به نام خدا

معادلات دیفرانسیل خطی از مرتبه‌ی اول

یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول به شکل عمومی

$$a_1(x)y' + a_2(x)y = a_3(x) \quad , \quad x \in I \subseteq \mathbb{R}$$

بیان می‌شود که ضرایب $a_1(x)$ ، $a_2(x)$ و $a_3(x)$ روی I پیوسته‌اند و $a_1(x)$ ناصفر است ، با تقسیم طرفین معادله‌ی فوق به $a_1(x)$ ، معادله زیر حاصل می‌گردد:

$$y' + p(x)y = q(x) \quad , \qquad (1)$$

که در آن $p(x) = \frac{a_2(x)}{a_1(x)}$ و $q(x) = \frac{a_3(x)}{a_1(x)}$.

معادله‌ی دیفرانسیل (1) توسط عامل انتگرال سازی به شکل $\mu = e^{\int p(x)dx}$ قابل تبدیل به یک معادله‌ی دیفرانسیل کامل می‌باشد . با ضرب طرفین معادله (1) در عامل μ خواهیم داشت :

$$e^{\int p(x)dx} \cdot y' + p(x)e^{\int p(x)dx} \cdot y = q(x)e^{\int p(x)dx} \qquad (2)$$

از طرف دیگر می‌دانیم

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}\right) = p(x)e^{\int p(x)dx}$$

لذا سمت چپ معادله (2) به شکل ساده‌تر $\left(ye^{\int p(x)dx}\right)'$ قابل بیان می‌باشد . بدین ترتیب معادله (2) به شکل

$$\left(y e^{\int p(x)\,dx}\right)' = q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}$$

خلاصه می‌شود. حال با انتگرال‌گیری از طرفین معادله جدید (نسبت به متغیر x)

نتیجه می‌شود که

$$y e^{\int p(x)\,dx} = \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx} \cdot dx + c$$

و یا

$$y = \frac{\int q(x) \cdot \mu \, dx + c}{\mu} \qquad (۳)$$

که در آن $\mu = e^{\int p(x)\,dx}$.

مثال ۱: معادله دیفرانسیل $x^2 y' + xy + 2 = 0$ را حل کنید.

جواب: معادله‌ی فوق با تقسیم طرفین به x^2 به شکل متعارف

$$y' + \frac{1}{x} y = -\frac{2}{x^2}$$

تبدیل می‌گردد. لذا $p(x) = \frac{1}{x}$ و $q(x) = -\frac{2}{x^2}$. در اینجا عامل انتگرال‌ساز عبارت

است از

$$\mu = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln x} = x$$

بنابراین با مراجعه به (۳) درمی‌یابیم که

$$y = \frac{\int q(x)\,\mu\, dx + c}{\mu} = \frac{\int -\frac{2}{x^2} \cdot x \, dx + c}{x}$$

$$= \frac{-2\ln|x| + c}{x}$$

(c ثابت دلخواه است)

(۳)

مثال ۲ : معادله دیفرانسیل $\sec^2 y \dfrac{dy}{dx} + 2x \tan y = x^3$

را با تعویض متغیر $u = \tan y$ حل کنید.

جواب : بوضوح این معادله از شکل متعارف (۱) برخوردار نیست و علاوه براین خطی نیست. متغیر مستقل x می‌باشد و مشتق گیری نیز باید نسبت به x باشد.

$$u = \tan y \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق طرفین}} \frac{du}{dx} = y'(1+\tan^2 y) = y' \sec^2 y$$

با جایگذاری u بجای $\tan y$ و $\dfrac{du}{dx}$ بجای $y' \sec^2 y$ در معادله اصلی خواهیم داشت:

$$\frac{du}{dx} + 2x u = x^3 \qquad (۴)$$

معادله جدید مشابه معادله (۱) است فقط بجای متغیر وابسته y، متغیر وابسته u جایگزین گردیده است. در معادله (۴)،

$$p(x) = 2x, \qquad q(x) = x^3$$

$$\mu = e^{\int p(x)\,dx} = e^{x^2}$$

حال با ضرب طرفین (۴) در μ خواهیم داشت:

$$\underbrace{e^{x^2}}_{\mu} \cdot \frac{du}{dx} + \underbrace{2x e^{x^2}}_{\mu'} u = x^3 e^{x^2}$$

$$\Rightarrow \mu u' + \mu' u = x^3 e^{x^2} \Longrightarrow (\mu u)' = x^3 e^{x^2}$$

$$\Rightarrow \mu u = \int x^3 e^{x^2} dx + c$$

$$\Rightarrow \mu u = \int x^2 \cdot x e^{x^2} dx + c \qquad (۵)$$

$$\int x^2 \cdot x e^{x^2} dx \overset{t=x^2,\ dt=2x\,dx}{=\!=} \int \frac{t}{2} e^t dt$$

مشتق	انتگرال
$\frac{t}{2}$	e^t
$\frac{1}{2}$ $\xrightarrow{+}$	e^t
0 $\xrightarrow{-}$	e^t

$$= \frac{t}{2} e^t - \frac{1}{2} e^t$$

$$= \frac{e^{x^2}}{2}(x^2 - 1)$$

با جایگذاری حاصل این انتگرال در (۵) خواهیم داشت:

$$\mu u = \frac{e^{x^2}}{2}(x^2-1) + c$$

$$\Rightarrow u = \tan y = \frac{\frac{e^{x^2}}{2}(x^2-1) + c}{\mu} = \frac{\frac{e^{x^2}}{2}(x^2-1) + c}{e^{x^2}}$$

یا

$$\tan y = \frac{x^2-1}{2} + c e^{-x^2}$$

مثال ۳: مثال ۲ را با شرط اولیه $y(0) = 0$ حل کنید.

جواب: شرط اولیه بیان می‌دارد که منحنی انتگرال (جواب) از نقطه‌ی $(0,0)$ عبور می‌کند بنابراین

$$\tan 0 = \frac{0^2-1}{2} + c e^{-0^2}$$

$$\Rightarrow c - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

از این رو جواب خصوصی $\tan y = \frac{x^2-1}{2} + \frac{1}{2} e^{-x^2}$ حاصل می‌آید.

مثال ۴: معادله‌ی دیفرانسیل $(y-x+xy\cot x)dx+x\,dy=0$ را حل کنید.

جواب: گاهی اوقات معادله دیفرانسیل $M\,dx+N\,dy=0$ با اندکی دستکاری جبری به یک معادله دیفرانسیل خطی تبدیل می‌شود.

$$x\,dy+(y-x+xy\cot x)dx=0 \Longrightarrow x\frac{dy}{dx}+y-x+xy\cot x=0$$

$$\Longrightarrow x\frac{dy}{dx}+(1+x\cot x)y=x$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{x}+\cot x\right)y=1$$

در اینجا $p(x)=\frac{1}{x}+\cot x$ و $q(x)=1$ لذا

$$\mu=e^{\int\left(\frac{1}{x}+\cot x\right)dx}=e^{\ln x+\ln\sin x}=e^{\ln x\sin x}=x\sin x$$

$$\Longrightarrow y=\frac{\int q(x)\mu\,dx+c}{\mu}=\frac{\int x\sin x\,dx+c}{x\sin x}=\frac{-x\cos x+\sin x+c}{x\sin x}$$

مشتق	انتگرال
x	$\sin x$
1	$-\cos x$
0	$-\sin x$

$+$ ، $-$

نکته ۱: گاهی اوقات در یک معادله دیفرانسیل با تعویض نقش x و y یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول با متغیر وابسته x و متغیر مستقل y بدست می‌آید. در واقع به شرط برقراری رابطه‌ی $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ ، معادله به شکل خطی

$$\frac{dx}{dy}+p(y)x=q(y)$$

تبدیل می گردد و از جواب

$$x=\frac{\int \mu \cdot q(y)\,dy + c}{\mu} \quad , \quad \mu = e^{\int p(y)\,dy}$$

برخوردار می باشد.

مثال ۵: جواب عمومی معادله

$$(1+y^2) + (x - e^{\tan^{-1} y})\frac{dy}{dx} = 0$$

را بیابید.

جواب: این معادله به وضوح خطی نیست اما تحت فرآیند زیر خطی می شود:

$$(x-e^{\tan^{-1}y})\frac{dy}{dx} = -(1+y^2) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{e^{\tan^{-1}y} - x}{1+y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{1}{1+y^2}x = \frac{e^{\tan^{-1}y}}{1+y^2}$$

در اینجا $p(y) = \frac{1}{1+y^2}$ و $q(y) = \frac{e^{\tan^{-1}y}}{1+y^2}$. لذا

$$\mu = e^{\int \frac{1}{1+y^2}dy} = e^{\tan^{-1}y}.$$

حال تابع جواب مطابق رابطه ی بالای صفحه عبارت است از

$$x = \frac{\int \mu \cdot q(y)\,dy + c}{\mu} = \frac{\int e^{2\tan^{-1}y}\cdot \frac{1}{1+y^2}dy + c}{e^{\tan^{-1}y}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\int e^{2t}\,dt + c}{e^{\tan^{-1}y}} = \frac{\frac{1}{2}e^{2t} + c}{e^{\tan^{-1}y}} = \frac{\frac{1}{2}e^{2\tan^{-1}y} + c}{e^{\tan^{-1}y}}$$

$$\boxed{t = \tan^{-1}y \Rightarrow dt = \frac{dy}{1+y^2}}$$

تمرین ۱: هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید:

(۱) $y' + y\cot x = \frac{1}{\sin x}$, (۲) $y'\cos x = 2 + 2y\sin x$

(۳) $y' - y\tan x = \sin x$, $y(0) = 1$

(۴) $y = (2y^4 + 2x)y'$, (۵) $(x+y+1)\frac{dy}{dx} = 1$

(۶) $y' = \frac{1}{x\sin y + 2\sin 2y}$, (۷) $y\frac{dx}{dy} + \frac{x}{2\ln y} = 1$

راهنمایی: در سوالات (۴)، (۵) و (۶) تعویض نقش x و y را به یاد آورید.

تمرین ۲: معادله دیفرانسیل $(\sin y)y' + 2x\cos y = x$

را با جانشانی (تعویض متغیر) $u = \cos y$ حل کنید.

حل برخی از معادلات مرتبه اول که قابل تبدیل به خطی مرتبه اول هستند

معادله دیفرانسیل برنولی:

یک معادله دیفرانسیل به شکل

$$y' + p(x)y = q(x)\cdot y^n \quad , \quad n \neq 0, 1 \quad , \quad n \in \mathbb{R}$$

یک معادله دیفرانسیل برنولی نامیده می‌شود. این معادله اولین بار توسط ژاکوب برنولی در سال 1695 میلادی ساخته شد.

با تقسیم طرفین این معادله به y^n نتیجه می‌شود که

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)\,y^{1-n}=q(x) \qquad (1)$$

لایب نیز در سال 1696 نشان داد که با جانشانی

$$u=y^{1-n} \qquad (2)$$

معادله برنولی به یک معادله ی خطی مرتبه اول با متغیر وابسته u تبدیل می شود. به واقع

با مشتق گیری از طرفین (۲) نسبت به x داریم

$$u'=(1-n)\,y'\,y^{-n} \qquad (3)$$

حال با جایگذاری (۲) و (۳) و در (۱) معادله دیفرانسیل زیر بدست می آید

$$\frac{1}{1-n}u'+p(x)\,u=q(x)$$

با ضرب طرفین معادله جدید در $1-n$ خواهیم داشت

$$u'+\underbrace{(1-n)\,p(x)}_{P(x)}\,u=\underbrace{(1-n)\,q(x)}_{Q(x)} \qquad (4)$$

بنابراین عامل انتگرال ساز برابر است با

$$\mu=e^{\int P(x)\,dx}=e^{\int (1-n)\,p(x)\,dx}$$

و جواب معادله عبارت است از

$$u=y^{1-n}=\frac{\int \mu\cdot Q(x)\,dx+C}{\mu}$$

و یا

$$y^{1-n}=\frac{\int \mu\cdot(1-n)\,q(x)\,dx+C}{\mu}.$$

مثال ۱ : معادله دیفرانسیل $y' = y + 2y^5$ را حل کنید.

جواب : معادله به شکل

$$y' - y = 2y^5$$

قابل بازنویسی است. بوضوح $p(x) = -1$ و $q(x) = 2$ و $n = 5$

بنابراین

$$P(x) = (1-n)p(x) \quad , \quad Q(x) = (1-n)q(x)$$

$$\Rightarrow P(x) = -4(-1) = 4 \, , \quad Q(x) = -4(2) = -8$$

جواب معادله عبارت است از

$$y^{1-n} = \frac{\int \mu Q(x)\,dx + C}{\mu}$$

که در آن $\mu = e^{\int P(x)\,dx}$. از اینرو

$$\mu = e^{\int 4\,dx} = e^{4x}$$

و

$$y^{-4} = \frac{\int e^{4x}(-8)\,dx + C}{e^{4x}} = \frac{-\frac{8}{4}e^{4x} + C}{e^{4x}} = -2 + Ce^{-4x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{y^4} = -2 + Ce^{-4x}}$$

تذکر : معادله نظیر به مثال ۱ یک معادله جداپذیر است که به شکل $\frac{dy}{y+2y^5} = dx$ قابل بازنویسی است. در مورد نحوه محاسبه جواب آن بیاندیشید!

نکته ۱: گاهی اوقات یک معادله برنولی ممکن است به شکل

$$\frac{dx}{dy} + p(y)\, x = q(y)\, x^n \qquad n \neq 0, 1 \qquad (6)$$

نیز ظاهر شود.

در این وضعیت جواب معادله برابر است با

$$x^{1-n} = \frac{\int \mu\, Q(y)\, dy + C}{\mu},$$

که در آن

$$\mu = e^{\int (1-n)\, p(y)\, dy}$$

و $Q(y) = (1-n)\, q(y)$.

نکته ۲: در برخی موارد در یک معادله دیفرانسیل، تعویض نقش x و y معادله را به یک معادله برنولی تقلیل می دهد.

مثال ۲: معادله دیفرانسیل $y' = \frac{3x^2}{x^3+y+1}$ را با شرط اولیه $y=0$ وقتی که $x=1$، حل کنید.

جواب: این معادله یک معادله دیفرانسیل برنولی نیست اما وقتی $\frac{dx}{dy}$ جایگزین $\frac{1}{y'}$ گردد نتیجه می دهد که

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^3+y+1}{3x^2}$$

و یا

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{3}x = \frac{y+1}{3}\, x^{-2}$$

در اینجا برطبق (6)، $n=-2$، $p(y) = -\frac{1}{3}$ و $q(y) = \frac{y+1}{3}$. از اینرو

$$\mu = e^{\int (1-n)\, p(y)\, dy} = e^{\int 3(-\frac{1}{3})\, dy} = e^{-y}$$

و

$$x^{1-n} = x^{1-(-2)} = \frac{\int \mu\, Q(y)\, dy + c}{\mu}$$

$$\Rightarrow x^3 = \frac{\int 3e^{-y}\cdot \frac{y+1}{3}\, dy + c}{e^{-y}} = \frac{\int (y+1)e^{-y}\, dy + c}{e^{-y}}$$

مشتق		انتگرال
$y+1$		e^{-y}
1	$+$	$-e^{-y}$
0	$-$	e^{-y}

$$\Rightarrow \int (y+1)\, e^{-y}\, dy = -e^{-y}(y+1) - e^{-y}$$

جواب عمومی : $x^3 = \dfrac{e^{-y}(-y-2) + c}{e^{-y}} = -(y+2) + ce^{y}$

$$x=1,\ y=0 \Rightarrow 1^3 = -(0+2) + ce^{0} \Rightarrow c = 3$$

جواب خصوصی : $\boxed{x^3 = 3e^{y} - (y+2)}$

مثال ۳ : مسیرهای عمود بر دسته منحنی $y^2 = x^2(1-cx)$ را بیابید، c ثابت دلخواه است.

جواب : ابتدا با مشتق گیری از طرفین معادله نسبت به x داریم که

$$2yy' = 2x - 3cx^2$$

$$y^2 = x^2(1-cx) \Rightarrow c = \frac{x^2-y^2}{x^3} \Rightarrow 2yy' = 2x - 3x^2\,\frac{x^2-y^2}{x^3}$$

با توجه به محاسبات فوق معادله دیفرانسیل تغییر به دسته منحنی مذکور به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$2yy' = \frac{2x^2 - 3x^2 + 3y^2}{x^2} = \frac{3y^2 - x^2}{x}$$

حال با تعویض y' با $-\frac{1}{y'}$ در معادله اخیر خواهیم داشت

$$-\frac{2y}{y'} = \frac{3y^2 - x^2}{x}$$

و یا

$$-2y\,\frac{dx}{dy} = -x + 3y^2x^{-1}$$

در نهایت معادله برنولی با متغیر وابسته x به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{2y}x = -\frac{3}{2}yx^{-1}$$

که در آن $n=-1$ ، $p(y) = \frac{1}{2y}$ و $q(y) = -\frac{3}{2}y$. در نتیجه عامل انتگرال ساز برابر است با:

$$\mu = e^{\int(1-n)p(y)dy} = e^{\int 2\frac{1}{2y}dy} = y$$

و جواب معادله برابر است با

$$x^{1-n} = x^2 = \frac{\int y(-\frac{3}{2}y)(2)dy + K}{y} = \frac{-y^3 + K}{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 = \frac{K}{y} - y^2}$$

(K ثابت دلخواه)

تمرین: معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید

(۱) $y' = -xy + 6x\sqrt{y}$;

(۲) $xy' + 2y = \dfrac{\sin x}{xy}$;

(۳) $x\dfrac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x$;

(۴) $y' + xy = y^2 e^{\frac{x^2}{2}} \sin x$

(۵) $\dfrac{dx}{dy} = x^3y^3 + xy$;

(۶) $\begin{cases} y' \sin y = \cos y\,(1 - x\cos y) \\ z = \cos y \end{cases}$ قرار دهید

(۷) $(1+y^2)\,dx = \left(\sqrt{1+y^2}\,\cos y - xy\right) dy$

معادله دیفرانسیل ریکاتی:

معادله دیفرانسیل ریکاتی اولین بار توسط ژاکوبو فرانچسکو ریکاتی توسط نامه‌ای که در سال 1718 به جیووانی پولینی نوشت، معرفی گردید. این معادله در ریاضیات و نظریه کنترل بسیار پرکاربرد است و برای سه دهه تاریخچه‌ای نسبتاً کامل از پیدایش این معادله و سیر تکاملی آن می‌توان به مقاله

Historical perspectives of the Riccati equations, 2017, by Marc Jungers,

مراجعه نمود. این معادله به شکل

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2 \qquad (1)$$

تعریف می‌گردد که در آن ضرایب p، q و r توابعی پیوسته هستند. اگر $r=0$

آنگاه معادله (۱) به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول کاهش می‌یابد. اگر $p=0$ آنگاه این معادله به یک معادله دیفرانسیل برنولی تبدیل می‌شود.

برای حل معادله ریکاتی معمولاً یک جواب خصوصی ناصفر از آن مانند $y_1(x)$ را در اختیار قرار می‌دهند. حال با جانشانی

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

این معادله به یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه اول با متغیر وابسته z تبدیل می‌شود. در زیر روند محاسبات انجام می‌گیرد:

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \Longrightarrow y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$$

با جایگذاری دو رابطه فوق در (۱) نتیجه می‌شود که

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} = p(x) + q(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + r(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2$$

$$\Longrightarrow y_1' - \frac{z'}{z^2} = \underbrace{p(x) + q(x)y_1 + r(x)y_1^2}_{y_1'} + \frac{1}{z}q(x) + \frac{2y_1}{z}r(x) + \frac{r(x)}{z^2}$$

$$\Longrightarrow z' + \left(q(x) + 2y_1 r(x)\right)z = -r(x) \qquad (۲)$$

معادله (۲) یک معادله دیفرانسیل خطی است که جواب آن عبارت است از

$$z = \frac{\int \mu \cdot (-r(x))\,dx + c}{\mu} \quad , \quad \mu = e^{\int (q(x) + 2y_1 r(x))\,dx} \qquad (۳)$$

در نهایت تابع مجهول y از دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$y = y_1 + \frac{1}{z} = y_1 + \frac{\mu}{\int \mu(-r(x))\,dx + c} \,. \qquad (۴)$$

مثال ۱ : جواب عمومی معادله زیر را بیابید اگر بدانیم $y_1 = \ln x$ جوابی خصوصی از آن می‌باشد

$$y' = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + \frac{1}{x} + 2x(1-\ln x)y + xy^2$$

جواب : با مقایسه با (۱) نتیجه می‌شود که

$$p(x) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + \frac{1}{x}$$

$$q(x) = 2x(1-\ln x) \quad , \quad r(x) = x$$

با اختیار $y = \ln x + \frac{1}{z}$ معادله فوق به معادله (۲) تبدیل می‌شود :

$$z' + (q(x) + 2y_1 r(x))z = -r(x)$$

و یا

$$z' + (2x(1-\ln x) + 2(\ln x)x)z = -x$$

$$\Rightarrow z' + 2xz = -x$$

$$\mu = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

$$z = \frac{\int \mu \cdot (-x)\,dx + c}{\mu} = \frac{\int -xe^{x^2}dx + c}{e^{x^2}} = \frac{-\frac{1}{2}e^{x^2} + c}{e^{x^2}}$$

$$\Rightarrow y = y_1 + \frac{1}{z} = \ln x + \frac{e^{x^2}}{c - \frac{1}{2}e^{x^2}} \, ,$$

تمرین : جوابی از مثال ۱ بیابید که در شرط $y = 2$ وقتی که $x = 1$ ، صدق کند .

مثال ۲: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$y' = (y-x)^2 + 1, \qquad y_1(x) = x,$$

جواب: می دانیم

$$y' = x^2 + 1 - 2xy + y^2$$

لذا $p(x) = x^2+1$ ، $q(x) = -2x$ و $r(x) = 1$.

$$\Rightarrow q(x) + 2y_1 r(x) = -2x + 2x = 0$$

$$\cancel{y=} y_1 + \frac{1}{z} = x + \frac{1}{z} \Rightarrow z' + 0z = -1$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = -1 \Rightarrow dz = -dx \Rightarrow \boxed{z = -x + c}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = y_1 + \frac{1}{z} = x + \frac{1}{c-x}}$$

تمرین: معادلات دیفرانسیل زیر را با توجه به جواب خصوصی داده شده، حل کنید:

(۱) $$y' = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x}, \qquad y_1 = \sin x$$

(۲) $$y' = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}, \qquad x > 0, \qquad y_1 = \frac{1}{x}$$

(۳) $$y' = e^{-x} y^2 + y - e^{x}, \qquad y_1 = ae^{bx}$$

(ثابت‌های a و b با جاگذاری در معادله معلوم می شوند)

(۴) $$y' = \frac{4}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2, \qquad y_1 = ax^b$$

(ثابت‌های a و b با جاگذاری در معادله معلوم می شوند)