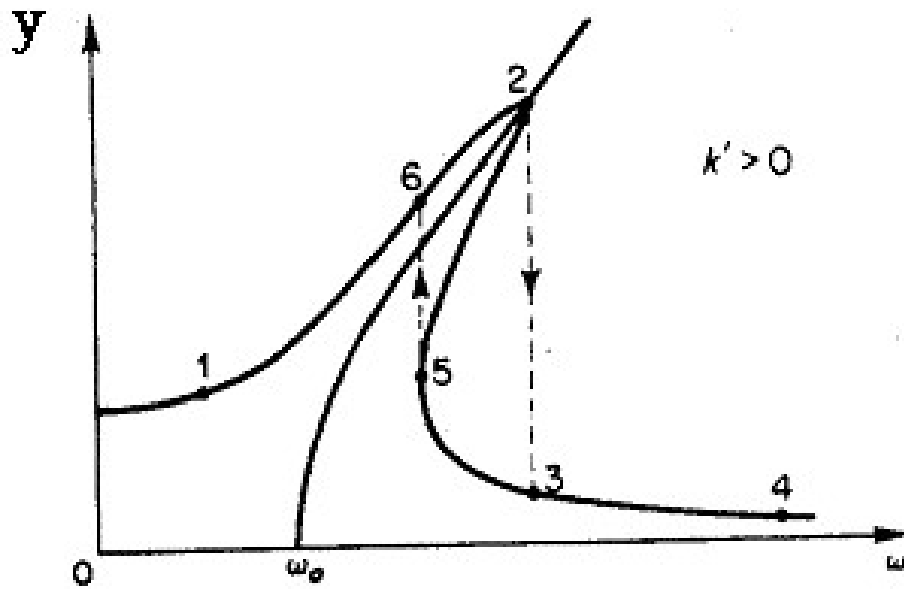


• وابستگی دامنه و فرکانس و پاسخ چند مقداره

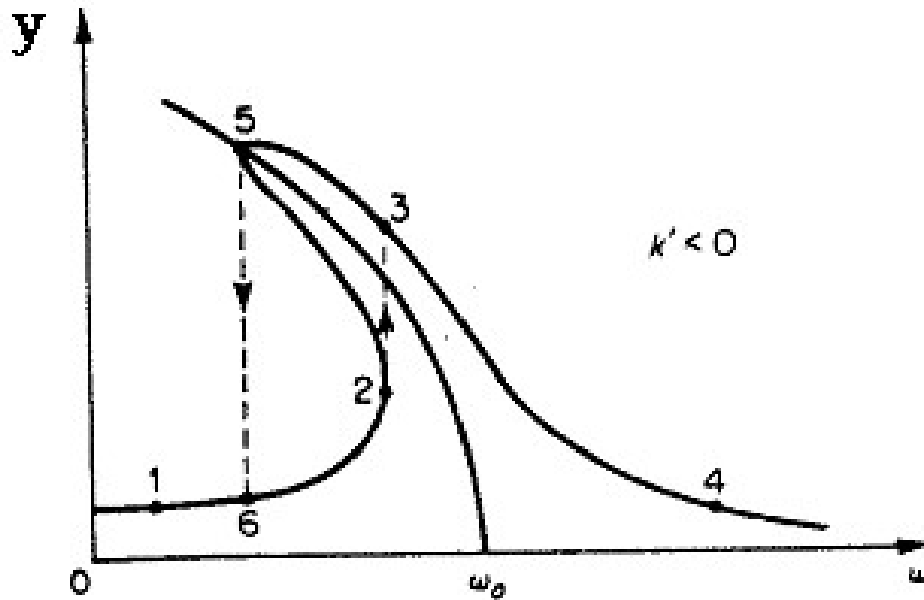
$$F = p \cos(\omega t)$$

Frequency response curves showing jump resonances. (a) Mechanical system with hard spring; (b) mechanical system with soft spring.

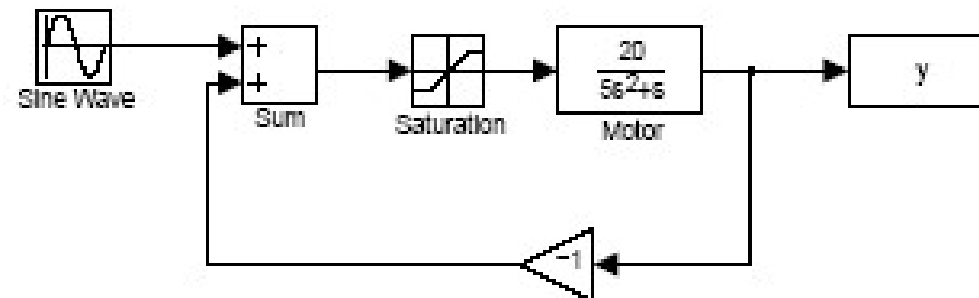
P ثابت و  $\omega$  افزایش یا کاهش داده می شود.



(a)



## Jump Resonances



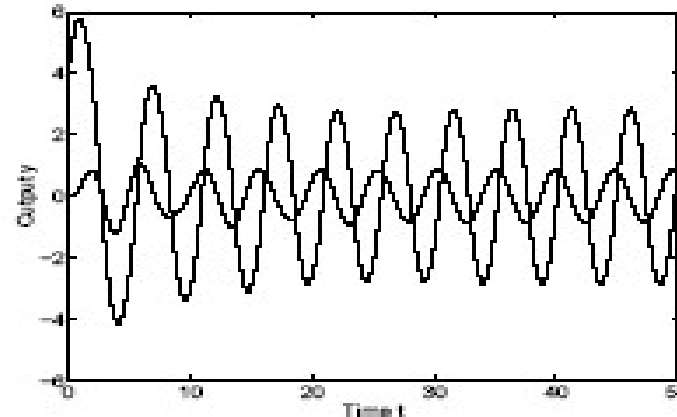
Response for sinusoidal depends on initial condition

Problem when doing frequency response measurement

## Jump Resonances

$$u = 0.5 \sin(1.3t), \quad \text{saturation level} = 1.0$$

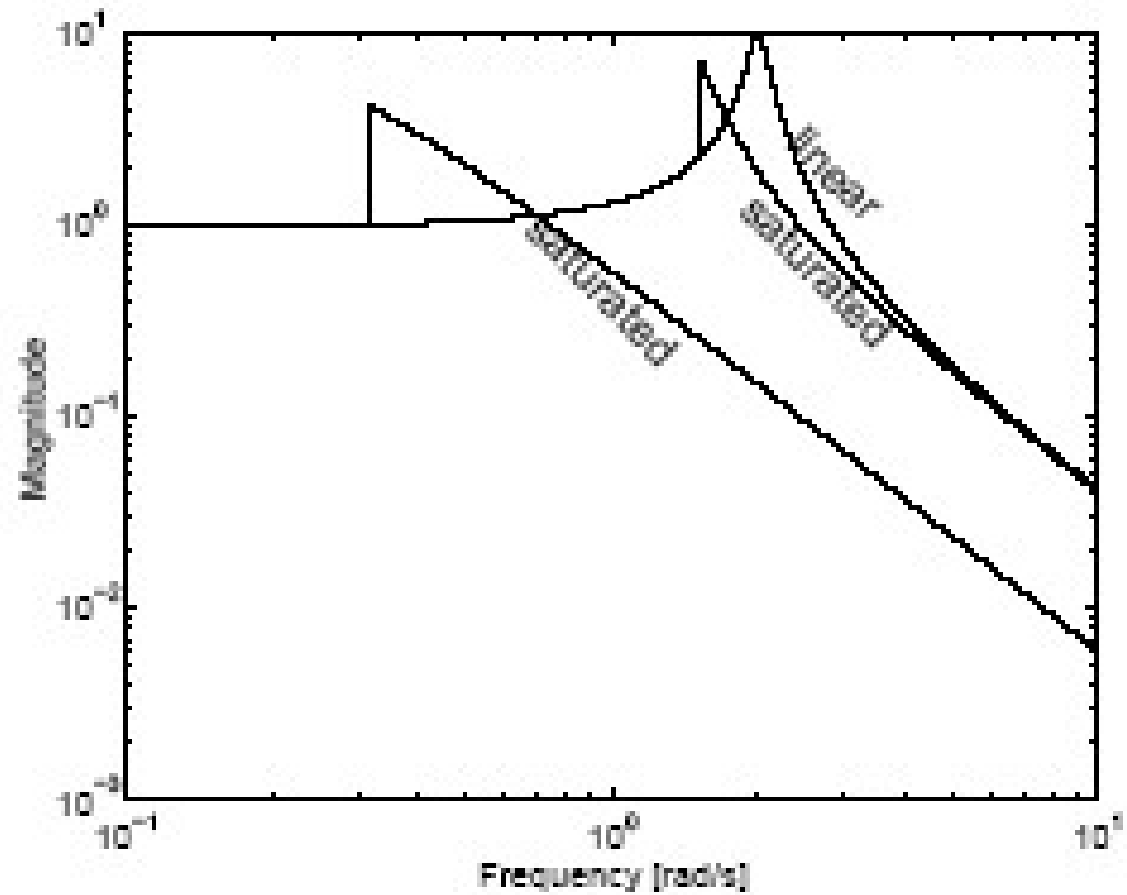
Different initial conditions



Two different steady state outputs!

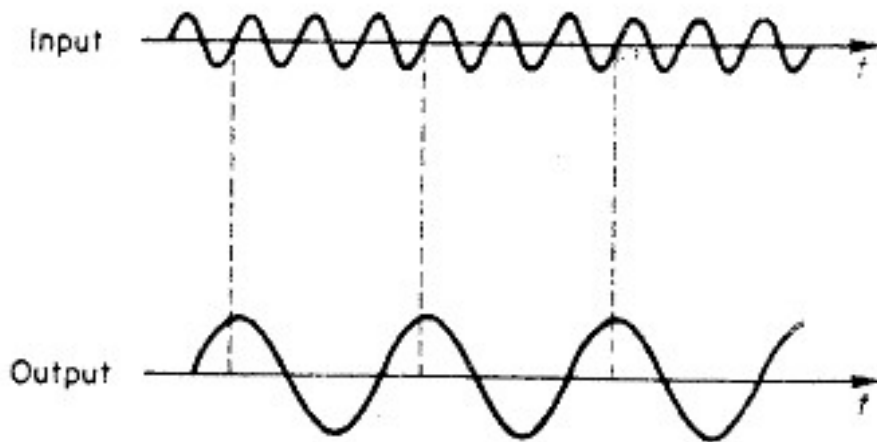
# Jump Resonances

Measured frequency response (many-valued)



## • نوسانات زیر هارمونیک SSR

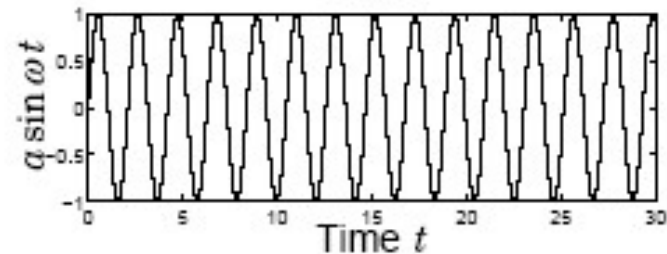
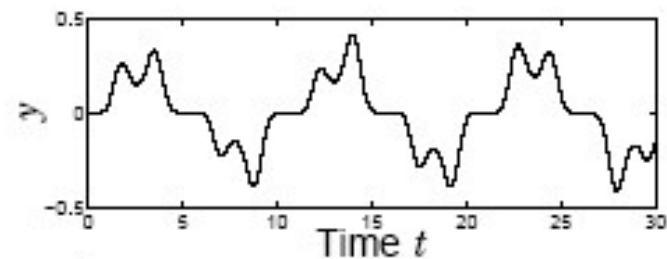
- فرکانس خروجی کسری از فرکانس ورودی است.
- تولید چنین فرکانسی به پارامترهای سیستم ، شرایط اولیه و دامنه و فرکانس ورودی بستگی دارد.
- این نوسانات خود بخود شروع نمی شوند و لازم است تغییرات ناگهانی در یکی از عوامل بالا ایجاد شود.



Input and output waveforms under subharmonic oscillation.

### Subresonances

Example: Duffing's equation  $\ddot{y} + \dot{y} + y - y^3 = a \sin(\omega t)$

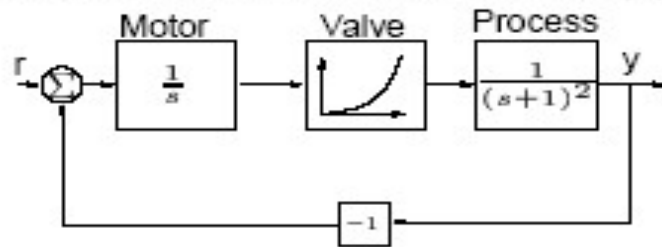


• داشتن چند نقطه تعادل و بستگی پایداری سیستم به شرایط اولیه

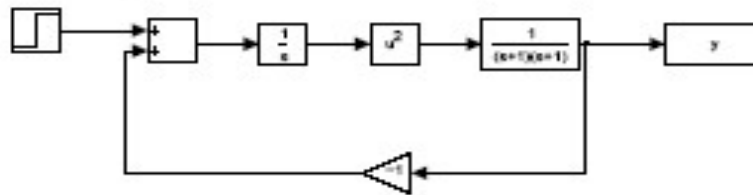
- پایداری سیستم  $\dot{x} = ux$  به علامت ورودی بستگی دارد.

### Stability Can Depend on Amplitude

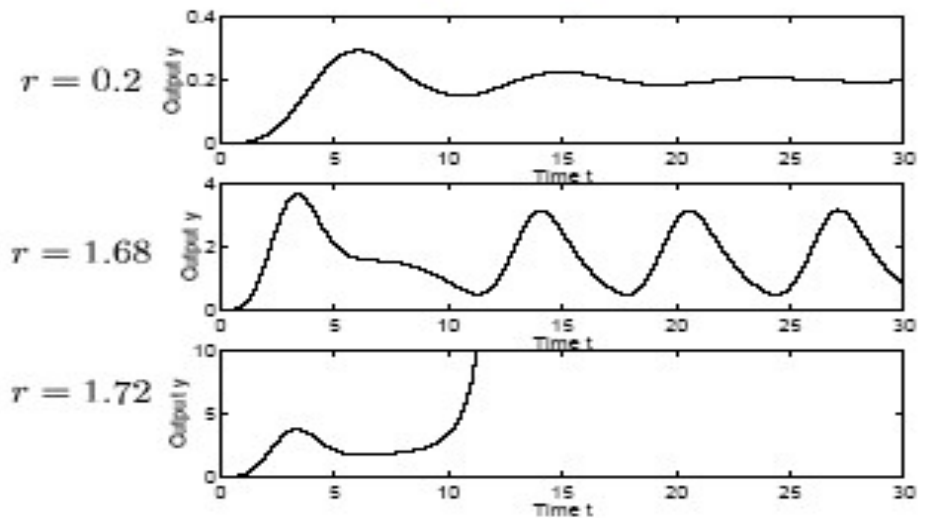
Example: Control system with valve characteristic  $f(u) = u^2$



Simulink block diagram:



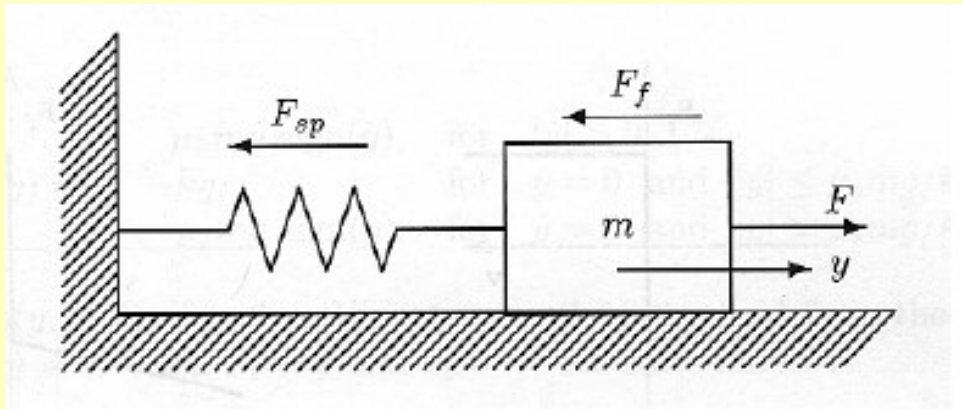
### Step Responses



Stability depends on input amplitude!

## • داشتن سیکل حدی Limit Cycle

- بعضی از سیستمها می توانند با دامنه و فرکانس ثابتی بدون اینکه ورودی و یا تحریک وجود داشته باشد نوسان کنند. ( این نوسانات به پارامترهای سیستم خیلی حساس نیست)



$$f_{sp} = ky$$

$$f_f = 2c(y^2 - 1)y$$

$$F = 0$$

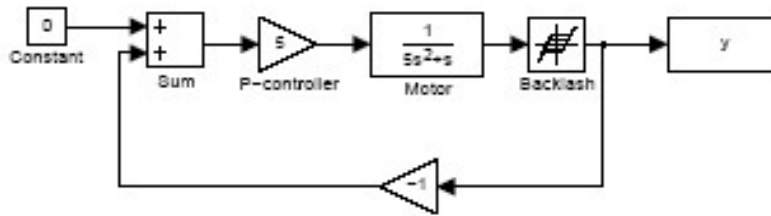
معادله Vanderpol  $\longrightarrow m\ddot{y} + 2c(y^2 - 1)\dot{y} + ky = 0$

- برای مقادیر  $|y| < 1$  ضریب میرایی منفی و به سیستم انرژی تزریق می شود ولی برای مقادیر بزرگتر از واحد ضریب میرایی مثبت و از سیستم انرژی جذب می شود و برای  $y=1$  میزان جذب و تزریق انرژی به سیستم برابر است.



## Stable Periodic Solutions

Example: Motor with back-lash

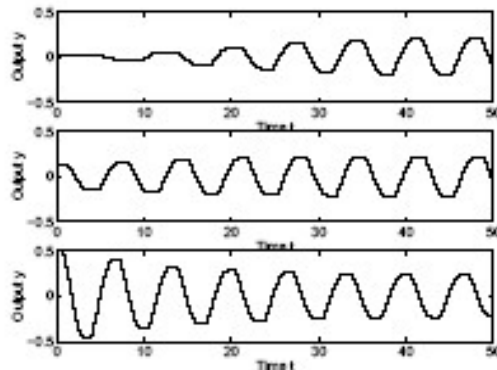


$$\text{Motor: } G(s) = \frac{1}{s(1+5s)}$$

$$\text{Controller: } K = 5$$

## Stable Periodic Solutions

Output for different initial conditions:



Frequency and amplitude independent of initial conditions!

Several systems use the existence of such a phenomenon

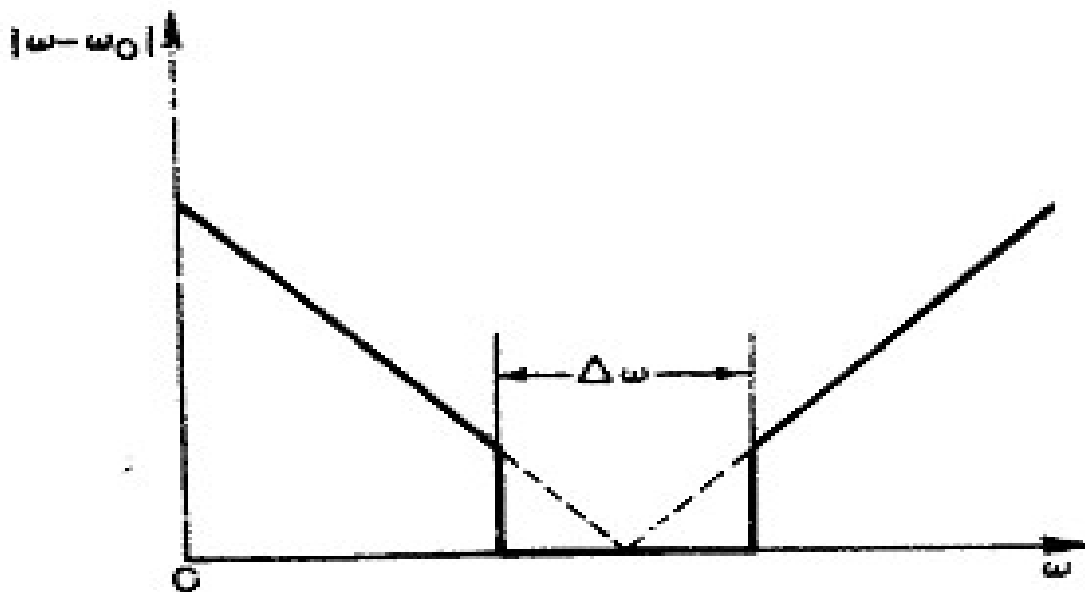
- نوسانات ماندگار در سیستمهای خطی که دارای قطب روی محور موهومی هستند نیز مشاهده می شود ولی با سیکل حدی دو تفاوت عمده دارند.

**1- دامنه نوسانات به شرایط اولیه بستگی دارد.**

**2- سیستمهای خطی با پایداری حاشیه ای خیلی حساس به تغییرات پارامتر هستند با اندکی تغییر پارامتر قطبها جابه جا می شوند.**

## • فرونشانی غیر سنکرون

اگر یک ورودی با فرکانس  $\omega$  به یک سیستم غیرخطی با سیکل حدی با فرکانس  $\omega_0$  اعمال شود وقتی اختلاف دو فرکانس کاهش می یابد در محدوده ای ضربان کاملا حذف می شود. در سیستمهای که دارای سیکل حدی با فرکانس  $\omega_0$  هستند می توان با اعمال یک ورودی با فرکانس  $\omega_1$  که رابطه ای با  $\omega_0$  ندارد نوسانات سیکل حدی را فرو نشانند.



$|\omega - \omega_0|$  versus  $\omega$  curve showing zone of frequency entrainment.



والحمد لله رب العالمين