۹. تمام اعداد حقیقی x را بیابید که:

(الف) $x^2 > 3x + 4$، (ب) $1 < x^2 < 4$،

(ج) $\frac{1}{x} < x$، (د) $\frac{1}{x} < x^2$.

۱۰. فرض کنید $a, b \in \mathbb{R}$، و فرض کنید برای هر $\varepsilon > 0$ داشته باشیم $a \leqslant b + \varepsilon$.

(الف) نشان دهید $a \leqslant b$.

(ب) نشان دهید $a < b$ نتیجه نمی‌شود.

۱۱. به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ ثابت کنید $(\frac{1}{2}(a+b))^2 \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$. نشان دهید وقتی و فقط وقتی تساوی برقرار است که $a = b$.

۱۲. (الف) اگر $0 < c < 1$، نشان دهید $0 < c^2 < c < 1$.

(ب) اگر $1 < c$، نشان دهید $1 < c < c^2$.

۱۳. اگر $c > 1$، نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{N}$، $c^n \geqslant c$. (نامساوی برنویی را با فرض $c = 1 + x$ در نظر بگیرید.)

۱۴. اگر $c > 1$ و $m, n \in \mathbb{N}$، نشان دهید $c^m > c^n$ اگر و فقط اگر $m > n$.

۱۵. اگر $0 < c < 1$، نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{N}$، $c^n \leqslant c$.

۱۶. اگر $0 < c < 1$ و $m, n \in \mathbb{N}$، نشان دهید $c^m < c^n$ اگر و فقط اگر $m > n$.

۱۷. اگر $a > 0$، $b > 0$ و $n \in \mathbb{N}$، نشان دهید $a < b$ اگر و فقط اگر $a^n < b^n$.

۱۸. فرض کنید برای $k = 1, \dots, n$، $c_k > 0$. ثابت کنید

$$n^2 \leqslant (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n}).$$

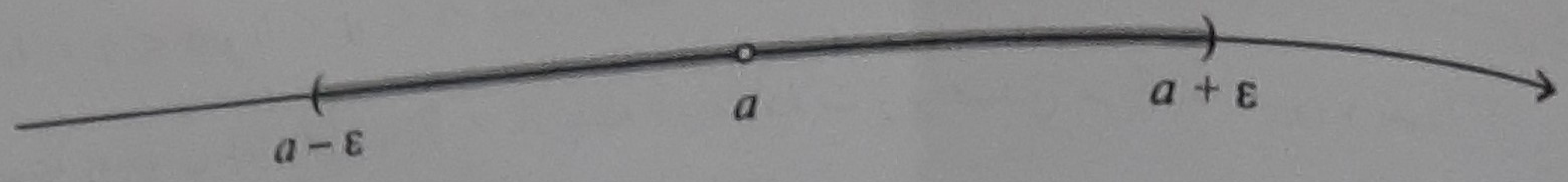
۱۹. فرض کنید برای $k = 1, \dots, n$، $c_k > 0$. نشان دهید

$$\frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{\sqrt{n}} \leqslant [c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2]^{\frac{1}{2}} \leqslant c_1 + c_2 + \cdots + c_n.$$

۲۰. با فرض وجود ریشه‌ها، نشان دهید که اگر $c > 1$، آنگاه $c^{\frac{1}{m}} < c^{\frac{1}{n}}$ اگر و فقط اگر $m > n$.

بخش ۳.۲ قدر مطلق

خاصیت تثلیث ۱.۲.۲ (iii) تضمین می‌کند که اگر $a \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$، آنگاه فقط یکی از اعداد a و $-a$ مثبت است. قدرمطلق $a \neq 0$ آن عددی از این دو عدد تعریف می‌شود که مثبت است. قدر مطلق 0 برابر 0 تعریف می‌شود.



شکل ۲.۳.۲ یک εـ همسایگی از a

همسایگی جزء U دارد.

(ب) اگر $I := \{x : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$، آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$، εـ همسایگی $V_\varepsilon(0)$ از 0 نقاطی را شامل است که در I نیستند، پس $V_\varepsilon(0)$ جزء I نیست. به عنوان مثال، عدد $x_\varepsilon := -\frac{\varepsilon}{2}$ در $V_\varepsilon(0)$ است ولی در I نیست.

(ج) اگر $|x - a| < \varepsilon$ و $|y - b| < \varepsilon$، آنگاه از نامساوی مثلث نتیجه می‌شود که

$$
\begin{aligned}
|(x+y) - (a+b)| &= |(x-a) + (y-b)| \\
&\leqslant |x-a| + |y-b| < 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

بنابراین اگر x، y به ترتیب به εـ همسایگی‌های a، b متعلق باشند، آنگاه $x + y$ به 2εـ همسایگی $(a+b)$ تعلق دارد (اما لزوماً به εـ همسایگی $a + b$ تعلق ندارد).

تمرینات بخش ۳.۲

۱. فرض کنید $a \in \mathbb{R}$. نشان دهید که داریم:

(الف) $|a| = \sqrt{a^2}$، (ب) $|a^2| = a^2$.

۲. اگر $a, b \in \mathbb{R}$ و $b \neq 0$، نشان دهید $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

۳. اگر $a, b \in \mathbb{R}$، نشان دهید $|a + b| = |a| + |b|$ اگر و فقط اگر $ab \geqslant 0$.

۴. اگر $x, y, z \in \mathbb{R}$ و $x \leqslant z$، نشان دهید $x \leqslant y \leqslant z$ اگر و فقط اگر $|x - y| + |y - z| = |z - x|$. این مطلب را تعبیر هندسی کنید.

۵. کلیهٔ اعداد $x \in \mathbb{R}$ را بیابید که در نامعادلات زیر صدق می‌کنند:

(الف) $|4x - 5| \leqslant 13$، (ب) $|x^2 - 1| \leqslant 3$،

(ج) $|x - 1| > |x + 1|$، (د) $|x| + |x + 1| < 2$.

۶. نشان دهید $|x - a| < \varepsilon$ اگر و فقط اگر $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

۷. اگر $a < x < b$ و $a < y < b$، نشان دهید $|x - y| < b - a$. این مطلب را تعبیر هندسی کنید.

۸. مجموعهٔ زوجهای (x, y) در $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ را که در معادلات زیر صدق می‌کنند تعیین و نمودار آن را رسم کنید.

(الف) $|x| = |y|$, (ب) $|x| + |y| = 1$,

(ج) $|xy| = 2$, (د) $|x| - |y| = 2$.

۹. مجموعهٔ زوجهای (x, y) در $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ را که در نامعادلات زیر صدق می‌کنند تعیین و نمودار آن را رسم کنید.

(الف) $|x| \leqslant |y|$, (ب) $|x| + |y| \leqslant 1$,

(ج) $|xy| \leqslant 2$, (د) $|x| - |y| \geqslant 2$.

۱۰. فرض کنید $0 < \varepsilon$، $0 < \delta$ و $a \in \mathbb{R}$. نشان دهید $V_\varepsilon(a) \cap V_\delta(a)$ و $V_\varepsilon(a) \cup V_\delta(a)$ برای مقادیری مناسب از γ، γ- همسایگی‌های a می‌باشند.

۱۱. نشان دهید اگر $a, b \in \mathbb{R}$، و $a \neq b$، آنگاه ε- همسایگیهایی مانند U از a و V از b وجود دارند که $U \cap V = \phi$.

بخش ۴.۲ خاصیت کمال (تمامیت) $\mathbb{R}$

در این فصل تا اینجا دربارهٔ خواص جبری و خواص ترتیبی دستگاه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ بحث کرده‌ایم. در این بخش خاصیتی دیگر از $\mathbb{R}$ را ارائه می‌کنیم که اغلب «خاصیت کمال» یا «خاصیت تمامیت» نامیده می‌شود، زیرا این خاصیت تحت مفروضاتی، وجود اعضایی را در $\mathbb{R}$ تضمین می‌کند. دستگاه اعداد گویا $\mathbb{Q}$، هم در خواص جبری ۱.۱.۲ و هم در خواص ترتیبی ۱.۲.۲ صدق می‌کند، اما همانطور که دیدیم $\sqrt{2}$ را نمی‌توان به صورت یک عدد گویا نمایش داد؛ بنابراین $\sqrt{2}$ به $\mathbb{Q}$ تعلق ندارد. این مطلب، لزوم یک خاصیت اضافی را برای مشخص کردن دستگاه اعداد حقیقی نشان می‌دهد. این خاصیت اضافی، خاصیت کمال (یا سوپرمم) نامیده می‌شود و یک مشخصهٔ اساسی $\mathbb{R}$ است.

چندین توصیف مختلف برای خاصیت کمال وجود دارد. ما در اینجا فرض می‌کنیم که هر مجموعهٔ غیرخالی و کراندار در $\mathbb{R}$، سوپرمم دارد که این انتخاب احتمالاً مؤثرترین طریقه برای توصیف خاصیت کمال می‌باشد.

سوپرمم و اینفیمم

اکنون مفهوم کران بالای یک زیرمجموعهٔ اعداد حقیقی را معرفی می‌کنیم. این مفهوم در بخشهای بعدی منتهای اهمیت را دارد.

است؟ آیا $\sup S_2$ موجود است؟ اظهارات خود را ثابت کنید.

۳. فرض کنید $S_3 := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. نشان دهید $\sup S_3 = 1$ و $\inf S_3 \geqslant 0$. (از خاصیت ارشمیدسی ۲.۵.۲ یا ۳.۵.۲ (ب) نتیجه می‌شود که $\inf S_3 = 0$.)

۴. فرض کنید $S_4 := \{1 - \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. $\inf S_4$ و $\sup S_4$ را پیدا کنید.

۵. فرض کنید S یک زیرمجموعهٔ غیرخالی و از پائین کراندار $\mathbb{R}$ باشد. ثابت کنید

$$\inf S = -\sup\{-s : s \in S\}.$$

۶. اگر مجموعهٔ $S \subseteq \mathbb{R}$ شامل یکی از کرانهای بالایش باشد، نشان دهید که این کران بالا سوپرمم S است.

۷. فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}$ غیرخالی باشد. نشان دهید $u \in \mathbb{R}$ یک کران بالای S است اگر و فقط اگر از $t \in \mathbb{R}$ و $t > u$ نتیجه شود $t \notin S$.

۸. فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}$ غیرخالی باشد. نشان دهید که اگر $u = \sup S$، آنگاه برای هر عدد $n \in \mathbb{N}$ عدد $u - \frac{1}{n}$ کران بالای S نیست، اما عدد $u + \frac{1}{n}$ یک کران بالای S است. (عکس این مطلب نیز درست است؛ ر.ک. تمرین ۳.۵.۲.)

۹. نشان دهید که اگر A و B زیرمجموعه‌های کراندار $\mathbb{R}$ باشند، آنگاه $A \cup B$ یک مجموعهٔ کراندار است. نشان دهید که $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\}$.

۱۰. فرض کنید S یک مجموعهٔ کراندار در $\mathbb{R}$ باشد و S_0 یک زیرمجموعهٔ غیرخالی S باشد. نشان دهید که $\inf S \leqslant \inf S_0 \leqslant \sup S_0 \leqslant \sup S$.

۱۱. فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}$ و $s^* := \sup S$ متعلق به S باشد. اگر $u \notin S$، نشان دهید که $\sup(S \cup \{u\}) = \sup\{s^*, u\}$.

۱۲. نشان دهید که مجموعهٔ غیرخالی و متناهی $S \subseteq \mathbb{R}$ شامل سوپرمم خود می‌باشد. (راهنمایی: استقراء ریاضی و تمرین قبل را بکار برید.)

بخش ۵.۲ کاربردهای خاصیت سوپرمم

اکنون چگونگی کارکردن با سوپرمم و اینفیمم را شرح می‌دهیم. مثال زیر نشان می‌دهد که چگونه تعاریف برای اثبات نتایج بکار برده می‌شوند. همچنین بعضی از کاربردهای بسیار مهم این خاصیت را ارائه می‌دهیم تا به کمک آنها خواص اساسی دستگاه اعداد حقیقی را که اغلب کاربرد دارند استنتاج کنیم.

۱.۵.۲ مثالها (الف) قابل ذکر است که سوپرمم و اینفیمم مجموعه‌ها با خواص جبری $\mathbb{R}$ سازگار هستند. در اینجا یک مثال از این سازگاری با عمل جمع را ارائه می‌کنیم؛ مابقی در تمرینات آورده می‌شوند.

پس $r := \frac{m}{n}$ عددی گویا است که در رابطهٔ $y > r > x$ صدق می‌کند. □

برای کامل شدن بحث در هم آمیختهٔ اعداد گویا و اصم، همان خاصیت بینیت را برای مجموعهٔ اعداد اصم نیز می‌آوریم.

۶.۵.۲ نتیجه اگر x و y دو عدد حقیقی با شرط $y > x$ باشند، آنگاه عددی اصم مانند z وجود دارد که $x < z < y$.

برهان. با بکاربردن قضیهٔ چگالی ۵.۵.۲ برای اعداد حقیقی $\frac{x}{\sqrt{2}}$ و $\frac{y}{\sqrt{2}}$، عددی گویا مانند $r \neq 0$ بدست می‌آوریم که

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

در این صورت $z := r\sqrt{2}$ عدد اصم است (چرا؟) و در رابطهٔ $y > z > x$ صدق می‌کند. □

تمرینات بخش ۵.۲

۱. با استفاده از خاصیت ارشمیدسی یا نتیجهٔ ۳.۵.۲ (ب) نشان دهید $\inf\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

۲. اگر $S := \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$، $\inf S$ و $\sup S$ را بیابید.

۳. فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}$ غیرخالی و عدد u در $\mathbb{R}$ دارای خواص زیر باشد: (i) برای هر $n \in \mathbb{N}$ عدد $u - \frac{1}{n}$ کران بالای S نیست، و (ii) برای هر عدد $n \in \mathbb{N}$ عدد $u + \frac{1}{n}$ یک کران بالای S است. ثابت کنید $u = \sup S$. (این عکس تمرین ۸.۴.۲ است.)

۴. فرض کنید S یک مجموعهٔ غیرخالی و کراندار در $\mathbb{R}$ باشد.

(الف) فرض کنید $a > 0$، و $aS := \{as : s \in S\}$. ثابت کنید

$$\inf(aS) = a \inf S, \qquad \sup(aS) = a \sup S.$$

(ب) فرض کنید $b < 0$، و $bS := \{bs : s \in S\}$. ثابت کنید

$$\inf(bS) = b \sup S, \qquad \sup(bS) = b \inf S.$$

۵. فرض کنید X یک مجموعهٔ غیرخالی باشد و $f : X \to \mathbb{R}$ دارای برد کراندار در $\mathbb{R}$ باشد. اگر $a \in \mathbb{R}$، نشان دهید از مثال ۱.۵.۲ (الف) نتیجه می‌شود که

$$\sup\{a + f(x) : x \in X\} = a + \sup\{f(x) : x \in X\}.$$

همچنین نشان دهید

$$\inf\{a + f(x) : x \in X\} = a + \inf\{f(x) : x \in X\}.$$

۶. فرض کنید A و B دو زیرمجموعهٔ غیرخالی وکراندار $\mathbb{R}$ باشند، و $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$.
ثابت کنید $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ و $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

۷. فرض کنید X یک مجموعهٔ غیرخالی باشد، f و g روی X تعریف شده و دارای برد کراندار در $\mathbb{R}$ باشند.
نشان دهید

$$\sup\{f(x) + g(x) : x \in X\} \leqslant \sup\{f(x) : x \in X\} + \sup\{g(x) : x \in X\},$$
$$\inf\{f(x) : x \in X\} + \inf\{g(x) : x \in X\} \leqslant \inf\{f(x) + g(x) : x \in X\}.$$

با ارائهٔ مثالهایی نشان دهید هر یک از این نامساویها می‌تواند تساوی یا نامساوی اکید باشد.

۸. فرض کنید $X = Y := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$. تابع $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $h(x, y) := 2x + y$ تعریف می‌شود.

(الف) ابتدا برای هر $x \in X$، مقدار $f(x) := \sup\{h(x, y) : y \in Y\}$ را بیابید و سپس $\inf\{f(x) : x \in X\}$ را پیدا کنید.

(ب) ابتدا برای هر $y \in Y$، مقدار $g(y) := \inf\{h(x, y) : x \in X\}$ را بیابید و سپس $\sup\{g(y) : y \in Y\}$ را پیدا کنید. این نتیجه را با نتیجهٔ بدست آمده در بند (الف) مقایسه کنید.

۹. محاسبات (الف) و (ب) تمرین قبل را برای تابع $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$h(x, y) := \begin{cases} 0 & (x < y) \\ 1 & (x \geqslant y) \end{cases}$$

انجام دهید.

۱۰. فرض کنید X و Y دو مجموعهٔ غیرخالی باشند و $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ دارای برد کراندار در $\mathbb{R}$ باشد. فرض کنید $f : X \to \mathbb{R}$ و $g : Y \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌های

$$f(x) := \sup\{h(x, y) : y \in Y\}, \qquad g(y) := \inf\{h(x, y) : x \in X\}$$

تعریف شده باشند. ثابت کنید

$$\sup\{g(y) : y \in Y\} \leqslant \inf\{f(x) : x \in X\}.$$

گاهی اوقات این مطلب را به صورت

$$\sup_y \inf_x h(x, y) \leqslant \inf_x \sup_y h(x, y)$$

بیان می‌کنیم. توجه کنید که تمرینات ۸ و ۹ نشان می‌دهند که این نامساوی ممکن است تساوی یا نامساوی اکید باشد.

۱۱. فرض کنید X و Y دو مجموعهٔ غیرخالی باشند و $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ دارای برد کراندار در $\mathbb{R}$ باشد. فرض کنید $F : X \to \mathbb{R}$ و $G : Y \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌های

$$F(x) := \sup\{h(x,y) : y \in Y\}, \quad G(y) := \sup\{h(x,y) : x \in X\}$$

تعریف شده باشند. اصل سوپرممهای مکرر، یعنی

$$\sup\{h(x,y) : x \in X, y \in Y\} := \sup\{F(x) : x \in X\} = \sup\{G(y) : y \in Y\},$$

را ثابت کنید. گاهی اوقات این رابطه به صورت

$$\sup_{x,y} h(x,y) = \sup_x \sup_y h(x,y) = \sup_y \sup_x h(x,y)$$

بیان می‌شود.

۱۲. نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{R}$ مفروض عدد منحصر بفردی مانند $n \in \mathbb{Z}$ وجود دارد که $n - 1 \leqslant x < n$.

۱۳. اگر $y > 0$ نشان دهید $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $\frac{1}{2^n} < y$.

۱۴. با تغییراتی در استدلال قضیهٔ ۴.۵.۲ نشان دهید عددی حقیقی و مثبت مانند y وجود دارد که $y^2 = 3$.

۱۵. با تغییراتی در استدلال قضیهٔ ۴.۵.۲ نشان دهید اگر $a > 0$، آنگاه عددی حقیقی و مثبت مانند z وجود دارد که $z^2 = a$.

۱۶. با تغییراتی در استدلال قضیهٔ ۴.۵.۲ نشان دهید عددی حقیقی و مثبت مانند u وجود دارد که $u^3 = 2$.

۱۷. اثبات قضیهٔ چگالی ۵.۵.۲ را بدون فرض $x > 0$ کامل کنید.

۱۸. اگر $u > 0$ عددی دلخواه باشد و $x < y$، نشان دهد عددی گویا مانند r وجود دارد که $x < ru < y$. (بنابراین مجموعهٔ $\{ru : r \in \mathbb{Q}\}$ در $\mathbb{R}$ چگال است.)

بخش ۶.۲ بازه‌ها و اعشاریها

رابطهٔ ترتیب روی $\mathbb{R}$ گردایه‌ای طبیعی از زیرمجموعه‌ها معروف به بازه‌ها را مشخص می‌کند. نمادها و اصطلاحات برای این مجموعه‌های خاص به صورت زیر است. اگر $a, b \in \mathbb{R}$ و $a \leqslant b$، آنگاه بازهٔ باز مشخص شده با a و b به صورت

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \tag{۱}$$

تعریف می‌شود. نقاط a و b **نقاط انتهایی** بازهٔ باز (a,b) نامیده می‌شوند، ولی نقاط انتهایی جزء بازهٔ باز نیستند. اگر هر دو نقطهٔ انتهایی به بازهٔ باز اضافه شوند، **بازهٔ بستهٔ**

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} \tag{۲}$$

A

۱- نشان دهید عددی گویا مانند r وجود ندارد که $r^2=3$.

۲- نشان دهید که اگر $x\in\mathbb{R}$ عددی گنگ و $y\neq 0$ گویا باشد آنگاه $x+y$ و xy گنگ است.

۳- اگر x و y گنگ باشند نشان دهید که نمی‌توان نتیجه گرفت $x+y$ و xy گنگ هستند.

۴- اگر $a<b$ و $c<d$، ثابت کنید $ad+bc<ac+bd$.

۵- تمام اعداد حقیقی x را بیابید که:

(الف) $x^2>3x+4$ (ب) $1<x^2<4$ (ج) $\frac{1}{x}<x$ (د) $\frac{1}{x}<x^2$

۶- هر یک از مجموعه‌های زیر را به شکل بازه بنویسید.

(الف) $\{x: x^2<6\}$ (ب) $\{x: x^3>8\}$ (ج) $\{x: |x|<2, |x-2|>1\}$

(د) $\{x: 2x+|x|\le 3\}$ (هـ) $\{x: \frac{x}{x+2}<0\}$

۷- به ازای هر $a,b\in\mathbb{R}$ ثابت کنید $\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2\le\frac{1}{2}(a^2+b^2)$. نشان دهید وقتی و فقط وقتی تساوی برقرار است که $a=b$.

۸- فرض کنید $a,b\in\mathbb{R}$ و فرض کنید برای هر $\varepsilon>0$ داشته باشیم $a\le b+\varepsilon$. نشان دهید $a\le b$.

۹- فرض کنید a و b اعدادی مثبت و ثابت باشند. مقداری از عدد x را پیدا کنید که عبارت داده شده را مینیمم کند و کمترین مقدار عبارت مورد نظر را پیدا کنید.

(الف) $ax+\frac{b}{x}$ (ب) $ax^2+\frac{b}{x}$ (ج) $ax+\frac{b}{x^2}$

۱۰- فرض کنید x و y اعدادی مثبت باشند. با توجه به هر یک از شرط‌های زیر روی x و y، بیشترین مقدار حاصلضرب xy را پیدا کنید:

(الف) $4x^2+9y^2=36$ (ب) $4x+9y^2=36$

۱۱- فرض کنید x، y و z عددهایی مثبت باشند. کمترین مقدار مجموع $x^2+y^2+z^2$ را تحت شرط $xy^2z=12$ پیدا کنید.

۱۲- فرض کنید $a_1, a_2, \dots, a_n$ اعداد حقیقی باشند. ثابت کنید

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|\le\sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}.$$

۱۳- فرض کنید $x>-1$ و $x\neq 0$. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n>1$، رابطه زیر برقرار است:

$(1+x)^n>1+nx.$ (نامساوی برنولی)

۱۴- ثابت کنید مجموعه‌ای ناتهی که از بالا کراندار است فقط یک سوپریمم دارد.