معادلات دیفرانسیل

سید سیف‌اله موسی‌زاده

دانشگاه کاشان– دانشکدهٔ علوم ریاضی

* فصل ۱ : تعاریف و مفاهیم مقدماتی

* تعریف (معادله دیفرانسیل): به هر رابطه بین تابع مجهول و متغیرهای مستقل و مشتقات تابع مجهول نسبت به متغیرهای مستقل، یک معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود.

مثال:

① $xy' + 4y = e^{3x}$ ⟵ یک معادله دیفرانسیل معمولی با تابع مجهول $y = y(x)$ و یک متغیر مستقل x

② $x^2y'' + xy(y')^5 = 0$ ⟵ یک معادله دیفرانسیل معمولی با تابع مجهول $y = y(x)$ و یک متغیر مستقل x

③ $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ⟵ یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (معادله دیفرانسیل جزئی) با تابع مجهول $u = u(x,y)$ و متغیرهای مستقل x و y ⟵ در این درس، با این نوع معادله دیفرانسیل سروکار نداریم.

یادآوری: ← از ریاضی عمومی ۲ مثال:

$$f(x,y) = 4x^2y^3 + x\sin(5y) - e^{7x} + y - 6 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 8xy^3 + \sin(5y) - 7e^{7x} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 12x^2y^2 + 5x\cos(5y) + 1$$

* تعریف (جواب یک معادله دیفرانسیل): به هر تابعی که به جای تابع مجهول معادله قرار گیرد، تساوی برقرار باشد را یک جواب آن معادله دیفرانسیل می‌گوییم.

مثال: معادله $y' + y = 0$ را در نظر بگیرید. تابع $y = e^{-x}$ جوابی از این معادله است. زیرا

$$y = e^{-x} \rightarrow y' = -e^{-x} \Rightarrow y' + y = -e^{-x} + e^{-x} = 0 \checkmark$$

البته $y = 4e^{-x}$ نیز جوابی از این معادله است و همچنین $y = \frac{\sqrt{5}}{3}e^{-x}$.

مثال: معادله $y'' + y = 0$ را در نظر بگیرید. $y = \sin x$ جوابی از این معادله است، زیرا

$$y = \sin x \rightarrow y' = \cos x \rightarrow y'' = -\sin x$$

$$\Rightarrow y'' + y = -\sin x + \sin x = 0 \checkmark$$

همچنین $y = \cos x$ نیز جوابی از این معادله است (چرا) و نیز $y = -3\sin x$ و $y = \sqrt{2}\cos x$ نیز جواب‌هایی از این معادله هستند (چرا).

* تعریف (مرتبه یک معادله دیفرانسیل): به بزرگترین مرتبه مشتق تابع مجهول موجود در یک معادله دیفرانسیل، مرتبه آن معادله می‌گوییم.

مثال:

① $x^2(y')^5 - 4xy = \sin x$ ⟵ یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۱

② $y'' + \frac{x}{x+1}y' = x$ ⟵ یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲

③ $yy'' + (y'')^4 = e^{-3x}y$ ⟵ یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲

④ $xy' - y^{(5)} + 2y'' = 0$ (مشتق مرتبه ۵) ⟵ یک معادله دیفرانسیل از مرتبه ۵

* تعریف (جواب عمومی): بعضی از معادلات دیفرانسیل دارای چند جواب و یا بینهایت جواب هستند که همهٔ آنها را می‌توان به صورت یک فرمول کلی که شامل یک یا چند ثابت دلخواه است، بیان کرد. این فرمول کلی را جواب عمومی معادله می‌نامیم.

مثال ①: جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبهٔ اول $y'+y=0$ به صورت $y=ce^{-x}$ است (چرا؟) که c ثابت دلخواه است.

دلیل آن در فصل ۲ بیان خواهد شد.

مثال ②: جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبهٔ دوم $y''+y=0$ به صورت $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ است (چرا؟) که c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواه هستند.

دلیلش در فصل ۳ بیان خواهد شد.

* نکته: در معادلات مرتبه اول، در جواب عمومی، فقط یک ثابت دلخواه c داریم و در معادلات مرتبه دوم، در جواب عمومی، دو تا ثابت دلخواه c_1 و c_2 و به طور کلی در معادله مرتبه n، n تا ثابت دلخواه c_1، c_2، ...، c_n داریم.

* تعریف (جواب خصوصی): اگر در جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل، به جای ثابت‌ها دلخواه، اعداد مشخصی قرار دهیم، جواب حاصل را یک جواب خصوصی معادله می‌نامیم.

مثال: در مثال ① بالا، اگر $c=7$ آنگاه $y=7e^{-x}$ یک جواب خصوصی معادلهٔ $y'+y=0$ است. همچنین $y=\sqrt{3}e^{-x}$ نیز یک جواب خصوصی این معادله است.

مثال: معادله دیفرانسیل $y''+y=0$ را به همراه شرایط اولیهٔ $y(0)=3$ و $y'(0)=-2$ در نظر بگیرید.

طبق مثال ② بالا، جواب عمومی این معادله به شکل $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ است. با توجه به شرایط اولیهٔ مسأله، داریم

جای x   جای y

$$\begin{cases} y(0)=3 \rightarrow c_1\cos(0)+c_2\sin(0)=3 \rightarrow \boxed{c_1=3} \\ y'(0)=-2 \rightarrow -c_1\sin(0)+c_2\cos(0)=-2 \rightarrow \boxed{c_2=-2} \end{cases}$$

جای x   جای y'

توجه: $y'=-c_1\sin x+c_2\cos x$

و بدین ترتیب $y=3\cos x-2\sin x$ یک جواب خصوصی از معادلهٔ $y''+y=0$ است.

* تعریف (جواب غیرعادی): به جوابی از معادله دیفرانسیل که نتوان آن را از روی جواب عمومی به دست آورد، جواب غیرعادی معادله می‌نامیم.

دلیلش در فصل ۲

مثال: جواب عمومی معادلهٔ $y'=2\sqrt{y}$ به صورت $y=(x+c)^2$ است (چرا؟) که c ثابت دلخواه است. از طرفی $y=0$ نیز جوابی از این معادله است ولی به ازای هیچ مقداری از c، جواب $y=0$ از روی جواب عمومی به دست نمی‌آید. لذا $y=0$ یک جواب غیرعادی معادلهٔ $y'=2\sqrt{y}$ است.

مثال: معادله دیفرانسیل $y = xy' + (y')^2$ را در نظر بگیرید. جواب عمومی این معادله به صورت $y = cx + c^2$ است (چرا) که c ثابت دلخواه است. البته $y = -\frac{1}{4}x^2$ نیز جوابی از این معادله است (چرا) ولی این جواب از روی جواب عمومی به دست نمی‌آید. لذا $y = -\frac{1}{4}x^2$ یک جواب غیرعادی معادله است.

دانشیمن در فصل ۲

---

* معادله دیفرانسیل یک دسته منحنی:

شکل کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $F(x, y, y') = 0$ ① است و جواب عمومی آن به صورت $g(x, y, c) = 0$ ② است که c ثابت دلخواهی است.

به ازای مقادیر مختلف c، بیانگر یک دسته منحنی است

با مشتق‌گیری از طرفین ② نسبت به x داریم:

$$g_x + y' g_y = 0 \quad ③$$

g_x همان $\frac{\partial g}{\partial x}$ است

g_y همان $\frac{\partial g}{\partial y}$ است

با حذف ثابت c از معادلات ② و ③ به معادله ① می‌رسیم که معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های ② است.

مثال: معادله دیفرانسیل هر یک از دسته منحنی‌های زیر را به دست آورید:

حل)

① $y = ce^{-4x}$ (*)

فقط یک بار مشتق‌گیری ← معادله فقط شامل یک ثابت c است

$\hookrightarrow y' = -4ce^{-4x}$ (**)

اکنون برای حذف ثابت c از معادلات (*) و (**) داریم:

$$\frac{(*)}{(**)}: \quad \frac{y}{y'} = \frac{ce^{-4x}}{-4ce^{-4x}} \longrightarrow \frac{y}{y'} = -\frac{1}{4} \longrightarrow \text{یا}: \boxed{y' = -4y}$$

② $y = c_1 e^x + c_2 \sin x$ (*)

دارای دو ثابت دلخواه c_1 و c_2 ← دو بار مشتق‌گیری

$\hookrightarrow y' = c_1 e^x + c_2 \cos x$ (**)

$\hookrightarrow y'' = c_1 e^x - c_2 \sin x$ (***)

اکنون برای حذف ثابت‌های c_1 و c_2 به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$(*) + (***): \; y + y'' = 2c_1 e^x \longrightarrow c_1 = \frac{y + y''}{2e^x} \longrightarrow$$

c_1 را در (*) جایگذاری می‌کنیم تا c_2 را نیز به دست آوریم →

$$\longrightarrow y = \frac{y+y''}{2\cancel{e^x}}(\cancel{e^x}) + c_2 \sin x \longrightarrow c_2 = \frac{y - \left(\frac{y+y''}{2}\right)}{\sin x} \longrightarrow c_2 = \frac{y - y''}{2\sin x}$$

اکنون c_1 و c_2 را در معادله (**) (یعنی معادله‌ای که تا حالا از آن استفاده نکردیم) جایگذاری می‌کنیم:

$$y' = \frac{y+y''}{2\cancel{e^x}}(\cancel{e^x}) + \frac{y-y''}{2\sin x}(\cos x) \longrightarrow \boxed{y' = \frac{y+y''}{2} + \frac{y-y''}{2}\cot x} \checkmark$$

تمرین ③ $y = ce^{8x} \longrightarrow$ جواب: $y' = 8y$

تمرین ④ $y = c_1\cos x + c_2\sin x \longrightarrow$ جواب: $y''+y=0$

مثال: معادله دیفرانسیل همه دایره‌ها در صفحه مختصات که مرکزشان روی محور y ها قرار دارد را بیابید.

حل) می‌دانیم معادله دایره‌ها که مرکزشان روی محور y ها قرار دارد به صورت

$x^2+(y-c_1)^2=c_2^2 \quad (*)$ $\longrightarrow$ دو ثابت دلخواه c_1 و c_2 دارد، لذا دوبار مشتق می‌گیریم

است که c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواه‌اند. اکنون برای یافتن معادله دیفرانسیل مربوط به (*)، داریم:

از طرفین نسبت به x مشتق گرفتیم: $2x+2y'(y-c_1)=0 \quad (**)$

مجدداً از طرفین نسبت به x مشتق گرفتیم: $2+2y''(y-c_1)+2(y')^2=0 \quad (***)$

اکنون برای حذف c_1 و c_2 از معادلات (*)، (**) و (***)، کافیست $y-c_1$ را از (**) یافته و در (***) جایگذاری کنیم:

$$\xrightarrow{\text{از } (**)} y-c_1 = \frac{-2x}{2y'} = -\frac{x}{y'} \xrightarrow[\text{جایگذاری}]{\text{در } (***)} \boxed{2+2y''\left(-\frac{x}{y'}\right)+2(y')^2=0} \checkmark$$

---

* مسیرهای متعامد (قائم) یک دسته منحنی:

* تعریف: دو دسته منحنی A و B را در نظر بگیرید. اگر هر منحنی از A بر همه منحنی‌های B عمود باشد و برعکس، آنگاه می‌گوییم دو دسته منحنی A و B، متعامدند.

* یافتن مسیرهای متعامد یک دسته منحنی: فرض کنید دسته منحنی A داده شده است و هدف، یافتن مسیرهای متعامد آن (یعنی دسته منحنی B متعامد بر A) باشد، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

گام اول: حذف ثابت c و یافتن معادله دیفرانسیل دسته منحنی A.

گام دوم: به جای y'، $-\frac{1}{y'}$ قرار می‌دهیم تا معادله دیفرانسیل دسته منحنی B به دست آید.

گام سوم: حل معادله دیفرانسیل جدید به دست آمده، که جواب عمومی آن، همان دسته منحنی B متعامد بر A است.

یعنی: دسته منحنی A داده شده $\longrightarrow$ یافتن معادله دیفرانسیل دسته منحنی A $\xrightarrow{y' \to -\frac{1}{y'}}$ به معادله دیفرانسیل دسته منحنی B می‌رسیم $\xrightarrow{\text{حل معادله دیفرانسیل جدید}}$ به دسته منحنی B

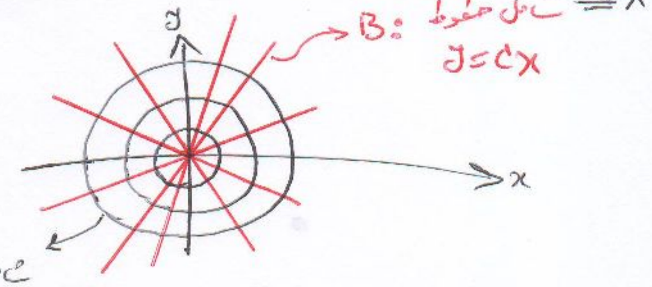
شیب خط مماس بر منحنی A از $= m_1 = y'$

شیب خط مماس بر منحنی از B که عمود بر منحنی از A است $= m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{y'}$

چون $m_1 m_2 = -1 \rightarrow -1 =$ حاصلضرب شیب‌ها

* بیان یک توضیح برای گام دوم:

*مثال:



مثال: مسیرهای متعامد هر یک از دسته منحنی‌های زیر را به دست آورید:

(1) $y = cx^2 \xrightarrow{(1)}$ نشان‌دهنده دسته منحنی A

$\rightarrow y' = 2cx \quad (2)$

حل) گام اول: حذف c:

برای حذف c داریم:

$$\frac{(1)}{(2)}: \frac{y}{y'} = \frac{cx^2}{2cx} \rightarrow \frac{y}{y'} = \frac{x}{2}$$ → همان معادله دیفرانسیل دسته منحنی A

گام دوم: باید y' را $\rightarrow -\frac{1}{y'}$ ، یعنی به جای y' ، $-\frac{1}{y'}$ قرار دهیم. پس:

$$\frac{y}{-\frac{1}{y'}} = \frac{x}{2} \rightarrow -yy' = \frac{x}{2} \quad (*)$$ → همان معادله دیفرانسیل دسته منحنی B

گام سوم: حل معادله جدید یعنی $(*)$:

$-yy' = \frac{x}{2}$ → یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول تفکیک‌پذیر → روش حل در فصل ۲ ، اما در اینجا هم به حل آن اشاره می‌کنیم. →

$$-yy' = \frac{x}{2} \rightarrow -y\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2} \rightarrow -y\,dy = \frac{1}{2}x\,dx \xrightarrow[\text{از طرفین}]{\text{انتگرال‌گیری}} -\int y\,dy = \frac{1}{2}\int x\,dx$$

متغیرهای y و x تفکیک شده‌اند

$$\rightarrow -\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{4} + c$$ → همان دسته منحنی B متعامد بر دسته منحنی A ✓

(2) $y = cx^2 + 5 \xrightarrow{(1)}$ همان دسته منحنی A

$\rightarrow y' = 2cx \quad (2) \Longrightarrow$

حل) گام اول: حذف c نیاز این کار داریم:

حال از (2) داریم $c = \frac{y'}{2x}$ ← در (1) جایگذاری می‌کنیم، داریم

$$y = \left(\frac{y'}{2x}\right)x^2 + 5 \Longrightarrow y = \frac{y'x}{2} + 5$$

گام دوم : $y' \to -\frac{1}{y'}$:

$$y=\frac{\left(-\frac{1}{y'}\right)x}{2}+5 \longrightarrow y=\frac{-x}{2y'}+5 \qquad (*)$$

گام سوم : حل معادله جدید یعنی $(*)$:

معادله $(*)$ نیز از نوع تفکیک‌پذیر است که برای حل آن داریم :

$$y=\frac{-x}{2y'}+5 \Longrightarrow y-5=\frac{-x}{2y'} \longrightarrow (y-5)(2y')=-x$$

$$\longrightarrow (2y-10)y'=-x \longrightarrow (2y-10)\frac{dy}{dx}=-x \xrightarrow[\text{متغیرها}]{\text{تفکیک}} (2y-10)dy=-x\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \int(2y-10)dy=-\int x\,dx \longrightarrow (y^2-10y)=-\frac{x^2}{2}+c \longrightarrow B$$

هم دسته منحنی متعامد بر A

تمرین ③ $y=\frac{cx}{x+1} \to A \longrightarrow$ پاسخ : $-\frac{y^2}{2}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+c \to B$

④ $\int_0^x t^2 y(t)dt = c + x^3 y(x)$

حل گام اول : حذف c : با مشتق‌گیری از طرفین نسبت به x داریم :

$$x^2y(x)=3x^2y(x)+x^3y'(x) \longrightarrow -2x^2y=x^3y' \longrightarrow -2y=xy'$$

گام دوم : $y' \to -\frac{1}{y'}$:

$$-2y=x\left(-\frac{1}{y'}\right) \longrightarrow 2yy'=x \qquad (*)$$

گام سوم : حل معادله $(*)$: $(*)$ یک معادله مرتبه اول تفکیک‌پذیر است و داریم

$$2y\frac{dy}{dx}=x \longrightarrow 2y\,dy=x\,dx \longrightarrow \int 2y\,dy=\int x\,dx \longrightarrow y^2=\frac{x^2}{2}+c$$

فصل ۲ : معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

در این فصل، روش‌های حل معادلات مرتبه اول زیر را شرح می‌دهیم:

۱- معادلات تفکیک پذیر (جدایی پذیر)

۲- معادلات همگن

۳- معادلات کامل

۴- معادلات مرتبه اول خطی

۵- معادلات مرتبه اول غیرخطی (معادله برنولی و معادله ریکاتی)

۱- معادلات تفکیک پذیر:

این دسته از معادلات مرتبه اول به شکل $f(y)dy = g(x)dx$ و یا به شکل $f(y)\, y' = g(x)$ هستند که با انتگرال‌گیری از طرفین، جواب عمومی معادله بدست می‌آید.

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید:

(۱) $y' = e^{3x+7y}$

حل) می‌توانیم بنویسیم

$$y' = e^{3x}\, e^{7y}$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{e^{7y}} = e^{3x} \Rightarrow e^{-7y} y' = e^{3x} \Rightarrow e^{-7y}\frac{dy}{dx} = e^{3x}$$

$$\xRightarrow{\text{تفکیک}} e^{-7y}dy = e^{3x}dx \xRightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \int e^{-7y}dy = \int e^{3x}dx \Rightarrow -\frac{1}{7}e^{-7y} = \frac{1}{3}e^{3x} + c$$

(۲) $y' = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$

حل) $$y' = 1 + x^2 + y^2(1+x^2) \Rightarrow \overset{\frac{dy}{dx}}{y'} = (1+x^2)(1+y^2)$$

$$\xRightarrow{\text{تفکیک}} \frac{dy}{1+y^2} = (1+x^2)\,dx \xRightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \int\frac{dy}{1+y^2} = \int(1+x^2)\,dx \Rightarrow \operatorname{Arctan} y = x + \frac{x^3}{3} + c$$

(۳) تمرین: $2x(1+y)\,dx + (x^2-1)\,dy = 0 \longrightarrow$ جواب: $-\ln(x^2-1) + c = \ln(1+y)$

(۴) تمرین: $y' = \tan x \tan y \longrightarrow$ جواب: $\ln(\sin y) = \ln(\cos x) + c$

نکته ۱ : معادلات به شکل $y'=f(ax+by+c)$ با تعریف متغیر $u=ax+by+c$ قابل تبدیل به تفکیک پذیر هستند.

$\longrightarrow u'=a+by' \rightsquigarrow y'=\frac{u'-a}{b}$

مثال : مطلوب است جواب عمومی معادلات زیر :

همان $f(9x-y+3)$

① $y'=(9x-y+3)^2$

حل) معادله به فرم نکته ۱ است . با تعریف متغیر $u=9x-y+3$ داریم

$u=9x-y+3 \rightsquigarrow u'=9-y' \rightsquigarrow y'=9-u'$

با جایگذاری در معادله داریم :

$9-u'=u^2 \rightsquigarrow -u'=u^2-9 \rightsquigarrow -\frac{du}{dx}=u^2-9 \xrightarrow{\text{تفکیک متغیر}} \frac{-du}{u^2-9}=dx$

$\xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} -\int \frac{du}{u^2-9}=\int dx \longrightarrow$

تجزیه کسر

$\frac{1}{u^2-9}=\frac{1}{(u-3)(u+3)}=\frac{A}{u-3}+\frac{B}{u+3}=\frac{(A+B)u+(3A-3B)}{(u-3)(u+3)} \rightsquigarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 3A-3B=1 \end{cases} \rightsquigarrow A=\frac{1}{6},\ B=-\frac{1}{6}$

$\Rightarrow -\int\left(\frac{\frac{1}{6}}{u-3}+\frac{-\frac{1}{6}}{u+3}\right)du=x+c \Rightarrow -\left(\frac{1}{6}\ln(u-3)-\frac{1}{6}\ln(u+3)\right)=x+c$ ✓

$\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{u=9x-y+3} -\left(\frac{1}{6}\ln(9x-y+\cancel{3}-\cancel{3})-\frac{1}{6}\ln(9x-y+3+3)\right)=x+c$

تمرین ② $y'=(y-4x)^2$

نکته ۲ : در برخی معادلات، با توجه به فرم معادله، می‌توان با یک تعریف متغیر مناسب، معادله را به تفکیک پذیر تبدیل کرد.

مثال : جواب عمومی معادلات زیر را به دست آورید :

① $y'=2+5x\,e^{2x-y}$ $\rightarrow u$

حل) با تعریف متغیر $u=2x-y$ داریم : $u'=2-y' \rightsquigarrow y'=2-u'$

در معادله جایگذاری

$\cancel{2}-u'=\cancel{2}+5xe^{u} \rightsquigarrow -u'=5xe^{u} \xrightarrow{\text{تفکیک پذیر}} -\frac{u'}{e^u}=5x \rightsquigarrow \frac{-\frac{du}{dx}}{e^u}=5x$

$\longrightarrow -\frac{du}{e^u}=5x\,dx \rightsquigarrow -\int e^{-u}du=\int 5x\,dx \rightsquigarrow e^{-u}=\frac{5x^2}{2}+c$ ✓ $\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{u=2x-y}$ ✓

② $y' + 3x^2 = (x^3+y-2)^{3/2}$

u

حل) با تعویض متغیر $u=x^3+y-2$ داریم $u' = 3x^2 + y'$

$y' = u' - 3x^2$ ← در معادله جایگذاری:

$u' - 3x^2 + 3x^2 = u^{3/2} \longrightarrow u' = u^{3/2} \longrightarrow \frac{du}{dx} = u^{3/2} \xrightarrow{\text{تفکیک متغیر}} \frac{du}{u^{3/2}} = dx$

$\longrightarrow \int u^{-3/2} du = \int dx \longrightarrow \frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} = x + c$ ✓ $\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{u=x^3+y-2}$ ✓✓

③ تمرین $\frac{dy}{dx} = y - x - 1 + (x-y+2)^{-1}$

راهنمایی: روش اول: با تعویض متغیر $u=y-x$ → روش دوم: با تعویض متغیر $u=x-y$

روش سوم: با تعویض متغیر $u=y-x-1$ روش چهارم: با تعویض متغیر $u=x-y+2$

جواب عمومی معادله: $\frac{1}{2}\ln(2u-u^2) = x+c$ ✓

۲- معادلات همگن:

* تعریف (تابع همگن): تابع دو متغیرهٔ $f(x,y)$ را همگن از درجهٔ n می‌نامیم هرگاه برای هر عدد حقیقی λ و هر دو زوج (x,y) و $(\lambda x, \lambda y)$ از دامنهٔ تابع f داشته باشیم:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

مثال:

① $f(x,y) = 4x + 7y$

$\hookrightarrow f(\lambda x, \lambda y) = 4(\lambda x) + 7(\lambda y) = \lambda(4x+7y) = \lambda f(x,y) \longrightarrow$ تابع f همگن از درجهٔ $n=1$

② $f(x,y) = \sin(2x-y)$

$\hookrightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \sin(2\lambda x - \lambda y) = \sin(\lambda(2x-y)) \neq \lambda^n \sin(2x-y) \longrightarrow$ تابع f همگن نیست

③ $f(x,y) = \frac{1}{x+3y}$

$\hookrightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{\lambda x + 3(\lambda y)} = \frac{1}{\lambda(x+3y)} = \frac{1}{\lambda} f(x,y) = \lambda^{-1} f(x,y) \longrightarrow$ تابع f همگن از درجهٔ $n=-1$

④ $f(x,y) = \frac{3x+y}{x-2y}$

$\hookrightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \frac{3(\lambda x) + (\lambda y)}{(\lambda x) - 2(\lambda y)} = \frac{\lambda(3x+y)}{\lambda(x-2y)} = \frac{3x+y}{x-2y} = f(x,y) = \lambda^0 f(x,y) \longrightarrow$ تابع f همگن از درجهٔ $n=0$

۵) $f(x,y)=x^4+6xy^3$

$$\hookrightarrow f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^4+6(\lambda x)(\lambda y)^3=\lambda^4x^4+6\lambda^4xy^3=\lambda^4(x^4+6xy^3)=\lambda^4 f(x,y)$$

تابع f همگن از درجهٔ $n=4$

۶) $f(x,y)=x^4+6xy^2$

$$\hookrightarrow f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^4+6(\lambda x)(\lambda y)^2=\lambda^4x^4+6\lambda^3xy^2\neq\lambda^n f(x,y)\longrightarrow$$

تابع f همگن نیست

* تعریف (معادلهٔ همگن): معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول $\underbrace{M(x,y)dx+N(x,y)dy=0}_{(1)}$ را همگن گوییم هرگاه هر دو تابع $M(x,y)$ و $N(x,y)$ همگن از درجهٔ یکسان باشند. در این صورت با تعویض متغیر $y=vx$ ، معادلهٔ (1) به یک معادلهٔ تفکیک‌پذیر تبدیل می‌شود که با حل آن آشنا هستیم.

$y'=v'x+v$ یا $dy=xdv+vdx$

مثال: مطلوبست جواب عمومی معادلات زیر:

(1) $\boxed{(x^2+y^2)}dx\boxed{-5xy}dy=0$

$M(x,y)$ همگن از درجهٔ 2 (؟) ، $N(x,y)$ همگن از درجهٔ 2 (؟) $\Longrightarrow$ پس معادله همگن است $\longrightarrow$

با تعویض متغیر $y=vx$ داریم: $dy=xdv+vdx$ ⟵ در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$(x^2+v^2x^2)dx-5x(vx)(xdv+vdx)=0\Rightarrow(x^2+v^2x^2)dx-5x^3vdv-5x^2v^2dx=0$$

$$\Rightarrow x^2(1+v^2-5v^2)dx-5x^3vdv=0\Rightarrow x^2(1-4v^2)dx-5x^3vdv=0$$ ⟵ تفکیک‌پذیر

$$\xrightarrow{\text{تفکیک و انتگرال‌گیری}}\int\frac{x^2}{5x^3}dx=\int\frac{\overbrace{vdv}^{-\frac{1}{8}dt}}{\underbrace{1-4v^2}_{t}}\Rightarrow\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x}=-\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t}\Rightarrow\frac{1}{5}\ln x=-\frac{1}{8}\ln t+c$$

$$t=1-4v^2=1-\frac{4y^2}{x^2}\xrightarrow{\text{جایگذاری}}\quad\frac{1}{5}\ln x=-\frac{1}{8}\ln\left(1-\frac{4y^2}{x^2}\right)+c$$

② $x\sin(\frac{y}{x})\, y' = y\sin(\frac{y}{x}) + x$

$y' \to \frac{dy}{dx}$

حل) معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\underbrace{\left(y\sin(\tfrac{y}{x})+x\right)}_{M(x,y)}dx \underbrace{- x\sin(\tfrac{y}{x})}_{N(x,y)}dy = 0 \longrightarrow$$

معادله، همگن (از درجه ۱) است.

هر دو همگن از درجه ۱ (؟)

پس با تعویض متغیر $y=vx$ داریم:

$dy = x\,dv + v\,dx$ ← در معادله جایگزاری:

$$\left(vx\sin(\tfrac{vx}{x})+x\right)dx - x\sin(\tfrac{vx}{x})(x\,dv+v\,dx)=0$$

$$\Rightarrow (vx\sin v + x)dx - x^2\sin v\, dv - xv\sin v\, dx = 0$$

$$\Rightarrow (\cancel{vx\sin v}+x-\cancel{xv\sin v})dx - x^2 v \sin v\, dv=0$$

$$\Rightarrow x\,dx - x^2\sin v\, dv = 0 \xrightarrow{\text{تفکیک متغیر}} \frac{x\,dx}{x^2} = \sin v\, dv \longrightarrow \int\frac{dx}{x} = \int \sin v\, dv$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln x = -\cos v + c} \checkmark \xrightarrow[\text{جایگزاری}]{v=\frac{y}{x}} \ln x = -\cos(\tfrac{y}{x})+c.$$

مثال: مسیرهای متعامد دسته منحنی $x^2+y^2=2cx$ را بدست آورید. (همان دسته منحنی A)

حل) گام اول: حذف c و یافتن معادله دیفرانسیل دسته منحنی داده شده (همان دسته منحنی A)

$x^2+y^2=2cx$ ①

مشتق نسبت به x: $2x+2yy'=2c$ ②

$$\frac{①}{②}: \frac{x^2+y^2}{2x+2yy'} = \frac{2cx}{2c} \to \frac{x^2+y^2}{2x+2yy'}=x$$

گام دوم: $y' \to -\frac{1}{y'}$:

$$\frac{x^2+y^2}{2x+2y(-\frac{1}{y'})}=x \to (*)$$

گام سوم: حل معادله (*): با طرفین وسطین (*) داریم

$$x^2+y^2 = 2x^2 - 2\left(\frac{xy}{y'}\right) \Rightarrow (-x^2+y^2)y' = -2xy$$

$$\Rightarrow (-x^2+y^2)dy = -2xy\,dx \Rightarrow -2xy\,dx + (x^2-y^2)dy = 0 \longrightarrow$$

یک معادله همگن (از درجه ۲)

با تعویض متغیر $y=vx$ و مشابه با روش حل مثال ① بالا، در پایان بدست می‌آوریم

جواب: $x^2+y^2=cy$ ✓ یا: $\ln y = \ln(x^2+y^2)+c$ ✓

مثال ۵) با استفاده از تعویض متغیرهای مناسب، جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید:

$$(3\tan x - 2\cos y)\sec^2 x\,dx + \tan x \sin y\,dy = 0$$

$u \to du = \sec^2 x\,dx$ ، $v \to dv = -\sin y\,dy$

حل) با تعویض متغیرهای $u=\tan x$ و $v=\cos y$ داریم:

$$(3u-2v)\,du - u\,dv = 0 \quad (*)$$

→ یک معادله همگن (از درجه ۱) برحسب متغیرهای u و v

پس با تعویض متغیر $v=tu$ داریم: $dv = u\,dt + t\,du$ → در معادله $(*)$ قرار می‌دهیم:

$$(3u-2tu)\,du - u(u\,dt + t\,du) = 0 \Rightarrow (3u-2tu)\,du - u^2 dt - ut\,du = 0$$

$$\Rightarrow (3u-2tu-ut)\,du - u^2 dt = 0 \Rightarrow 3u(1-t)\,du - u^2 dt = 0$$

→ تفکیک‌پذیر

$$\Rightarrow \int \frac{3u}{u^2}\,du = \int \frac{dt}{1-t} \Rightarrow 3\ln u = -\ln(t-1) + c$$

* نکته ۱: معادلات به فرم $y' = f\left(\frac{ax+by}{a'x+b'y}\right)$ همگن هستند و لذا با تعویض متغیر $y=vx$ به تفکیک‌پذیر تبدیل می‌شوند.

* نکته ۲: معادلات به فرم $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$ که c و c' همزمان صفر نیستند، (یعنی حداقل یکی از آنها مخالف صفر است)،

دو حالت زیر را داریم:

$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \to$ حالت تقاطع ، $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \to$ حالت موازی

حالت (الف) (حالت موازی خطوط): اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$، در این حالت با استفاده از تعویض متغیر $u = ax+by$

$u' = a + by' \to y' = \frac{u'-a}{b}$

به یک معادله تفکیک‌پذیر می‌رسیم که با حل آن آشنا هستیم.

حالت (ب) (حالت تقاطع خطوط): اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$، در این حالت ابتدا نقطه تقاطع دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ (یعنی نقطه $A\,|^{x_0}_{y_0}$) را بدست می‌آوریم. سپس با استفاده از تعویض متغیرهای

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

به معادله $\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX+bY}{a'X+b'Y}\right)$ می‌رسیم که همگن است و در ادامه با

تعویض متغیر $Y = vX$ به یک معادله تفکیک‌پذیر می‌رسیم که با حل آن آشنا هستیم.

مثال ۶) با استفاده از تعویض متغیرهای مناسب، جواب عمومی معادله زیر را به دست آورید:

$$(3\tan x - 2\cos y)\sec^2 x\,dx + \tan x \sin y\,dy = 0$$

$u \rightarrow du = \sec^2 x\,dx$, $v \rightarrow dv = -\sin y\,dy$

حل) با تعویض متغیرهای $u=\tan x$ و $v=\cos y$ داریم:

$$(3u-2v)\,du - u\,dv = 0 \quad (*)$$

$\longrightarrow$ یک معادله همگن (از درجه ۱) برحسب متغیرهای u و v

پس با تعویض متغیر $v=tu$ داریم: $dv = u\,dt + t\,du$ $\longrightarrow$ در معادله $(*)$ قرار می‌دهیم:

$$(3u-2tu)\,du - u(u\,dt + t\,du) = 0 \Rightarrow (3u-2tu)\,du - u^2\,dt - ut\,du = 0$$

$$\Rightarrow (3u-2tu-ut)\,du - u^2\,dt = 0 \Rightarrow 3u(1-t)\,du - u^2\,dt = 0 \longrightarrow \text{تفکیک‌پذیر}$$

$$\Rightarrow \int \frac{3u}{u^2}\,du = \int \frac{dt}{1-t} \Rightarrow 3\ln u = -\ln(t-1) + c$$

* نکته ۱: معادلات به فرم $y' = f\left(\dfrac{ax+by}{a'x+b'y}\right)$ همگن هستند و لذا با تعویض متغیر $y = vx$ به تفکیک‌پذیر تبدیل می‌شوند.

* نکته ۲: معادلات به فرم $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$ که c و c' همزمان صفر نیستند، (یعنی حداقل یکی از آن‌ها مخالف صفر است)،

دو حالت زیر را داریم:

$\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \longrightarrow$ حالت موازی $\qquad \dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'} \longrightarrow$ حالت تقاطع

حالت (الف) (حالت موازی خطوط): اگر $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$، در این حالت با استفاده از تعویض متغیر $u = ax+by$

$\rightarrow u' = a + by' \rightarrow y' = \dfrac{u'-a}{b}$

به یک معادله تفکیک‌پذیر می‌رسیم که با حل آن آشنا هستیم.

حالت (ب) (حالت تقاطع خطوط): اگر $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$، در این حالت ابتدا نقطهٔ تقاطع دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ (یعنی نقطهٔ $A\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$) را به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از تعویض متغیرهای

$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$ به معادلهٔ $\dfrac{dY}{dX} = f\left(\dfrac{aX+bY}{a'X+b'Y}\right)$ می‌رسیم که همگن است و در ادامه با

تعویض متغیر $Y = vX$ به یک معادله تفکیک‌پذیر می‌رسیم که با حل آن آشنا هستیم.

مثال: مطلوبست جواب عمومی معادلات زیر:

(۱) $y' = \dfrac{2x+y-1}{4x+2y+5}$

حل) $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{1}{2}$ ← حالت (الف) (خطوط موازی)

پس با تعویض متغیر $u = ax+by = 2x+y$ داریم:

$u' = 2+y' \rightarrow y' = u'-2 \rightarrow$ در معادله جایگذاری می‌کنیم: $u'-2 = \dfrac{u-1}{2u+5} \rightarrow u' = \dfrac{u-1}{2u+5}+2$

$\Rightarrow u' = \dfrac{5u+9}{2u+5}$ ($u' = \dfrac{du}{dx}$) → تفکیک‌پذیر → $\displaystyle\int \left(\frac{2u+5}{5u+9}\right) du = \int dx$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}\int \frac{u+5/2}{u+9/5}\,du = x+c \Rightarrow \frac{2}{5}\int \frac{u+\frac{9}{5}-\frac{9}{5}+\frac{5}{2}}{u+9/5}\,du = x+c$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}\left(\int du + \frac{7}{10}\int \frac{du}{u+9/5}\right) = x+c \Rightarrow \frac{2}{5}\left(u+\frac{7}{10}\operatorname{Ln}\left(u+\frac{9}{5}\right)\right) = x+c$$

(۲) $(4x-y+7)\,dx = (2x+y-1)\,dy$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x-y+7}{2x+y-1}$ (یعنی y') ⟶ حل) $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{4}{2} \neq \dfrac{b}{b'} = \dfrac{-1}{1}$

حالت (ب) (خطوط متقاطع) ← یافتن نقطه تقاطع خطوط

$$\begin{cases} 4x-y+7=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$$

که پس از حل دستگاه، نقطه تقاطع $A\left|\begin{matrix} x_0=-1 \\ y_0=3 \end{matrix}\right.$ به دست می‌آید. اکنون با تعویض متغیرهای $\begin{cases} x = X+x_0 = X-1 \\ y = Y+y_0 = Y+3 \end{cases}$ داریم:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{4X-Y}{2X+Y} \quad (*)$$

یک معادله همگن است که با تعویض متغیر $Y = vX$ داریم ← $dY = X\,dv + v\,dX$ ← در معادله قرار می‌دهیم:

$\dfrac{X\,dv+v\,dX}{dX} = \dfrac{4X-vX}{2X+vX}$ $\left(= \dfrac{4-v}{2+v}\right)$ $\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}$ $(2+v)(X\,dv+v\,dX) = (4-v)\,dX$

که پس از ساده کردن عبارت به دست می‌آوریم

$$X(2+v)\,dv = (4-v-v(2+v))\,dX \Rightarrow X(v+2)\,dv = (-v^2-3v+4)\,dX \rightarrow \text{تفکیک‌پذیر}$$

$$\Rightarrow \int \frac{v+2}{-v^2-3v+4}\,dv = \int \frac{dX}{X} \Rightarrow -\int \frac{v+2}{v^2+3v-4}\,dv = \operatorname{Ln}X + c$$

تجزیه کسرها: $\dfrac{2/5}{v+4} + \dfrac{3/5}{v-1}$

$$\Rightarrow -\int\left(\frac{2/5}{v+4} + \frac{3/5}{v-1}\right) dv = \operatorname{Ln}X + c \Rightarrow -\left(\frac{2}{5}\operatorname{Ln}(v+4) + \frac{3}{5}\operatorname{Ln}(v-1)\right) = \operatorname{Ln}X + c$$

تمرین ③ $y' = \frac{-x+2y-3}{2x-4y-3} \longrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{-1}{2} = \frac{b}{b'} \longrightarrow$ حالت موازی

تمرین ④ $y' = \frac{y+2}{x+y-1} \longrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{0}{1} \neq \frac{b}{b'} = \frac{1}{1} \longrightarrow$ حالت خطوط متقاطع

⑤ $(x+4y-2)dy = (x+y-1)\,dx$

حل) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x+4y-2} \longrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{1}{1} \neq \frac{b}{b'} = \frac{1}{4} \longrightarrow$

حالت خطوط متقاطع ← یافتن نقطه تقاطع $A\Big|^{x_0}_{y_0}$ از حل دستگاه

$$\begin{cases} x+4y-2=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \longrightarrow A\Big|^{x_0=\frac{2}{3}}_{y_0=\frac{1}{3}} \longrightarrow \begin{cases} x = X+x_0 = X+\frac{2}{3} \\ y = Y+y_0 = Y+\frac{1}{3} \end{cases}$$

با تعویض متغیرها

به معادله زیر می‌رسیم: $\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X+4Y}$ $(*)$ که یک معادله همگن برحسب متغیرهای

X و Y است که با تعویض متغیر $Y = vX$ داریم: $(dY = Xdv + vdX)$:

(در معادله $(*)$ جایگذاری):

$$\frac{Xdv+vdX}{dX} = \frac{X+vX}{X+4vX} \Rightarrow \frac{Xdv+vdX}{dX} = \frac{1+v}{1+4v}$$

$$\Rightarrow (Xdv+vdX)(1+4v) = (1+v)dX \longrightarrow$$

پس از انجام ضرب و دسته‌بندی جملات به دست می‌آید

$$\frac{1}{x}dx = \frac{1+4v}{1-4v^2}dv \Rightarrow \int \frac{dx}{X} = \int \left(\frac{1+4v}{1-4v^2}\right)dv$$

تجزیه کسرها: $\frac{\frac{3}{2}}{1-2v} + \frac{-\frac{1}{2}}{1+2v}$

$$\Rightarrow \ln X + c = \int \left(\frac{\frac{3}{2}}{1-2v} + \frac{-\frac{1}{2}}{1+2v}\right)dv \Rightarrow \ln X + c = \frac{3}{2}\ln(1-2v) - \frac{1}{2}\ln(1+2v)$$

تمرین ⑥ $(x+y)dx + (2x+2y-1)\,dy = 0$

۳- معادلات کامل :

* تعریف (معادله کامل) : معادله

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0 \qquad (1)$$

را کامل گوئیم هرگاه تابع دو متغیره ای مانند $f(x,y)$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y) \quad (*) \qquad , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y) \quad (**)$$

* از آنجایی که $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$ ، بنابراین طبق (*) و (**) و (1) به دست می آوریم

$$df=0 \Longrightarrow f(x,y)=c$$

که همان جواب عمومی معادله (1) است که c ثابتی دلخواه است.

* برای یافتن ضابطه $f(x,y)$ ، ابتدا یکی از رابطه های (*) یا (**) را در نظر گرفته و به کمک آن ، یک ضابطه اولیه برای تابع f به دست می آوریم و سپس به کمک رابطه دیگر ، ضابطه f را تکمیل می کنیم.

مثال: معادله $3x^2dx+2ydy=0$ کامل است. زیرا اگر $f(x,y)=x^3+y^2$ انتخاب کنیم داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2=M(x,y) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y=N(x,y)$$

و بنابراین جواب عمومی معادله به شکل $f(x,y)=c$ یعنی $x^3+y^2=c$ است.

* قضیه : فرض کنید در معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ (1) ، در یک ناحیه از صفحه مختصات مانند D ، توابع $M(x,y)$ و $N(x,y)$ و مشتقات جزئی مرتبه اول آنها پیوسته باشند. در این صورت :

$$\text{معادله (1) کامل است} \Longleftrightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad : \text{برای هر } (x,y) \text{ در ناحیه } D$$

مثال: جواب عمومی معادله های زیر را به دست آورید :

$$① \quad \underbrace{(2y^2-4x+5)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{(4-2y+4xy)}_{N(x,y)}dy=0$$

حل)

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4y=\frac{\partial N}{\partial x} \Longrightarrow \text{طبق قضیه ، معادله کامل است} \Longrightarrow \text{جواب عمومی معادله به صورت } f(x,y)=c \text{ است}$$

که برای یافتن ضابطه f ، به صورت زیر عمل می کنیم :

$$\text{چون معادله کامل است} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y) \quad (*) \qquad , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y) \quad (**)$$

اکنون با درنظر گرفتن (*) داریم:

$$\partial f = M(x,y)\,\partial x \Rightarrow \int \partial f = \int M(x,y)\,dx$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \int (2y^2 - 4x + 5)\,dx \Rightarrow f(x,y) = 2xy^2 - 2x^2 + 5x + g(y) \quad (1)$$

حال برای یافتن g(y) و تکمیل ضابطهٔ f ، با جایگذاری (1) در (**) داریم

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \Rightarrow 4xy + g'(y) = 4 - 2y + 4xy \Rightarrow g'(y) = 4 - 2y$$

$$\Rightarrow g(y) = \int (4 - 2y)\,dy \Rightarrow g(y) = 4y - y^2 + c_1$$ ← c_1 ثابتی دلخواه است

بنابراین با جایگذاری g(y) در (1) :

$$f(x,y) = 2xy^2 - 2x^2 + 5x + 4y - y^2 + c_1$$

و به این ترتیب: جواب عمومی معادله: $f(x,y) = c \rightarrow 2xy^2 - 2x^2 + 5x + 4y - y^2 + c_1 = c$

$$\rightarrow 2xy^2 - 2x^2 + 5x + 4y - y^2 = c - c_1$$

ثابت دلخواه ← c_2 = خودش

* تذکر: چون در نهایت c_1 ثابتی دلخواه است پس جواب عمومی شکل قبل را میتوان به شکل

$$2xy^2 - 2x^2 + 5x + 4y - y^2 = c$$

نوشت که c ثابتی دلخواه است. لذا میتوان در حالت قبل، g(x) را به صورت $g(y) = 4y - y^2$ در نظر گرفت و از نوشتن c_1 در آن صرفنظر کرد (زیرا در جواب عمومی معادله، تاثیری ندارد.)

(2) $$\underbrace{(3x^2 + 4xy^2)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(2y - 3y^2 + 4x^2y)}_{N(x,y)}dy = 0$$

حل)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 8xy = \frac{\partial N}{\partial x}$$ → معادله کامل است → جواب عمومی معادله به صورت $f(x,y) = c$ است

که برای یافتن ضابطهٔ $f(x,y)$ داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \quad (*) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \quad (**)$$

از (*) $\longrightarrow f(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int (3x^2 + 4xy^2)\,dx = x^3 + 2x^2y^2 + g(y)$

حال f را در (***) جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y) \Rightarrow 4x^2y+g'(y)=2y-3y^2+4x^2y \Rightarrow g'(y)=2y-3y^2$$

$$\Rightarrow g(y)=\int(2y-3y^2)\,dy = y^2-y^3+c_1 \xrightarrow[c_1]{\text{با درنظر نگرفتن}} \text{اختیار می‌کنیم } g(y)=y^2-y^3$$

در نتیجه: جواب عمومی معادله: $f(x,y)=c \rightsquigarrow x^3+2x^2y^2+y^2-y^3=c$

تمرین ③ $\quad e^y dx+(xe^y+2y)\,dy=0$

* عامل‌ها (فاکتورها) انتگرال ساز:

گاهی اوقات معادله

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0 \qquad (1)$$

کامل نیست ولی با ضرب تابعی مانند μ (که ممکن است تابعی برحسب x یا برحسب y یا هردو باشد) در طرفین معادله (1)، به یک معادله کامل برسیم. این تابع μ را یک عامل انتگرال ساز (فاکتور انتگرال ساز) برای معادله (1) می‌نامیم.

مثال: معادله $\underbrace{2y}_{M}dx+\underbrace{x}_{N}dy=0$ کامل نیست (چون $\frac{\partial M}{\partial y}=2\neq\frac{\partial N}{\partial x}=1$)، ولی با ضرب تابع $\mu=x$ در طرفین این معادله داریم $\underbrace{2xy}_{M_1}dx+\underbrace{x^2}_{N_1}dy=0$ که کامل است (چون $\frac{\partial M_1}{\partial y}=2x=\frac{\partial N_1}{\partial x}$).

* در این بخش، چهار نوع عامل انتگرال ساز برای معادله (1) معرفی می‌کنیم که عبارتند از:

۱- اگر μ تابعی برحسب x باشد (یعنی اگر $\mu=\mu(x)$) $\longrightarrow$ $\mu(x)=e^{\int \frac{M_y-N_x}{N}dx}$ — باید تابعی برحسب x باشه

۲- اگر μ تابعی برحسب y باشد (یعنی اگر $\mu=\mu(y)$) $\longrightarrow$ $\mu(y)=e^{\int \frac{M_y-N_x}{-M}dy}$ — باید تابعی برحسب y باشه

۳- اگر $\mu=\mu(z)$ که $z=g(x,y)$ (روش کلی) $\longrightarrow$ $\mu(z)=e^{-\int \frac{M_y-N_x}{z_yM-z_xN}dz}$

۴- اگر $\mu=x^\alpha y^\beta$

که در آن: $M_y=\frac{\partial M}{\partial y}$ ، $N_x=\frac{\partial N}{\partial x}$

حال f را در (***) جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y) \Rightarrow 4x^2y+g'(y)=2y-3y^2+4x^2y \Rightarrow g'(y)=2y-3y^2$$

$$\Rightarrow g(y)=\int(2y-3y^2)\,dy = y^2-y^3+c_1 \xrightarrow[c_1]{\text{با در نظر نگرفتن}} \text{اختیار می‌کنیم}\ g(y)=y^2-y^3$$

در نتیجه: جواب عمومی معادله: $f(x,y)=c \rightsquigarrow \boxed{x^3+2x^2y^2+y^2-y^3=c}$

تمرین ③ $\quad e^y dx+(xe^y+2y)\,dy=0$

* عامل‌ها (فاکتورها) انتگرال ساز:

گاهی اوقات معادله

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0 \qquad (1)$$

کامل نیست ولی با ضرب تابعی مانند μ (که ممکن است تابعی برحسب x یا برحسب y یا هر دو باشد) در طرفین معادله (1)، به یک معادله کامل برسیم. این تابع μ را یک عامل انتگرال ساز (فاکتور انتگرال ساز) برای معادله (1) می‌نامیم.

مثال: معادله $\underbrace{2y}_{M}dx+\underbrace{x}_{N}dy=0$ کامل نیست (چون $\frac{\partial M}{\partial y}=2\neq\frac{\partial N}{\partial x}=1$)، ولی با ضرب تابع $\mu=x$ در طرفین این معادله داریم $\underbrace{2xy}_{M_1}dx+\underbrace{x^2}_{N_1}dy=0$ که کامل است (چون $\frac{\partial M_1}{\partial y}=2x=\frac{\partial N_1}{\partial x}$).

* در این بخش، چهار نوع عامل انتگرال ساز برای معادله (1) معرفی می‌کنیم که عبارتند از:

1- اگر μ تابعی برحسب x باشد (یعنی اگر $\mu=\mu(x)$) $\longrightarrow \mu(x)=e^{\int\frac{M_y-N_x}{N}dx}$ (باید تابعی برحسب x باشد)

2- اگر μ تابعی برحسب y باشد (یعنی اگر $\mu=\mu(y)$) $\longrightarrow \mu(y)=e^{\int\frac{M_y-N_x}{-M}dy}$ (باید تابعی برحسب y باشد)

3- اگر $\mu=\mu(z)$ که $z=g(x,y)$ (روش کلی) $\longrightarrow \mu(z)=e^{-\int\frac{M_y-N_x}{z_yM-z_xN}dz}$

4- اگر $\mu=x^\alpha y^\beta$

که در آن $M_y=\frac{\partial M}{\partial y}$ و $N_x=\frac{\partial N}{\partial x}$

* توضیحات : اگر μ یک عامل انتگرال ساز معادله

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

باشد پس با ضرب μ در طرفین معادله ، معادله

$$\mu M(x,y)\,dx + \mu N(x,y)\,dy = 0$$

کامل خواهد بود، یعنی

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mu_y}_{\frac{\partial \mu}{\partial y}} \cdot M + \underbrace{M_y}_{\frac{\partial M}{\partial y}} \cdot \mu = \underbrace{\mu_x}_{\frac{\partial \mu}{\partial x}} \cdot N + \underbrace{N_x}_{\frac{\partial N}{\partial x}} \cdot \mu$$

(یعنی)

$$\Rightarrow (M_y - N_x)\mu = \mu_x \cdot N - \mu_y \cdot M \qquad (***)$$

اکنون :

۱- اگر $\mu = \mu(x)$:
$$\mu_y = \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0,\qquad \mu_x = \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}$$
در $(***)$ جایگذاری می‌کنیم :

$$(M_y - N_x)\mu = \frac{d\mu}{dx}\cdot N - 0 \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \int \frac{M_y - N_x}{N}\,dx = \int \frac{d\mu}{\mu} \to \ln\mu$$

$$\Rightarrow \mu = \mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\,dx}$$

۲- اگر $\mu = \mu(y)$:
$$\mu_x = \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0,\qquad \mu_y = \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dy}$$
در $(***)$ جایگذاری می‌کنیم :

$$(M_y - N_x)\mu = 0 - \frac{d\mu}{dy}\cdot M \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \int \frac{M_y - N_x}{-M}\,dy = \int \frac{d\mu}{\mu}$$

$$\Rightarrow \mu = \mu(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M}\,dy}$$

مثال : ابتدا برای هر یک از معادلات زیر، یک عامل انتگرال ساز بیابید و سپس جواب عمومی معادله را بدست آورید :

① $$\underbrace{(4xy + 3y^2 - x)}_{M}\,dx + \underbrace{(x^2 + 2xy)}_{N}\,dy = 0$$

حل)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x + 6y \ ,\quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 2y$$

$$\Rightarrow M_y - N_x = (4x + 6y) - (2x + 2y) = 2x + 4y$$

$$\Rightarrow \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2x+4y}{x^2+2xy} = \frac{2(x+2y)}{x(x+2y)} = \frac{2}{x}$$ تابعی برحسب x

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$\mu(x) = x^2$ را در طرفین معادله ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \underbrace{(4x^3y + 3x^2y^2 - x^3)}_{M_1}dx + \underbrace{(x^4 + 2x^3y)}_{N_1}dy = 0$$

این معادله کامل است (چون $\frac{\partial M_1}{\partial y} = 4x^3 + 6x^2y = \frac{\partial N_1}{\partial x}$) و بنابراین جواب عمومی آن به صورت $f(x,y) = c$ است که برای یافتن ضابطهٔ تابع f داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M_1 \quad (*) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N_1 \quad (**)$$

$$\xrightarrow{\text{از } (*)} f(x,y) = \int M_1 dx = \int (4x^3y + 3x^2y^2 - x^3)dx = x^4y + x^3y^2 - \frac{x^4}{4} + g(y) \quad (1)$$

حال برای یافتن $g(y)$، با جایگذاری (1) در (**) داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N_1 \Rightarrow x^4 + 2x^3y + g'(y) = x^4 + 2x^3y \Rightarrow g'(y) = 0 \rightarrow$$

می‌توانیم $g(y) = 0$ اختیار کنیم، در این ترتیب،

جواب عمومی معادله: $f(x,y) = c \rightarrow x^4y + x^3y^2 - \frac{x^4}{4} = c$ ✓

(2) $(xy + y^2 + y)dx + (x^2 + 3xy + 2x)dy = 0$

حل) $M_y = \frac{\partial M}{\partial y} = x + 2y + 1 \quad , \quad N_x = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 3y + 2$

$$\Rightarrow M_y - N_x = (x+2y+1) - (2x+3y+2) = -x-y-1$$

$$\Rightarrow \frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{-x-y-1}{-y(x+y+1)} = \frac{-(x+y+1)}{-y(x+y+1)} = \frac{1}{y}$$ تابعی برحسب y

$$\Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy} = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln y} = y$$

$\mu(y) = y$ را در طرفین معادله ضرب می‌کنیم

$$\Rightarrow \underbrace{(xy^2+y^3+y^2)}_{M_1}dx + \underbrace{(x^2y+3xy^2+2xy)}_{N_1}dy = 0 \longrightarrow$$ یک معادله کامل است (ج)

بنابراین: $f(x,y)=c$: جواب عمومی معادله

که برای یافتن تابع $f(x,y)$، از اینکه

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M_1 \quad (*) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N_1 \quad (**)$$

از $(*)$: $\longrightarrow f(x,y) = \int M_1\,dx = \int (xy^2+y^3+y^2)\,dx = \frac{x^2y^2}{2} + xy^3 + xy^2 + g(y)$

از $(**)$: $\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = N_1 \rightsquigarrow x^2y + 3xy^2 + 2xy + g'(y) = x^2y + 3xy^2 + 2xy$

$\Rightarrow g'(y)=0 \Rightarrow$ اختیاری $g(y)=0$

$\Rightarrow$ جواب عمومی : $f(x,y)=c \rightsquigarrow \boxed{\frac{x^2y^2}{2} + xy^3 + xy^2 = c}$

تمرین ③ $(\sin y + \cos y)\,dx + 2x\cos y\,dy = 0$

تمرین ④ $(x^4\ln x - 2xy^3)\,dx + 3x^2y^2\,dy = 0$

تمرین ⑤ $(xy+y^2)\,dx - (x^2+xy)\,dy = 0 \rightsquigarrow$ این هم با $\mu(x)$ می‌شود و هم با $\mu(y)$

z در مسأله داده می‌شود

۳- اگر $\mu=\mu(z)$ که $z=g(x,y)$:

از نتیجه در بخش قبل به دست آوردیم داریم

$$\mu_x N - \mu_y M = (M_y - N_x)\mu \qquad (***)$$

از طرفی طبق قاعده زنجیره‌ای:

$$\mu_x = \frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz}\cdot z_x \ , \quad \mu_y = \frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz}\cdot z_y$$

که با جایگذاری در $(***)$ به دست می‌آید

$$\frac{d\mu}{dz}\cdot z_x\cdot N - \frac{d\mu}{dz}\cdot z_y\cdot M = (M_y - N_x)\mu$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{dz}(z_x N - z_y M) = (M_y - N_x)\mu \xrightarrow{\text{تفکیک}} \underbrace{\int\frac{d\mu}{\mu}}_{\ln\mu} = \int\frac{(M_y - N_x)\,dz}{\underbrace{z_x N - z_y M}_{-(z_y M - z_x N)}}$$

$$\Rightarrow \mu = \mu(z) = e^{-\int\frac{(M_y - N_x)}{z_y M - z_x N}dz}$$

مثال: ابتدا یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله زیر بیابید سپس جواب عمومی معادله را به دست آورید:

$$(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0 \ , \quad \mu = \mu(xy)$$

حل) پس: $z = xy$

$$\begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases}$$

$$\mu(z) = e^{-\int\frac{(M_y - N_x)}{z_y M - z_x N}dz}$$

$$\frac{M_y - N_x}{z_y M - z_x N} = \frac{(1-2xy)-(1+2xy^2)}{x(y-xy^2)-y(x+x^2y^2)} = \frac{-2xy-2xy^2}{\cancel{xy}-x^2y^2-\cancel{xy}-x^2y^3} = \frac{-2xy(1+y)}{-x^2y^2(1+y)} = \frac{2}{xy} = \frac{2}{z}$$

$$\Rightarrow \mu(z) = e^{-\int\frac{2}{z}dz} = e^{-2\ln z} = z^{-2} = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{(xy)^2} = \frac{1}{x^2y^2}$$

در طرفین معادله ضرب:

$$\frac{1}{x^2y^2}(y - xy^2)dx + \frac{1}{x^2y^2}(x + x^2y^2)dy = \underbrace{\left(\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x}\right)}_{M_1}dx + \underbrace{\left(\frac{1}{xy^2} + 1\right)}_{N_1}dy = 0$$

کامل است (؟) بنابراین:

$\Rightarrow$ جواب عمومی: $f(x,y) = c$

که برای یافتن ضابطه f داریم: $\frac{\partial f}{\partial x} = M_1 \ (*)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = N_1 \ (**)$

از $(*)$: $f(x,y) = \int M_1 dx = \int\left(\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x}\right)dx = -\frac{1}{xy} - \ln x + g(y)$

از $(**)$: $\frac{\partial f}{\partial y} = N_1 \rightarrow \frac{1}{xy^2} + g'(y) = \frac{1}{xy^2} + 1 \rightarrow g'(y) = 1 \rightarrow g(y) = y$ اختیار می‌کنیم

$\Longrightarrow$ جواب عمومی: $f(x,y) = c \rightarrow -\frac{1}{xy} - \ln x + y = c$

۲ / ۱

مثال:

$$(2x^2+2y^2+x)dx+(x^2+y^2+y)dy=0 \quad , \quad z=x^2+y^2$$

حل)

$$z_x=2x, \quad z_y=2y$$

$$\mu(z)=e^{-\int \boxed{\frac{(M_y-N_x)}{z_yM-z_xN}}dz}$$

$$\frac{M_y-N_x}{z_yM-z_xN}=\frac{4y-2x}{2y(2x^2+2y^2+x)-2x(x^2+y^2+y)}$$

$$=\frac{4y-2x}{4x^2y+4y^3+\cancel{2xy}-2x^3-2xy^2-\cancel{2xy}}=\frac{4y-2x}{2x^2(2y-x)+2y^2(2y-x)}$$

$$=\frac{2(2y-x)}{(2y-x)(2x^2+2y^2)}=\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \mu(z)=e^{-\int\frac{1}{z}dz}=e^{-\ln z}=z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{x^2+y^2} \longrightarrow$$ در طرفین معادله ضرب:

$$\Big(\underbrace{\frac{2x^2+2y^2+x}{x^2+y^2}}_{M_1}\Big)dx+\Big(\underbrace{\frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}}_{N_1}\Big)dy=0 \longrightarrow$$ یک معادله کامل (!)

جواب عمومی: $f(x,y)=c$

نیاز است:

برای یافتن f: $\quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}=M_1}_{(*)} \quad , \quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}=N_1}_{(**)}$

از (*): $f(x,y)=\int M_1dx$

$$=\int\frac{2x^2+2y^2+x}{x^2+y^2}dx=\int\frac{2\cancel{(x^2+y^2)}dx}{\cancel{x^2+y^2}}+\int\frac{x}{x^2+y^2}dx=2x+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+g(y)$$

از (**): $$\frac{\partial f}{\partial y}=N_1 \rightsquigarrow \frac{1}{2}\Big(\frac{2y}{x^2+y^2}\Big)+g'(y)=\frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}\Rightarrow \cancel{\frac{y}{x^2+y^2}}+g'(y)=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+\cancel{\frac{y}{x^2+y^2}}$$

$$\rightsquigarrow g'(y)=1 \Rightarrow g(y)=y$$ (اختیاری)

$\Rightarrow$ جواب عمومی: $f(x,y)=c \longrightarrow 2x+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+y=c$

*** تمرین:**

(1) $(x^2+y^2-x)dx-ydy=0 \quad , \quad \mu=\mu(x^2+y^2)$

(2) $(8y+4x^2y^4)dx+(8x+5x^3y^3)dy=0 \quad , \quad \mu=\mu(z)=z=xy$

(3) $(4x^2y+2x+2y^2)dx+(2x^3+3xy+1)dy=0 \quad , \quad \mu=\mu(xy)$

(4) $(3y^2-x)dx+(2y^3-6xy)dy=0 \quad , \quad \mu=\mu(x+y^2)$

۴- اگر $\mu = x^\alpha y^\beta$:

در این حالت، ابتدا با ضرب $\mu = x^\alpha y^\beta$ در طرفین معادله و لحاظ کردن شرط کامل بودن، مقادیر α و β را به دست می‌آوریم، سپس با جایگذاری α و β در معادله جدید، به یک معادله کامل می‌رسیم که با حل آن آشنا هستیم.

مثال: ابتدا برای هر یک از معادلات زیر، عامل انتگرال‌سازی به صورت $\mu = x^\alpha y^\beta$ بیابید، سپس جواب عمومی معادله را به دست آورید:

① $(xy-2y^2)dx+(3xy-x^2)dy=0$

حل) ابتدا $\mu = x^\alpha y^\beta$ در طرفین معادله ضرب:

$$x^\alpha y^\beta (xy-2y^2)dx + x^\alpha y^\beta (3xy-x^2)dy=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x^{\alpha+1}y^{\beta+1}-2x^\alpha y^{\beta+2})}_{M_1}dx+\underbrace{(3x^{\alpha+1}y^{\beta+1}-x^{\alpha+2}y^\beta)}_{N_1}dy=0 \quad (*)$$

چون معادله (*) می‌خواهیم کامل باشد پس داریم

$$\frac{\partial M_1}{\partial y}=\frac{\partial N_1}{\partial x} \Rightarrow \boxed{(\beta+1)}x^{\alpha+1}y^\beta \boxed{-2(\beta+2)}x^\alpha y^{\beta+1} = \boxed{3(\alpha+1)}x^\alpha y^{\beta+1}\boxed{-(\alpha+2)}x^{\alpha+1}y^\beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\beta+1=-(\alpha+2)\\ -2(\beta+2)=3(\alpha+1)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=-3\\ -3\alpha-2\beta=7\end{cases} \to$$

پس از حل دستگاه: $\alpha=-1$ ، $\beta=-2$

در معادله (*) جایگذاری:

$$(y^{-1}-2x^{-1})dx+(3y^{-1}-xy^{-2})dy=0 \to$$

کامل است (؟)

پس: $f(x,y)=c$: جواب عمومی

که برای یافتن f ، $\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}=M_1}_{(*)}$ ، $\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}=N_1}_{(**)}$

از (*): $f(x,y)=\int M_1 dx=\int(y^{-1}-2x^{-1})dx=xy^{-1}-2\ln x+g(y)$

از (**): $\frac{\partial f}{\partial y}=N_1 \to -\cancel{xy^{-2}}+g'(y)=3y^{-1}-\cancel{xy^{-2}} \Rightarrow g'(y)=3y^{-1} \to g(y)=\int 3y^{-1}dy$

$\to$ اختیار می‌کنیم $g(y)=3\ln y$

$\Rightarrow$ جواب عمومی: $f(x,y)=c \to x y^{-1}-2\ln x+3\ln y=c$

(۲) $y(2x^2+y^3)\,dx - x(2x^2-y^3)\,dy = 0$

حل) ابتدا $\mu = x^\alpha y^\beta$ در معادله ضرب:

$$x^\alpha y^\beta (2x^2y+y^4)\,dx + x^\alpha y^\beta(-2x^3+xy^3)\,dy = 0$$

$$\Rightarrow (\underbrace{2x^{\alpha+2}y^{\beta+1}+x^\alpha y^{\beta+4}}_{M_1})\,dx + (\underbrace{-2x^{\alpha+3}y^\beta + x^{\alpha+1}y^{\beta+3}}_{N_1})\,dy = 0 \qquad (*)$$

شرط کامل بودن: $\dfrac{\partial M_1}{\partial y} = \dfrac{\partial N_1}{\partial x}$

$$\Rightarrow \boxed{2(\beta+1)}x^{\alpha+2}y^\beta \boxed{+(\beta+4)}x^\alpha y^{\beta+3} = \boxed{-2(\alpha+3)}x^{\alpha+2}y^\beta \boxed{+(\alpha+1)}x^\alpha y^{\beta+3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(\beta+1) = -2(\alpha+3) \\ \beta+4 = \alpha+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha+2\beta = -8 \\ -\alpha+\beta = -3 \end{cases}$$

با حل دستگاه: $\alpha = -\frac{1}{2}, \ \beta = -\frac{7}{2}$

در معادله (*) قرار:

$$(\underbrace{2x^{3/2}y^{-5/2}+x^{-1/2}y^{1/2}}_{M_1})\,dx + (\underbrace{-2x^{5/2}y^{-7/2}+x^{1/2}y^{-1/2}}_{N_1})\,dy = 0 \longrightarrow$$

کامل است (؟) زیرا:

جواب عمومی: $f(x,y)=c$

که برای یافتن f داریم

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} = M_1}_{(*)} \ , \ \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} = N_1}_{(**)}$$

از (*): $f(x,y) = \int M_1\,dx = \int (2x^{3/2}y^{-5/2} + x^{-1/2}y^{1/2})\,dx = \dfrac{2x^{5/2}y^{-5/2}}{5/2} + \dfrac{x^{1/2}y^{1/2}}{1/2} + g(y)$

$$= \frac{4}{5}x^{5/2}y^{-5/2} + 2x^{1/2}y^{1/2} + g(y)$$

از (**): $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N_1 \rightarrow \frac{4}{5}\left(-\frac{5}{2}\cancel{x^{5/2}y^{-7/2}}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\cancel{x^{1/2}y^{-1/2}}\right) + g'(y) = \cancel{-2x^{5/2}y^{-7/2}} + \cancel{x^{1/2}y^{-1/2}}$

$\rightarrow g'(y) = 0 \longrightarrow$ اختیاری $g(y)=0$

$\Rightarrow$ جواب عمومی: $f(x,y) = c \longrightarrow \boxed{\frac{4}{5}x^{5/2}y^{-5/2} + 2x^{1/2}y^{1/2} = c}$

تمرین:

(۳) $y\,dx + (x - 3x^3y^2)\,dy = 0$

(۴) $y^2(1-x^2)\,dx + (x^3y + 2x^2 + xy)\,dy = 0$

(۵) $(xy+y^2)\,dx - (x^2+xy)\,dy = 0$

۴- معادلات مرتبه اول خطی:

به شکل کلی زیر هستند:

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (1)$$

که در آن $p(x)$ و $q(x)$ توابعی پیوسته هستند. معادله (1) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{dy}{dx} = q(x) - p(x)y \Longrightarrow \left(q(x) - p(x)y\right)dx - dy = 0$$

که چون $\dfrac{M_y - N_x}{N} = \dfrac{-p(x) - 0}{-1} = p(x)$، لذا دارای عامل انتگرال‌ساز زیر به صورت

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

است. با ضرب $\mu(x)$ در طرفین (1) داریم

$$e^{\int p(x)dx} y' + p(x) e^{\int p(x)dx} y = q(x) e^{\int p(x)dx}$$

$$\Longrightarrow \left(e^{\int p(x)dx} y\right)' = q(x) e^{\int p(x)dx} \Longrightarrow e^{\int p(x)dx} y = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + c$$

که با ضرب طرفین در $e^{-\int p(x)dx}$ جواب عمومی (1) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$y = y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + c\right).$$

مثال: جواب عمومی هر یک از معادلات زیر را بدست آورید:

① $xy' + y = 5x^2$

حل) ابتدا طرفین بر ضریب y' تقسیم تا ضریب y' برابر ۱ شود $\longrightarrow y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{5x}_{q(x)}$

بنابراین طبق فرمول بالا:

جواب عمومی: $y = y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + c\right)$

$$\Longrightarrow y = \underbrace{e^{-\int \frac{1}{x}dx}}_{e^{-\ln x} = x^{-1} = \frac{1}{x}}\left(\int 5x \underbrace{e^{\int \frac{1}{x}dx}}_{e^{\ln x} = x} dx + c\right) = \frac{1}{x}\left(\int 5x^2 dx + c\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{y = \frac{1}{x}\left(5\frac{x^3}{3} + c\right)}$$

② $(x^5+3y)\,dx - x\,dy = 0$ → با عامل انتگرال ساز $\mu(x)$: روش دوم

حل) روش اول:

$\div dx$: $x^5+3y-x\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow x^5+3y-xy'=0 \xrightarrow{\text{بر } -x \text{ تقسیم}} \frac{x^5}{-x}+\frac{3}{-x}y+y'=0$

$\Rightarrow \underbrace{y'-\frac{3}{x}y}_{p(x)} = \underbrace{x^4}_{q(x)} \Rightarrow$ جواب عمومی: $y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)\, e^{\int p(x)dx}dx+c\right)$

$\Rightarrow y=\underbrace{e^{-\int -\frac{3}{x}dx}}_{e^{3\ln x}=x^3}\left(\int x^4 \underbrace{e^{\int -\frac{3}{x}dx}}_{e^{-3\ln x}=x^{-3}=\frac{1}{x^3}}dx+c\right)=x^3\left(\int x\,dx+c\right)=x^3\left(\frac{x^2}{2}+c\right)$

$\Rightarrow y=x^3\left(\frac{x^2}{2}+c\right)$

تمرین:

③ $y'+y=\frac{1}{1+e^{2x}}$

④ $(x\sin x-y)\,dx-x\,dy=0$

⑤ $x^2(x^2-1)\frac{dy}{dx}+x(x^2+1)y=x^2-1$

* تذکر: برخی معادلات به شکل خطی مرتبه اول برحسب $\frac{dx}{dy}$ به صورت

نکته ۱

$$\frac{dx}{dy}+p(y)x=q(y)$$

هستند که به طور مشابه جواب عمومی آن به صورت زیر است:

$$x=x(y)=e^{-\int p(y)dy}\left(\int q(y)\, e^{\int p(y)dy}dy+c\right)$$

مثال: مطلوبست جواب عمومی معادلات زیر:

① $y\,dx+(2xy-e^{-2y})\,dy=0$ → با عامل انتگرال ساز $\mu(y)$: روش دوم

حل) روش اول: تقسیم بر y : $dx+\left(\frac{2xy-e^{-2y}}{y}\right)dy=0 \xrightarrow{\text{بر } dy \text{ تقسیم}} \frac{dx}{dy}+2x-\frac{e^{-2y}}{y}=0$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy}\underbrace{+2}_{p(y)}x=\underbrace{\frac{e^{-2y}}{y}}_{q(y)}$

$\Rightarrow$ جواب عمومی: $x=x(y)=e^{-\int p(y)dy}\left(\int q(y)\, e^{\int p(y)dy}dy+c\right)=\underbrace{e^{-\int 2dy}}_{e^{-2y}}\left(\int \frac{e^{-2y}}{y}\underbrace{e^{\int 2dy}}_{e^{2y}}dy+c\right)$

$\int e^{-2y}\frac{e^{2y}}{y}dy=\int\frac{dy}{y}=\ln y$

$\Rightarrow x=e^{-2y}(\ln y+c)$

② $y'(x\sin y+\sin 2y)=1$

حل) $y'=\frac{dy}{dx} \Rightarrow x\sin y+\sin 2y=\frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{dx}{dy}\underbrace{+(-\sin y)}_{p(y)}x=\underbrace{\sin 2y}_{q(y)}$

$\Rightarrow x=x(y)=\underbrace{e^{-\int -\sin y\,dy}}_{e^{-\cos y}}\left(\int \underbrace{\sin 2y}_{2\sin y\cos y}\underbrace{e^{\int -\sin y\,dy}}_{e^{\cos y}}dy+c\right)=e^{-\cos y}\left(2\int \sin y\,\underbrace{\cos y}_{t}\, e^{\cos y}\underbrace{dy}_{-dt}+c\right)$

$t \to -\sin y\,dy = dt$

$\Rightarrow x=e^{-\cos y}\left(-2\int te^{t}dt+c\right)=e^{-\cos y}\left(-2(te^{t}-e^{t})+c\right)=e^{-\cos y}\left(-2(\cos y\, e^{\cos y}-e^{\cos y})+c\right)$

③ $(3\tan x - 2\cos y)\sec^2 x\,dx + \tan x \sin y\,dy = 0$

حل) قبلاً در بحث معادلات کامل، با استفاده از تغییر متغیرهای $u=\tan x$ و $v=\cos y$ به معادله زیر رسیدیم:

$$(3u-2v)\,du - u\,dv = 0$$

بر du تقسیم $\Rightarrow 3u - 2v - u\dfrac{dv}{du} = 0 \xrightarrow{\text{بر } -u \text{ تقسیم}} \dfrac{3u}{-u} - \dfrac{2}{-u}v + \dfrac{dv}{du} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dv}{du} + \underbrace{\frac{2}{u}}_{p(u)}v = \underbrace{3}_{q(u)} \Rightarrow v = v(u) = e^{-\int p(u)du}\left(\int q(u)\, e^{\int p(u)du}\, du + c\right)$$

$$\Rightarrow v = \underbrace{e^{-\int \frac{2}{u}du}}_{e^{-2\ln u} = u^{-2}}\left(\int 3\, \underbrace{e^{\int \frac{2}{u}du}}_{e^{2\ln u} = u^{2}}\, du + c\right) = u^{-2}\left(\int 3u^2 du + c\right) \Rightarrow \boxed{v = u^{-2}(u^3+c) = u + cu^{-2}}$$

$$\xrightarrow[v=\cos y]{u=\tan x} \boxed{\cos y = \tan x + c(\tan x)^{-2}}$$

تمرین:
④ $dx + (2x - y + 1)\,dy = 0$
⑤ $y\,dx + (3x - xy - 2)\,dy = 0$

نکته ۲: برخی معادلات را می‌توان با استفاده از تغییر متغیرهای مناسب به خطی مرتبه اول تبدیل کرد.

مثال: مطلوبست جواب عمومی معادلات زیر:

① $y'\cos y + \sin y = e^{-x}$

حل) با تغییر متغیر $u = \sin y \to u' = y'\cos y \to$ در معادله قرار دهیم

$$\Rightarrow u' + u = e^{-x} \to \frac{du}{dx} \text{ خطی مرتبه اول برحسب } : \quad p(x) = 1, \quad q(x) = e^{-x}$$

$$\Rightarrow u = u(x) = \underbrace{e^{-\int 1\,dx}}_{e^{-x}}\left(\int e^{-x}\, \underbrace{e^{\int 1\,dx}}_{e^{x}}\, dx + c\right) = e^{-x}(x+c), \qquad \int dx = x$$

$$\Rightarrow \boxed{u = e^{-x}(x+c)} \xrightarrow{u=\sin y} \boxed{\sin y = e^{-x}(x+c)}$$

تمرین ② $e^y y' + e^y = 4\sin x \Rightarrow u' + u = 4\sin x \to$ خطی مرتبه اول $\to$ ادامه حل ...

(با $u' = e^y y'$ و $u = e^y$)

یادآوری:

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + c$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + c$$

۵ـ معادلات مرتبه اول غیرخطی :

(الف) معادلات برنولی :

این معادلات به شکل کلی زیر هستند:

$$y'+p(x)y=q(x)y^n \qquad (1)$$

که در آن $p(x)$ و $q(x)$ توابعی پیوسته‌اند و n عددی حقیقی است و $n\neq 0,1$.

(زیرا اگر $n=0$ ← معادله (1) به شکل $y'+p(x)y=q(x)$ ← خطی مرتبه اول ← در بخش قبل بیان شد.

اگر $n=1$ ← معادله (1) به شکل $y'+p(x)y=q(x)y$ ← $y'=(q(x)-p(x))y$ ← تفکیک‌پذیر

قبلاً بیان شد.)

پس برای $n\neq 0,1$ معادله (1) یک معادله برنولی نامیده می‌شود. با تعویض متغیر $u=y^{1-n}$ داریم:

$$u'=(1-n)y'y^{-n} \qquad (2)$$

اکنون معادله (1) را بر y^n تقسیم کنید پس:

$$\frac{y'}{y^n}+p(x)\frac{y}{y^n}=q(x) \Longrightarrow y^{-n}y'+p(x)y^{1-n}=q(x) \qquad (3)$$

که با جایگذاری u و (2) در (3) داریم:

$$\frac{u'}{1-n}+p(x)u=q(x)$$

طرفین در $1-n$ ضرب

$$u'+(1-n)p(x)u=(1-n)q(x)$$

← خطی مرتبه اول برحسب u' (یعنی $\frac{du}{dx}$) که با حل آن آشنا هستیم.

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را به دست آورید:

① $x\,dy+y(1-4x^6y^4)\,dx=0$

حل) طرفین بر dx تقسیم: $x\frac{dy}{dx}+y(1-4x^6y^4)=0 \xrightarrow[\text{یعنی } x \text{ تقسیم تا}]{\text{طرفین بر ضریب } y'} y'+y\left(\frac{1}{x}-\frac{4x^6y^4}{x}\right)=0$

$\frac{dy}{dx}$ ← y'

ضریب y' برابر ۱ شود

$$\Longrightarrow y'+\frac{1}{x}y-4x^5y^5=0 \Longrightarrow y'+\frac{1}{x}y=4x^5y^5$$

$\frac{1}{x}$ ← $p(x)$ ، $4x^5$ ← $q(x)$ ، 5 ← n

یک معادله برنولی با $n=5$ و برحسب $\frac{dy}{dx}$ ← با تعویض متغیر $u=y^{1-n}=y^{-4}$ داریم:

$$u'+(1-n)p(x)u=(1-n)q(x) \Longrightarrow u'-4\left(\frac{1}{x}\right)u=-4(4x^5) \Longrightarrow u'-\frac{4}{x}u=-16x^5$$

← خطی مرتبه اول ← طبق فرمول ص ۵ جزوه:

$$u=u(x)=e^{-\int -\frac{4}{x}dx}\left(\int -16x^5\, e^{\int -\frac{4}{x}dx}dx+c\right)=x^4\left(-16\int x\,dx+c\right) \Rightarrow u=x^4\left(-16\frac{x^2}{2}+c\right)$$

$e^{4\ln x}=x^4$ ، $e^{-4\ln x}=x^{-4}=\frac{1}{x^4}$

(۲) $y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3\cos(x^2)}{y}$

حل) $y' - \underbrace{\frac{1}{x}}_{p(x)}y = \underbrace{(2x^3\cos(x^2))}_{q(x)}\,y^{\overbrace{-1}^{n}}$ ⟵ برنولی از نوع y' یعنی $\frac{dy}{dx}$ با $n=-1$

← با تعویض متغیر $u=y^{1-n}=y^2$ داریم:

$$u'+(1-n)p(x)u=(1-n)q(x) \longrightarrow u'+2\left(-\frac{1}{x}\right)u = 2\left(2x^3\cos(x^2)\right)$$

$$\longrightarrow u'-\frac{2}{x}u=4x^3\cos x^2 \longrightarrow u=u(x)=e^{-\int -\frac{2}{x}dx}\left(\int 4x^3\cos x^2\, e^{\int -\frac{2}{x}dx}dx+c\right)$$

خطی مرتبه اول

$e^{2\ln x}=x^2$, $e^{-2\ln x}=x^{-2}$, $4\int x\cos(x^2)\,dx$

$t \to 2x\,dx=dt$, $x\,dx=\frac{1}{2}dt$

$$\hookrightarrow u=x^2\left(4\underbrace{\int\frac{1}{2}\cos t\,dt}_{\frac{1}{2}\sin t=\frac{1}{2}\sin x^2}+c\right)=x^2\left(2\sin(x^2)+c\right). \checkmark$$

تمرین:

(۳) $xy'-\frac{y}{2\ln x}=y^2$

(۴) $dy+(4y-8y^{-3})x\,dx=0$

نکته: (برنولی معکوس) ممکن است بتوان یک معادله را به شکل برنولی برحسب $\frac{dx}{dy}$ به صورت زیر نوشت:

$$\frac{dx}{dy}+p(y)\,x=q(y)\,x^n$$

که مشابه قبل، با تعویض متغیر $u=x^{1-n}$ به خطی مرتبه اول زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{du}{dy}+(1-n)p(y)\,u=(1-n)q(x)$$

که با حل آن آشنا هستیم.

مثال: مطلوب است جواب عمومی معادلات زیر:

(۱) $x\overbrace{y'}^{\frac{dy}{dx}}(x-1+xe^y)=1$

حل) وارون‌نویسی: $x(x-1+xe^y)=\frac{dx}{dy} \Rightarrow x^2-x+x^2e^y=\frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{dx}{dy}+x=(1+e^y)x^{2}$

$p(y)=1$, $q(y)=1+e^y$, $n=2$

برنولی از نوع $\frac{dx}{dy}$ (برنولی معکوس) با $n=2$ ← با تعویض متغیر $u=x^{1-n}=x^{-1}$ داریم:

$$\frac{du}{dy}+(1-n)p(y)u=(1-n)q(y) \longrightarrow \frac{du}{dy}-1(1)u=-(1+e^y) \longrightarrow \frac{du}{dy}-u=-(1+e^y)$$

خطی مرتبه اول برحسب $\frac{du}{dy}$

$$u=u(y)=e^{-\int -1dy}\left(-\int(1+e^y)\,e^{\int -1dy}dy+c\right)$$

$e^{-\int -1dy}=e^y$, $e^{\int -1dy}=e^{-y}$

$$\Longrightarrow u=e^y\left(-\int(e^{-y}+1)dy+c\right)=e^y\left(+e^{-y}-y+c\right). \checkmark$$

مثال ۱۰

(۲) $xy' + y = 2x^2 y y' \ln y$

حل) $(x - 2x^2 y \ln y)\underbrace{y'}_{dy/dx} = -y \xrightarrow[\text{و تقسیم بر } -y]{\text{طرفین معکوس}} \frac{x}{-y} - \frac{2x^2 y \ln y}{-y} = \frac{dx}{dy}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} + \underbrace{\frac{1}{y}}_{p(y)} x = \underbrace{(2\ln y)}_{q(y)} x^{\overset{n}{2}} \longrightarrow$$ برنولی برحسب $\frac{dx}{dy}$ (برنولی معکوس) با $n=2$

با تعویض متغیر $u = x^{1-n} = x^{-1}$ داریم:

$$\frac{du}{dy} + (1-n)p(y)u = (1-n)q(y) \longrightarrow \frac{du}{dy} - \frac{1}{y}u = -2\ln y \longrightarrow$$ خطی مرتبه اول

$$\Rightarrow u = u(y) = \underbrace{e^{-\int -\frac{1}{y}dy}}_{e^{\ln y} = y}\left(\int -2\ln y\, \underbrace{e^{\int -\frac{1}{y}dy}}_{e^{-\ln y} = y^{-1} = \frac{1}{y}} dy + c\right) = y\left(-2\int \frac{\ln y\, dy}{y} + c\right)$$

$t \to \frac{dy}{y} = dt$

$\int t\,dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\ln y)^2}{2}$

$$\Rightarrow u = y\left(-2\left(\frac{(\ln y)^2}{2}\right) + c\right) \longrightarrow \boxed{u = y\left(-(\ln y)^2 + c\right)} \checkmark \xrightarrow{u = x^{-1}} ?? \checkmark\checkmark$$

تمرین:

(۳) $y\,dx + x(1 - 3x^2y^2)dy = 0$

(۴) $y' x^3 \sin y + 2y = xy'$

(۵) $y' = \frac{2xy}{x^2 - 3y^2 - 3} \longrightarrow$ هم با برنولی معکوس شود هم با $\mu(y) = y^{-2}$ حل شود!

ب) معادله ریکاتی:

این معادله به شکل

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x) \qquad (1)$$

است که $p(x)$، $q(x)$ و $r(x)$ پیوسته‌اند. اگر $y_1 = u(x)$ یک جواب از معادله (۱) باشد (در سؤال‌ها $u(x)$ داده می‌شود!)
آنگاه جواب عمومی معادله ریکاتی (۱) به صورت

$$y = u(x) + \frac{1}{v(x)} \qquad (2)$$

است که $v(x)$ جواب عمومی معادله خطی مرتبه اول زیر است:

$$v' - (p(x) + 2q(x)u(x))v = q(x)$$

تذکر: این معادله با جایگذاری (۲) در (۱) به دست آمده است.

مثال ۱: اگر $y_1 = x$ جوابی از معادله $y' + (2x-1)y - y^2 = x^2 - x + 1$ باشد، جواب عمومی معادله را به دست آورید.

حل) این همان $u(x)$ است. $u(x) = x$. یک معادله ریکاتی با
$p(x) = 2x - 1$
$q(x) = -1$
$r(x) = x^2 - x + 1$
است.

جواب عمومی معادله به صورت

$$y = u(x) + \frac{1}{v(x)} = x + \frac{1}{v(x)} \qquad (*)$$

است که برای یافتن $v(x)$:

$$v' - (p(x) + 2q(x)u(x))v = q(x) \rightsquigarrow v' - (\cancel{2x} - 1 + 2(-1)(\cancel{x}))v = -1$$

$\Rightarrow v' + v = -1$ → خطی مرتبه اول → $v = v(x) = e^{-\int 1\,dx}\left(\int -1\, e^{\int 1\,dx}\,dx + c\right)$

$\Rightarrow v = e^{-x}\left(-e^{x} + c\right) \rightsquigarrow v(x) = -1 + c\,e^{-x}$

در (*) جایگذاری:

$\Rightarrow$ جواب عمومی: $y = x + \frac{1}{v(x)} = x + \frac{1}{-1 + c\,e^{-x}}$.

تذکر: البته با روش تفکیک متغیر هم حل می‌شود.

(۲) $y' = x^3(y-x)^2 + \frac{y}{x}$, $y_1 = x$

حل) $y' = x^3\left(y^2 - 2xy + x^2\right) + \frac{y}{x} \rightarrow y' = x^3y^2 \underbrace{- 2x^4 y + x^5 + \frac{y}{x}}_{(-2x^4 + \frac{1}{x})\,y}$

$\rightsquigarrow y' \underbrace{- \left(-2x^4 + \frac{1}{x}\right)}_{p(x)} y \underbrace{- x^3}_{q(x)} y^2 = \underbrace{x^5}_{r(x)}$

یک معادله ریکاتی با $u(x) = x$

جواب عمومی: $y(x) = u(x) + \frac{1}{v(x)} = x + \frac{1}{v(x)}$ (*)

در ادامه یافتن $v(x)$:

$v' - \left(p(x) + 2q(x)u(x)\right) v = q(x) \rightsquigarrow v' - \left(\cancel{2x^4} - \frac{1}{x} + 2(-\cancel{x^3})(x)\right) v = -x^3$

$\Rightarrow v' + \frac{1}{x} v = -x^3$ → خطی مرتبه اول → $v = v(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(\int -x^3 e^{\int \frac{1}{x}dx}\,dx + c\right)$

$e^{-\ln x} = x^{-1} = \frac{1}{x}$, $e^{\ln x} = x$

$\Rightarrow v(x) = \frac{1}{x}\left(-\int x^4\,dx + c\right) = \frac{1}{x}\left(-\frac{x^5}{5} + c\right)$

در (*) قرار می‌دهیم:

$\rightsquigarrow$ جواب عمومی: $y = x + \frac{1}{v(x)} = x + \frac{1}{\frac{1}{x}\left(-\frac{x^5}{5} + c\right)}$.

تمرین:

(۳) $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$, $y_1 = x$

(۴) $y' = x^2 + \frac{2y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$, $y_1 = -x^2$

(۵) $y' + e^{x} = e^{-x}y^2 + y$, $y_1 = e^{x}$

(پایان فصل ۲)

۱۲ اکبر

* فصل ۳ : معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

بخش ۱ : معادلات قابل تبدیل به معادلات مرتبه اول :

در این بخش، دو دسته از معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ها بالاتر را مطالعه می‌کنیم که با یک تغییر متغیر ساده به معادلات مرتبه اول تبدیل می‌شوند و لذا با روشهای معادلات مرتبه اول می‌توانیم جواب عمومی آنها را بدست آوریم. این دو دسته عبارتند از:

(الف) معادلات فاقد y به شکل $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$:

مشتق مرتبه n-1 ام y ، مشتق مرتبه n ام y ، u ، u'

با تغییر متغیر $u = y^{(n-1)}$ آنگاه: $u' = y^{(n)}$

(ب) معادلات فاقد x به شکل $G(y, y', y'') = 0$.

u ، $u\frac{du}{dy}$

با تغییر متغیر $u = y'$ ، $y'' = u\frac{du}{dy}$

اکنون تشریح حل (الف) و (ب):

* تشریح (الف): معادلات فاقد y به شکل $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ $(*)$ هستند که با تغییر متغیر $u = y^{(n-1)}$ داریم:

شامل دو مشتق متوالی y در معادله

یعنی مشتق مرتبه کوچکتر

$u = y^{(n-1)} \longrightarrow u' = {y^{(n-1)}}' =$ مشتق نسبت به x $=$ مشتق n ام $y = y^{(n)} \longrightarrow$ در $(*)$ جایگذاری:

$F(x, u, u') = 0 \longrightarrow$ به یک معادله مرتبه اول می‌رسیم که با حل آن u را بدست آوریم.

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید:

① $xy''' - y'' = 0$

حل) معادله به شکل $F(x, y'', y''') = 0$ است (یعنی معادله شامل x و y'' و y''') و معادله از نوع فاقد y است (یعنی در معادله نیز y نداریم). لذا با تغییر متغیر $u = y''$ داریم $u' = y'''$ که با جایگذاری در معادله داریم:

دو مشتق متوالی y یعنی y'' و y'''

$xu' - u = 0 \longrightarrow$ مرتبه اول (البته تفکیک‌پذیر) $\longrightarrow xu' = u \longrightarrow x\frac{du}{dx} = u$

$\xrightarrow{\text{تفکیک}} \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} \longrightarrow \ln u = \ln x + c$

تذکر ۱: برای هر عدد حقیقی مانند c، عددی حقیقی مانند c_1 وجود دارد که $c = \ln c_1$

$\Longrightarrow \ln u = \ln x + \ln c_1 \longrightarrow \ln u = \ln(xc_1) \longrightarrow u = c_1 x$

تذکر ۲: این ارتباط بین u و x یعنی y'' و x است و باید ارتباط بین x و y را بیابیم!

$\xrightarrow{u = y''} y'' = c_1 x \xrightarrow{\text{انتگرال}} \int y'' dx = \int c_1 x\, dx \longrightarrow y' = c_1\frac{x^2}{2} + c_2$

$\xrightarrow{\text{انتگرال}} \int y' dx = \int \left(c_1\frac{x^2}{2} + c_2\right) dx \longrightarrow y = c_1\frac{x^3}{6} + c_2 x + c_3$

رابطه بین x و y که [illegible]

تمرین

(۲) $xy''+y'=x$

(۳) $xy''+y'=4x^2+3x$

(۴) $(1+x^2)y''+2xy'=\frac{1}{1+x^2}$

حل) معادله فاقد y و به شکل

$F(x,y',y'')=0$ با تعویض متغیر $u=y' \longrightarrow u'=y'' \longrightarrow$ در معادله قرار می‌دهیم:

$\int\frac{dt}{t}$, $e^{\ln t}=t=1+x^2$

$(1+x^2)u'+2xu=\frac{1}{1+x^2} \longrightarrow$ یک معادله مرتبه اول خطی

بر $1+x^2$ تقسیم $\longrightarrow u'+\underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{p(x)}u=\underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^2}}_{q(x)} \Longrightarrow u=u(x)=e^{-\int\frac{2x\,dx}{1+x^2}}\left(\int\frac{1}{(1+x^2)^2}e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}dx+c_1\right)$

dt, t

$e^{-\ln(1+x^2)}=(1+x^2)^{-1}=\frac{1}{1+x^2}$

$\longrightarrow u=\frac{1}{1+x^2}\left(\int\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}dx+c_1\right)=\frac{1}{1+x^2}\arctan x+\frac{c_1}{1+x^2}$

$\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x$

$\xrightarrow{u=y'} y'=\frac{1}{1+x^2}\arctan x+\frac{c_1}{1+x^2} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \int y'dx=\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx+\int\frac{c_1}{1+x^2}dx$

t, dt

$\int t\,dt=\frac{t^2}{2}=\frac{(\arctan x)^2}{2}$

$c_1\arctan x+c_2$

$\longrightarrow y=\frac{(\arctan x)^2}{2}+c_1\arctan x+c_2$

تمرین (۵) $y''=\frac{y'}{x}\left(1+\ln\left(\frac{y'}{x}\right)\right)$

متغیرها شامل مشتق‌ها

مرتبه اول و دوم y

تشریح (ب): معادلات فاقد x به شکل $G(y,y',y'')=0$ هستند که مشابه به حالت (الف) با تعویض متغیر $u=y'$ داریم (چون در معادله x نداریم لذا در ادامه هم y'' را برحسب مشتق نسبت به y می‌نویسیم که در معادله x ظاهر نشود!)

به مشتق مرتبه کمتر

$y''=u'=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=u\frac{du}{dy}$

قاعده زنجیره‌ای در مشتق

$y'=u$ همان

که با جایگذاری در معادله به معادله $G(y,u,u\frac{du}{dy})=0$ می‌رسیم که یک معادله مرتبه اول است و با حل آن آشنا هستیم.

مثال: مطلوبست جواب عمومی معادلات زیر:

① $yy''+(y')^2=0$

حل) معادله به صورت $G(y,y',y'')=0$ → فاقد x به فرم (ب) → با تعریف متغیر $u=y'$ داریم $y''=u\frac{du}{dy}$

در معادله قرار می‌دهیم:

$$y\left(u\frac{du}{dy}\right)+u^2=0 \longrightarrow$$ مرتبه اول تفکیک‌پذیر

$$\Rightarrow yu\frac{du}{dy}=-u^2 \xrightarrow{\text{تفکیک}} \int\frac{u\,du}{u^2}=-\int\frac{dy}{y} \longrightarrow \int\frac{du}{u}=-\int\frac{dy}{y}$$

$$\longrightarrow \ln u=-\ln y+c \quad (c \to \ln c_1) \Rightarrow \ln u=-\ln y+\ln c_1 \Rightarrow \ln u=\ln\left(\frac{c_1}{y}\right)$$

$$\longrightarrow u=\frac{c_1}{y} \xrightarrow{u=y'} y'=\frac{c_1}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{c_1}{y} \xrightarrow{\text{تفکیک}} \int y\,dy=\int c_1\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2}=c_1x+c_2$$ → رابطه بین x و y یا همان جواب عمومی معادله

② $yy''+(y')^2-(y')^3\ln y=0$

حل) معادله به صورت $G(y,y',y'')=0$ فاقد x → تعریف متغیر $u=y' \to y''=u\frac{du}{dy}$ → در معادله قرار می‌دهیم

$$\Rightarrow yu\frac{du}{dy}+u^2-u^3\ln y=0 \xrightarrow[\text{تقسیم تا ضریب } \frac{du}{dy}]{\text{طرفین بر } yu} \frac{du}{dy}+\frac{u^2}{yu}-\frac{u^3\ln y}{yu}=0$$

$-\frac{\ln y}{y}u^2$

$$\Rightarrow \frac{du}{dy}+\underbrace{\frac{1}{y}}_{P(y)}u=\underbrace{\frac{\ln y}{y}}_{q(y)}u^{\overset{n}{2}} \longrightarrow$$ برنولی برحسب $\frac{du}{dy}$ با $n=2$ → با تعریف متغیر $v=u^{1-n}=u^{-1}$ داریم:

$$\frac{dv}{dy}+(1-n)P(y)v=(1-n)q(y)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dy}-\frac{1}{y}v=-\frac{\ln y}{y} \longrightarrow$$ مرتبه اول خطی $$\longrightarrow v=v(y)=e^{-\int -\frac{1}{y}dy}\left(\int -\frac{\ln y}{y}e^{\int -\frac{1}{y}dy}dy+c_1\right)$$

$e^{-\ln y}=\frac{1}{y}$, $e^{\ln y}=y$, $-\int\frac{\ln y}{y^2}dy \underset{\text{با جزء به جزء}}{=} \frac{\ln y}{y}+\frac{1}{y}$; $u_1=\ln y$, $dv_1=\frac{dy}{y^2}$

$$\Rightarrow v=y\left(\frac{\ln y}{y}+\frac{1}{y}+c_1\right)=\ln y+1+c_1y$$

$$\xrightarrow{v=u^{-1}=\frac{1}{u}=\frac{1}{y'}} \frac{1}{y'}=\ln y+1+c_1y \longrightarrow \frac{dx}{dy}=\ln y+1+c_1y$$

$y' \to dy/dx$

$$\xrightarrow{\text{تفکیک متغیر}} \int dx=\int(\ln y+1+c_1y)dy \Rightarrow x=\underbrace{\int \ln y\,dy}_{y\ln y-\cancel{y}}+\underbrace{\int dy}_{\cancel{y}}+\int c_1y\,dy \Rightarrow x=y\ln y+\frac{c_1y^2}{2}+c_2$$

تمرین ③ $y''=y'(y'+y)$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$

تذکر: در لابلای حل این مثال، این شرایط استفاده می‌شود!

بخش ۲ : معادلات خطی مرتبه دوم :

این معادلات به شکل کلی زیر هستند :

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \qquad (1)$$

که در آن ضریب $a_2(x)$، تابع ثابت صفر نیست. با تقسیم طرفین (۱) بر $a_2(x)$ داریم

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (2)$$

که در آن، $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ و $q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$. مقادیری از x که به ازای آنها $a_2(x)=0$، نقاط تکین معادله (۱) نامیده می‌شوند. اگر در معادله (۲)، $f(x)\equiv 0$ (یعنی f تابع ثابت صفر باشد)، آنگاه معادله

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (3)$$

همگن نامیده می‌شود و اگر $f(x)$ تابع ثابت صفر نباشد، معادله را غیرهمگن می‌نامیم.

تذکر: در قضیه‌های زیر فرض می‌کنیم تابع $f(x)$، $p(x)$ و $q(x)$ در یک بازه I، پیوسته‌اند.

* قضیه ۱ : فرض کنید توابع $p(x)$، $q(x)$ و $f(x)$ در یک بازه I پیوسته‌اند. فرض کنید x_0 نقطه‌ای در I باشد و y_0 و z_0 دو عدد حقیقی باشند. آنگاه مسئله مقدار اولیه

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \quad \text{و} \quad y(x_0)=y_0 ,\ y'(x_0)=z_0$$

دارای یک جواب منحصربفرد است و این جواب، بر تمام بازه I تعریف می‌شود.

* قضیه ۲ : اگر $y_g(x,c_1,c_2)$ جواب عمومی معادله همگن (۳) و $y_p(x)$ یک جواب خصوصی معادله غیرهمگن (۲) باشد آنگاه جواب عمومی معادله غیرهمگن (۲) به صورت زیر است :

$$y(x)=y_g(x,c_1,c_2)+y_p(x)$$

* قضیه ۳ : اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب معادله همگن (۳) باشند آنگاه

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

نیز جوابی از (۳) است که در آن، c_1 و c_2 اعداد ثابت دلخواهی هستند.

* تعریف (توابع وابسته و مستقل خطی): فرض کنید دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در بازه $[a,b]$ تعریف شده باشند. اگر عدد ثابتی مانند K وجود داشته باشد که برای هر x در $[a,b]$ داشته باشیم $f(x)=Kg(x)$، در این صورت می‌گوییم دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در بازه $[a,b]$ نامستقل خطی (وابسته خطی) هستند و در غیر این صورت آنها را در بازه $[a,b]$، مستقل خطی می‌نامیم.

یعنی به نوعی: $\frac{f(x)}{g(x)} = K =$ عدد ثابت

مثال: دو تابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=5\sin x$ وابسته خطی‌اند زیرا: $f(x)=\frac{1}{5}g(x)$.
ولی دو تابع $f(x)=e^{2x}$ و $g(x)=xe^{2x}$ مستقل خطی‌اند زیرا: $\frac{f(x)}{g(x)}=x$ و عدد ثابتی نمی‌شود!

*تعریف (رونسکین): فرض کنید $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب معادلهٔ همگن (۳) ص ۱۵ باشند. رونسکین دو تابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ که آنرا با $W(y_1,y_2)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)$$

مثال: رونسکین دو تابع $y_1(x)=e^{3x}$ و $y_2(x)=e^{5x}$ را بیابید.

حل)

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{3x} & e^{5x} \\ 3e^{3x} & 5e^{5x} \end{vmatrix}=5e^{8x}-3e^{8x}=2e^{8x}$$

مثال: رونسکین دو تابع $y_1(x)=\sin 2x$ و $y_2(x)=-3\sin 2x$ را بیابید.

حل)

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sin 2x & -3\sin 2x \\ 2\cos 2x & -6\cos 2x \end{vmatrix}=-6\sin 2x\cos 2x+6\sin 2x\cos 2x=0$$

*قضیه ۴: فرض کنید در معادلهٔ همگن (۳) ص ۱۵، توابع $p(x)$ و $q(x)$ بر یک بازهٔ I، پیوسته و $y_1(x)$ و $y_2(x)$ نیز دو جواب معادلهٔ (۳) باشند، آنگاه:

به ازای هر x در I، $W(y_1,y_2)\neq 0$ $\Longleftrightarrow$ به ازای xای در I، $W(y_1,y_2)\neq 0$

*قضیه ۵: اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جواب‌های معادلهٔ همگن (۳) در بازهٔ $[a,b]$ باشند آنگاه:

$W(y_1,y_2)\neq 0$ $\Longleftrightarrow$ دو جواب $y_1(x)$ و $y_2(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ مستقل خطی‌اند

*قضیه ۶: اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جواب‌های مستقل خطی معادلهٔ همگن (۳) ص ۱۵ در بازهٔ $[a,b]$ باشند آنگاه جواب عمومی معادلهٔ همگن (۳) به صورت زیر است

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

که c_1 و c_2 دو عدد ثابت دلخواه هستند.

*قضیه ۷ (اصل برهم‌نهی جواب‌ها): اگر $y_p(x)$ جواب معادلهٔ $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$ و $\bar{y}_p(x)$ جواب معادلهٔ $y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$ باشند آنگاه $y(x)=y_p(x)+\bar{y}_p(x)$ جواب معادلهٔ

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$$

است.

* استفاده از یک جواب برای یافتن جواب دیگر (روش کاهش مرتبه یا فرمول آبل):

فرض کنید $y_1(x)$ جوابی از معادله خطی مرتبه دوم همگن

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (1)$$

باشد. می‌خواهیم جواب دیگری از معادلهٔ (1) را به دست آوریم (مانند $y_2(x)$) به طوری که $y_1(x)$ و $y_2(x)$ مستقل خطی باشند. برای این کار فرض می‌کنیم

$$y_2(x)=y_1(x)v(x) \qquad (2)$$

برای یافتن $v_2(x)$، با جایگذاری (2) در (1) به دست می‌آوریم

$$(y_1v)''+p(x)(y_1v)'+q(x)(y_1v)=0$$

$$\Rightarrow y_1v''+(2y_1'+p(x)y_1)v'+\underbrace{(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1)}_{=0}v=0$$

چون y_1 جوابی از (1) است

$$\Rightarrow y_1v''+(2y_1'+p(x)y_1)v'=0$$

اکنون با تعویض متغیر $W=v'$ به دست می‌آوریم

$$y_1\underbrace{W'}_{\frac{dW}{dx}}+(2y_1'+p(x)y_1)W=0$$

مرتبه اول (تفکیک‌پذیر)

$$\xRightarrow{\text{تفکیک}} \int\frac{dW}{W}=-\int\left(\frac{2y_1'}{y_1}+\frac{p(x)y_1}{y_1}\right)dx$$

$$\Rightarrow \ln W=-\int\frac{2y_1'}{y_1}dx-\int p(x)dx \Rightarrow \ln W=-2\ln y_1-\int p(x)dx$$

$$\Rightarrow W=e^{-2\ln y_1-\int p(x)dx}=e^{-2\ln y_1}e^{-\int p(x)dx}=y_1^{-2}e^{-\int p(x)dx}\Rightarrow W=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}$$

$$\xRightarrow{W=v'} v'=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}\Rightarrow v=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx$$

در (2) جایگذاری

$$\Rightarrow \boxed{y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx}$$

(فرمول آبل)

مثال: جواب عمومی هر یک از معادلات زیر را به دست آورید:

(1) $x^2y''-xy'+y=0,\quad x>0,\quad y_1(x)=x$

حل) یک جواب از معادلهٔ مرتبه دوم همگن فوق یعنی $y_1=x$ داده شده است. ابتدا جواب دیگر یعنی $y_2(x)$ را با استفاده از فرمول آبل بالا به دست می‌آوریم و سپس جواب عمومی معادلهٔ فوق طبق قضیهٔ ۶ ص ۱۶ به شکل زیر خواهد بود:

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

که ... دنبال آن هستیم. برای یافتن $y_2(x)$ طبق فرمول آبل داریم:

فرمول آبل: $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx$

توجه: برای یافتن $P(x)$ توجه کنیم که ضریب y'' در معادله باید برابر ۱ باشد پس ابتدا طرفین معادله را بر ضریب y'' تقسیم می‌کنیم:

بر x^2 تقسیم $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ ، $p(x) = -\frac{1}{x}$ ، $q(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\Rightarrow y_2(x) = x\int \frac{1}{x^2} e^{-\int -\frac{1}{x}dx} dx \qquad e^{\ln x} = x$$

$$\Rightarrow y_2(x) = x\int \frac{x\,dx}{x^2} = x\int \frac{dx}{x} = x\ln x$$

مستقل خطی با $y_1 = x$ است

بنابراین طبق قضیه ۶ ص ۱۶:

جواب عمومی معادله مرتبه دوم خطی همگن: $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1x + c_2x\ln x$

تمرین ③ $xy'' - y' + 4x^3y = 0$ ، $x > 0$ ، $y_1 = \sin(x^2)$

مثال ④: اگر $y_1 = e^{mx}$ جوابی از معادله همگن $xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$ باشد، جواب عمومی معادله را بدست آورید.

حل) ابتدا مقدار m در y_1 را می‌یابیم. چون y_1 جوابی از معادله است پس در آن صدق می‌کند. با جایگذاری $y = e^{mx}$ ، $y_1' = me^{mx}$ ، $y_1'' = m^2e^{mx}$ در معادله داریم

$$x(m^2e^{mx}) - 2(x+1)(me^{mx}) + (x+2)e^{mx} = 0$$

طرفین بر e^{mx} تقسیم

$$\Rightarrow m^2x - 2(x+1)m + (x+2) = 0 \Rightarrow m^2x - 2mx - 2m + x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (m^2 - 2m + 1)x + (-2m + 2) = 0$$

چون بازای هر x این برابر صفر است پس باید:

$$\begin{cases} m^2 - 2m + 1 = 0 \\ -2m + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m-1)^2 = 0 \\ -2m = -2 \end{cases}$$

m های مشترک: $m = 1 \rightarrow y_1 = e^x$ قابل قبول

اکنون y_2 را با استفاده از فرمول آبل می‌یابیم:

$$y_2 = y_1\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx \qquad p(x) = \frac{-2(x+1)}{x} = \frac{-2x-2}{x}$$

$$e^{-\int \frac{-2x-2}{x}dx} = e^{\int \frac{2x+2}{x}dx} = e^{\int (2+\frac{2}{x})dx} = e^{2x+2\ln x} = e^{2x}e^{2\ln x} = e^{2x}x^2 = x^2e^{2x}$$

$$\Rightarrow y_2 = e^x\int \frac{x^2e^{2x}}{(e^x)^2}dx = e^x\int \frac{x^2\cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}}}dx = e^x\frac{x^3}{3}$$

$\Rightarrow$ جواب عمومی: $y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^x + c_2e^x\frac{x^3}{3}$

تمرین: ④ $x^2(x^2-1)y'' - x(x^2+1)y' + (x^2+1)y = 0$ ، $y_1 = x$ / ⑤ $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ و $y_1 = x^m$

⑥ $x^2y'' + 4xy'$ ...

* معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرائب ثابت:

این معادلات به شکل کلی زیر هستند:

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (1)$$

که در آن، a و b و c اعداد ثابتی هستند. برای معادله (۱) به دنبال جوابی به شکل $y_1 = e^{\lambda x}$ هستیم. با جایگذاری $y_1 = e^{\lambda x}$ در (۱) داریم:

$$a(\lambda^2 e^{\lambda x}) + b(\lambda e^{\lambda x}) + c e^{\lambda x} = 0 \xrightarrow[\text{تقسیم}]{\text{بر } e^{\lambda x}} \underbrace{a\lambda^2 + b\lambda + c = 0}_{\text{معادله مشخصه}} \quad (2)$$

که با توجه به مقادیر $\Delta = b^2 - 4ac$ حالتهای زیر را داریم:

(الف) اگر $\Delta > 0 \longrightarrow$ معادله (۲) دو ریشه حقیقی متمایز λ_1 و λ_2 دارد $\longrightarrow y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ، $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

جواب عمومی (۱): $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

(ب) اگر $\Delta = 0 \longrightarrow$ معادله (۲) دو ریشه مساوی (یا ریشه مضاعف) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ دارد $\longrightarrow y_1 = e^{\lambda x}$ و $y_2 = x e^{\lambda x}$

از فرمول آبل

جواب عمومی (۱): $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$

(ج) اگر $\Delta < 0 \longrightarrow$ معادله (۲) دو ریشه مختلط دارد که اگر این دو ریشه به صورت $\alpha \pm \beta i$ باشند $\longrightarrow y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ، $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$

جواب عمومی (۱): $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$

مثال: مطلوبست جواب عمومی معادلات زیر:

① $y'' - 2y' - 15y = 0 \longrightarrow$ یک معادله مرتبه دوم خطی همگن با ضرائب ثابت

حل) معادله مشخصه: $\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0 \longrightarrow (\lambda - 5)(\lambda + 3) = 0 \xrightarrow[\text{(الف)}]{\text{حالت}} \lambda_1 = 5 \longrightarrow y_1 = e^{5x}$ ، $\lambda_2 = -3 \longrightarrow y_2 = e^{-3x}$

$\Longrightarrow$ جواب عمومی: $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-3x}$

(۲) $4y''+4y'+y=0 \longrightarrow$ معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت

حل) معادله مشخصه: $4\lambda^2+4\lambda+1=0 \longrightarrow (2\lambda+1)^2=0 \longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=-\frac{1}{2}$ ریشه مضاعف

$\Longrightarrow y_1=e^{-\frac{1}{2}x} , \; y_2=xe^{-\frac{1}{2}x}$ ← طبق حالت (ب)؛

$\Longrightarrow$ جواب عمومی: $y(x)=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{-\frac{1}{2}x}+c_2xe^{-\frac{1}{2}x}$

(۳) $y''+2y'+5y=0$

حل) معادله مشخصه: $\lambda^2+2\lambda+5=0 \longrightarrow \lambda=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-2\pm4i}{2}=-1\pm2i$

$\Delta=4-20=-16<0 \longrightarrow$ حالت (ج)

$\alpha=-1$, $\beta=2$

طبق حالت (ج) $\Longrightarrow y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x=e^{-x}\cos2x , \; y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x=e^{-x}\sin2x$

$\Longrightarrow$ جواب عمومی: $y(x)=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)=e^{-x}(c_1\cos2x+c_2\sin2x)$

تمرین:

(۴) $4y''+y'=0$

(۵) $y''-6y'+9y=0$

(۶) $y''+3y'+4y=0$

(۷) $y''+4y'+5y=0$

* بخش ۳: معادلات خطی مرتبه n:

این معادلات به شکل کلی زیر هستند:

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x) \qquad (1)$$

اگر $f(x)\equiv0$ (یعنی f تابع ثابت صفر باشد) آنگاه معادله (1) را همگن می‌نامند.

* قضیه ۱ (قضیه وجود و یکتایی): فرض کنید توابع $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), f(x)$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشند و در این بازه $a_n(x)\neq0$. فرض کنید x_0 نقطه‌ای در بازه $[a,b]$ باشد و $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ اعداد حقیقی مفروضی باشند. آنگاه معادله همگن (1) به همراه شرایط اولیه

$$y(x_0)=\beta_0 , \; y'(x_0)=\beta_1 , \; y''(x_0)=\beta_2 , \dots , y^{(n-1)}(x_0)=\beta_{n-1}$$

دارای جواب یکتایی است که این جواب بر تمام بازه $[a,b]$ تعریف شده است.

* قضیهٔ ۲: اگر $y_1(x)$، $y_2(x)$، ...، $y_n(x)$ جوابهای معادله همگن

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (2)$$

باشند آنگاه

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

نیز جوابی از معادلهٔ (۲) است که در آن c_1، c_2، ...، و c_n اعداد ثابت دلخواهی اند.

* تعریف: فرض کنید توابع $f_1(x)$، $f_2(x)$، ...، و $f_n(x)$ بر بازهٔ $[a,b]$ تعریف شده باشند. اگر اعداد ثابت c_1، c_2، ...، و c_n که همگی صفر نیستند وجود داشته باشند به طوری که برای هر x در $[a,b]$،

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x) = 0$$

آنگاه گوییم که f_1، f_2، ...، و f_n بر بازهٔ $[a,b]$ وابستهٔ خطی (نامستقل خطی) هستند، در غیر اینصورت این توابع بر بازهٔ $[a,b]$ مستقل خطی نامیده می‌شوند.

مثال: توابع $f_1(x) = \cos 2x$ و $f_2(x) = 3\sin 2x$ و $f_3(x) = \sin 2x - 5\cos 2x$ وابسته خطی‌اند زیرا اگر $c_1 = 5$، $c_2 = -\frac{1}{3}$ و $c_3 = 1$ داریم

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + c_3f_3(x) = 5\cos 2x - \sin 2x + \sin 2x - 5\cos 2x = 0$$

* تعریف: فرض کنید توابع $f_1(x)$، $f_2(x)$، ...، و $f_n(x)$ حداقل $n-1$ بار بر بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشند. رونسکین f_1، f_2، ...، و f_n در نقطهٔ x_0 از بازهٔ $[a,b]$ برابر است با

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x_0) = \begin{vmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & \cdots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & \cdots & f_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & f_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

* قضیهٔ ۳: اگر رونسکین توابع $f_1(x)$، $f_2(x)$، ...، و $f_n(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ صفر نباشد آنگاه این توابع بر بازه $[a,b]$ مستقل خطی‌اند.

* قضیهٔ ۴: اگر y_1، y_2، ...، و y_n جوابهای معادله همگن (۲) در بازهٔ $[a,b]$ باشند آنگاه:

برای هر x در $[a,b]$: $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) \neq 0 \iff$ y_1، y_2، ...، و y_n در بازهٔ $[a,b]$ مستقل خطی اند

* قضیهٔ ۵: اگر y_1، y_2، ...، و y_n جوابهای مستقل خطی معادله همگن (۲) در بازهٔ $[a,b]$ باشند آنگاه جواب عمومی معادله همگن (۲) به صورت

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

است که c_1، c_2، ...، و c_n اعداد ثابت دلخواهی اند.

* قضیهٔ ۶: اگر $y_p(x)$ یک جواب خصوصی معادله غیرهمگن (۱) ص ۲۰ و $y_g(x)$ جواب عمومی معادله همگن (۲) بالا باشد آنگاه جواب عمومی معادله غیرهمگن (۱) ص ۲۰ به صورت زیر است

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x).$$

* معادلات خطی مرتبه n همگن با ضرایب ثابت :

به شکل کلی زیر هستند

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

که در آن a_0 ، a_1 ، ... ، a_n مقادیر ثابتی هستند و $a_n \neq 0$.

برای یافتن جواب عمومی معادله ، به n تا جواب مستقل خطی نیاز داریم . اینجا برمی‌گردیم به معادلات مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت که در ص ۱۹ تشریح شد ، با جایگذاری توابع نمایی به شکل $y=e^{\lambda x}$ در معادله بالا ، به معادله مشخصه زیر می‌رسیم :

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

می‌رسیم که با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه فوق ، دقیقاً مشابه آنچه برای حالت مرتبه دوم در ص ۲۰ و ۱۹ انجام شد ، عمل می‌کنیم .

مثال : جواب عمومی هر یک از معادلات زیر را به دست آورید :

(۱) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$

حل) معادله مشخصه : $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \longrightarrow$ مجموع ضرایب $=0 \longrightarrow \lambda = 1$ یک ریشه $\longrightarrow$ برای یافتن عامل دیگر و تجزیه عبارت ، بر $\lambda - 1$ تقسیم می‌کنیم

$$\Rightarrow \begin{array}{l|l} \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 & \lambda - 1 \\ \hline -\lambda^3 + \lambda^2 & \lambda^2 - \lambda - 6 \\ -\lambda^2 - 5\lambda + 6 & \\ \lambda^2 - \lambda & \\ -6\lambda + 6 & \\ 6\lambda - 6 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda - 1 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 1 \longrightarrow y_1(x) = e^{x} \\ \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \longrightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0 \longrightarrow \lambda_2 = 3 ,\ \lambda_3 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2(x) = e^{3x} \\ y_3(x) = e^{-2x} \end{cases} \Longrightarrow$$ طبق قضیه ۵ ص ۲۱

جواب عمومی معادله : $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x}$

(۲) $2y^{(4)} - 3y''' - 2y'' = 0$

حل) معادله مشخصه : $2\lambda^4 - 3\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0 \longrightarrow \lambda^2(2\lambda^2 - 3\lambda - 2) = 0$

$$\lambda^2 = 0 \xrightarrow[\text{ریشه ۲}]{\text{درجه ۲}} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \longrightarrow y_1 = e^{0x} = 1 ,\ y_2 = x e^{0x} = x$$

$$2\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} \begin{cases} \lambda_3 = \frac{3+5}{4} = 2 \longrightarrow y_3 = e^{2x} \\ \lambda_4 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \longrightarrow y_4 = e^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ جواب عمومی : $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4 = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-\frac{1}{2}x}$

(۳) $y''' - 3y' + 2y = 0$

حل) معادله مشخصه: $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \longrightarrow$ مجموع ضرایب $= 0 \longrightarrow \underset{\text{یک ریشه}}{\lambda = 1} \longrightarrow \lambda^3 - 3\lambda + 2 \,\big|\, \lambda - 1$ ، $\lambda^2 + \lambda - 2$

$$\Rightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\lambda - 1)^2 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \longrightarrow y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x \\ \lambda + 2 = 0 \longrightarrow \lambda_3 = -2 \longrightarrow y_3 = e^{-2x} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ جواب عمومی: $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x}$

(۴) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

حل) معادله مشخصه: $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مکعب}} (\lambda + 1)^3 = 0 \xrightarrow[\text{۳ تا ریشه}]{\text{درجه ۳}} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$

$$y_1 = e^{-x},\ y_2 = xe^{-x},\ y_3 = x^2 e^{-x}$$

جواب عمومی: $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}$

(۵) $y^{(4)} - y = 0$

حل) معادله مشخصه: $\lambda^4 - 1 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$

$$\begin{cases} \lambda^2 - 1 = 0 \longrightarrow \lambda^2 = 1 \longrightarrow \lambda = \pm 1 \longrightarrow y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-x} \\ \lambda^2 + 1 = 0 \longrightarrow \lambda^2 = -1 \longrightarrow \lambda = \pm i \longrightarrow y_3 = \cos x,\ y_4 = \sin x \end{cases}$$

$\Rightarrow$ جواب عمومی: $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4$

$$= c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

تمرین: جواب عمومی هر یک از معادلات زیر را بدست آورید:

(۱) $y''' - 2y'' - 11y' + 12y = 0$

(۲) $y^{(5)} - 2y^{(4)} + y''' = 0$

(۳) $y''' - 3y'' + 3y' - 1 = 0$

(۴) $y''' + y'' + 3y' - 5y = 0$

(۵) $4y''' - 8y'' + 5y' - y = 0$

* معادلات خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت :

این معادلات به شکل کلی زیر هستند:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \qquad (1)$$

که در آن a_0 و a_1 و ... و a_n ضرایب ثابت و $a_n \neq 0$ است. از قضیهٔ ۶ صفحه ۲۱ جزوه می‌دانیم که جواب عمومی (۱) به صورت

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x)$$

است که $y_g(x)$ جواب عمومی معادلهٔ همگن

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

است و $y_p(x)$ یک جواب خصوصی از معادلهٔ غیرهمگن (۱) است. هدف ما در این بخش، ارائهٔ روشی است که بتوانیم یک جواب خصوصی $y_p(x)$ برای معادلهٔ (۱) بیابیم. این روش فقط در حالت‌های خاص زیر برای $f(x)$ تشریح می‌شود که به روش **ضرایب نامعین** معروف است:

$\underbrace{}_{\text{(۷ حالت)}}$

حالت ۱ : اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ m به شکل $f(x) = K_m x^m + \cdots + K_1 x + K_0$ باشد آنگاه

یک چندجمله‌ای درجه m

$$y_p(x) = x^r \left(A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0 \right)$$

که در آن،

$r =$ تعداد تکرار ریشهٔ صفر در معادلهٔ مشخصه

تذکر: ضرایب نامعین A_1 و A_2 و ... و A_m با جایگذاری $y_p(x)$ در معادله به دست می‌آیند.

حالت ۲ : اگر $f(x)$ یک تابع نمایی به شکل $f(x) = K e^{\alpha x}$ باشد آنگاه

یک تابع نمایی

$$y_p(x) = A x^r e^{\alpha x}$$

که در آن،

$r =$ تعداد تکرار ریشهٔ α در معادلهٔ مشخصه

تذکر: ضریب نامعین A با جایگذاری $y_p(x)$ در معادله به دست می‌آید.

حالت ۳ : اگر $f(x)$ به شکل $f(x) = K_1 \cos\beta x + K_2 \sin\beta x$ باشد آنگاه

مثلثاتی

$$y_p(x) = x^r \left(A_1 \cos\beta x + A_2 \sin\beta x \right)$$

است که در آن،

$r =$ تعداد تکرار ریشهٔ βi در معادلهٔ مشخصه

حالت ۴ : اگر $f(x)$ به شکل $f(x) = (K_m x^m + \cdots + K_1 x + K_0) e^{\alpha x}$ باشد آنگاه

نمایی × چندجمله‌ای

$$y_p(x) = x^r \left(A_m x^m + \cdots + A_1 x + A_0 \right) e^{\alpha x}$$

که در آن،

$r =$ تعداد تکرار ریشهٔ α در معادلهٔ مشخصه

حالت ۵: اگر $f(x)$ به شکل

$$f(x)=(k_m x^m+\cdots+k_1x+k_0)\cos\beta x+(l_n x^n+\cdots+l_1x+l_0)\sin\beta x$$

باشد (مثلثاتی × چندجمله‌ای)

آنگاه

$$y_p(x)=x^r\{(A_s x^s+\cdots+A_1x+A_0)\cos\beta x+(B_s x^s+\cdots+B_1x+B_0)\sin\beta x\}$$

که در آن، $s=\max\{m,n\}$ و $r=$ تعداد تکرار ریشه βi در معادله مشخصه

حالت ۶: اگر $f(x)$ به شکل $f(x)=e^{\alpha x}(k_1\cos\beta x+k_2\sin\beta x)$ باشد آنگاه (مثلثاتی × نمایی)

$$y_p(x)=x^r e^{\alpha x}(A_1\cos\beta x+A_2\sin\beta x)$$

که در آن،

$r=$ تعداد تکرار ریشه $\alpha+\beta i$ در معادله مشخصه

حالت ۷: اگر $f(x)$ به صورت مجموع چند تابع از نوع حالت‌های ۱ تا ۶ باشد، در این حالت، ابتدا جواب خصوصی مربوط به هر حالت را می‌یابیم سپس طبق اصل برهم‌نهی جواب‌ها، (تمرین ۷ ص ۱۶ جزوه) مجموع جواب‌های خصوصی به دست آمده می‌شود جواب خصوصی نهایی.

مثال: جواب عمومی هر یک از معادلات زیر را به دست آورید:

(۱) $y''-4y=3x+1$ (جمله ثابت) $\longrightarrow f(x)=3x+1 \longrightarrow$ یک چندجمله‌ای درجه ۱ $\longrightarrow$ طبق حالت ۱: $y_p(x)=x^r(A_1x+A_0)$

حل) که در آن: تعداد تکرار ریشه صفر در معادله مشخصه $=r$ ← پس ابتدا معادله مشخصه مسئله را تشکیل و ریشه‌هایش را می‌یابیم:

$$\lambda^2-4=0 \Rightarrow \lambda^2=4 \longrightarrow \lambda=\pm 2 \longrightarrow r=0$$

$y_1=e^{2x}$, $y_2=e^{-2x}$

$$\Longrightarrow y_p(x)=x^0(A_1x+A_0)=A_1x+A_0 \quad (1)$$

اکنون برای یافتن ضرایب A_1 و A_0، y_p را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$y_p'=A_1 \to y_p''=0 \longrightarrow$ در معادله جایگذاری: $0-4(A_1x+A_0)=3x+1$

$$\Longrightarrow (-4A_1)x-4A_0=3x+1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}-4A_1=3 \longrightarrow A_1=-\frac{3}{4}\\ -4A_0=1 \longrightarrow A_0=-\frac{1}{4}\end{cases} \longrightarrow$$ جواب خصوصی معادله $=y_p(x)\overset{(1)}{=}-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$

بنابراین، طبق تمرین ۲ ص ۲۱ جزوه:

جواب عمومی معادله $=y(x)=y_g(x)+y_p(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$

جواب عمومی همگن: $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$

$-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$

ص ۲۶ / تمرین ② $y''-3y'+2y = 2x^2+1 \to f(x) \to$ چندجمله‌ای درجه ۲ $\to$ حالت ۱ $\to$ حالت ۱

$y_p(x) = x^2(A_2x^2+A_1x+A_0)$

تعداد تکرار ریشه صفر در معادله مشخصه $= 2$: که $\leftarrow$ ادامه کار

③ $y''-y' = 2x+3 \to f(x) \to$ چندجمله‌ای درجه ۱ $\to$ حالت ۱ : $f(x) = x^2(A_1x+A_0)$

حل) معادله مشخصه : $\lambda^2-\lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda(\lambda-1) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \dashrightarrow y_1 = e^{0x} = 1 \\ \lambda = 1 \dashrightarrow y_2 = e^{x} \end{cases}$

که در آن : تعداد تکرار ریشه صفر در معادله مشخصه $= 1$

$\Rightarrow y_p(x) = x(A_1x+A_0) = A_1x^2+A_0x$ ①

در معادله جایگذاری :

$y_p' = 2A_1x+A_0$

$y_p'' = 2A_1$

در معادله قرار :

$(2A_1) - (2A_1x+A_0) = 2x+3$

$\Rightarrow (-2A_1)x + (2A_1-A_0) = 2x+3$

$\Rightarrow \begin{cases} -2A_1 = 2 \longrightarrow A_1 = -1 \\ 2A_1 - A_0 = 3 \end{cases} \longrightarrow A_0 = -5 \Longrightarrow y_p(x) = -x^2 - 5x$ از ①

نتیجه :

جواب عمومی معادله : $y(x) = y_g(x) + y_p(x) = c_1 + c_2e^{x} - x^2 - 5x$ ✓

جواب عمومی همگن $= c_1y_1 + c_2y_2 = c_1 + c_2e^{x}$

تمرین ④ $y''-4y' = -4$ تمرین ⑤ $y''-y' = 2x-1$

⑥ $4y''+4y'+y = e^{-\frac{1}{2}x} \to \alpha = -\frac{1}{2}$, $f(x) =$ نمایی با $\alpha = -\frac{1}{2}$ $\to$ حالت ۲ $\to y_p(x) = Ax^2e^{-\frac{1}{2}x}$

حل) $4\lambda^2+4\lambda+1 = 0$

$\Rightarrow (2\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$y_1 = e^{-\frac{1}{2}x}$, $y_2 = xe^{-\frac{1}{2}x}$

که : تعداد تکرار ریشه $\alpha = -\frac{1}{2}$ در معادله مشخصه $= 2$

پس :

$y_p(x) = Ax^2e^{-\frac{1}{2}x} \longrightarrow$ برای یافتن A، y_p را در معادله جایگذاری می‌کنیم :

$y_p' = 2Axe^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}Ax^2e^{-\frac{1}{2}x} \longrightarrow y_p'' = 2Ae^{-\frac{1}{2}x} - Axe^{-\frac{1}{2}x} - Axe^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}Ax^2e^{-\frac{1}{2}x}$

$$\Rightarrow y_p'' = 2Ae^{-\frac{1}{2}x} - 2Axe^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}Ax^2e^{-\frac{1}{2}x}$$

y و y' و y'' را در معادله قرار :

$$4\left(2Ae^{-\frac{1}{2}x} - 2Axe^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}Ax^2e^{-\frac{1}{2}x}\right) + 4\left(2Axe^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}Ax^2e^{-\frac{1}{2}x}\right) + Ax^2e^{-\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\Rightarrow 8Ae^{-\frac{1}{2}x} - \cancel{8Axe^{-\frac{1}{2}x}} + \cancel{Ax^2e^{-\frac{1}{2}x}} + \cancel{8Axe^{-\frac{1}{2}x}} - \cancel{2Ax^2e^{-\frac{1}{2}x}} + \cancel{Ax^2e^{-\frac{1}{2}x}} = e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\Rightarrow \boxed{8A}e^{-\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow 8A = 1 \to A = \frac{1}{8} \Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{8}x^2e^{-\frac{1}{2}x}$$

بنابراین : جواب عمومی معادله : $y(x) = y_g(x) + y_p(x) = c_1e^{-\frac{1}{2}x} + c_2xe^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{8}x^2e^{-\frac{1}{2}x}$

$c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{-\frac{1}{2}x} + c_2xe^{-\frac{1}{2}x}$

تمرین ⑦ $y'' - 4y' + 3y = e^{3x}$ تمرین ⑧ $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$

مثال : برای هر یک از معادلات زیر یک جواب خصوصی بدون محاسبه ضرایب به دست آورید :

① $y'' + 4y' + 3y = 2\cos 2x \xrightarrow{f(x)}$ مشتمل $\to$ حالت ۳ $\to y_p(x) = x^r(A_1\cos 2x + A_2\sin 2x)$

که در آن $r =$ تعداد تکرار ریشه $2i$ یعنی βi در معادله مشخصه $= 0$

حل) معادله مشخصه : $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

$\Rightarrow (\lambda+1)(\lambda+3) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$

$\to y_p(x) = A_1\cos 2x + A_2\sin 2x$

تذکر : در مثال فوق با جایگذاری $y_p(x)$ در معادله به دست می‌آوریم $A = \frac{16}{65}$ و $B = -\frac{2}{65}$ و بنابراین

$y_p(x) = \frac{16}{65}\cos 2x - \frac{2}{65}\sin 2x$

جواب عمومی : $y(x) = y_g(x) + y_p(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x} + \frac{16}{65}\cos 2x - \frac{2}{65}\sin 2x$

تمرین ② $y'' + 9y = \sin 3x - \cos 3x$

③ $y'' - y' = (1-2x)e^{x}$ $\to \alpha = 1$

یک چندجمله‌ای از درجه 1 ، $f(x)$ $\to$ حالت ۴ $\to y_p(x) = x^r(A_1x + A_0)e^{x}$

که در آن $r =$ تعداد تکرار ریشه $\alpha = 1$ در معادله مشخصه $= 1$

حل) معادله مشخصه : $\lambda^2 - \lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$

پس : $y_p(x) = x(A_1x + A_0)e^{x}$

(۴) $y''-y=x\sin x \longrightarrow f(x) \longrightarrow$ حالت ۵ $\longrightarrow y_p(x)=x^r\{(A_1x+A_0)\cos x+(B_1x+B_0)\sin x\}$

یک جمله‌ای درجه ۱

حل) معادله مشخصه: $\lambda^2-1=0$

$\Rightarrow \lambda^2=1$

$\Rightarrow \lambda=\pm 1$

که در آن: $r=$ تعداد تکرار ریشه i یعنی βi در معادله مشخصه $=0$

پس: $y_p(x)=(A_1x+A_0)\cos x+(B_1x+B_0)\sin x$ ✓

(۵) $y''-5y'+6y=e^{x}\sin x$, $\alpha=1$, $\beta=1$ $\longrightarrow f(x) \longrightarrow$ حالت ۶ $\longrightarrow y_p(x)=x^r e^x\{A_1\cos x+A_2\sin x\}$

حل) معادله مشخصه: $\lambda^2-5\lambda+6=0$

$\Rightarrow (\lambda-2)(\lambda-3)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=3$

که در آن: $r=$ تعداد تکرار ریشه $1+i$ یعنی $\alpha+\beta i$ در معادله مشخصه $\longrightarrow r=0$

پس: $y_p(x)=e^x\{A_1\cos x+A_2\sin x\}$ ✓

(۶) $y''+y'-6y=7e^{2x}+3x^2$

حل) معادله مشخصه: $\lambda^2+\lambda-6=0$

$\Rightarrow (\lambda+3)(\lambda-2)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=-3,\ \lambda_2=2$

$f_1(x)$ نمایی $\to$ حالت ۲ $\to y_{p_1}(x)=Ax^{r_1}e^{2x}$

$r_1=$ تعداد تکرار ریشه $\alpha=2$ در مشخصه $\to r_1=1$

$\to y_{p_1}(x)=Axe^{2x}$

$f_2(x)$ چندجمله‌ای درجه ۲ $\to$ حالت ۱ $\to y_{p_2}(x)=x^{r_2}(B_2x^2+B_1x+B_0)$

$r_2=$ تعداد تکرار ریشه صفر در مشخصه $\to r_1=0$

$\to y_{p_2}(x)=B_2x^2+B_1x+B_0$

در نتیجه، جواب خصوصی نوعی برای معادله غیر همگن بالا (قضیه ۷ ص ۱۶) برابر است با مجموع دو جواب خصوصی y_{p_1} و y_{p_2} یعنی:

$$y_p(x)=y_{p_1}(x)+y_{p_2}(x)=Axe^{2x}+B_2x^2+B_1x+B_0$$ ✓

* تمرین: $y''+4y'+5y=e^{-2x}\cos x$

⑦ $y^{(4)}+4y''=3x^2+xe^x+\sin^2 x$

این را نداشتیم ولی $\sin^2 x \to \frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$

حل) معادله مشخصه: $\lambda^4+4\lambda^2=0$

$\Rightarrow \lambda^2(\lambda^2+4)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda^2=0 \longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=0 \\ \lambda^2+4=0 \longrightarrow \lambda^2=-4 \end{cases}$

$\lambda=\pm 2i$

سمت راست: $f(x)=3x^2+xe^x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$

$\Rightarrow f(x)=\underbrace{\left(3x^2+\frac{1}{2}\right)}_{\text{حالت ۱}}+\underbrace{xe^x}_{\text{حالت ۴}}-\underbrace{\frac{1}{2}\cos 2x}_{\text{حالت ۳}}$

حالت ۱: $y_{p_1}(x)=x^{r_1}(A_2x^2+A_1x+A_0)$ که: $r_1=$ تعداد تکرار ریشه صفر $=2$

حالت ۴: $y_{p_2}(x)=x^{r_2}(B_1x+B_0)e^x$ ، $r_2=$ تعداد تکرار ریشه $\alpha=1$ $=0$

حالت ۳: $y_{p_3}(x)=x^{r_3}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$ ، $r_3=$ تعداد تکرار ریشه $2i$ $=1$

بنابراین:

جواب خصوصی معادله $=y_p(x)=y_{p_1}(x)+y_{p_2}(x)+y_{p_3}(x)$ (طبق اصل برهم‌نهی جوابها)

$\Rightarrow y_p(x)=x^2(A_2x^2+A_1x+A_0)+(B_1x+B_0)+x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$ ✓

⑧ $D^2(D^2-4)(D^2+2D+5)^2y=x^2+x\sin 2x+e^{-x}\cos^2 x+5$ ، $D^n=\frac{d}{dx^n}$

(یعنی در صورت سوال، عملگر D ، D^2 ، ... به این صورت هستند یعنی $D'y=\frac{dy}{dx}=y'$ ، $D^2y=\frac{d^2y}{dx^2}=y''$ ، ...)

حل) اولاً: معادله مشخصه: $\lambda^2(\lambda^2-4)(\lambda^2+2\lambda+5)^2=0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda^2=0 \longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=0 \\ \lambda^2-4=0 \longrightarrow \lambda^2=4 \longrightarrow \lambda_3=-2\ ,\ \lambda_4=2 \\ (\lambda^2+2\lambda+5)^2=0 \end{cases}$

با ۲ بار تکرار

$\lambda=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-2\pm 4i}{2}=-1\pm 2i$ با ۲ بار تکرار

ثانیاً: $f(x)=x^2+x\sin 2x+e^{-x}\cos^2 x+5$ ، $\cos^2 x \to \frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$

$=x^2+x\sin 2x+e^{-x}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+5=x^2+x\sin 2x+\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x+5$

$\Rightarrow f(x)=\underbrace{(x^2+5)}_{f_1(x)}+\underbrace{x\sin 2x}_{f_2(x)}+\underbrace{\frac{1}{2}e^{-x}}_{f_3(x)}+\underbrace{\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x}_{f_4(x)}$

از حالت ۱ ، از حالت ۵ ، از حالت ۳ ، از حالت ۶

ادامه

$f_1(x)=x^2+5 \to y_{p_1}(x)=x^{r_1}(A_2x^2+A_1x+A_0)=x^2(A_2x^2+A_1x+A_0)$ — تعداد تکرار ریشه صفر در مشخصه $=2$

$f_2(x)=x\sin 2x \to y_{p_2}(x)=x^{r_2}\{(A_1x+A_0)\cos 2x+(B_1x+B_0)\sin 2x\}=(A_1x+A_0)\cos 2x+(B_1x+B_0)\sin 2x$ — $2i$ تعداد تکرار ریشه $=0$

یک چند جمله‌ای درجه ۱

$f_3(x)=\frac{1}{2}e^{-x} \to y_{p_3}(x)=Ax^{r_3}e^{-x}=Ae^{-x}$ — $\alpha=-1$ تعداد تکرار ریشه $=0$

$f_4(x)=\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x \to y_{p_4}(x)=x^{r_4}e^{-x}(A_1\cos 2x+A_2\sin 2x)=x^2e^{-x}(A_1\cos 2x+A_2\sin 2x)$

تعداد تکرار ریشه $\alpha+\beta i$ یعنی $-1+2i$ $=2$

و در نتیجه: جواب خصوصی معادله $=y_p(x)=y_{p_1}(x)+y_{p_2}(x)+y_{p_3}(x)+y_{p_4}(x)=\,??$ ✓✓

(۹) $D^2(D^2+1)^2(D^3-9D)y=x^2+2\sinh(x)+x^3e^{3x}+1+x\cos x\cos^2 x$

اصل اولاً: معادله مشخصه: $\lambda^2(\lambda^2+1)^2\underbrace{(\lambda^3-9\lambda)}_{\lambda(\lambda^2-9)}=0 \to \lambda^3(\lambda^2+1)^2(\lambda^2-9)=0$

- $\lambda^3=0 \to \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$
- $(\lambda^2+1)^2=0 \to \lambda=\pm i$ با تکرار ۲
- $\lambda^2-9=0 \to \lambda=\pm 3$

ثانیاً: $f(x)=x^2+2\sinh(x)+x^3e^{3x}+1+x\cos x\cos^2 x$

$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac12+\frac12\cos 2x$, $\cos x\cos^2x=\frac12\cos x+\frac12\cos x\cos 2x$

$\cos x\cos 2x=\frac12\{\cos(x-2x)+\cos(x+2x)\}=\frac12\cos x+\frac12\cos 3x$

$\Rightarrow f(x)=(x^2+1)+e^x-e^{-x}+x^3e^{3x}+\frac12 x\cos x+\frac14 x\cos x+\frac14 x\cos 3x$

$\Rightarrow f(x)=\underbrace{(x^2+1)}_{f_1(x)}+\underbrace{e^x}_{f_2(x)}-\underbrace{e^{-x}}_{f_3(x)}+\underbrace{x^3e^{3x}}_{f_4(x)}+\underbrace{\frac34 x\cos x}_{f_5(x)}+\underbrace{\frac14 x\cos 3x}_{f_6(x)}$

f_1: حالت ۱، f_2: حالت ۲، f_3: حالت ۲، f_4: حالت ۴، f_5: حالت ۵، f_6: حالت ۵

نتیجتاً:

$\Rightarrow$ ادامه حل (راهنمایی: $r_1=3,\ r_2=0,\ r_3=0,\ r_4=1,\ r_5=2,\ r_6=0$)

تمرین:

(۱۰) $D^2(D^2+4)(D-1)^3y=4x^2+xe^x+\cos^2x$

(۱۱) $D^3(D^2+16)(D-3)^2y=5x^2-2xe^{3x}+\sin^2(2x)+\cosh(3x)$

(۱۲) $D^3(D^2+D+1)(D^2+1)(D^2-3D+2)y=x^3+e^{-\frac12 x}\sin(\frac{\sqrt3}{2}x)+xe^{2x}+\cos^2x$

* روش تغییر پارامترها :

این روش نیز برای یافتن یک جواب خصوصی برای معادله خطی غیرهمگن

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

به کار می‌رود. در روش ضرایب نامعین باید a_0 ، a_1 ، ... ، و a_n ثابت باشند و $f(x)$ باید به شکل یکی از ۷ حالت بیان شده باشد. ولی در روش تغییر پارامترها، این دو محدودیت وجود ندارد. در عوض باید مجموعه‌ای از جواب‌های مستقل خطی معادله همگن یعنی y_1 ، y_2 ، ... ، و y_n مستقل خطی را در اختیار داشته باشیم.

ابتدا این روش را برای معادلات مرتبه دوم تشریح می‌کنیم.

معادله مرتبه دوم

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (1)$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب مستقل خطی معادله همگن نظیر یعنی

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (2)$$

باشند. می‌دانیم جواب عمومی (۲) به صورت $y_g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ است. برای یافتن یک جواب خصوصی برای (۱) یعنی $y_p(x)$ ، فرض می‌کنیم

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) \qquad (3)$$

باشد که در آن $v_1(x)$ و $v_2(x)$ توابعی بر حسب x هستند. برای یافتن $v_1(x)$ و $v_2(x)$ ، با جایگذاری (۳) در (۲) داریم

$$(v_1y_1 + v_2y_2)'' + p(x)(v_1y_1 + v_2y_2)' + q(x)(v_1y_1 + v_2y_2) = f(x)$$

$$\Rightarrow v_1''y_1 + 2v_1'y_1' + v_1y_1'' + v_2''y_2 + 2v_2'y_2' + v_2y_2'' + p(x)(v_1'y_1 + v_1y_1' + v_2'y_2 + v_2y_2') + v_1y_1q(x) + v_2y_2q(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow v_1\underbrace{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)}_{=0 \text{ چون } y_1 \text{ جوابی از (۲) است}} + v_2\underbrace{(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)}_{=0 \text{ چون } y_2 \text{ جوابی از (۲) است}} + v_1''y_1 + 2v_1'y_1' + v_2''y_2 + 2v_2'y_2' + p(x)(v_1'y_1 + v_2'y_2) = f(x)$$

$$\Rightarrow v_1''y_1 + \underbrace{2v_1'y_1'}_{v_1'y_1' + v_1'y_1'} + v_2''y_2 + \underbrace{2v_2'y_2'}_{v_2'y_2' + v_2'y_2'} + p(x)(v_1'y_1 + v_2'y_2) = f(x) \qquad (4)$$

v_1 و v_2 طوری انتخاب می‌شوند که

$$v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0 \qquad (5)$$

با مشتق‌گیری از طرفین (۵) به دست می‌آوریم

$$\Rightarrow v_1''y_1 + v_1'y_1' + v_2''y_2 + v_2'y_2' = 0 \qquad (6)$$

با جایگذاری (۵) و (۶) در (۴) داریم

$$v_1'y_1' + v_2'y_2' = f(x) \qquad (7)$$

اکنون با تشکیل دستگاه شامل معادلات (۵) و (۷) داریم

$$\begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

حل دستگاه با روش کرامر بر حسب مجهولات v_1' و v_2'

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1,y_2)} \xrightarrow[\text{طرفین}]{\text{انتگرال‌گیری از}} \boxed{v_1(x) = \int \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx}$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1,y_2)} \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \boxed{v_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx}$$

مثال: جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید:

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}, \qquad x > 0$$

حل) ابتدا یافتن جوابهای مستقل خطی y_1 و y_2 از معادله همگن. چون معادله خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت است با تشکیل معادله مشخصه و محاسبه ریشه‌های آن، y_1 و y_2 را می‌یابیم:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \longrightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \longrightarrow y_1 = e^x ,\ y_2 = xe^x$$

اکنون برای یافتن $y_p(x)$، جواب خصوصی معادله، با روش تغییر پارامترها داریم (توجه: درست راست، $f(x) = \frac{e^x}{x}$ است که به شکل هیچ یک از حالتهای ۷ حالت در روش ضرایب نامعین نیست لذا با روش ضرایب نامعین حل نمی‌شود!)

$$y_p(x) = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

که برای یافتن $v_1(x)$ و $v_2(x)$:

$$v_1(x) = \int \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx = \int \frac{-xe^x\left(\frac{e^x}{x}\right)}{e^{2x}}\,dx = -\int dx = -x$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x} = e^{2x}$$

$$v_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx = \int \frac{e^x\left(\frac{e^x}{x}\right)}{e^{2x}}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\Rightarrow y_p(x) = v_1 y_1 + v_2 y_2 = (-x)e^x + (\ln x)\,xe^x$$

و در نتیجه:

جواب عمومی: $y(x) = y_g(x) + y_p(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p(x)$

$$= c_1 e^x + c_2 x e^x + (-x)e^x + (\ln x)\,xe^x$$

تمرین: جواب عمومی معادله $y''-3y'+2y=\dfrac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$ را بدست آورید.

مثال: اگر $y_1=x$ جوابی از معادله همگن $(x^2+1)y''-2xy'+2y=0$ باشد جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید.

$$(x^2+1)y''-2xy'+2y=6(x^2+1)^2$$

حل) ابتدا: فرم نرمال برحسب y'' تقسیم:

$$y''\underbrace{-\frac{2x}{x^2+1}}_{p(x)}y'+\frac{2}{x^2+1}y=\underbrace{6(x^2+1)}_{f(x)}$$

ثانیاً: $y_2(x)$ را می‌یابیم (با فرمول آبل):

$$y_2(x)=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx$$

$$=x\int\frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{-2x}{x^2+1}dx}dx=x\int\frac{x^2+1}{x^2}dx=x\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$e^{\int\frac{2x}{x^2+1}dx}=e^{\ln(x^2+1)}=x^2+1$$

$$=x\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2-1$$

ثالثاً: یافتن جواب خصوصی $y_p(x)$ با روش تغییر پارامترها:

$$y_p(x)=v_1y_1+v_2y_2$$

که:

$$v_1=\int\frac{-y_2f(x)}{W(y_1,y_2)}dx=\int-\frac{(x^2-1)\,6(x^2+1)}{x^2+1}dx=-6\int(x^2-1)dx=-6\left(\frac{x^3}{3}-x\right)$$

$$=-2x^3+6x$$

$$\begin{vmatrix}y_1&y_2\\y_1'&y_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&x^2-1\\1&2x\end{vmatrix}=2x^2-x^2+1=x^2+1$$

$$v_2=\int\frac{y_1f(x)}{W(y_1,y_2)}dx=\int\frac{x\left(6(x^2+1)\right)}{x^2+1}dx=6\int x\,dx=6\frac{x^2}{2}=3x^2$$

$$\Rightarrow y_p(x)=v_1y_1+v_2y_2=(-2x^3+6x)x+(3x^2)(x^2-1)$$

و بالاخره: جواب عمومی $\Leftarrow$: $y(x)=y_g(x)+y_p(x)=c_1y_1+c_2y_2+y_p(x)$

$$=c_1x+c_2(x^2-1)+(-2x^3+6x)x+3x^2(x^2-1)$$

تذکر: در مثال بالا، اگرچه سمت راست $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجه دوم و به شکل حالت ۱ در روش ضرایب نامعین است ولی سمت چپ معادله، با ضرایب ثابت نیست و لذا نمی‌توان از روش ضرایب نامعین استفاده کرد!

تمرین: جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید:

(۱) $y''+y=\sec x$

(۲) $xy''-2(x+1)y'+(x+2)y=x^3e^{2x}$ ، $y_1=e^x$

(۳) $y''-y'+e^{2x}y=e^{2x}$ ، $y_1=\sin(e^x)$

* نکته: روش تغییر پارامترها را می‌توان برای معادلات خطی غیرهمگن مرتبه‌های بالاتر به صورت زیر تعمیم داد:

اگر y_1 و y_2 و ... و y_n جواب‌های مستقل خطی معادله خطی مرتبه n غیرهمگن

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x)$$

باشند آنگاه یک جواب خصوصی برای این معادله به صورت

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) + \cdots + v_n(x)y_n(x)$$

است که در آن

$$v_1(x) = \int \frac{W_1}{W}\,dx \;,\; v_2(x) = \int \frac{W_2}{W}\,dx \;,\; \ldots \;,\; v_n(x) = \int \frac{W_n}{W}\,dx$$

که در آن، W رونسکین y_1 و y_2 و ... و y_n است و W_k نیز رونسکین حاصل از جانشینی بردار ستونی
$k=1,2,3,\ldots,n$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$ به جای ستون k-ام در W است.

مثال ۵: جواب خصوصی معادله $y''' + y' = \underbrace{\csc x}_{f(x)}$ را به دست آورید.

حل) اولاً: سمت چپ خطی با ضرایب ثابت ← معادله مشخصه: $\lambda^3 + \lambda = 0$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda^2+1) = 0 \;\Big\langle\; \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \longrightarrow y_1 = e^{0x} = 1 \longrightarrow y_1 = 1 \\ \lambda^2 + 1 = 0 \longrightarrow \lambda^2 = -1 \longrightarrow \lambda = \pm i \longrightarrow y_2 = \cos x ,\; y_3 = \sin x \end{array}$$

ثانیاً: یک جواب خصوصی معادله به صورت

$$y_p(x) = v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3$$

است که:

$$v_1 = \int \frac{W_1}{W}dx \;,\; v_2 = \int \frac{W_2}{W}dx \;,\; v_3 = \int \frac{W_3}{W}dx$$

و

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{اول}]{\text{بر حسب ستون}} 1 \times \begin{vmatrix} -\sin x & \cos x \\ -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} + 0 + 0 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ f(x) & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \csc x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{ستون اول}]{\text{بر حسب}} 0 - 0 + \csc x \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \csc x(\cos^2 x + \sin^2 x) = \csc x$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & f(x) & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \csc x & -\sin x \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{ستون اول}]{\text{بر حسب}} 1 \times \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \csc x & -\sin x \end{vmatrix} + 0 + 0 = -\csc x \cos x = -\frac{1}{\sin x}\cos x = -\cot x$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \csc x \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{ستون اول}]{\text{بر حسب}} 1 \times \begin{vmatrix} -\sin x & 0 \\ -\cos x & \csc x \end{vmatrix} - 0 + 0 = -\sin x \csc x = -\sin x\left(\frac{1}{\sin x}\right) = -1$$

بنابراین ۵

$$\Rightarrow v_1 = \int \frac{W_1}{W}dx = \int \frac{\csc x}{1}dx = \int \csc x\, dx = -\ln|\csc x + \cot x| \;,\; v_2 = \int \frac{W_2}{W}dx = \int \frac{-\cot x}{1}dx = -\int \cot x\, dx = -\ln|\sin x|$$

$$v_3 = \int \frac{W_3}{W}dx = \int \frac{-1}{1}dx = -\int dx = -x \Rightarrow y_p(x) = v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 = ?? \checkmark\checkmark$$

نتیجه ۵:

$$\Rightarrow \left(\text{جواب عمومی } y(x) = y_g + y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + y_p(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x - \ln|\csc x + \cot x| + (-\ln|\sin x|)\cos x - x \sin x\right)$$

* معادلات اویلر (کوشی-اویلر):

شکل ساده‌ی این معادله به صورت

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = f(x) \qquad (1)$$

و شکل کلی آن به صورت

$$a_n (ax+b)^n y^{(n)} + a_{n-1}(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1(ax+b)y' + a_0 y = f(x) \qquad (2)$$

است که در آن $a_0 ، a_1 ، a_2 ، \ldots ، a_n ، a$ و b اعداد ثابتی هستند.

* در حالت ساده‌ی (1) با فرض $x>0$ از تغییر متغیر $x=e^t$ استفاده می‌کنیم.

* در حالت کلی (2) نیز با فرض $ax+b>0$ از تغییر متغیر $ax+b=e^t$ استفاده می‌کنیم.

*(الف) اکنون برای تشریح حل معادله کوشی-اویلر، حالت ساده (1) را در نظر بگیرید، با تغییر متغیر $x=e^t$ داریم:

$$x=e^t \longrightarrow t=\ln x \longrightarrow \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{1}{x}\right) \Longrightarrow y'=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \Longrightarrow xy'=\frac{dy}{dt}\xrightarrow[\text{فرض کنیم}]{\text{برای ساده‌نویسی}}\bar{y}'(t) \qquad (1)$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dy}{dt}+\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\times\frac{dt}{dx}\,\frac{1}{x}$$

$$\Longrightarrow y''=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} \Longrightarrow y''=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\Longrightarrow x^2y''=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}=\bar{y}''(t)-\bar{y}'(t) \qquad (2)$$

به طور مشابه، با ادامه این روند داریم:

$$x^3y'''=\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}=\bar{y}'''(t)-3\bar{y}''(t)+2\bar{y}'(t) \qquad (3)$$

و به همین ترتیب الی آخر. با جایگذاری (1)، (2)، (3)، ... در معادله (1)، به یک معادله خطی با ضرایب ثابت با متغیر مستقل t و تابع مجهول $y(t)$ می‌رسیم که با حل آن آشنا هستیم.

*نتیجه: برای معادله کوشی-اویلر مرتبه دوم ساده‌ی $\underset{(*)}{x^2y''+axy'+by=f(x)}$ ، با تغییر متغیر $x=e^t$ و با جایگذاری روابط (1) و (2) در معادله (*) به معادله زیر می‌رسیم

$$\bar{y}''(t)+(a-1)\bar{y}'(t)+b\bar{y}(t)=f(e^t)$$

که یک معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت است و با حل آن آشناییم.

توضیح: با جایگذاری (1) و (2) در (*) و نیز $x=e^t$: $\left(\bar{y}''(t)-\bar{y}'(t)\right)+a\left(\bar{y}'(t)\right)+b\bar{y}(t)=f(e^t)$

$$\Longrightarrow \bar{y}''(t)+(a-1)\bar{y}'(t)+b\bar{y}(t)=f(e^t)$$

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید:

① $x^2y''-2xy'-4y=0 \longrightarrow (1)$ ، $a=-2$ ، $b=-4$

حل) یک معادله کوشی-اویلر همگن مرتبه ۲ : با تغییر متغیر $x=e^t$ به معادله زیر می‌رسیم

$$\bar{y}''(t)+(a-1)\bar{y}'(t)+b\bar{y}(t)=0 \Longrightarrow \bar{y}''(t)+(-2-1)\bar{y}'(t)-4\bar{y}(t)=0$$

$$\Longrightarrow \bar{y}''(t)-3\bar{y}'(t)-4\bar{y}(t)=0 \longrightarrow (2)$$ همگن با ضرایب ثابت

$\Longrightarrow$ معادله مشخصه: $\lambda^2-3\lambda-4=0 \longrightarrow (\lambda-4)(\lambda+1)=0 \longrightarrow \lambda_1=4 \rightarrow \bar{y}_1(t)=e^{4t}$ ، $\lambda_2=-1 \rightarrow \bar{y}_2(t)=e^{-t}$

$\Longrightarrow$ جواب عمومی معادله (۲): $\bar{y}(t)=c_1\bar{y}_1(t)+c_2\bar{y}_2(t)=c_1e^{4t}+c_2e^{-t}$ ✓

$$=c_1x^4+c_2x^{-1}=y(x)$$ همان جواب عمومی برای معادله (۱) ✓

$(e^t)^4=x^4$ ، $(e^t)^{-1}=x^{-1}$

② $x^2y''+3xy'+3y=0$ تمرین

③ $x^3y'''+xy'-y=0 \longrightarrow (1)$

حل) کوشی-اویلر همگن مرتبه سوم همگن: با تغییر متغیر $x=e^t$ داریم:

$$\begin{cases} xy'=\bar{y}'(t) \\ x^2y''=\bar{y}''(t)-\bar{y}'(t) \\ x^3y'''=\bar{y}'''(t)-3\bar{y}''(t)+2\bar{y}'(t) \end{cases} \xRightarrow{\text{در معادله (۱) جایگذاری}} \left(\bar{y}'''(t)-3\bar{y}''(t)+2\bar{y}'(t)\right)+\bar{y}'(t)-\bar{y}(t)=0$$

$$\Longrightarrow \bar{y}'''(t)-3\bar{y}''(t)+3\bar{y}'(t)-\bar{y}(t)=0 \longrightarrow (2)$$ مرتبه سوم خطی همگن با ضرایب ثابت

$\Longrightarrow$ معادله مشخصه: $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0 \Longrightarrow (\lambda-1)^3=0$

$$\Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1 \Longrightarrow \bar{y}_1(t)=e^t,\ \bar{y}_2(t)=te^t,\ \bar{y}_3(t)=t^2e^t$$

$\Longrightarrow$ جواب عمومی (۲): $\bar{y}(t)=c_1\bar{y}_1+c_2\bar{y}_2+c_3\bar{y}_3=c_1e^t+c_2te^t+c_3t^2e^t$ ✓

$e^t \to x$ ، $t \to \ln x$ ، $t^2 \to (\ln x)^2$

$$\xrightarrow[x=e^t,\ t=\ln x]{\text{با تغییر}} c_1x+c_2x\ln x+c_3x(\ln x)^2=y(x)$$ همان جواب عمومی معادله (۱) ✓

④ تمرین
$$\begin{cases} x^3y'''+5x^2y''+7xy'+8y=0 \\ x^2y'''-y'+\frac{1}{x}y=0 \end{cases}$$

راهنمایی: طرفین در x ضرب

(۵) $x^2y''+3xy'+2y=x^2+x \rightarrow f(x)\ ,\ x>0 \qquad (1)$

a ، b

حل) کوشی-اویلر مرتبه دوم غیرهمگن ← با تغییر متغیر $x=e^t$ داریم:

$$\bar y''(t)+(a-1)\bar y'(t)+b\bar y(t)=(e^t)^2+e^t \rightarrow \text{همان } f(e^t)$$

$$\Rightarrow \bar y''(t)+(3-1)\bar y'(t)+2\bar y(t)=e^{2t}+e^t$$

$$\Rightarrow \bar y''(t)+2\bar y'(t)+2\bar y(t)=e^{2t}+e^t \quad (2)$$

→ مرتبه دوم غیرهمگن با ضرایب ثابت

معادله مشخصه: $\lambda^2+2\lambda+2=0 \rightarrow \lambda=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i \rightarrow \bar y_1(t)=e^{-t}\cos t,\ \bar y_2(t)=e^{-t}\sin t$

جواب عمومی (۲): $\bar y(t)=\bar y_g(t)+\bar y_p(t)$

$\bar y_g(t) \rightarrow c_1\bar y_1(t)+c_2\bar y_2(t)$

$\bar y_p(t) \rightarrow$ روش اول: چون سمت راست (۲): $e^{2t}+e^t \overset{\text{فرض}}{=} \bar f(t)$

سمت چپ (۲) نیز با ضرایب ثابت

پس برای یافتن جواب خصوصی (۲) از روش ضرایب نامعین (حالت ۲) استفاده می‌کنیم. یعنی:

(تذکر: روش دوم برای یافتن جواب خصوصی (۲)، استفاده از روش تغییر پارامترها).

$$\bar f(t)=e^{2t}+e^t$$

حالت ۲ ، حالت ۲

$\bar y_{p_1}(t)=At^{r_1}e^{2t}=Ae^{2t}$ ← چون: تعداد تکرار ریشه $\alpha=2$ در مشخصه $=0=r_1$

$\bar y_{p_2}(t)=Bt^{r_2}e^{t}=Be^{t}$ ← چون: تعداد تکرار ریشه $\alpha=1$ در مشخصه $=0=r_2$

$\Rightarrow$ جواب خصوصی (۲): $\bar y_p(t)=\bar y_{p_1}(t)+\bar y_{p_2}(t)=Ae^{2t}+Be^t$ → برای یافتن ضرایب A و B، $\bar y_p(t)$ را در (۲) قرار می‌دهیم. برای این کار:

$$\bar y_p'(t)=2Ae^{2t}+Be^t \rightarrow \bar y_p''(t)=4Ae^{2t}+Be^t$$

$\xrightarrow{\text{در (۲) قرار}} (4Ae^{2t}+Be^t)+2(2Ae^{2t}+Be^t)+2(Ae^{2t}+Be^t)=e^{2t}+e^t$

$$\Rightarrow 10Ae^{2t}+5Be^t=e^{2t}+e^t$$

$$\Rightarrow \begin{cases}10A=1 \rightarrow A=\frac{1}{10}\\ 5B=1 \rightarrow B=\frac{1}{5}\end{cases} \longrightarrow \bar y_p(t)=\frac{1}{10}e^{2t}+\frac{1}{5}e^t$$

$(e^t)^{-1}$ ، $\ln x$ ، $(e^t)^2=x^2$ ، x

$\Rightarrow$ جواب عمومی (۲): $\bar y(t)=\bar y_g(t)+\bar y_p(t)=c_1\bar y_1+c_2\bar y_2+\bar y_p=e^{-t}(c_1\cos t+c_2\sin t)+\frac{1}{10}e^{2t}+\frac{1}{5}e^t$

$$\underset{t=\ln x}{\overset{x=e^t}{=}} x^{-1}\left(c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)\right)+\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{5}x$$

تمرین ⑥ $y''+\frac{1}{x}y'-\frac{y}{x^2}=\frac{1}{x^2+x^4}$, $x>0$

راهنمایی : طرفین در x^2 ضرب $\Rightarrow x^2y''+xy'-y=\frac{x^2}{x^2+x^4} \to \frac{1}{1+x} \to f(x)$

که یک معادله کوشی-اویلر مرتبه دوم غیرهمگن است ← با تعویض متغیر $x=e^t$ ← ادامه ؟؟

تمرین ⑦ $x^3y'''+xy'-y=\sin(\ln x^2)$ تمرین ⑧ $x^2y''-2xy'+2y=3\ln x-\frac{1}{x^2}$

*(ب) اکنون برای تشریح حل معادله کوشی-اویلر در حالت کلی (۲) ص ۳۵ ، با تعویض متغیر $ax+b=e^t$ و مشابه آنچه برای حالت ساده در (الف) تشریح شد بدست می‌آوریم

$(ax+b)y'=a\bar{y}'(t)$, و $(ax+b)^2y''=a^2(\bar{y}''-\bar{y}')$, و ...

و به همین ترتیب الی آخر. با جایگذاری عبارات فوق در معادله کوشی-اویلر کلی (۲) ص ۳۵ به یک معادله خطی مرتبه n ام با ضرایب ثابت می‌رسیم که با حل آن $\bar{y}$ را پیدا می‌کنیم.

مثال: جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید:

① $\frac{1}{16}\big((4x+1)\big)^2y''+(4x+1)y'-4y=\frac{\ln(4x+1)}{4x+1}$ (1)

$\underbrace{4x+1}_{ax+b}$, $a=4, b=1$; $\underbrace{4x+1}_{ax+b}$

حل) کوشی-اویلر کلی ← با تعویض متغیر $4x+1=e^t$ داریم:

$(a(x+b))y'=a\bar{y}'(t) \to (4x+1)y'=4\bar{y}'(t)$

$(ax+b)^2y''=a^2(\bar{y}''(t)-\bar{y}'(t)) \to (4x+1)^2y''=4^2(\bar{y}''(t)-\bar{y}'(t))=16(\bar{y}''(t)-\bar{y}'(t))$ در معادله جایگذاری

$\Rightarrow \frac{1}{16}\big(16(\bar{y}''(t)-\bar{y}'(t))\big)+4\bar{y}'(t)-4\bar{y}(t)=\frac{\ln(e^t)}{e^t}=\frac{t}{e^t}=te^{-t}$

$\Rightarrow \bar{y}''(t)-\bar{y}'(t)+4\bar{y}'(t)-4\bar{y}(t)=te^{-t}$

$\Rightarrow \bar{y}''(t)+3\bar{y}'(t)-4\bar{y}(t)=te^{-t} \to (2)$

→ مرتبه دوم خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت

$\Rightarrow \lambda^2+3\lambda-4=0 \to (\lambda+4)(\lambda-1)=0$ ، $\lambda_1=-4 \to \bar{y}_1(t)=e^{-4t}$ ، $\lambda_2=1 \to \bar{y}_2(t)=e^t$

جواب عمومی (۲): $\bar{y}(t)=\bar{y}_g(t)+\bar{y}_p(t)$

$\bar{y}_g$: $c_1\bar{y}_1+c_2\bar{y}_2=c_1e^{-4t}+c_2e^t$

$\bar{y}_p$ روش اول: طرف سمت راست (۲) چون $=te^{-t} \overset{\text{فرض}}{=} \bar{f}(t)$ ← با در نظر گرفتن تابع نمایی حالت ۴ می‌شود

روش دوم: از روش تغییر پارامترها ← $\bar{y}_p(t)=\bar{v}_1(t)\bar{y}_1(t)+\bar{v}_2(t)\bar{y}_2(t)$

که برای یافتن $\bar{v}_1(t)$ و $\bar{v}_2(t)$ داریم:

ادامه ۳۹

$$\bar v_1(t)=\int \frac{-\bar y_2\,\bar f(t)}{W(\bar y_1,\bar y_2)}\,dt=\int -\frac{e^{t}(te^{-t})}{5e^{-3t}}\,dt=-\frac{1}{5}\int \frac{t}{e^{-3t}}\,dt=-\frac{1}{5}\int te^{3t}\,dt$$

$$\begin{vmatrix}\bar y_1 & \bar y_2\\ \bar y_1' & \bar y_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^{-4t} & e^{t}\\ -4e^{-4t} & e^{t}\end{vmatrix}=e^{-3t}+4e^{-3t}=5e^{-3t}$$

$$\overset{\text{از جزء به جزء}}{=}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}te^{3t}-\frac{1}{9}e^{3t}\right)$$

$$\bar v_2(t)=\int \frac{\bar y_1\,\bar f(t)}{W(\bar y_1,\bar y_2)}\,dt=\int \frac{e^{-4t}(te^{-t})}{5e^{-3t}}\,dt=\frac{1}{5}\int te^{-2t}\,dt$$

$$\overset{\text{از جزء به جزء}}{=}\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}\right)$$

بنابراین:

$$\bar y_p(t)=\bar v_1\bar y_1+\bar v_2\bar y_2=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}te^{3t}-\frac{1}{9}e^{3t}\right)e^{-4t}+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}\right)e^{t}$$

در نتیجه:

جواب عمومی (۲): $\bar y(t)=\bar y_g(t)+\bar y_p(t)$

$$=c_1e^{-4t}+c_2e^{t}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}te^{3t}-\frac{1}{9}e^{3t}\right)e^{-4t}+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}\right)e^{t}$$

$t\to\ln(4x+1)$, $e^{t}\to 4x+1$, $(e^{t})^{-4}=(4x+1)^{-4}$, $(e^{t})^{3}=(4x+1)^{3}$, $(e^{t})^{-2}=(4x+1)^{-2}$

$$\xrightarrow[t=\ln(4x+1)]{4x+1=e^{t}}\ c_1(4x+1)^{-4}+c_2(4x+1)-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\ln(4x+1)\times(4x+1)^{3}-\frac{1}{9}(4x+1)^{3}\right)(4x+1)^{-4}$$

$$+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\ln(4x+1)\times(4x+1)^{-2}-\frac{1}{4}(4x+1)^{-2}\right)(4x+1)$$

$= y(x) =$ همان جواب عمومی (۱)

تمرین ۲) $(2x+1)^2y''+2(2x+1)y'+16y=4\ln(2x+1)$

تمرین ۳) $(3x+2)^2y''+\underbrace{(9x+6)}_{3(3x+2)}y'-36y=3x^2+4x+1$

راهنمایی: $3x+2=e^{t}$ و $\leftarrow x=\frac{e^{t}-2}{3}$ پس داریم:

$$f(x)=3x^2+4x+1=3\left(\frac{e^{t}-2}{3}\right)^2+4\left(\frac{e^{t}-2}{3}\right)+1=\cancel{3}\left(\frac{e^{2t}-4e^{t}+4}{\cancel{9}\,3}\right)+\frac{4e^{t}-8}{3}+1\overset{\text{جمع‌وجور}}{=}\frac{e^{2t}-1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}=\bar f(t)$$

ادامه حل مثل به شکل بالا انجام شود!

* فصل ۴: تبدیلات لاپلاس

*تعریف (تبدیل لاپلاس): فرض کنید تابع $f(t)$ برای $0\le t<\infty$ تعریف شده و s یک متغیر حقیقی باشد. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که آن را با $F(s)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt.$$

دامنهٔ $F(s)$ مجموعهٔ همهٔ sهایی است که به ازای آن‌ها، انتگرال بالا موجود باشد.

مثال: تبدیل لاپلاس $f(t)\equiv 1$ را به دست آورید.

حل)

$$L\{f(t)\}=L\{1\}=\int_0^\infty e^{-st}(1)\,dt=\int_0^\infty e^{-st}\,dt$$

$$=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big]_{t=0}^{\infty}=-\frac{1}{s}(0-1)=\frac{1}{s}\Rightarrow L\{1\}=\frac{1}{s},\ s>0$$

اگر $s>0$ (توجه: اگر $s<0$ آنگاه حاصلش ∞ می‌شود و واگراست.) $e^{-\infty}$ e^{0}

مثال: تبدیل لاپلاس $f(t)=t$ را به دست آورید.

حل)

$$L\{f(t)\}=L\{t\}=\int_0^\infty e^{-st}\,t\,dt=\left(-\frac{1}{s}te^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right)\Big]_{t=0}^{\infty}$$

با جزء به جزء: $\begin{cases}u=t\\ dv=e^{-st}dt\end{cases}\rightarrow\begin{cases}du=dt\\ v=-\frac{1}{s}e^{-st}\end{cases}$

$$=\left(-\frac{1}{s}te^{-st}\right)\Big]_{t=0}^{\infty}+\left(-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right)\Big]_{t=0}^{\infty}=0+\left(-\frac{1}{s^2}\right)(0-1)=\frac{1}{s^2}$$

$$-\frac{1}{s}\left(\lim_{t\to\infty}te^{-st}-0\times e^{0}\right)$$

مشابه محاسبهٔ مثال قبلی (بالا)

ابهام $\infty\times 0$ ← $=-\frac{1}{s}\left(\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{st}}\right)$ اگر $s>0$، $\frac{\infty}{\infty}$ می‌شود (اگر $s<0$، ∞ می‌شود و واگرا)

هوپیتال ← $\frac{\infty}{\infty}$ $=-\frac{1}{s}\left(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{se^{st}}\right)=-\frac{1}{s}\times 0=0$

$$\Rightarrow L\{t\}=\frac{1}{s^2},\ s>0$$

*نتیجه: با ادامهٔ روند فوق و با استقراء می‌توان نتیجه گرفت برای هر عدد طبیعی n:

$$L\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}},\ s>0$$

مثال: تبدیل لاپلاس $f(t)=e^{at}$ را که a عددی حقیقی است، به دست آورید.

حل)

$$L\{f(t)\}=L\{e^{at}\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt=\int_0^\infty e^{-st+at}\,dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,dt$$

$$=-\frac{1}{(s-a)}e^{-(s-a)t}\Big]_{t=0}^{\infty}=-\frac{1}{(s-a)}(0-1)=\frac{1}{s-a}\Rightarrow L\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a},\ s>a$$

اگر $s-a>0$ یعنی اگر $s>a$ $e^{-\infty}$ e^{0}

مثال: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\sin at$ را که a عددی حقیقی است، به دست آورید.

حل)

$$L\{f(t)\}=L\{\sin at\}=\int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt$$

$$=\frac{e^{-st}}{(-s)^2+a^2}\Big(\underbrace{-s\sin at-a\cos at}_{\text{نسبت به } t\text{، کراندار}}\Big)\Big|_{t=0}^{\infty}=\frac{e^{-\infty}}{s^2+a^2}\big(\text{عبارتی کراندار}\big)-\frac{e^0}{s^2+a^2}\big(-s\times\sin(0)-a\cos(0)\big)$$

اینجا $\lim_{t\to\infty}e^{-st}=0$ است وقتی $s>0$ (اگر $s>0$)

یادآوری:

$$\begin{cases}\int e^{at}\sin bt\,dt=\dfrac{e^{at}}{a^2+b^2}(a\sin bt-b\cos bt)\\[2mm]\int e^{at}\cos bt\,dt=\dfrac{e^{at}}{a^2+b^2}(a\cos bt+b\sin bt)\end{cases}$$

$$=0-\frac{1}{s^2+a^2}(0-a)=\frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{L\{\sin at\}=\frac{a}{s^2+a^2}\quad,\quad s>0}$$

* نتیجه (تمرین): به طور مشابه می‌توان نشان داد

$$\boxed{L\{\cos at\}=\frac{s}{s^2+a^2}\quad,\quad s>0}$$

اکنون در ادامه، قبل از ادامه مطالب لاپلاس، به معرفی تابع گاما و بیان برخی ویژگی‌های آن می‌پردازیم که جلوتر به آن نیاز داریم.

* تعریف (تابع گاما): برای هر عدد حقیقی $x>0$، تابع گاما به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt\quad,\quad x>0$$

نتیجه ۱: برای هر $x>-1$:

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty t^{x}e^{-t}\,dt\quad,\quad x>-1$$

طبق تعریف، باید $x+1>0$ یعنی $x>-1$

نتیجه ۲:

$$\boxed{\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)}$$

زیرا:

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt=\underbrace{-t^x e^{-t}\Big|_{t=0}^{\infty}}_{=0}+\int_0^\infty x\,t^{x-1}e^{-t}\,dt=x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt=x\Gamma(x)\ \checkmark$$

جزء به جزء: $\begin{cases}u=t^x\\ dv=e^{-t}dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=x\,t^{x-1}dt\\ v=-e^{-t}\end{cases}$

نتیجه ۳: برای هر عدد طبیعی n:

$$\boxed{\Gamma(n+1)=n!}$$

زیرا: طبق نتیجه ۲ می‌توان نوشت:

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=n(n-1)(n-2)\cdots\times3\times2\times1\,\underbrace{\Gamma(1)}_{=1}=n!\ \checkmark$$

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}\,dt=-e^{-t}\Big|_0^\infty=-(0-1)=1$$

مثال: ① $\Gamma(4)=3!=6$ ② $\Gamma(10)=9!$

*نکته: برای $r>-1$:

$$L(t^r)=\frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}\quad , \quad s>0$$

زیرا:

$$L\{t^r\}=\int_0^\infty e^{-st}t^r dt=\int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^r\frac{du}{s}=\frac{1}{s^{r+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^r du=\frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}\quad , \quad s>0$$

تغییر متغیر $u=st \rightarrow \frac{du}{dt}=s \rightarrow dt=\frac{du}{s}$

وقتی $0\le t<\infty\ ,\ s>0 \rightarrow 0\le u=st<\infty$

مثال: $L\{t^{-1/2}\}=?$

حل)

$$L\{t^{-1/2}\}=\frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{s^{-1/2+1}}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{1/2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}\quad , \quad s>0$$

توجه: $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

مثال: $L\{t^{5/2}\}=?$

حل)

$$L\{t^{5/2}\}=\frac{\Gamma(\frac{5}{2}+1)}{s^{5/2+1}}=\frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{s^{7/2}}$$

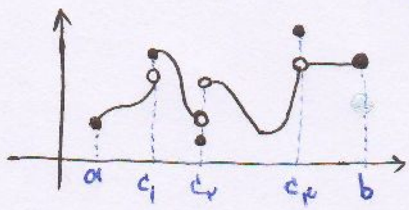
تا همین جا کافی است

(تذکر: البته:

$$\Gamma(\tfrac{7}{2})=\Gamma(\tfrac{5}{2}+1)=\tfrac{5}{2}\Gamma(\tfrac{5}{2})=\tfrac{5}{2}\left(\tfrac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2})\right)=\tfrac{5}{2}\times\tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})\right)=\tfrac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

$\frac{5}{2}+1$ ، $\frac{3}{2}+1$ ، $\frac{1}{2}+1$

*تعریف (تابع پیوستهٔ قطعه‌ای): تابع $f(t)$ را در بازهٔ $[a,b]$ (یعنی به ازای t های متعلق به بازهٔ $[a,b]$) پیوستهٔ قطعه‌ای می‌گوییم هرگاه بتوان این بازه را به تعداد متناهی زیربازه تقسیم کرد به طوری که $f(t)$ در نقاط درونی این زیربازه‌ها پیوسته باشد و وقتی t به سمت نقاط انتهایی زیربازه‌ها میل می‌کند، $f(t)$ دارای حد متناهی باشد.



مثال: نمودار روبه‌رو بیانگر یک تابع پیوستهٔ قطعه‌ای روی بازهٔ $[a,b]$ است.

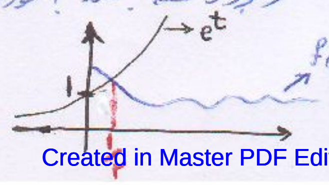
*تعریف: تابع $f(t)$ را در بازهٔ $[0,\infty)$ (یعنی به ازای tها در $[0,\infty)$) پیوستهٔ قطعه‌ای می‌نامیم هرگاه $f(t)$ در هر بازهٔ $[0,b]$ پیوستهٔ قطعه‌ای باشد.

مثال: تابع $f(t)=[t]$ در بازهٔ $[0,\infty)$، پیوستهٔ قطعه‌ای است.

*تعریف (تابع از مرتبهٔ نمایی): تابع $f(t)$ را بر بازهٔ $[0,\infty)$ از مرتبهٔ نمایی می‌نامیم هرگاه ثابت‌های α ، M و T وجود داشته باشند به طوری که برای هر $t\ge T$:

$$|f(t)|\le Me^{\alpha t}.$$

مثال:



در این مثال، تابع $f(t)$ یک تابع از مرتبهٔ نمایی با $\alpha=1$ ، $M=1$ و $T=\frac{1}{2}$ است.

* **قضیه ۱** (قضیه وجود): فرض کنید $f(t)$ بر بازهٔ $[0,\infty)$ پیوستهٔ قطعه‌ای و از مرتبهٔ نمایی باشد، یعنی در تعریف قبلی صدق کند. آنگاه $L\{f(t)\}$ برای $s>\alpha$ موجود است (در اینجا α همان α در تعریف قبلی است).

* **قضیه ۲**: فرض کنید $f(t)$ بر بازهٔ $[0,\infty)$ پیوستهٔ قطعه‌ای و از مرتبهٔ نمایی باشد. اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ آنگاه $\lim\limits_{s\to\infty}F(s)=0$.

* **نتیجه**: اگر $F(s)$ به گونه‌ای باشد که $\lim\limits_{s\to\infty}F(s)\neq 0$ آنگاه نمی‌توان تابعی پیوستهٔ قطعه‌ای و از مرتبهٔ نمایی مانند $f(t)$ یافت که $L\{f(t)\}=F(s)$.

مثال: برای تابع $F(s)=\dfrac{5s^2-s+7}{3s^2+4s}$، چون $\lim\limits_{s\to\infty}F(s)=\dfrac{5}{3}\neq 0$ بنابراین هیچ تابع پیوستهٔ قطعه‌ای و از مرتبهٔ نمایی مانند $f(t)$ وجود ندارد که $L\{f(t)\}=F(s)$.

* **قضیه ۳** (ویژگی خطی بودن L): فرض کنید $f_1(t)$ و $f_2(t)$ دو تابع باشند که تبدیلات لاپلاس آنها موجود است. اگر c_1 و c_2 دو عدد ثابت دلخواه باشند آنگاه:

$$L\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\}=c_1L\{f_1(t)\}+c_2L\{f_2(t)\}.$$

* **نتیجه**: برای هر ثابت دلخواه c: $L\{cf(t)\}=cL\{f(t)\}$.

مثال:

① $L\{4t^3+3\sin 5t-\frac{7}{3}e^{6t}\}=?$

حل) $=4L\{t^3\}+3L\{\sin 5t\}-\frac{7}{3}L\{e^{6t}\}=4\left(\frac{3!}{s^4}\right)+3\left(\frac{5}{s^2+25}\right)-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{s-6}\right)$

② $L\{\cosh(7t)\}=?$

حل) $=L\left\{\frac{e^{7t}+e^{-7t}}{2}\right\}=L\left\{\frac{1}{2}e^{7t}+\frac{1}{2}e^{-7t}\right\}=\frac{1}{2}L\{e^{7t}\}+\frac{1}{2}L\{e^{-7t}\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-7}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+7}\right)$

$\frac{1}{s-7}$ $\qquad \frac{1}{s-(-7)}=\frac{1}{s+7}$

③ $L\{\sin^2(4t)\}=?$

حل) $=L\left\{\frac{1-\cos(8t)}{2}\right\}=L\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 8t\right\}=\frac{1}{2}L\{1\}-\frac{1}{2}L\{\cos 8t\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+64}\right)$

* **قضیه ۴** (قضیه اول انتقال): اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ آنگاه $L\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$ (در اینجا a عددی ثابت است).

مثال:

① $L\{e^{7t}(5t-t^2)\}=?$ $\quad a=7$ $\longrightarrow$ حل) $\xrightarrow[a=7]{\text{از قضیه اول انتقال با}} F(s-a)=F(s-7)=\frac{5}{(s-7)^2}-\frac{2}{(s-7)^3}$

$f(t)\longrightarrow F(s)=L\{5t-t^2\}=\frac{5}{s^2}-\frac{2}{s^3}$

② $L\{\cos 2t\sinh(3t)\}=?\longrightarrow$ حل) $=L\left\{\cos 2t\left(\frac{e^{3t}-e^{-3t}}{2}\right)\right\}=\frac{1}{2}L\{e^{3t}\cos 2t\}-\frac{1}{2}L\{e^{-3t}\cos 2t\}$ $\quad a=3,\ a=-3$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{s-3}{(s-3)^2+4}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{s-(-3)}{(s-(-3))^2+4}\right)$ $\quad s+3$

$a=3$ از قضیه اول انتقال با $\qquad f(t)$ $\qquad F(s)=\frac{s}{s^2+4}$ $\qquad f(t)$

تمرین: مطلوبست حاصل عبارات زیر:

① $L\{5t^{8} + \frac{2}{3}\cos 4t + \sin 3t \cosh(5t)\} = ?$

② $L\{(2t+3)^{2} e^{3t}\} = ?$ ③ $L\{(\sin t + \sin^{2} 3t)\, e^{-t}\} = ?$

*** قضیه ۵** (تبدیل لاپلاس مشتق): فرض کنید $f(t)$ برای $t \geq 0$ پیوسته و $f'(t)$ برای $t \geq 0$ پیوسته قطعه‌ای باشد و تبدیل لاپلاس f و f' برای $s > s_0$ موجود باشند که s_0 عددی مفروض است. در این صورت،

$$\boxed{L\{f'(t)\} = s\,L\{f(t)\} - f(0)}\ ,\quad s > s_0.$$

*** نتیجه:** اگر f' و f'' همان شرایطی را که برای f و f' در قضیه بالا بیان شد، داشته باشند، آنگاه از قضیه بالا نتیجه می‌شود که

$$L\{f''(t)\} = s\,L\{f'(t)\} - f'(0) = s\left(s\,L\{f(t)\} - f(0)\right) - f'(0)$$
$$= s^{2} L\{f(t)\} - s f(0) - f'(0)$$

$$\Longrightarrow \boxed{L\{f''(t)\} = s^{2} L\{f(t)\} - s f(0) - f'(0)}$$

و با تعمیم نتایج بالا، به دست می‌آوریم

$$\boxed{L\{f^{(n)}(t)\} = s^{n} L\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).}$$

مثال:

① $L\{\int_0^t e^{2x} \sin 5x\, dx\} = ?$

تذکر: این مثال را می‌توان به کمک قضیه تبدیل لاپلاس انتگرال (جلوتر) ص ۶۶ هم حل کرد!!!

$f(t) \longrightarrow f'(t) = e^{2t} \sin 5t$

حل)

هدف: $L\{f(t)\} = ?$

فرمول: $L\{f'(t)\} = s\,\underbrace{L\{f(t)\}}_{\text{هدف}} - \underbrace{f(0)}_{\int_0^0 e^{2x}\sin 5x\,dx = 0} \Longrightarrow L\{e^{2t} \sin 5t\} = s\,L\{f(t)\} - 0$

از قضیه اول انتقال با $a=2$ و $f(t) = \sin 5t \longrightarrow F(s) = \frac{5}{s^{2}+25}$

$$\Longrightarrow \frac{5}{(s-2)^{2}+25} = s\,L\{f(t)\}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{L\{f(t)\}}_{\text{هدف}} = \frac{\frac{5}{(s-2)^{2}+25}}{s} = \frac{5}{s\left((s-2)^{2}+25\right)}$$

تمرین

② $L\{\int_0^t e^{3x} \cos 4x\, dx\} = ?$

③ $L\{\int_0^x (u^{3}+2)^{2} e^{4u}\, du\} = ?$

* تبدیل معکوس لاپلاس :

* تعریف : فرض کنید تبدیل لاپلاس $f(t)$ موجود و برابر $F(s)$ باشد، یعنی $L\{f(t)\}=F(s)$. در این صورت f را تبدیل معکوس F می‌نامیم و می‌نویسیم $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$.

* قضیه ۱ (یکتایی L^{-1}) : اگر f و g توابع پیوسته قطعه‌ای بر بازه‌ی $[0,\infty)$ باشند و تبدیل لاپلاس f و g موجود و $L\{f(t)\}=L\{g(t)\}$.
در این صورت، در هر نقطه t که f و g پیوسته باشند، $f(t)=g(t)$.
از این قضیه نتیجه می‌شود که اگر $f(t)$ پیوسته و $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$، آنگاه $f(t)$ یکتاست.

* قضیه ۲ (دترین خطی بودن L^{-1}) : اگر f_1 و f_2 به ترتیب تبدیل معکوس F_1 و F_2 باشند، یعنی $f_1(t)=L^{-1}\{F_1(s)\}$ ، $f_2(t)=L^{-1}\{F_2(s)\}$ ،
آنگاه برای هر دو عدد ثابت دلخواه c_1 و c_2 :

$$L^{-1}\{c_1F_1(s)+c_2F_2(s)\}=c_1L^{-1}\{F_1(s)\}+c_2L^{-1}\{F_2(s)\}=c_1f_1(t)+c_2f_2(t).$$

مثال: حاصل عبارات زیر را بدست آورید :

① $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3}\right\}=?\longrightarrow$ حل) $=\cos(\sqrt{3}\,t)$

② $L^{-1}\left\{\frac{2s-1}{s^2+7s+12}\right\}=?\longrightarrow$ حل) $=L^{-1}\left\{\frac{-7}{s+3}+\frac{9}{s+4}\right\}=-7L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}+9L^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$

$s^2+7s+12 \rightarrow (s+3)(s+4)$

تجزیه کسر :

$$\frac{2s-1}{s^2+7s+12}=\frac{A}{s+3}+\frac{B}{s+4}=---=\frac{-7}{s+3}+\frac{9}{s+4}$$

$A=-7$
$B=9$

$$=-7L^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-3)}\right\}+9L^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-4)}\right\}$$

$$=-7e^{-3t}+9e^{-4t}$$

③ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^7}\right\}=?\longrightarrow$ حل)

می‌دانیم که

$$L\{t^6\}=\frac{6!}{s^7}\Longrightarrow\frac{1}{6!}L\{t^6\}=\frac{1}{s^7}\Rightarrow L\left\{\frac{t^6}{6!}\right\}=\frac{1}{s^7}$$

بنابراین : $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^7}\right\}=\frac{t^6}{6!}$

④ $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-5)^7}\right\}=?$

حل) می‌دانیم طبق قضیه انتقال با $a=5$

$$L\{e^{5t}t^6\}=\frac{6!}{(s-5)^7}\Rightarrow\frac{1}{6!}L\{e^{5t}t^6\}=\frac{1}{(s-5)^7}\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-5)^7}\right\}=\frac{1}{6!}e^{5t}t^6$$

⑤ $L^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2+2s+5}\right\}=?\longrightarrow$ حل) $=L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+1)^2+4}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{(s+1)+2}{(s+1)^2+4}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\}$

مربع کامل (تجزیه نمی‌شود) $s^2+2s+1+4=(s+1)^2+4$

از قضیه انتقال با $a=-1$ و $f(t)=\cos 2t$

از قضیه انتقال با $a=-1$ ، $f(t)=\sin 2t$

$\Rightarrow$ جواب $=e^{-t}\cos 2t+e^{-t}\sin 2t$

④ $L^{-1}\left\{\frac{5s^2+s+4}{(s+4)(s^2+4)}\right\}=?$ $\longrightarrow$ حل) $= L^{-1}\left\{\frac{4}{s+4}+\frac{s-3}{s^2+4}\right\} = 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}-3L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$

$=4e^{-4t}+\cos 2t-3\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)$

تجزیه کسر:

$$\frac{5s^2+s+4}{(s+4)(s^2+4)}=\frac{A}{s+4}+\frac{Bs+C}{s^2+4}=\cdots=\frac{4}{s+4}+\frac{s-3}{s^2+4}$$

$A=4$
$B=1$
$C=-3$

تمرین:

① $L^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}=?$ ② $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^3}\right\}=?$

③ $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-2s+3}\right\}=?$ ④ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4-16}\right\}=?$ ⑤ $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^3+s}\right\}=?$

---

* قضیه ۳ (تبدیل لاپلاس انتگرال): اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ برای $s>s_0\ge 0$ موجود باشد، آنگاه

$$L\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\}=\frac{F(s)}{s}\quad,\quad s>s_0\ge 0$$

* نتیجه: اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ آنگاه $L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}=\int_0^t f(x)\,dx$.

مثال:

① $L\left\{\int_0^t e^{2x}\sin 5x\,dx\right\}=?$

حل) روش اول: این مثال به کمک فرمول $L\{f'\}$ در صفحه ۴۴ حل شد.

روش دوم: از قضیه ۳ بالا: با $f(t)=e^{2t}\sin 5t \longrightarrow F(s)=L\{f(t)\}=L\{e^{2t}\sin 5t\}$

$\underset{a=2\text{ با }}{\overset{\text{از قضیه اول انتقال}}{=}}\frac{5}{(s-2)^2+25}$

$f(x)$

بنابراین طبق قضیه ۳ بالا داریم:

$$L\left\{\int_0^t e^{2x}\sin 5x\,dx\right\}=\frac{F(s)}{s}=\frac{5}{s\left((s-2)^2+25\right)}$$

② $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-5s}\right\}=?$

حل) روش اول: تجزیه کسر: $\frac{1}{s^2-5s}=\frac{1}{s(s-5)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-5}=?? \longrightarrow$??: ادامه

روش دوم: از نتیجه بالا: $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-5s}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-5)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s-5}}{s}\right\}$ $\to F(s)$

$f(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\}=e^{5t}$ $\leftarrow$ $F(s)=\frac{1}{s-5}$

از فرمول نتیجه

$$\overset{\uparrow}{=}\int_0^t f(x)\,dx=\int_0^t e^{5x}\,dx=\frac{1}{5}e^{5x}\Big|_0^t=\frac{1}{5}\left(e^{5t}-e^{0}\right)=\frac{1}{5}\left(e^{5t}-1\right)$$

تمرین ③ $L\left\{\int_0^t e^{-x}\cos 2x\,dx\right\}=?$

* مشتق‌گیری از تبدیلات لاپلاس:

فرض کنید $F(s)=L\{f(t)\}$ برای $s>a$ موجود باشد. با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس داریم:

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \qquad (1)$$

با مشتق‌گیری از طرفین (۱) نسبت به s داریم

$$F'(s)=\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt. \qquad (2)$$

با فرض امکان جابجایی ترتیب مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری در (۲)، به دست می‌آوریم

$$F'(s)=\int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(e^{-st}f(t)\right)dt=-\int_0^\infty te^{-st}f(t)\,dt=-\int_0^\infty e^{-st}(tf(t))\,dt=-L\{tf(t)\}$$

$$\Longrightarrow \quad L\{tf(t)\}=-F'(s)$$

به کمک استقراء می‌توان نشان داد برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$L\{t^nf(t)\}=(-1)^nF^{(n)}(s) \longrightarrow \text{مشتق } n\text{-ام } F \text{ نسبت به } s$$

* نتیجه:

$$L^{-1}\{(-1)^nF^{(n)}(s)\}=t^nf(t)$$

مثال:

① $L\{t\sin t\}=?$ ⟶ از فرمول $L\{tf(t)\}=-F'(s)=-\left(\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right)=\frac{2s}{(s^2+1)^2}$

$f(t) \to F(s)=\frac{1}{s^2+1} \to F'(s)=\frac{-2s}{(s^2+1)^2}$

② $L\{t^2\cos 3t\}=?$ ⟶ $L\{t^2f(t)\}=F''(s)=\frac{-2s(s^2+9)^2-2(2s)(s^2+9)(-s^2+9)}{(s^2+9)^4}$

$f(t)\to F(s)=\frac{s}{s^2+9} \to F'(s)=\frac{-s^2+9}{(s^2+9)^2}$

$\mathrm{Arctan}(\frac{5}{s})$ یعنی

③ $L^{-1}\{\tan^{-1}(\frac{5}{s})\}=?$ ⟶ از نتیجه بالا داریم: $L^{-1}\{-F'(s)\}=tf(t) \Longrightarrow L^{-1}\{-(\frac{-5}{s^2+25})\}=tf(t)$

$F(s)$ ؛ هدف: $L^{-1}\{F(s)\}=f(t)=?$

$F'(s)=\frac{-5/s^2}{1+(\frac{5}{s})^2}=\frac{-5}{s^2+25}$

یادآوری: $y=tg^{-1}u \Rightarrow y'=\frac{u'}{1+u^2}$

$\Longrightarrow L^{-1}\{\frac{5}{s^2+25}\}=tf(t)$

$\Longrightarrow \sin 5t=tf(t)$

$\Longrightarrow$ هدف $=f(t)=\frac{\sin 5t}{t}$ ✓

④ $L^{-1}\{\ln(\frac{s^2+1}{s^2+s})\}=?$ ⟶ از فرمول $L^{-1}\{-F'(s)\}=tf(t) \Rightarrow L^{-1}\{\frac{-2s}{s^2+1}+\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\}=tf(t)$

$F(s)$ ؛ هدف: $L^{-1}\{F(s)\}=f(t)=?$

$\Rightarrow -2\cos t+1+e^{-t}=tf(t)$

$\Rightarrow$ هدف $=f(t)=\frac{-2\cos t+1+e^{-t}}{t}$ ✓

$F(s)=\ln(\frac{s^2+1}{s(s+1)})=\ln(s^2+1)-\ln(s(s+1))$

$=\ln(s^2+1)-\ln s-\ln(s+1) \to F'(s)=\frac{2s}{s^2+1}-\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$

⑤ $\int_0^\infty t\, e^{-2t} \sin^2 t \, dt = ?$

حل) $= \int_0^\infty e^{-2t} (t \sin^2 t)\, dt = L\{f(t)\} = F(s)\Big|_{s=2} = \frac{1}{2(2)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{4-2^2}}{(2^2+4)^2}\right)$

همان e^{-st} با $s=2$ — همان $f(t)$ تعریف تبدیل لاپلاس — طبق تعریف تبدیل لاپلاس — به ازای $s=2$

$= \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8}$

پس ابتدا باید $F(s)$ یعنی $L\{t\sin^2 t\}$ را بیابیم:

$F(s) = L\{t \sin^2 t\} = -G'(s) = \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{4-s^2}{(s^2+4)^2}\right)$

$g(t)$ — از نتیجهٔ صفحهٔ قبل برای تابع $g(t)$

$g(t) = \sin^2 t \longrightarrow G(s) = L\{g(t)\} = L\{\sin^2 t\} = L\left\{\frac{1-\cos 2t}{2}\right\} = L\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right\} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$

$\Rightarrow G'(s) = -\frac{1}{2s^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{4-s^2}{(s^2+4)^2}\right)$

تمرین: ⑥ $L^{-1}\{\cot^{-1} s\} = ?$ ⑦ $L^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{3}{s}\right)\right\} = ?$

* قضیهٔ ۴ (انتگرال‌گیری از تبدیلات لاپلاس): فرض کنید $F(s) = L\{f(t)\}$ برای $s>0$ موجود و $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ نیز موجود باشد، آنگاه:

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\, du, \quad s>0$$

* نتیجه: با توجه به قضیهٔ ۴، داریم (با مفروضات قضیهٔ ۴ برای $f(t)$):

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\, du$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-st} \frac{f(t)}{t}\, dt = \int_s^\infty F(u)\, du \xrightarrow[s\to 0^+]{\text{وقتی}} \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\, dt = \int_0^\infty F(u)\, du$$

مثال:

① اگر $a>0$: $L\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = ?$ $\quad f(t) \longrightarrow F(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$

حل) $= \int_s^\infty F(u)\, du = \int_s^\infty \frac{a}{u^2+a^2}\, du = \operatorname{Arctan}\left(\frac{u}{a}\right)\Big|_{u=s}^{\infty}$

$= \operatorname{Arctan}(\infty) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{s}{a}\right)$

$= \operatorname{Arccot}\left(\frac{s}{a}\right).$

تذکر: چون $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin at}{t} = a$ = موجود است، پس می‌توانیم از قضیهٔ ۴ استفاده کنیم.

② $\int_0^\infty \frac{\sin(3t)}{t}\, dt = ?$ $\quad f(t) \longrightarrow F(s) = \frac{3}{s^2+9}$

حل) $= \int_0^\infty F(u)\, du = \int_0^\infty \frac{3}{u^2+9}\, du = \operatorname{Arctan}\left(\frac{u}{3}\right)\Big|_{u=0}^{\infty}$

$= \operatorname{Arctan}(\infty) - \operatorname{Arctan}(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

تذکر: چون $\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin 3t}{t} = 3$ = موجود است، پس از نتیجهٔ بالا می‌توانیم استفاده کنیم.

تمرین ③ $\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin t}{t}\,dt=?$

④ $\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt=?$ ، $a>0,\ b>0$

⑤ $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}=?$ → حل) از قضیه ۴ صفحه قبل : $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty F(u)\,du=\int_s^\infty \frac{u}{(u^2+1)^2}\,du$

$\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{2t}$

$u^2+1=t$

$2u\,du=dt$

$u\,du=\frac{1}{2}dt$

$F(s)$ → هدف : $L^{-1}\{F(s)\}=f(t)=?$

$\Rightarrow L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=-\frac{1}{2(u^2+1)}\Big|_{u=s}^{\infty}=0+\frac{1}{2(s^2+1)}\Rightarrow L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\frac{1}{2(s^2+1)}$

$\Rightarrow \frac{f(t)}{t}=L^{-1}\left\{\frac{1}{2(s^2+1)}\right\}=\frac{1}{2}\sin t\Rightarrow \frac{f(t)}{t}=\frac{1}{2}\sin t\Rightarrow$ هدف $=f(t)=\frac{1}{2}t\sin t$

⑥ $L\left\{\int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx\right\}=?$ → حل) طبق قضیه ۳ ص ۴۶ (فرمول لاپلاس انتگرال) $=\frac{F(s)}{s}=\frac{\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}(s)}{s}$

$L\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\}=\frac{F(s)}{s}$

$f(x)$

$F(s)=L\{f(t)\}=L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}(s)$

محاسباتش کاملاً مشابه مثال ۱ ص ۴۸ البته با $a=1$

⑦ $L\left\{e^t\int_0^t \frac{e^{2t}-1}{t}\,dt\right\}=?$ → حل) $=L\{e^t f(t)\}$ $\overset{\text{از قضیه اول انتقال با } a=1}{=}$ $F(s-1)=\frac{-\ln\left(\frac{s-3}{s-1}\right)}{s-1}$

$f(t)=\int_0^t \frac{e^{2t}-1}{t}\,dt$

$f(t)$ → $F(s)=L\{f(t)\}=L\left\{\int_0^t \frac{e^{2t}-1}{t}\,dt\right\}=\frac{G(s)}{s}=-\frac{\ln\left(\frac{s-2}{s}\right)}{s}$

$g(t)$ — از فرمول قضیه ۳ ص ۴۶ یعنی لاپلاس انتگرال

$G(s)=L\{g(t)\}=L\left\{\frac{e^{2t}-1}{t}\right\}=\int_s^\infty H(u)\,du=\int_s^\infty\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u}\right)du=\left(\ln(u-2)-\ln u\right)\Big|_{u=s}^{\infty}=$

چون $\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{2t}-1}{t}=\frac{0}{0}=2=$ موجود (هوپیتال) پس طبق قضیه ۴ ص ۴۸ (انتگرال لاپلاس)

$h(t)=e^{2t}-1\rightsquigarrow H(s)=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s}$

$=\ln\left(\frac{u-2}{u}\right)\Big|_{u=s}^{\infty}=\ln(1)-\ln\left(\frac{s-2}{s}\right)$

$\Rightarrow G(s)=-\ln\left(\frac{s-2}{s}\right)$

تمرین : ⑧ $\int_0^\infty \frac{e^{-t}(1-\cos t)}{t}\,dt=?$

⑨ $L\left\{e^{-2t}\int_0^t \frac{1-\cos t}{t}\,dt\right\}=?$

* کاربرد تبدیلات لاپلاس در حل مسائل مقدار اولیه :

همانگونه که قبلاً اشاره شد، تبدیلات لاپلاس ابزار مفیدی برای حل انواع معینی از معادلات دیفرانسیل هستند. در زیر، به حل چند مسائل مقدار اولیه (یعنی معادله دیفرانسیل به همراه شرایط اولیه) با استفاده از اطلاعاتی که تاکنون درباره تبدیلات لاپلاس به دست آورده‌ایم، می‌پردازیم. لازم به ذکر است در این روش، برای یافتن تابع مجهول $y(t)$ معادله، ابتدا $L\{y(t)\}$ را می‌یابیم سپس با L^{-1} گرفتن، جواب $y(t)$ به دست می‌آید.

مثال: مسائل مقدار اولیه زیر را با استفاده از لاپلاس حل کنید:

(۱) $y'(t)+2y(t)=4t \quad , \quad y(0)=0$ (تذکر: یک معادله خطی مرتبه اول غیرهمگن که در فصل ۲ با روش حل آن آشنا شدیم.)

حل) از طرفین معادله، لاپلاس می‌گیریم:

$$\underbrace{L\{y'\}}_{=sL\{y\}-y(0)} + 2L\{y\} = L\{4t\} \Longrightarrow \left(sL\{y\} - \cancel{y(0)}\right) + 2L\{y\} = 4L\{t\}$$

$L\{f'\}$ از فرمول

$$\Longrightarrow (s+2)L\{y\} = \frac{4}{s^2} \Longrightarrow L\{y\} = \frac{4}{s^2(s+2)}$$

$$\Longrightarrow y(t) = L^{-1}\left\{\frac{4}{(s+2)s^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2} + \frac{-s+2}{s^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2}\right\}$$

هدف مسأله

تجزیه کسر: $\frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2} = \cdots = \frac{A}{s+2} + \frac{-s+2}{s^2}$

$A=1 , B=-1 , C=2$

$$\Longrightarrow y(t) = e^{-2t} - 1 + 2t \checkmark$$

(۲) $y''+3y'+2y=0 \quad , \quad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=1$ (تذکر: یک معادله مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت که در فصل ۳ با حل آن آشنا شدیم.)

حل) از طرفین لاپلاس می‌گیریم:

$L\{f''\}$ از فرمول — $L\{f'\}$ از فرمول

$$L\{y''\} + L\{3y'\} + L\{2y\} = L\{0\}$$

$$\Longrightarrow \left(s^2L\{y\} - s\cancel{y(0)} - \underbrace{y'(0)}_{=1}\right) + 3\left(sL\{y\} - \cancel{y(0)}\right) + 2L\{y\} = 0$$

$$\Longrightarrow (s^2+3s+2)L\{y\} - 1 = 0 \Longrightarrow L\{y\} = \frac{1}{s^2+3s+2}$$

$$\Longrightarrow y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3s+2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-t} - e^{-2t}$$

$\frac{1}{(s+1)(s+2)} =$ تجزیه کسر $= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \cdots = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$

$A=1 , B=-1$

$$\Longrightarrow y(t) = e^{-t} - e^{-2t} \checkmark$$

(۳) $ty''+(1-t)y'+y=0 \quad , \quad y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=-1$

حل) $L\{ty''\} + L\{\underbrace{(1-t)y'}_{y'-ty'}\} + L\{y\} = L\{0\}$

$$\Longrightarrow L\{ty''\} + L\{y'\} - L\{ty'\} + L\{y\} = 0 \longrightarrow (1)$$

محاسبه با استفاده از فرمول $L\{tf(t)\}$ — محاسبه از فرمول $L\{tf(t)\}$

Created in Master PDF Editor - Demo Version

حال ابتدا برای $L\{ty'\}$ و $L\{ty''\}$ داریم:

$$L\{ty'\} = -\frac{d}{ds}\underbrace{L\{y'\}}_{sL\{y\}-y(0)} = -\frac{d}{ds}\left(sL\{y\}-y(0)\right) = -\frac{d}{ds}\left(sY(s)-\underbrace{y(0)}_{\text{عددی ثابت}}\right) = -Y(s)-sY'(s)$$

از فرمول $L\{tf(t)\} = -F'(s) = -\frac{d}{ds}F(s)$ با $f(t)=y'(t)$

با فرض $L\{y\}=Y(s)$

$$\Longrightarrow L\{ty'\} = -Y(s)-sY'(s) \quad (*)$$

همچنین به طور مشابه:

$$L\{ty''\} = -\frac{d}{ds}\underbrace{L\{y''\}}_{s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)} = -\frac{d}{ds}\left(s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)\right) = -\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s)-s\underbrace{y(0)}_{\text{عدد ثابت}}-\underbrace{y'(0)}_{\text{عدد ثابت}}\right)$$

از فرمول $L\{tf(t)\} = -F'(s) = -\frac{d}{ds}F(s)$ با $f(t)=y''(t)$

با فرض $L\{y\}=Y(s)$

$$= -2sY(s)-s^2Y'(s)+y(0)$$

$$\Longrightarrow L\{ty''\} = -2sY(s)-s^2Y'(s)+y(0) \quad (**)$$

اکنون در ادامه حل مثال، با جایگذاری $(*)$ و $(**)$ در ① بدست می‌آوریم (با فرض (جایگذاری) $L\{y\}=Y(s)$):

$$\left(-2sY(s)-s^2Y'(s)+\cancel{y(0)}\right)+\left(sY(s)-\cancel{y(0)}\right)-\left(-Y(s)-sY'(s)\right)+Y(s)=0$$

$y(0)=1$ از فرض سوال $y(0)=1$ از فرض سوال

پس از ساده کردن و دسته‌بندی جملات داریم:

$$\Longrightarrow (2-s)Y+(s-s^2)Y'=0 \Longrightarrow$$

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول (تفکیک‌پذیر) با تابع مجهول $Y(s)$

$$\xrightarrow{\text{تفکیک}} \frac{Y'}{Y} = \frac{-(2-s)}{s-s^2} \Longrightarrow \int\frac{Y'}{Y}ds = \int\boxed{\frac{2-s}{s^2-s}}ds \Longrightarrow \ln Y = \int\left(-\frac{2}{s}+\frac{1}{s+1}\right)ds$$

تجزیه کسر: $\frac{2-s}{s(s-1)} = \frac{A}{s}+\frac{B}{s-1} = \cdots = \frac{-2}{s}+\frac{1}{s-1}$ ، $A=-2$ ، $B=1$

$$\Longrightarrow \ln Y = -2\ln s+\ln(s-1)+\underbrace{c}_{\ln c_1} \Longrightarrow \ln Y = \ln s^{-2}+\ln(s-1)+\ln c_1 \Longrightarrow \ln Y = \ln\left(\frac{c_1(s-1)}{s^2}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{۱-۱ است}]{\ln \text{ چون}} Y(s) = \frac{c_1(s-1)}{s^2} \xrightarrow{Y=L\{y(t)\}} L\{y(t)\} = \frac{c_1(s-1)}{s^2} \Longrightarrow y(t) = L^{-1}\left\{c_1\frac{(s-1)}{s^2}\right\}$$

$$\frac{s-1}{s^2} = \frac{s}{s^2}-\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}$$

$$\Longrightarrow y(t) = c_1\left(L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}\right) \Longrightarrow y(t) = c_1(1-t) \xrightarrow[y(0)=1]{\text{از فرض}} 1 = c_1(1-0) \Longrightarrow c_1 = 1 \Longrightarrow y(t) = 1-t$$

تمرین ④ $ty''-4ty'-4y=0$ ، $y(0)=0$ ، $y'(0)=1$

تمرین ⑤ $ty''+(2t+3)y'+(t+3)y=3e^{-t}$ ، $y(0)=0$ ، $y'(0)=1$

تمرین ⑥ $y''-3y'+2y=e^{-4t}$ ، $y(0)=1$ ، $y'(0)=5$ ⑦ $y''=t$ ، $y(0)=1$ ، $y'(0)=2$

* تابع پله‌ای واحد (تابع هویساید):

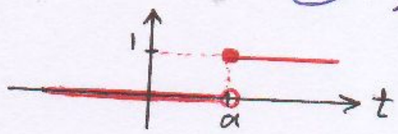
* تعریف: تابع پله‌ای واحد یا تابع هویساید، که آن را با $u(t)$ (و یا با $H(t)$) نمایش می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$$

(یا با $u_0(t)$ یا $H_0(t)$)

همچنین برای $a>0$، $u_a(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u_a(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & t\geq a\end{cases}$$



مثال: اگر $0<a<b$، ضابطهٔ $u_a(t)-u_b(t)$ را بنویسید.

حل) چون $u_a(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & t\geq a\end{cases}$، $u_b(t)=\begin{cases}0 & t<b\\ 1 & t\geq b\end{cases}$، بنابراین با توجه به $0<a<b$ داریم

$$u_a(t)-u_b(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & a\leq t<b\\ 0 & t\geq b\end{cases}$$

* نتیجه: با توجه به مثال بالا، هر تابع پیوستهٔ قطعه‌ای را می‌توان بر حسب تابع پله‌ای واحد و به صورت یک ضابطه نوشت.

به مثال زیر توجه کنید.

مثال: برای $t\geq 0$، تابع $f(t)$ را با ضابطهٔ زیر در نظر بگیرید:

$$f(t)=\begin{cases}3t & 0\leq t<1\\ 2-7t & 1\leq t<2\\ 5 & t\geq 2\end{cases}$$

با توجه به مثال قبلی می‌توان نوشت:

$=1$ در بحث لاپلاس

$$f(t)=\left(u_0(t)-u_1(t)\right)\times 3t+\left(u_1(t)-u_2(t)\right)\times(2-7t)+u_2(t)\times 5$$

تذکر: چون در بحث تبدیل لاپلاس، همواره $t\geq 0$، بنابراین همیشه $u_0(t)\equiv 1$.

* تبدیل لاپلاس تابع پله‌ای واحد: با توجه به تعریف تابع پله‌ای واحد به دست می‌آید

$$L\{u_a(t)\}=\frac{e^{-as}}{s}\,,\quad s>0$$

* قضیه (قضیهٔ دوم انتقال): اگر $F(s)=L\{f(t)\}$ برای $s>a>0$ موجود باشد آنگاه:

$$L\{u_a(t)f(t)\}=e^{-as}L\{f(t+a)\}.$$

* نتیجه: با توجه به مفروضات قضیهٔ فوق داریم

$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=u_a(t)f(t-a).$$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\begin{cases}3t & 0\le t<1\\ 2-7t & 1\le t<2\\ 5 & t\ge 2\end{cases}$ را بدست آورید.

حل) چون

$$f(t)=(u_0(t)-u_1(t))(3t)+(u_1(t)-u_2(t))(2-7t)+u_2(t)\times 5$$

بنابراین داریم

$$L\{f(t)\}=L\{(u_0(t)-u_1(t))(3t)\}+L\{(u_1(t)-u_2(t))(2-7t)\}+L\{5u_2(t)\}$$

$$=3L\{\underbrace{u_0(t)}_{=1}\,t\}-3L\{u_1(t)\,t\}+2L\{u_1(t)\}-7L\{u_1(t)\,t\}-2L\{u_2(t)\}+7L\{u_2(t)\,t\}+5L\{u_2(t)\}$$

از قضیه دوم انتقال با $a=1$ و $f(t)=t$ ، $e^{-as}L\{f(t+a)\}$

$$=3L\{t\}-3e^{-s}L\{t+1\}+2\left(\frac{e^{-s}}{s}\right)-7e^{-s}L\{t+1\}-2\left(\frac{e^{-2s}}{s}\right)+7e^{-2s}L\{t+2\}$$

$$=3\left(\frac{1}{s^2}\right)-3e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)+2\left(\frac{e^{-s}}{s}\right)-7e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)-2\left(\frac{e^{-2s}}{s}\right)+5\left(\frac{e^{-2s}}{s}\right)$$

$$+7e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}\right)+5\left(\frac{e^{-2s}}{s}\right).\ ✓$$

مثال: $L\{u_3(t)\,t^2\}=?$

حل)

$$L\{u_3(t)\,t^2\}=e^{-3s}L\{(t+3)^2\}=e^{-3s}L\{t^2+6t+9\}=e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^2}+\frac{9}{s}\right).\ ✓$$

$a=3$ ، $f(t)=t^2$ ، از قضیه دوم انتقال

مثال:

(1) $L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-4s}}{(s-3)(s^2+25)}\right\}=?$

تجزیه کسر

$$\frac{1}{(s-3)(s^2+25)}=\frac{A}{s-3}+\frac{Bs+C}{s^2+25}=\dots=\frac{\frac{1}{34}}{s-3}+\frac{-\frac{1}{34}s-\frac{3}{34}}{s^2+25}$$

$A=\frac{1}{34}$, $B=-\frac{1}{34}$, $C=-\frac{3}{34}$

حل) چون

بنابراین

$$\text{جواب}=L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{34}e^{-4s}}{s-3}+\frac{\left(-\frac{1}{34}s-\frac{3}{34}\right)e^{-4s}}{s^2+25}\right\}=\frac{1}{34}L^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{s-3}\right\}-\frac{1}{34}L^{-1}\left\{e^{-4s}\frac{s}{s^2+25}\right\}-\frac{3}{34}L^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{s^2+25}\right\}$$

از نتیجه قضیه دوم انتقال

$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=u_a(t)f(t-a)=u_4(t)e^{3(t-4)}$$

$a=4$

$\frac{1}{s-3}\to f_1(t)=e^{3t}$

$F_2(s)\to f_2(t)=\cos(5t)$

$=u_4(t)f_2(t-4)$

$=u_4(t)\cos(5(t-4))$

$F_3(s)\to f_3(t)=\frac{1}{5}\sin(5t)$

$=\frac{1}{5}u_4(t)f_3(t-4)$

$=\frac{1}{5}u_4(t)\sin(5(t-4))$

$$\Longrightarrow \text{جواب}=\frac{1}{34}u_4(t)e^{3(t-4)}-\frac{1}{34}u_4(t)\cos(5(t-4))-\frac{3}{34}\left(\frac{1}{5}u_4(t)\sin(5(t-4))\right).\ ✓$$

تمرین (2) $L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{(s-4)(s^2-1)}\right\}=?$

مثال: جواب مسائل مقدار اولیه زیر را بدست آورید:

① $y''+y=f(t)\ ,\quad y(0)=y'(0)=0$

که در آن $f(t)=\begin{cases} t & 0\le t<4 \\ 3 & t\ge 4 \end{cases}$.

حل) $L\{y''\}+L\{y\}=L\{f(t)\}$

$$\Rightarrow \left(s^2L\{y\}-s\underbrace{y(0)}_{=0}-\underbrace{y'(0)}_{=0}\right)+L\{y\}=L\{f(t)\}$$

$$f(t)=(\underbrace{u_0(t)}_{=1}-u_4(t))\times t+u_4(t)\times 3$$

$$L\{f(t)\}=L\{t\}-L\{u_4(t)\,t\}+L\{3u_4(t)\}$$
$$=\frac{1}{s^2}-e^{-4s}L\{t+4\}+3\frac{e^{-4s}}{s}$$
$$=\frac{1}{s^2}-e^{-4s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{4}{s}\right)+3\frac{e^{-4s}}{s}$$
$$=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-4s}}{s^2}-\frac{4e^{-4s}}{s}+\frac{3e^{-4s}}{s}=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-4s}}{s^2}-\frac{e^{-4s}}{s}$$

$$\Rightarrow (s^2+1)L\{y\}=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-4s}}{s^2}-\frac{e^{-4s}}{s}$$

$$\Rightarrow L\{y\}=\frac{1}{s^2(s^2+1)}-\frac{e^{-4s}}{s^2(s^2+1)}-\frac{e^{-4s}}{s(s^2+1)}$$

$$\Rightarrow y(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{s^2(s^2+1)}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{s(s^2+1)}\right\}$$

تجزیه کسر: $\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}=\dfrac{As+B}{s^2}+\dfrac{Cs+D}{s^2+1}=\cdots=\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{s^2+1}$

$A=0,\ B=1,\ C=0,\ D=-1$

تجزیه کسر: $\dfrac{1}{s(s^2+1)}=\dfrac{A'}{s}+\dfrac{B's+C'}{s^2+1}=\cdots=\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+1}$

$A'=1,\ B'=-1,\ C'=0$

$$\Rightarrow y(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}-L^{-1}\left\{e^{-4s}\left(\frac{1}{s^2}\right)\right\}+L^{-1}\left\{e^{-4s}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right\}-L^{-1}\left\{e^{-4s}\left(\frac{1}{s}\right)\right\}+L^{-1}\left\{e^{-4s}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)\right\}$$

از نتیجه قضیه دوم انتقال

$F(s)\to f(t)=t$ ، $u_4(t)f(t-4)=u_4(t)(t-4)$

$F(s)\to f(t)=\sin t$ ، $u_4(t)\sin(t-4)$

$F(s)\to f(t)=1$ ، $u_4(t)$

$F(s)\to f(t)=\cos t$ ، $u_4(t)\cos(t-4)$

$$\Rightarrow y(t)=t-\sin t-u_4(t)(t-4)+u_4(t)\sin(t-4)-u_4(t)+u_4(t)\cos(t-4).$$

② $y''+y=t(1-u_\pi(t))\ ,\quad y(0)=5\ ,\quad y'(0)=0$

حل) $L\{y''\}+L\{y\}=L\{t-u_\pi(t)\times t\}$

$$L\{t\}-L\{u_\pi(t)\times t\}=\frac{1}{s^2}-e^{-\pi s}L\{t+\pi\}$$

$a=\pi$ ، $f(t)$

$$=\frac{1}{s^2}-e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{\pi}{s}\right)=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-\pi s}}{s^2}-\pi\frac{e^{-\pi s}}{s}$$

$$\Rightarrow \left(s^2L\{y\}-s\underbrace{y(0)}_{5}-\cancel{y'(0)}\right)+L\{y\}=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-\pi s}}{s^2}-\frac{\pi e^{-\pi s}}{s}$$

$$\Rightarrow (s^2+1)L\{y\}=5s+\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-\pi s}}{s^2}-\pi\frac{e^{-\pi s}}{s}$$

$$\Rightarrow L\{y\}=\frac{5s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2(s^2+1)}-\frac{e^{-\pi s}}{s^2(s^2+1)}-\pi\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+1)}$$

$$\Rightarrow y(t)=5L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2(s^2+1)}\right\}-\pi L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+1)}\right\}$$

مانند مثال قبل چون $\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}=\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{s^2+1}$

و همچنین: $\dfrac{1}{s(s^2+1)}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+1}$

$$\Rightarrow y(t)=5\cos t+L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\}-\pi L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s}\right\}+\pi L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}s}{s^2+1}\right\}$$

$$\Rightarrow y(t)=5\cos t+t-\sin t-u_\pi(t)(t-\pi)+u_\pi(t)\sin(t-\pi)-\pi u_\pi(t)+\pi u_\pi(t)\cos(t-\pi).$$

تمرین ③ $y'+y=\begin{cases}0 & 0\le t<\pi\\ 3\sin t & t\ge \pi\end{cases}$ و $y(0)=5$

تمرین ④ $y''+3y'-4y=\begin{cases}e^t & 0\le t<2\\ 0 & t\ge 2\end{cases}$ و $y(0)=y'(0)=0$

تمرین ⑤ $y''+4y=\begin{cases}1 & 0\le t<1\\ 0 & t\ge 1\end{cases}$ و $y(0)=y'(0)=0$

---

* تابع دلتای دیراک (تابع ضربهٔ واحد):

برای هر $a>0$، تابع $h_a(t)=\begin{cases}\frac{1}{a} & b\le t\le b+a\\ 0 & \text{در سایر نقاط}\end{cases}$، که $b>0$ عددی حقیقی است، را درنظر بگیرید. به عبارت دیگر،

$$h_a(t)=\frac{1}{a}\left(u_b(t)-u_{b+a}(t)\right).$$

* تعریف (تابع دلتای دیراک): تابع دلتای دیراک (یا تابع ضربهٔ واحد) بصورت زیر تعریف می‌شود: برای $b>0$،

$$\delta_b(t)=\lim_{a\to 0}h_a(t)=\begin{cases}0 & t\neq b\\ \infty & t=b\end{cases}$$

* نتیجه ۱: $L\{\delta_b(t)\}=e^{-bs}$.

زیرا:

$$L\{\delta_b(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\delta_b(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-st}\left(\lim_{a\to 0}h_a(t)\right)dt=\int_0^\infty e^{-st}\left(\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\left(u_b(t)-u_{b+a}(t)\right)\right)dt$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\Big(\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}u_b(t)\,dt}_{L\{u_b(t)\}=\frac{e^{-bs}}{s}}-\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}u_{b+a}(t)\,dt}_{L\{u_{b+a}(t)\}=\frac{e^{-(b+a)s}}{s}}\Big)$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\left(\frac{e^{-bs}}{s}-\frac{e^{-(b+a)s}}{s}\right)=\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\frac{e^{-bs}}{s}\left(1-e^{-as}\right)=\frac{e^{-bs}}{s}\lim_{a\to 0}\frac{1-e^{-as}}{a}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{از هوپیتال نسبت به } a}{=}}$$

$$=\frac{e^{-bs}}{s}\lim_{a\to 0}\frac{s\,e^{-as}}{1}=\frac{e^{-bs}}{s}\times s=e^{-bs}.\ \checkmark$$

نتایج زیر نیز مشابه بالا بدست می‌آیند:

* نتیجه ۲: اگر برای $0\le t<\infty$، $f(t)$ پیوسته باشد آنگاه $L\{\delta_b(t)f(t)\}=e^{-bs}f(b)$.

اگر f پیوسته

* نتیجه ۳: $\int_0^\infty \delta_b(t)\,dt=1$.

مثال: مسائل مقدار اولیه زیر را حل کنید:

① $y''+y=4\delta_{2\pi}(t)$ ، $y(0)=1$ ، $y'(0)=0$

حل) $L\{y''\}+L\{y\}=L\{4\delta_{2\pi}(t)\}\longrightarrow 4L\{\delta_{2\pi}(t)\}=4e^{-2\pi s}$

$$\Rightarrow \left(s^2L\{y\}-s\underbrace{y(0)}_{=1}-\cancel{y'(0)}\right)+L\{y\}=4e^{-2\pi s}\Rightarrow (s^2+1)L\{y\}-s=4e^{-2\pi s}\Rightarrow L\{y\}=\frac{s}{s^2+1}+\frac{4e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow y(t)=L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+4L^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}\right\}=\cos t+4u_{2\pi}(t)\sin t.$$

$u_{2\pi}(t)\sin(t-2\pi)=u_{2\pi}(t)(-\sin(2\pi-t))=u_{2\pi}(t)(-(-\sin t))=u_{2\pi}(t)\sin t$

تمرین ② $y''-4y'+4y=3\delta_1(t)$ و $y(0)=y'(0)=1$

* انتگرال‌های پیچشی (کانولوشن):

*تعریف (پیچش): فرض کنید توابع $f(t)$ و $g(t)$ برای $0\le t<\infty$ پیوسته قطعه‌ای باشند. پیچش f و g تابعی است که آن را با $f*g$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du.$$

مثال: اگر $f(t)=t$ و $g(t)=t^2$ آنگاه:

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(u)g(t-u)\,du=\int_0^t u(t-u)^2\,du=\int_0^t u(t^2-2tu+u^2)\,du$$
$$=\left(\frac{u^2t^2}{2}-\frac{2tu^3}{3}+\frac{u^4}{4}\right)\Big|_{u=0}^{t}=\frac{t^4}{12}$$

*نتیجه: اگر f، g و h توابع پیوسته قطعه‌ای برای $0\le t<\infty$ باشند آنگاه:

(الف) $f*g=g*f$

(ب) برای هر دو ثابت دلخواه c_1 و c_2: $(c_1f+c_2g)*h=c_1(f*h)+c_2(g*h)$

*قضیه: فرض کنید $f(t)$ و $g(t)$ برای $0\le t<\infty$ پیوسته قطعه‌ای باشند و $F(s)=L\{f(t)\}$ و $G(s)=L\{g(t)\}$ موجود باشند، آنگاه

$$L\{(f*g)(t)\}=L\{f(t)\}L\{g(t)\}=F(s)G(s)$$

و بنابراین

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=(f*g)(t).$$

مثال:

$(f*g)(t)$ است!

① $L\{\int_0^t e^{2(t-u)}u^3\,du\}=?$ → حل) $=L\{(f*g)(t)\}\underset{\text{از قضیهٔ بالا}}{=}F(s)G(s)=\frac{3!}{s^4}\times\frac{1}{s-2}$

$g(t-u)$ → $g(t)=e^{2t}$ → $G(s)=\frac{1}{s-2}$

$f(u)$ → $f(t)=t^3$ → $F(s)=\frac{3!}{s^4}$

② $L\{\int_0^t e^u\sin(t-u)\,du\}=?$ → حل) $=L\{(f*g)(t)\}\underset{\text{از قضیهٔ بالا}}{=}F(s)G(s)=\frac{1}{s-1}\times\frac{1}{s^2+1}$

$f(u)$ → $f(t)=e^t$ → $F(s)=\frac{1}{s-1}$

$g(t-u)$ → $g(t)=\sin t$ → $G(s)=\frac{1}{s^2+1}$

تمرین ③ $L\{\int_0^t (t-u)^2\cos 5u\,du\}=?$

۵۷

④ $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+9)^2}\right\}=?$

$\frac{1}{s^2+9}\times\frac{1}{s^2+9}$

$F(s)\rightarrow f(t)=\frac{1}{3}\sin(3t)$

$G(s)\rightarrow g(t)=\frac{1}{3}\sin(3t)$

حل)

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+9)^2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+9)}\times\frac{1}{(s^2+9)}\right\}=L^{-1}\{F(s)G(s)\}\underset{\text{از قضیه‌ی قبل}}{=}(f*g)(t)=\int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du$$

$$=\int_0^t\left(\frac{1}{3}\sin 3u\right)\left(\frac{1}{3}\sin 3(t-u)\right)du=\frac{1}{9}\int_0^t \sin 3u\,\sin(3t-3u)\,du$$

از فرمول: $\sin p\sin q=\frac{1}{2}\left(\cos(p-q)-\cos(p+q)\right)$ ، $\frac{1}{2}\left(\cos(6u-3t)-\cos(3t)\right)$

$$=\frac{1}{18}\int_0^t\left(\cos(6u-3t)-\cos(3t)\right)du=\frac{1}{18}\left(\frac{1}{6}\sin(6u-3t)-u\cos(3t)\right)\Big]_{u=0}^{t}$$

$$=\frac{1}{18}\left\{\left(\frac{1}{6}\sin(3t)-t\cos(3t)\right)-\left(\frac{1}{6}\underbrace{\sin(-3t)}_{-\sin(3t)}-0\right)\right\}=\frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\sin(3t)-t\cos(3t)\right)$$

⑤ $L\left\{e^t\int_0^t e^{-2u}\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)du\right\}=?$

حل) روش اول: با استفاده از قضیه‌ی اول انتقال (مشابه مثال ۷ ص ۴۹ جزوه)

روش دوم: با استفاده از انتگرال پیچشی:

$e^{-2u}=e^{-u}\times e^{-u}$

$$L\left\{e^t\int_0^t e^{-2u}\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)du\right\}=L\left\{\int_0^t \underbrace{e^{t}e^{-u}}_{e^{t-u}}e^{-u}\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)du\right\}$$

$$=L\left\{\int_0^t \underbrace{e^{t-u}}_{g(t-u)}\underbrace{\left(\frac{e^{-u}-e^{-2u}}{u}\right)}_{f(u)}du\right\}=L\{(f*g)(t)\}=F(s)G(s)=\left(-\ln\left(\frac{s+1}{s+2}\right)\right)\left(\frac{1}{s-1}\right)$$

$g(t)=e^t\rightarrow G(s)=\frac{1}{s-1}$

$f(t)=\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\rightarrow F(s)=L\left\{\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\right\}=\int_s^\infty\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u+2}\right)du=\ln\left(\frac{u+1}{u+2}\right)\Big]_{u=s}^{\infty}$

(از فرمول انتگرال لاپلاس (قضیه‌ی ۴ ص ۴۸))

$=\ln(1)-\ln\left(\frac{s+1}{s+2}\right)=-\ln\left(\frac{s+1}{s+2}\right)$

تمرین ⑥ $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2-1)^2}\right\}=?$

* معادلات انتگرالی و دیفرانسیلی ـ انتگرالی :

به مثالهای زیر که به حل معادلات انتگرالی و دیفرانسیلی ـ انتگرالی با استفاده از تبدیل لاپلاس می‌پردازند، توجه کنید

مثال: جواب معادلات زیر را بدست آورید:

یک معادله انتگرالی

(۱) $y(t)=\sin t+\int_0^t 2\sin(2t-2u)\,y(u)\,du$

حل) از طرفین لاپلاس می‌گیریم:

$$L\{y(t)\}=L\{\sin t\}+L\{\int_0^t 2\sin(2t-2u)\,y(u)\,du\}$$

$\sin 2(t-u) \to g(t-u)$ همان $\to g(t)=\sin 2t \to G(s)=\frac{2}{s^2+4}$

$f(u)$ همان $\to f(t)=y(t) \to F(s)=L\{y(t)\}$

$$\Rightarrow L\{y\}=\frac{1}{s^2+1}+2L\{(f*g)(t)\} \Rightarrow L\{y\}=\frac{1}{s^2+1}+2F(s)G(s)$$

$$\Rightarrow L\{y\}=\frac{1}{s^2+1}+2L\{y\}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) \Rightarrow L\{y\}\left(1-\frac{4}{s^2+4}\right)=\frac{1}{s^2+1}$$

$$1-\frac{4}{s^2+4}=\frac{s^2}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow L\{y\}=\frac{s^2+4}{s^2(s^2+1)} \Rightarrow y(t)=L^{-1}\left\{\frac{s^2+4}{s^2(s^2+1)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+1}\right\}=4t-3\sin t.$$

تجزیه کسر

$$\frac{As+B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+1}=\dots=\frac{4}{s^2}-\frac{3}{s^2+1}$$

$A=0,\ C=0$
$B=4,\ D=-3$

تمرین (۲) $y(t)=3t^2-e^{-t}-\int_0^t e^{t-u}\,y(u)\,du$

یک معادله دیفرانسیلی انتگرالی

(۳) $y'(t)=t+\int_0^t y(t-u)\cos u\,du \quad , \quad y(0)=0$

حل) $L\{y'(t)\}=L\{t\}+L\{\int_0^t y(t-u)\cos u\,du\}$

$y(t-u) \to g(t-u) \to g(t)=y(t) \to G(s)=L\{y(t)\}$

$\cos u \to f(u) \to f(t)=\cos t \to F(s)=\frac{s}{s^2+1}$

$$\Rightarrow sL\{y\}-\underbrace{y(0)}_{=0}=\frac{1}{s^2}+L\{(f*g)(t)\} \Rightarrow sL\{y\}=\frac{1}{s^2}+F(s)G(s)$$

$$\Rightarrow sL\{y\}=\frac{1}{s^2}+\left(\frac{s}{s^2+1}\right)L\{y\} \Rightarrow \left(s-\frac{s}{s^2+1}\right)L\{y\}=\frac{1}{s^2} \Rightarrow \frac{s^3}{s^2+1}L\{y\}=\frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow L\{y\}=\frac{s^2+1}{s^5}=\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^5} \Rightarrow y(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}=\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4.$$

④ $y'(t)+\int_0^t y(r)\,dr+y(t)=t^{1399}\,\delta_1(t)\ ,\quad y(0)=0$

حل) $L\{y'\}+\underbrace{L\left\{\int_0^t y(r)\,dr\right\}}_{\text{از فرمول لاپلاس انتگرال}}+L\{y\}=L\{t^{1399}\,\delta_1(t)\}$

فرمول: $L\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\}=\frac{F(s)}{s}$

$$\Rightarrow \left(sL\{y\}-\underbrace{y(0)}_{=0}\right)+\frac{Y(s)}{s}+Y(s)=e^{-s}$$

با فرض $L\{y\}=Y(s)$

$$\Rightarrow sY(s)+\frac{Y(s)}{s}+Y(s)=e^{-s}$$

$$\Rightarrow \left(s+\frac{1}{s}+1\right)Y=e^{-s}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{s^2+1+s}{s}\right)Y=e^{-s}$$

$$\Rightarrow Y(s)=e^{-s}\left(\frac{s}{s^2+s+1}\right)$$

$$\Rightarrow y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}s}{s^2+s+1}\right\}$$

$F(s)=\dfrac{s}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

$$=L^{-1}\left\{e^{-s}\left(\frac{s\overbrace{+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right)\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{e^{-s}\left(\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right)\right\}-L^{-1}\left\{e^{-s}\left(\frac{\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right)\right\}$$

$F_1(s)\xrightarrow{\text{از قضیه اول انتقال}} f_1(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

$F_2(s)\xrightarrow{\text{از قضیه اول انتقال}} f_2(t)=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

از نتیجه قضیه دوم انتقال در ص ۵۲ با $a=1$

$$u_1(t)\,e^{-\frac{1}{2}(t-1)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right)-\frac{u_1(t)}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}(t-1)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right).$$

$\to ? \to$ * تذکره برای محاسبه این تبدیل لاپلاس:

روش اول: استفاده از فرمول در نتیجه ۲ ص ۵۵:

$$L\{\delta_b(t)f(t)\}=e^{-bs}f(b)$$

با $b=1$ و $f(t)=t^{1399}$ که پیوسته است برای $t\geq 0$.

پس:

$$L\{\delta_1(t)\,t^{1399}\}=e^{-s}(+1)^{1399}=e^{-s}$$

روش دوم: استفاده از فرمول

$$L\{t^n f(t)\}=(-1)^n F^{(n)}(s)$$

با $n=1399$ و $f(t)=\delta_1(t)$ (پس $F(s)=e^{-s}$)

بنابراین:

$$L\{t^{1399}\,\delta_1(t)\}=\underbrace{(-1)^{1399}}_{-1}\ \underbrace{F^{(1399)}(s)}=+e^{-s}$$

مشتق ۱۳۹۹ام تابع e^{-s} = $-e^{-s}$

تمرین ⑤ $y'(t)+3y(t)+2\int_0^t y(u)\,du=3\ ,\quad y(0)=1$

تمرین ⑥ $y'(t)+3y(t)+2\int_0^t y(u)\,du=\begin{cases}0 & 0\leq t<1\\ 2 & 1\leq t<2\\ 0 & t\geq 2\end{cases}\ ,\quad y(0)=1$

تمرین ⑦ $y(x)+\int_0^x e^{x-u}\,y(u)\,du=2x-3$

* فصل ۵ : حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری‌ها

در این فصل با حل معادلات دیفرانسیل به روش سری‌ها آشنا می‌شویم. در ابتدا تعاریفی از قبیل سری توانی، تابع تحلیلی، نقاط عادی و نقاط تکین را بیان کرده و سپس روش سری‌ها را تشریح می‌کنیم. لازم به ذکر است که این روش را برای معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی تشریح می‌کنیم.

* **تعریف (سری توانی):** یک سری نامتناهی به شکل

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

را یک سری توانی حول نقطه x_0 می‌نامیم. اعداد a_0، a_1، a_2، ... را ضرایب سری و x_0 را مرکز سری می‌نامیم.

* **تعریف (تابع تحلیلی):** تابع $f(x)$ را در نقطه x_0 تحلیلی می‌نامیم هرگاه در یک همسایگی x_0، بسط تیلور $f(x)$ در x_0 موجود باشد، یعنی عددی مانند $r>0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر x در همسایگی (x_0-r, x_0+r) از x_0، داشته باشیم:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

مشتق n-ام

نقش همان a_n بالا

مثال: تابع $f(x)=e^x$ در نقطه $x_0=0$، تحلیلی است و دارای بسط تیلور زیر است:

$$f(x)=e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$x_0=0$

توجه: برای هر $n=0,1,2,3,\ldots$ ،

$$f^{(n)}(x) = \text{مشتق n-ام تابع } e^x = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

* **تعریف (نقاط عادی و تکین):** معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن زیر را در نظر بگیرید:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (1)$$

نقطه x_0 را یک نقطه عادی معادله (۱) می‌نامیم هرگاه هر دو تابع $p(x)$ و $q(x)$ در x_0 تحلیلی باشند. در غیر اینصورت، اگر لااقل یکی از توابع $p(x)$ و $q(x)$ در x_0 تحلیلی نباشد، نقطه x_0 را یک نقطه تکین معادله (۱) می‌نامیم.

* **تذکر:** اگر $p(x)$ و $q(x)$ توابعی گویا باشند (یعنی به شکل $\frac{\text{چندجمله‌ای}}{\text{چندجمله‌ای}}$، مانند $\frac{x^2+1}{x-4}$ ، $4x^2-5x$ ، $\frac{3}{x^3}$ ، $7x$ و مانند اینها)، آنگاه این توابع در هر نقطه به جز ریشه‌های مخرج، تحلیلی هستند و ریشه‌های مخرج، نقاط تکین، و سایر نقاط نیز نقاط عادی هستند.

* **تعریف (نقاط تکین منظم و نامنظم):** نقطه تکین x_0 را یک نقطه تکین منظم معادله (۱) می‌نامیم هرگاه هر دو تابع

$$(x-x_0)p(x) \quad \text{و} \quad (x-x_0)^2 q(x)$$

در x_0 تحلیلی باشند و اگر لااقل یکی از این دو تابع در x_0 تحلیلی نباشد، آنگاه x_0 را یک نقطه تکین نامنظم معادله می‌نامیم.

مثال: نقاط عادی، تکین منظم و نامنظم معادله‌های زیر را مشخص کنید:

① $x^2(x-1)y'' + (2x+1)y' + x^2(x+1)y = 0$

حل) ابتدا طرفین را بر ضریب y'' تقسیم می‌کنیم تا معادله به فرم (۱) تبدیل شود:

$$y'' + \underbrace{\frac{(2x+1)}{x^2(x-1)}}_{p(x)} y' + \underbrace{\frac{(x+1)}{x-1}}_{q(x)} y = 0$$

ریشه‌های مخرج $p(x)$ و $q(x)$ عبارتند از 0 و 1. بنابراین:

اولاً: $x=0$ و $x=1$ نقاط تکین معادله و هر نقطه‌ای جز ۰ و ۱ نیز نقطه‌ی عادی معادله است.

ثانیاً: برای تعیین نوع نقاط تکین (منظم یا نامنظم) برای $x=0$ و $x=1$ داریم:

(الف) برای $\underbrace{x=0}_{x_0}$:

$$\begin{cases}(x-x_0)p(x) = (x-0)\left(\frac{2x+1}{x^2(x-1)}\right) = \frac{2x+1}{x(x-1)} \longrightarrow \text{در } \underbrace{x=0}_{x_0} \text{ تحلیلی نیست.} \\ (x-x_0)^2 q(x) = (x-0)\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{x(x+1)}{x-1} \longrightarrow \text{در } \underbrace{x=0}_{x_0} \text{ تحلیلی است.}\end{cases}$$

(چون $p(x)$ کسری گویا و $x=0$ نیز ریشه‌ی مخرج آن است)

پس $x=0$ نقطه‌ی تکین نامنظم معادله است.

(ب) برای $\underbrace{x=1}_{x_0}$:

$$\begin{cases}(x-x_0)p(x) = (x-1)\left(\frac{2x+1}{x^2(x-1)}\right) = \frac{2x+1}{x^2} \longrightarrow \text{در } \underbrace{x=1}_{x_0} \text{ تحلیلی است} \\ (x-x_0)^2 q(x) = (x-1)^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = (x-1)(x+1) \longrightarrow \text{در } \underbrace{x=1}_{x_0} \text{ تحلیلی است}\end{cases}$$

پس $x=1$ نقطه‌ی تکین منظم معادله است.

② تمرین $(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$

③ تمرین $x^2(x-1)^2y'' + (x^2-x)y' - \frac{y}{x-1} = 0$

* جواب به صورت سری در مجاورت یک نقطه‌ی عادی:

در این بخش، روش یافتن جواب‌های معادله‌ی $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ را به صورت سری در مجاورت یک نقطه‌ی عادی بیان می‌کنیم. برای این منظور از قضیه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

* قضیه: فرض کنید توابع $p(x)$ و $q(x)$ در نقطه‌ی x_0 تحلیلی باشند. در این صورت هر جواب $y(x)$ از معادله‌ی $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ در نقطه‌ی x_0 تحلیلی است و می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n. \quad (*)$$

به خصوص اگر $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای از x باشند، آنگاه سری $(*)$ به ازای هر x، همگرا است.

تذکر: برای یافتن ضرایب a_n، کافیست $(*)$ را در معادله جایگذاری و a_nها را به دست آوریم.

مثال: جواب عمومی هر یک از معادله‌های زیر را در مجاورت نقطهٔ $x_0=0$ به صورت یک سری توانی به دست آورید:

(1) $y''+xy'+y=0$

حل) اولاً: $\begin{cases}p(x)=x\\ q(x)=1\end{cases}$ ⟵ هر دو در نقطهٔ $x_0=0$ تحلیلی اند و لذا $x=0$ یک نقطهٔ عادی معادله است.

ثانیاً: طبق قضیهٔ قبل، جواب عمومی معادله به شکل $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ است که برای یافتن a_n ها، $y(x)$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم. برای این کار داریم:

همان $(x-0)^n$ است.

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots \qquad (*)$$

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^{n-1} \quad (=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots)$$

$$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2} \quad (=2a_2+6a_3x+\cdots)$$

تذکر: نوشتن فرم‌های داخل پرانتز ضروری نیست و صرفاً جهت توضیح برای فرم سری‌ها هر یک و اینکه اندیس سری‌ها چرا یکی دیگر از چه عددی شروع شود، بیان شد.

اکنون y و y' و y'' را در معادله جایگذاری می‌کنیم که داریم

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^{n-1}+\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}a_n x^n=0$$

$$\xrightarrow{n\to n+2}\ \sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^n=\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}n a_n x^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2}+\underbrace{n a_n+a_n}_{(n+1)a_n}\}x^n=0 \Rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n=0 \quad ,n=0,1,2,3,\ldots$$

$$\Rightarrow a_{n+2}=\frac{-(n+1)a_n}{(n+2)(n+1)} \quad ,n=0,1,2,3,\ldots \Rightarrow a_{n+2}=\frac{-a_n}{n+2} \quad ,n=0,1,2,3,\ldots$$

$$\begin{cases} n=0 \to a_2=-\frac{a_0}{2}=-\frac{1}{2}a_0\\ n=1 \to a_3=-\frac{a_1}{3}=-\frac{1}{3}a_1\\ n=2 \to a_4=-\frac{a_2}{4}=-\frac{1}{4}(-\frac{1}{2}a_0)=\frac{1}{8}a_0\\ n=3 \to a_5=-\frac{a_3}{5}=-\frac{1}{5}(-\frac{1}{3}a_1)=\frac{1}{15}a_1\\ \vdots \end{cases}$$

در (*) جایگذاری می‌کنیم

$$\Rightarrow y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots=a_0+a_1x+(-\tfrac{1}{2}a_0)x^2+(-\tfrac{1}{3}a_1)x^3+(\tfrac{1}{8}a_0)x^4+(\tfrac{1}{15}a_1)x^5+\cdots$$

$$\Rightarrow y(x)=\underbrace{a_0}_{\text{همان نقش } c_1}\underbrace{(1-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{8}x^4-\cdots)}_{\text{همان } y_1(x)}+\underbrace{a_1}_{\text{همان نقش } c_2}\underbrace{(x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{15}x^5-\cdots)}_{\text{همان } y_2(x)}.$$

(۲) $y''+(x-1)y'+y=0$

حل) اولاً: $\left\{\begin{array}{l} p(x)=x-1 \\ q(x)=1 \end{array}\right.$ هر دو در $x=0$ تحلیلی اند ⟵ $x=0$ نقطهٔ عادی معادله است.

ثانیاً: طبق قضیه، جواب عمومی معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت (حول نقطهٔ عادی $x=0$):

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots \qquad (*)$$

$$\hookrightarrow y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\longrightarrow y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

و y' و y'' را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$y''+(x-1)y'+y=0\Longrightarrow y''+xy'-y'+y=0$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\xrightarrow{n\to n+2}\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n=\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}na_nx^n,\qquad \xrightarrow{n\to n+1}\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\Big\{(n+2)(n+1)a_{n+2}+\underbrace{na_n-(n+1)a_{n+1}+a_n}_{(n+1)a_n}\Big\}x^n=0$$

$$\Longrightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n-(n+1)a_{n+1}=0\ ,\quad n=0,1,2,3,\ldots$$

$$\Longrightarrow a_{n+2}=\frac{(n+1)a_{n+1}-(n+1)a_n}{(n+2)(n+1)}\ ,n=0,1,2,3,\ldots\Longrightarrow \boxed{a_{n+2}=\frac{a_{n+1}-a_n}{(n+2)}\ ,\ n=0,1,2,3,\ldots}$$

$$\rightsquigarrow\left\{\begin{array}{l} n=0\longrightarrow a_2=\dfrac{a_1-a_0}{2}=\dfrac{1}{2}a_1-\dfrac{1}{2}a_0 \\ n=1\longrightarrow a_3=\dfrac{a_2-a_1}{3}=\dfrac{1}{3}a_2-\dfrac{1}{3}a_1=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}a_1-\dfrac{1}{2}a_0\right)-\dfrac{1}{3}a_1=-\dfrac{1}{6}a_0-\dfrac{1}{6}a_1 \\ \quad\vdots \end{array}\right.$$

در $(*)$ جایگذاری می‌کنیم:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots=a_0+a_1x+\left(\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{2}a_0\right)x^2+\left(-\frac{1}{6}a_0-\frac{1}{6}a_1\right)x^3+\cdots$$

$$\Longrightarrow y(x)=a_0\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)+a_1\left(x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right).$$

---

* نکته: اگر $x=x_0\neq0$ یک نقطهٔ عادی معادله باشد و بخواهیم جواب به صورت سری حول نقطهٔ x_0 را به دست آوریم، برای سهولت، با تعویض متغیر $t=x-x_0$، معادله را به یک معادله که $t=0$ نقطهٔ عادی آن است تبدیل کرده و جواب معادله جدید را حول $t=0$ به دست می‌آوریم.

آنگاه $y'=\frac{dy}{dt}$ و $y''=\frac{d^2y}{dt^2}$

مثال: جواب معادلهٔ $y''+(x-1)^2y'-4(x-1)y=0$ را در حوالی $x=1$ به دست آورید.

حل) $p(x)=(x-1)^2$ و $q(x)=-4(x-1)$ ⟵ هر دو در $x=1$ تحلیلی اند ⟵ $x=1$ نقطهٔ عادی معادله است.

با تعویض متغیر $t=x-1$ داریم: (پس $dt=dx$)

$$\left\{\begin{array}{l} y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{dy}{dt} \\ y''=\dfrac{d}{dx}y'=\left(\dfrac{d}{dt}y'\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\right)\times1=\dfrac{d^2y}{dt^2} \end{array}\right.$$

در معادله قرار: $\frac{d^2y}{dt^2}+t^2\frac{dy}{dt}-4ty=0\longrightarrow$ $t=0$ نقطهٔ عادی معادله $\longrightarrow y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ ⟵ ادامهٔ حل مشابه قبل

مثال: جواب عمومی معادله‌ی $y''+xy=0$ را در مجاورت $x=0$ به دست آورید.

حل) اولاً: $P(x)=0$ و $q(x)=x$ که هر دو در $x=0$ تحلیلی اند ← $x=0$ یک نقطه‌ی عادی معادله است.

ثانیاً: جواب در مجاورت $x=0$ به صورت

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots \quad (*)$$

است و

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \rightsquigarrow y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

y' و y'' را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}a_nx^{n+1}=0$$

$$\xrightarrow{n\to n+2} \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$\xrightarrow{n\to n+1} \sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}(n+3)(n+2)a_{n+3}x^{n+1}$$

$$\Rightarrow 2a_2+\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+2)a_{n+3}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0$$

$$\Rightarrow 2a_2+\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+3)(n+2)a_{n+3}+a_n\}x^{n+1}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2a_2=0\\ (n+3)(n+2)a_{n+3}+a_n=0\ ,\ n=0,1,2,3,\ldots\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a_2=0\\ a_{n+3}=\dfrac{-a_n}{(n+3)(n+2)}\ ,\ n=0,1,2,3,\ldots\end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases}n=0 \to a_3=\dfrac{-a_0}{6}=-\dfrac{1}{6}a_0\\ n=1 \to a_4=-\dfrac{a_1}{12}=-\dfrac{1}{12}a_1\\ n=2 \to a_5=-\dfrac{a_2}{20}=0\\ n=3 \to a_6=-\dfrac{a_3}{30}=-\dfrac{1}{30}\left(-\dfrac{1}{6}a_0\right)=\dfrac{1}{180}a_0\\ n=4 \to a_7=-\dfrac{a_4}{42}=-\dfrac{1}{42}\left(-\dfrac{1}{12}a_1\right)=\dfrac{1}{504}a_1\\ \vdots \qquad \vdots\end{cases}$$

و به طور مشابه: $a_8=a_{11}=a_{14}=\cdots=0$ (مضاربی از a_2 هستند)

در (*) جایگذاری

$$\Rightarrow y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots=a_0+a_1x+0+\left(-\frac{1}{6}a_0\right)x^3+\left(-\frac{1}{12}a_1\right)x^4+0+\left(\frac{1}{180}a_0\right)x^6+\left(\frac{1}{504}a_1\right)x^7+\cdots$$

$$\Rightarrow y(x)=a_0\left(1-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{180}x^6-\cdots\right)+a_1\left(x-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{504}x^7-\cdots\right).$$

تمرین: جواب عمومی هر یک از معادلات زیر را در مجاورت $x=0$ به دست آورید:

(۱) $y''+(x+1)y'+4y=0$

(۲) $(1+x^2)y''-4xy'+6y=0 \longrightarrow$ توجه: $P(x)=\dfrac{-4x}{1+x^2}$ ، $q(x)=\dfrac{6}{1+x^2}$ $\longrightarrow$ $x=0$ نقطه‌ی عادی معادله

توجه: نکته اینجاست که در حل معادله، $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ و $y'(x)$ و $y''(x)$ را در $y''+x^2y''-4xy'+6y=0$ جایگذاری کنید و طرفین بر $1+x^2$ تقسیم نکنید!

* جواب به صورت سری در مجاورت یک نقطه‌ی تکین منظم (روش فروبنیوس):

در این بخش، روش حل معادله‌ی خطی مرتبه دوم به شکل

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (1)$$

را در یک همسایگی محذوف یک نقطه‌ی تکین منظم تشریح می‌کنیم. برای سهولت، فرض می‌کنیم $x=0$ یک نقطه‌ی تکین منظم معادله‌ی (1) باشد.

بنابراین $xp(x)$ و $x^2q(x)$ در $x=0$ تحلیلی هستند و بنابراین $P_0=\lim_{x\to 0} xp(x)$ و $q_0=\lim_{x\to 0} x^2q(x)$ موجودند. معادله زیر که به معادله‌ی شاخص متناظر با معادله‌ی (1) معروف است را در نظر بگیرید:

$$r^2+(P_0-1)r+q_0=0 \qquad (2)$$

اکنون با توجه به ریشه‌های معادله‌ی شاخص (2)، قضیه‌ی زیر را برای جواب‌های معادله‌ی (1) داریم.

* **قضیه:** فرض کنید $x=0$ یک نقطه‌ی تکین منظم معادله‌ی (1) باشد. همچنین فرض کنید معادله‌ی شاخص (2) دارای دو ریشه‌ی حقیقی r_1 و r_2 باشد و $r_2\le r_1$. آنگاه یکی از جواب‌های معادله‌ی (1) به شکل

$$y_1(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \quad a_0\neq 0$$

ضرایب a_n با جایگذاری $y_1(x)$ در معادله‌ی (1) تعیین می‌شوند.

است. به علاوه، برای جواب $y_2(x)$، مستقل خطی با $y_1(x)$، داریم:

(الف) اگر $r_1-r_2\notin \mathbb{Z}$ (یعنی r_1-r_2 یک عدد صحیح نباشد)، آنگاه

$$y_2(x)=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n, \quad b_0\neq 0.$$

ضرایب b_n با جایگذاری $y_2(x)$ در معادله‌ی (1) تعیین می‌شوند.

(ب) اگر $r_1-r_2=0$ (یعنی $r_1=r_2=r$)، آنگاه

$$y_2(x)=y_1(x)\ln x+x^{r}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n.$$

اگرچه ضرایب b_n را می‌توان با جایگذاری $y_2(x)$ در معادله تعیین کرد، ولی تعیین $y_2(x)$ با فرمول آبل، ساده‌تر است.

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}\,dx$$

(ج) اگر $r_1-r_2\in \mathbb{N}$ (یعنی r_1-r_2 عددی طبیعی باشد)، آنگاه

$$y_2(x)=C\,y_1(x)\ln x+x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n, \quad b_0\neq 0$$

که در آن C عدد ثابتی است که به $y_1(x)$ و $p(x)$ بستگی دارد و ممکن است صفر باشد.

* سری‌هایی که برای $y_1(x)$ و $y_2(x)$ در قضیه‌ی بالا ارائه شده‌اند، سری‌های فروبنیوس، و روش تشریح شده در قضیه‌ی بالا برای یافتن جواب‌های $y_1(x)$ و $y_2(x)$ از معادله‌ی (1)، روش فروبنیوس نامیده می‌شود.

در ادامه، به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال: جواب عمومی هریک از معادلات زیر را در مجاورت نقطه‌ی $x=0$ به دست آورید:

(1) $2x^2y''+xy'-(x+1)y=0$

از حالت (الف)

حل) اولاً: $P(x)=\frac{x}{2x^2}=\frac{1}{2x}$ و $q(x)=\frac{-(x+1)}{2x^2}$ ← ریشه‌ی مخرج: $x=0$ ← $x=0$ نقطه‌ی تکین معادله. همچنین:

$$\begin{cases} xP(x)=x\left(\frac{1}{2x}\right)=\frac{1}{2} \\ x^2q(x)=x^2\left(\frac{-(x+1)}{2x^2}\right)=\frac{-(x+1)}{2} \end{cases}$$

هر دو در $x=0$ تحلیلی‌اند ← $x=0$ نقطه‌ی تکین منظم معادله است.

ثانیاً: معادله‌ی شاخص:

$$r^2+(P_0-1)r+q_0=0 \longrightarrow r^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)r-\frac{1}{2}=0 \longrightarrow r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0 \longrightarrow 2r^2-r-1=0$$

$$P_0=\lim_{x\to 0} xP(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} \qquad q_0=\lim_{x\to 0} x^2q(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-(x+1)}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow r=\frac{1\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{1\pm 3}{4} \begin{cases} \frac{1+3}{4}=1 \\ \frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$r_1=1$ = ریشه‌ی بزرگتر و $r_2=-\frac{1}{2}$ = ریشه‌ی کوچکتر

$r_1-r_2=1-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\notin\mathbb{Z}$ ← طبق حالت (الف) از قضیه‌ی قبل (روش فروبنیوس):

$$y_1(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ a_0\neq 0 \quad \text{و} \quad y_2(x)=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,\ b_0\neq 0$$

اکنون برای یافتن ضرایب a_n و b_n باید $y_1(x)$ و $y_2(x)$ را در معادله جایگذاری کنیم. تذکر اینکه در حالت (الف) چون شکل ظاهری (فرمول) دو جواب y_1 و y_2 به صورت کلی $y=x^r\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ هستند بنابراین برای اینکه ناچار نباشیم یکبار y_1 را در معادله جایگذاری و ضرایب a_n را حساب، و بار دیگر y_2 را در معادله جایگذاری و ضرایب b_n را حساب کنیم، برای کاستن از حجم محاسبات کافی است ابتدا فرم کلی $y=x^r\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ را در معادله جایگذاری و رابطه‌ی بازگشتی بین c_n ها را به دست آوریم، سپس در رابطه‌ی بازگشتی به دست آمده برای c_n ها، یکبار جای r عدد r_1 را قرار دهیم که رابطه‌ی بین c_n ها همان رابطه‌ی بازگشتی برای a_n ها است، و بار دیگر به جای r عدد r_2 را قرار دهیم که رابطه‌ی بین c_n ها همان رابطه‌ی بازگشتی برای b_n ها خواهد بود.

پس اکنون $y=x^r\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$y=x^r\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r} \longrightarrow y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1} \longrightarrow y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}$$

y، y' و y'' را در معادله جایگذاری:

$$2x^2y''+xy'-(x+1)y=0 \Rightarrow 2x^2y''+xy'-xy-y=0$$

$$\Rightarrow 2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}+x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}-x\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

$$\Rightarrow \sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r}+\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r+1}-\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

$$\xrightarrow{\text{از } x^r \text{ فاکتورگیری}} x^r\left(\sum_{n=0}^{\infty}\{\underbrace{2(n+r)(n+r-1)+(n+r)-1}_{(n+r-1)(2n+2r+1)}\}c_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}\right)=0$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین بر } x^r \text{ تقسیم}} \sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(2n+2r+1)c_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}=0$$

$$\underbrace{(0+r-1)(0+2r+1)c_0x^0}_{(r-1)(2r+1)c_0}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)(2n+2r+1)c_nx^n}_{\substack{n\to n+1 \\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(2n+2r+3)c_{n+1}x^{n+1}}}$$

$$\Longrightarrow (r-1)(2r+1)c_0+\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}(n+r)(2n+2r+3)c_{n+1}x^{n+1}-\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}c_nx^{n+1}=0$$

$$\Longrightarrow \underbrace{(r-1)(2r+1)c_0}_{=0}+\sum_{n=0}^{\infty}\{\underbrace{(n+r)(2n+2r+3)c_{n+1}-c_n}_{=0}\}x^{n+1}=0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}(r-1)(2r+1)c_0=0 \xrightarrow{c_0\neq0} r-1=0,\ 2r+1=0 \longrightarrow \underset{r_1 \text{ فرض}}{r=1},\ \underset{r_2 \text{ فرض}}{r=-\frac{1}{2}} \\ (n+r)(2n+2r+3)c_{n+1}-c_n=0,\ n=0,1,2,3,\dots \Longrightarrow c_{n+1}=\dfrac{c_n}{(n+r)(2n+2r+3)},\ n=0,1,2,3,\dots\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}\xrightarrow{r=r_1=1} a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(n+1)(2n+2(1)+3)} \Longrightarrow a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(n+1)(2n+5)},\ n=0,1,2,3,\dots \\ \xrightarrow{r=r_2=-\frac{1}{2}} b_{n+1}=\dfrac{b_n}{(n-\frac{1}{2})(2n+2(-\frac{1}{2})+3)} \Longrightarrow b_{n+1}=\dfrac{b_n}{(n-\frac{1}{2})(2n+2)},\ n=0,1,2,3,\dots\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}a_1=\frac{1}{5}a_0,\ a_2=\frac{1}{70}a_0,\ \dots \Longrightarrow y_1(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=x\left(a_0+\frac{1}{5}a_0x+\frac{1}{70}a_0x^2+\dots\right) \\ b_1=-b_0,\ b_2=-\frac{1}{2}b_0,\ \dots \Longrightarrow y_2(x)=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=x^{-\frac{1}{2}}\left(b_0-b_0x-\frac{1}{2}b_0x^2+\dots\right)\end{cases}$$

$a_0\neq0$ دلخواه

$$\xrightarrow{\text{با اختیار } a_0=1} x\left(1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{70}x^2+\dots\right)$$

$b_0\neq0$ دلخواه

$$\xrightarrow{\text{با اختیار } b_0=1} x^{-\frac{1}{2}}\left(1-x-\frac{1}{2}x^2+\dots\right)$$

و بنابراین:

جواب عمومی معادله $=y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=?$ ✓✓

تمرین (۲)
$$\begin{cases}3xy''+2y'+y=0 \\ 2xy''+(1+x)y'+y=0\end{cases}$$

۴۸

(۳) $xy''+y'-4y=0$ ← از حالت (ب)

حل) اولاً: $p(x)=\frac{1}{x}$ و $q(x)=-\frac{4}{x}$ ← مخرج‌ها صفر: $x=0$ ← $x=0$ نقطه‌ی تکین معادله است. همچنین:

$$\left\{\begin{array}{l} xp(x)=x\left(\frac{1}{x}\right)=1 \\ x^2q(x)=x^2\left(-\frac{4}{x}\right)=-4x \end{array}\right\} \Rightarrow$$ هر دو در $x=0$ تحلیلی هستند ← $x=0$ نقطه‌ی تکین منظم معادله است.

ثانیاً: معادله‌ی شاخصی معادله:

$$r^2+(p_0-1)r+q_0=0 \longrightarrow r^2+(1-1)r+0=0 \longrightarrow r^2=0 \rightsquigarrow r_1=r_2=0$$

$$p_0=\lim_{x\to 0} xp(x)=\lim_{x\to 0}(1)=1 \qquad q_0=\lim_{x\to 0} x^2q(x)=\lim_{x\to 0}(-4x)=0$$

$r_1=r_2=0$ ← حالت (ب) قضیه (روش فروبنیوس):

r

$$y_1(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ a_0\neq 0 \quad , \quad y_2(x)=y_1(x)\ln x+x^{r}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,\ b_0\neq 0$$

در معادله جایگذاری و a_nها را بیابیم

با استفاده از فرمول کلی، y_2 را می‌یابیم.

اکنون، برای یافتن a_nها، y_1 را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$y_1(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \xrightarrow{r_1=0} x^0\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots \qquad (*)$$

$$\Rightarrow y_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \rightsquigarrow y_1''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2} \longrightarrow$$

y_1 و y_1' و y_1'' را در معادله قرار می‌دهیم:

$$xy''+y'-4y=0$$

$$\Rightarrow x\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1} \xrightarrow{n\to n+2} \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \xrightarrow{n\to n+1} \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1}+\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-4\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\Rightarrow \sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+1)a_{n+1}-4a_n\}x^n=0$$

$$\left((0+1)a_{0+1}-4a_0\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\{(n+1)a_{n+1}-4a_n\}x^n$$

$$(a_1-4a_0)$$

$$\xrightarrow{n\to n+1} \sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}\{(n+2)a_{n+2}-4a_{n+1}\}x^{n+1}$$

$$\Rightarrow (a_1-4a_0)+\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+2)a_{n+2}-4a_{n+1}\}x^{n+1}=0$$

$$(n+2)(n+1+1)a_{n+2}=(n+2)^2a_{n+2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a_1-4a_0)}_{=0}+\sum_{n=0}^{\infty}\{\underbrace{(n+2)^2a_{n+2}-4a_{n+1}}_{=0}\}x^{n+1}=0$$

$$a_1 - 4a_0 = 0 \longrightarrow a_1 = 4a_0$$

$$(n+2)^2 a_{n+2} - 4a_{n+1} = 0 \ , \ n = 0,1,2,3,\dots \longrightarrow a_{n+2} = \frac{4a_{n+1}}{(n+2)^2} \ , \ n = 0,1,2,3,\dots$$

$$\longrightarrow a_1 = 4a_0 \ , \ a_2 = 4a_0 \ , \ a_3 = \frac{16}{9}a_0 \ , \ \dots \xrightarrow{\text{به ازاء } a_0 \neq 0}$$ در (*) جایگذاری

$$\Longrightarrow y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{r_1=0}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = a_0 + 4a_0 x + 4a_0 x^2 + \frac{16}{9}a_0 x^3 + \dots$$

$$= 1 + 4x + 4x^2 + \dots \longleftarrow a_0 = 1 \text{ اختیار کنیم}$$

$$\Longrightarrow y_1(x) = 1 + 4x + 4x^2 + \dots$$

اکنون برای یافتن $y_2(x)$ ، از فرمول آبل استفاده می‌کنیم:

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx$$

? اول y_1^2 سپس $\frac{1}{y_1^2}$

$$\longrightarrow y_1^2 = y_1 \times y_1 = (1 + 4x + 4x^2 + \dots)(1 + 4x + 4x^2 + \dots)$$

$$= 1 + 8x + 24x^2 + \dots$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{y_1^2} = \frac{1}{1 + 8x + 24x^2 + \dots} = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots \xRightarrow{\text{طرفین وسطین}} 1 = (1 + 8x + 24x^2 + \dots)(k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots)$$

در $x=0$ تحلیلی است ؛ زیرا $x=0$ ریشه مخرج نیست. (**)

$$\Longrightarrow 1 = k_0 + (k_1 + 8k_0)x + (k_2 + 8k_1 + 24k_0)x^2 + \dots \Longrightarrow \begin{cases} 1 = k_0 \\ k_1 + 8k_0 = 0 \longrightarrow k_1 = -8 \\ k_2 + 8k_1 + 24k_0 = 0 \longrightarrow k_2 = 40 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{y_1^2} = 1 - 8x + 40x^2 + \dots$$ ← در (**) جایگذاری

→ در فرمول آبل جایگذاری

بنابراین خواهیم داشت:

$$y_2(x) = y_1(x)\int (1 - 8x + 40x^2 + \dots) e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx = y_1(x)\int (1 - 8x + 40x^2 + \dots)\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$e^{-\ln x} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$\Longrightarrow y_2(x) = y_1(x)\int \left(\frac{1}{x} - 8 + 40x + \dots\right)dx = y_1(x)\left(\ln x - 8x + 20x^2 + \dots\right)$$

$$\Longrightarrow y_2(x) = y_1(x)\ln x + y_1(x)\left(-8x + 20x^2 + \dots\right).$$

بنابراین: جواب عمومی معادله $= y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = ?$

تمرین ۴) $xy'' + y' + xy = 0$

ص ۷۰

(۵) $xy''+3y'-y=0$

از حالت (ج)

حل) اولاً: $P(x)=\frac{3}{x}$ و $q(x)=-\frac{1}{x}$ ← $x=0$: ریشه‌ی مخرج‌ها ← $x=0$ نقطه‌ی تکین معادله است. همچنین

$$\left\{\begin{array}{l} xP(x)=x\left(\frac{3}{x}\right)=3 \\ x^2q(x)=x^2\left(-\frac{1}{x}\right)=-x \end{array}\right\} \Rightarrow$$ هر دو در $x=0$ تحلیلی هستند ← $x=0$ نقطه‌ی تکین منظم معادله است

ثانیاً: معادله شاخص:

$$r^2+(P_0-1)r+q_0=0 \longrightarrow r^2+(3-1)r+0=0 \longrightarrow r^2+2r=0 \longrightarrow r(r+2)=0$$

$$P_0=\lim_{x\to 0} xP(x)=\lim_{x\to 0}(3)=3 \qquad q_0=\lim_{x\to 0} x^2q(x)=\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

$\Rightarrow r=0,\ r=-2 \longrightarrow r_1=$ ریشه‌ی بزرگتر $=0$ و $r_2=$ ریشه‌ی کوچکتر $=-2 \Rightarrow r_1-r_2=0-(-2)=2$

$r_1-r_2=2\in\mathbb{N}$ (عدد طبیعی) ← پس طبق حالت (ج) قضیه (روش فروبنیوس):

$$y_1(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad a_0\neq 0 \qquad \text{و} \qquad y_2(x)=C\,y_1(x)\ln x+x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,\quad b_0\neq 0$$

با جایگذاری در معادله — با فرمول آبل

$$y_1(x)=x^0\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots \quad (*)$$

$$y_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \longrightarrow y_1''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$ ← y_1 و y_1' و y_1'' در معادله قرار

$$xy''+3y'-y=0 \Rightarrow x\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+3\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}}_{n\to n+2}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}3na_nx^{n-1}}_{n\to n+1}-\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1} \qquad \sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}3(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$\Rightarrow \sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3(n+1)a_{n+1}-a_n\right\}x^n=0$$

$$\left(3(0+1)a_{0+1}-a_0\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{3(n+1)a_{n+1}-a_n\right\}x^n$$

$$3a_1-a_0 \qquad \sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}\left\{3(n+2)a_{n+2}-a_{n+1}\right\}x^{n+1} \quad (n\to n+1)$$

$$\Rightarrow (3a_1-a_0)+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+2)(n+1)a_{n+2}+3(n+2)a_{n+2}-a_{n+1}\right\}x^{n+1}=0$$

$$(n+2)(n+1+3)a_{n+2}=(n+2)(n+4)a_{n+2}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{(3a_1-a_0)}_{=0}+\sum_{n=0}^{\infty}\{\underbrace{(n+2)(n+4)a_{n+2}-a_{n+1}}_{=0}\}x^{n+1}=0$$

$$\begin{cases} 3a_1-a_0=0 \longrightarrow a_1=\frac{1}{3}a_0 \\ (n+2)(n+4)a_{n+2}-a_{n+1}=0\ ,\ n=0,1,2,3,\dots \longrightarrow a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}}{(n+2)(n+4)}\ ,\ n=0,1,2,3,\dots \end{cases}$$

$$\longrightarrow a_2=\frac{1}{24}a_0\ ,\ a_3=\frac{1}{360}a_0\ ,\ \dots \xrightarrow{\text{از لحاظ } a_0\neq 0} \longrightarrow$$ در (*) جایگذاری می‌کنیم

$$\xRightarrow[\text{قرار}]{\text{در }(*)} y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots=a_0+\frac{1}{3}a_0x+\frac{1}{24}a_0x^2+\dots=1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{24}x^2+\dots$$

$a_0=1$ اختیار می‌کنیم

$$\Longrightarrow y_1(x)=1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{24}x^2+\dots$$

اکنون برای یافتن $y_2(x)$ از فرمول آبل استفاده می‌کنیم. یعنی

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx$$

ابتدا y_1^2 سپس $\frac{1}{y_1^2}$ ؟

$$\Longrightarrow y_1^2=y_1\times y_1=\left(1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{24}x^2+\dots\right)\left(1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{24}x^2+\dots\right)=1+\frac{2}{3}x+\frac{7}{36}x^2+\dots$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{y_1^2}=\frac{1}{1+\frac{2}{3}x+\frac{7}{36}x^2+\dots}=K_0+K_1x+K_2x^2+\dots$$

در $x=0$ تحلیلی است

طرفین در مخرج ضرب (**)

$$\left(1+\frac{2}{3}x+\frac{7}{36}x^2+\dots\right)(K_0+K_1x+K_2x^2+\dots)=1$$

$$\Longrightarrow K_0+\left(K_1+\frac{2}{3}K_0\right)x+\left(K_2+\frac{2}{3}K_1+\frac{7}{36}K_0\right)x^2+\dots=1 \Longrightarrow \begin{cases} K_0=1 \\ K_1+\frac{2}{3}K_0=0 \longrightarrow K_1=-\frac{2}{3} \\ K_2+\frac{2}{3}K_1+\frac{7}{36}K_0=0 \longrightarrow K_2=\frac{1}{4} \\ \vdots \end{cases}$$

$$\xRightarrow[\text{قرار}]{\text{در }(**)} \frac{1}{y_1^2}=1-\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}x^2+\dots$$

در فرمول آبل جایگذاری می‌کنیم

$$\Longrightarrow y_2(x)=y_1(x)\int\left(1-\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}x^2+\dots\right)e^{-\int\frac{3}{x}dx}dx=y_1(x)\int\left(1-\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}x^2+\dots\right)\left(\frac{1}{x^3}\right)dx$$

$$e^{-3\,Ln\,x}=x^{-3}=\frac{1}{x^3}$$

$$\Longrightarrow y_2(x)=y_1(x)\int\left(\frac{1}{x^3}-\frac{2}{3x^2}+\frac{1}{4x}+\dots\right)dx=y_1(x)\left(-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{3x}+\frac{1}{4}Ln\,x+\dots\right)\ \checkmark$$

$$\Longrightarrow y_2(x)=\frac{1}{4}y_1(x)\,Ln\,x+y_1(x)\left(-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{3x}+\dots\right)$$

جواب عمومی معادله $= y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=?\ \checkmark\checkmark$

و نیاز است :

* تذکر: اگر مثلاً در یک معادله، پس از حل رسیدیم به اینکه (مثلاً)

برای قسمت (**) مثال بالا

$$\frac{1}{y_1^2}=\frac{1}{x+\frac{1}{3}x^2-5x^3+\dots}$$ ، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

در $x=0$ تحلیلی نیست چون $x=0$ ریشه مخرج است

$$\frac{1}{y_1^2}=\frac{1}{x\left(1+\frac{1}{3}x-5x^2+\dots\right)}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}x-5x^2+\dots}\right)$$

در $x=0$ تحلیلی $\longrightarrow$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{3}x-5x^2+\dots}=K_0+K_1x+K_2x^2+\dots$$

در $x=0$ تحلیلی

تمرین (۶) $x^2y''+x(x-2)y'+2y=0$

تمرین (۷) $x^2y''-(x+2)y=0$

* معادلهٔ بسل :

* **تعریف (معادله بسل) :** معادلهٔ

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0 \qquad (1)$$

که در آن $p\geq 0$ عدد ثابتی است را معادلهٔ بسل مرتبهٔ p می‌نامند. توجه شود که $x=0$ نقطهٔ تکین معادله (1) است.

برای $x>0$، با روش فروبنیوس، برای معادلهٔ (1) در مجاورت نقطهٔ $x=0$ داریم:

$$\begin{cases}P(x)=\dfrac{1}{x}\\ q(x)=\dfrac{x^2-p^2}{x^2}\end{cases} \longrightarrow xp(x)=1 \quad \text{و} \quad x^2q(x)=x^2-p^2$$

هر دو در $x=0$ تحلیلی اند بنابراین $x=0$ یک نقطهٔ تکین منظم معادله (1) است.

معادلهٔ شاخص :

$$r^2+(p_0-1)r+q_0=0$$

$$\Longrightarrow r^2+0-p^2=0 \Longrightarrow r^2=p^2 \Longrightarrow r=\pm p \longrightarrow r_1=p,\ r_2=-p$$

$$p_0=\lim_{x\to 0}xp(x)=1\ ,\ q_0=\lim_{x\to 0}x^2q(x)=-p^2$$

و بنابراین با توجه به $r_1-r_2=p-(-p)=2p$، در حالت کلی، بر حسب مقادیر مختلف p و براساس روش فروبنیوس، نتایج زیر حاصل می‌شود:

* **حالت ۱:** اگر $p\notin\mathbb{Z}$ (p عدد صحیح نباشد)، آنگاه $\boxed{y_1(x)=J_p(x)}$ و $y_2(x)=J_{-p}(x)$ و بنابراین

$$\text{(1) جواب عمومی} = y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=c_1J_p(x)+c_2J_{-p}(x)$$

که در آن $J_p(x)$، تابع بسل نوع اول از مرتبهٔ p است (جلوتر معرفی می‌شود).

* **حالت ۲:** اگر $p=0$، آنگاه $\boxed{y_1(x)=J_p(x)}=J_0(x)$ و $y_2(x)=y_1(x)\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ و بنابراین

b_n ها با فرمول بالا نیز قابل محاسبه

$$\text{(1) جواب عمومی} = y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

* **حالت ۳:** اگر $p\in\mathbb{N}$ (p عددی طبیعی باشد)، آنگاه $\boxed{y_1(x)=J_p(x)}$ و $y_2(x)=Cy_1(x)\ln x+x^{-p}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ و

b_n ها با فرمول بالا نیز قابل محاسبه

$$\text{(1) جواب عمومی} = y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x).$$

* **تعریف (تابع بسل نوع اول مرتبهٔ p) :** برای $x>0$ و $p\geq 0$، این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\underbrace{\Gamma(n+p+1)}_{\text{تابع گاما}}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

نتیجه: براساس تعریف فوق،

$$J_{-p}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}$$

* **توابع بسل $J_0(x)$ و $J_1(x)$:** با توجه به ضابطهٔ $J_p(x)$ و رابطهٔ $\Gamma(n+1)=n!$ داریم:

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}-\cdots \quad \text{و} \quad J_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{16}+\frac{x^5}{384}-\cdots$$

*تعریف (تابع بسل نوع دوم مرتبهٔ p): به هر جواب از معادلهٔ بسل (۱) که با جواب $y(x)=J_p(x)$ ، $x>0$ مستقل خطی باشد را تابع بسل نوع دوم مرتبهٔ p می‌نامند و آن را با $Y_p(x)$ نمایش می‌دهند.

*نتیجه: برای هر $p\geq 0$ ، جواب عمومی معادلهٔ بسل (۱) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$y(x)=c_1 J_p(x)+c_2 Y_p(x).$$

که البته می‌توان به فرم‌هایی که در سه حالت ۱، ۲ و ۳ صفحهٔ قبل بیان شده نوشت.

مثال: جواب عمومی معادلهٔ

$$x^2y''+xy'+(x^2-\tfrac{1}{4})y=0, \quad x>0$$

را بدست آورید.

$\tfrac14 \to p^2 \to p=\pm\tfrac12 \xrightarrow{p\geq0} p=\tfrac12$

حل) معادلهٔ بسل از مرتبهٔ $p=\frac{1}{2}$ است $\leftarrow$ $p=\frac12\notin\mathbb{Z}$ ، بنابراین طبق حالت ۱ صفحهٔ قبل،

$$\text{جواب عمومی}=y(x)=c_1J_p(x)+c_2J_{-p}(x)=c_1J_{\frac12}(x)+c_2J_{-\frac12}(x).$$

تمرین: مطلوبست جواب عمومی معادلهٔ $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{25}{9})y=0$ که $x>0$.

مثال: مطلوبست جواب عمومی معادلهٔ $xy''+y'+xy=0$ که $x>0$.

حل) ابتدا با ضرب طرفین معادله در x بدست می‌آوریم:

$$x^2y''+xy'+x^2y=0 \longrightarrow p=0 \text{ معادلهٔ بسل مرتبهٔ}$$

(x^2-0^2)

بنابراین طبق حالت ۲ صفحهٔ قبل،

$$\begin{cases} y_1(x)=J_p(x)=J_0(x)=1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}-\cdots \\ y_2(x)=y_1(x)\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n \end{cases}$$

که برای یافتن $y_2(x)$ ، با استفاده از فرمول آبل داریم:

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx=y_1(x)\int\left(1+\tfrac12x^2+\tfrac{5}{32}x^4+\cdots\right)\left(\tfrac1x\right)dx=y_1(x)\left(\ln x+\tfrac14x^2+\tfrac{5}{128}x^4+\cdots\right)$$

$e^{-\int p(x)dx}=\frac1x$

?

$$\frac{1}{y_1^2} \xrightarrow{\text{ابتدا } y_1^2 \text{ سپس}} y_1^2=y_1\times y_1=\left(1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}-\cdots\right)\left(1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}-\cdots\right)$$

$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{32}x^4-\cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y_1^2}=\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{32}x^4-\cdots}=K_0+K_1x+K_2x^2+\cdots \xrightarrow[\text{در طرفین}]{\text{ضرب}} 1=\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{32}x^4-\cdots\right)(K_0+K_1x+K_2x^2+\cdots)$$

در $x=0$ تحلیلی است

$$\Rightarrow \cdots \longrightarrow K_0=1,\ K_1=0,\ K_2=\frac12,\ K_3=0,\ K_4=\frac{5}{32},\ \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y_1^2}=1+\frac12x^2+\frac{5}{32}x^4+\cdots$$

و بدین ترتیب جواب عمومی معادله به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\text{جواب عمومی}=y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=\ ?\ \checkmark\checkmark$$

تمرین: جواب عمومی معادلهٔ بسل مرتبهٔ یک را بدست آورید.

* **برخی ویژگی‌های تابع بسل:** در زیر به چند ویژگی مهم از توابع بسل اشاره می‌کنیم:

① $\frac{d}{dx}\left(x^p J_p(x)\right) = x^p J_{p-1}(x) \longrightarrow$ ② $x^p J_p(x) = \int x^p J_{p-1}(x)\,dx$

③ $\frac{d}{dx}\left(x^{-p} J_p(x)\right) = -x^{-p} J_{p+1}(x) \longrightarrow$ ④ $-x^{-p} J_p(x) = \int x^{-p} J_{p+1}(x)\,dx$

* **نتیجه ۱:** با توجه به فرمول $\frac{d}{dx}(fg) = f'g + fg'$ و از رابطه‌های ① و ③ به دست می‌آوریم:

⑤ $J_p'(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x} J_p(x)$ ⑥ $J_p'(x) = -J_{p+1}(x) + \frac{p}{x} J_p(x)$.

* **نتیجه ۲:** از مجموع و تفاضل رابطه‌های ⑤ و ⑥ نیز به دست می‌آید که

⑦ $J_p'(x) = \frac{1}{2}\left(J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x)\right)$ ⑧ $J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) - J_{p-1}(x)$.

* **معادله بسل پارامتری:**

این معادله به شکل $x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - p^2)y = 0$ است که با تعویض متغیر $t = \lambda x$ به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - p^2)y = 0 \quad (*)$$

که یک معادله بسل مرتبه p با متغیر مستقل t و تابع مجهول $y(t)$ است که با حل آن آشنا هستیم و جواب عمومی $(*)$ از روی حل معادله بسل، تعیین می‌شود.

مثال: مطلوبست جواب عمومی معادلات زیر:

① $9x^2y'' + 9xy' + 4(9x^2 - 1)y = 0$

حل) ابتدا با تقسیم طرفین بر 9 داریم:

$x^2y'' + xy' + (4x^2 - \frac{4}{9})y = 0 \longrightarrow$ یک معادله بسل پارامتری با $\lambda = 2$ و $p = \frac{2}{3}$

$\lambda^2 \to \lambda = 2$ ، $p^2 \to p = \frac{2}{3}$

با تعویض متغیر $t = \lambda x = 2x$ به معادله بسل زیر می‌رسیم

$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - \frac{4}{9})y = 0 \ (*) \longrightarrow$ معادله بسل مرتبه $p = \frac{2}{3} \longrightarrow p = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$

بنابراین طبق حالت ۱، جواب عمومی $(*)$ به صورت زیر است:

$y(t) = c_1 J_p(t) + c_2 J_{-p}(t) = c_1 J_{\frac{2}{3}}(t) + c_2 J_{-\frac{2}{3}}(t) \xrightarrow{t=2x} c_1 J_{\frac{2}{3}}(2x) + c_2 J_{-\frac{2}{3}}(2x) =$ همان جواب عمومی معادله اصلی مسئله

② تمرین $4x^2y'' + 4xy' + (8x^2 - 1)y = 0$

* **تذکر:** برخی از معادلات دیفرانسیل را می‌توان با استفاده از تعویض متغیرهای مناسبی، به معادله بسل تبدیل کرد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال: ابتدا با استفاده از تعویض متغیر $z=\sqrt{x}$، معادله زیر را به یک معادله بسل تبدیل کرده و سپس جواب عمومی معادله را تعیین کنید:

$$4x^2y''+4xy'+(x-\frac{9}{4})y=0$$

حل) ابتدا محاسبه y' و y'' برحسب z:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\times\frac{1}{2z}=\frac{1}{2z}\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2z}$$

$$y''=\frac{d}{dx}(y')=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2z}\frac{dy}{dz}\right)=\underbrace{\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2z}\frac{dy}{dz}\right)}\cdot\frac{dz}{dx}=\left(-\frac{1}{2z^2}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{2z}\frac{d^2y}{dz^2}\right)\left(\frac{1}{2z}\right)=-\frac{1}{4z^3}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{4z^2}\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2z}$$

با جایگذاری y' و y'' در معادله داریم:

$$4(z^4)\left(-\frac{1}{4z^3}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{4z^2}\frac{d^2y}{dz^2}\right)+4z^2\left(\frac{1}{2z}\frac{dy}{dz}\right)+(z^2-\frac{9}{4})y=0$$

$$\Rightarrow z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+(z^2-\frac{9}{4})y=0 \longrightarrow$$ یک معادله بسل از مرتبه $p=\frac{3}{2}$ $\longrightarrow p=\frac{3}{2}\notin\mathbb{Z}\longrightarrow$ طبق حالت ۱:

$$p=\frac{3}{2}\leftarrow p^2$$

جواب عمومی $=y(z)=c_1J_{\frac{3}{2}}(z)+c_2J_{-\frac{3}{2}}(z)\xrightarrow{z=\sqrt{x}}c_1J_{\frac{3}{2}}(\sqrt{x})+c_2J_{-\frac{3}{2}}(\sqrt{x}).$

مثال: با استفاده از تعویض متغیر $x=t^3$، جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید:

$$9x^2y''+9xy'+(x^{\frac{2}{3}}-2)y=0$$

حل) ابتدا محاسبه y' و y'':

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\left(\frac{1}{3}t^{-2}\right)=\frac{1}{3}t^{-2}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dt}{dx}\to\frac{1}{3}t^{-2}$$

$$?\to x=t^3\to t=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}\to\frac{dt}{dx}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}(t^3)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}t^{-2}$$

$$y''=\frac{d(y')}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}t^{-2}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{3}\underbrace{\frac{d}{dt}\left(t^{-2}\frac{dy}{dt}\right)}\times\frac{dt}{dx}=\frac{1}{3}\left(-2t^{-3}\frac{dy}{dt}+t^{-2}\frac{d^2y}{dt^2}\right)\left(\frac{1}{3}t^{-2}\right)$$

$$\frac{dt}{dx}\to\frac{1}{3}t^{-2}$$

$$=-\frac{2}{9}t^{-5}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{9}t^{-4}\frac{d^2y}{dt^2}$$

y' و y'' را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$9(t^6)\left(-\frac{2}{9}t^{-5}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{9}t^{-4}\frac{d^2y}{dt^2}\right)+9t^3\left(\frac{1}{3}t^{-2}\frac{dy}{dt}\right)+\left((t^3)^{\frac{2}{3}}-2\right)y=0$$

$$\Rightarrow -2t\frac{dy}{dt}+t^2\frac{d^2y}{dt^2}+3t\frac{dy}{dt}+(t^2-2)y=0\longrightarrow t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+(t^2-2)y=0\longrightarrow$$

$$p^2\to p=\sqrt{2}$$

بسل از مرتبه $p=\sqrt{2}$ $\longrightarrow p=\sqrt{2}\notin\mathbb{Z}\longrightarrow$ طبق حالت ۱:

جواب عمومی $=y(t)=c_1J_{\sqrt{2}}(t)+c_2J_{-\sqrt{2}}(t)\xrightarrow{t=\sqrt[3]{x}}c_1J_{\sqrt{2}}(\sqrt[3]{x})+c_2J_{-\sqrt{2}}(\sqrt[3]{x})$

تمرین: جواب عمومی هر یک از معادلات زیر را با استفاده از تعویض متغیرهای داده شده بدست آورید:

① $x^2y''+xy'+(4x-\frac{9}{64})y=0\ ,\ z=4\sqrt{x}$

② $y''+(e^{2x}-\frac{1}{4})y=0\ ,\ t=e^x$

این فصل را با معرفی معادلهٔ لژاندر و بیان ویژگی‌هایی از جواب آن به پایان می‌رسانیم.

*** معادلهٔ لژاندر و چندجمله‌ای لژاندر:**

* **تعریف:** معادلهٔ دیفرانسیل

$$(1-x^2)y''-2xy'+P(P+1)y=0 \qquad (1)$$

که در آن P عدد حقیقی ثابتی است، معادلهٔ لژاندر نام دارد. نقطهٔ $x=0$ یک نقطهٔ عادی معادلهٔ لژاندر (1) است. بنابراین برای $-1<x<1$، جواب عمومی این معادله را می‌توان به شکل یک سری نامتناهی در مجاورت $x=0$ به صورت $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ نوشت که پس از جایگذاری در (1) و محاسبهٔ رابطهٔ بین ضرایب a_n، جواب عمومی به شکل زیر بدست می‌آید:

$$y(x)=a_0\underbrace{\left(1-\frac{P(P+1)}{2!}x^2+\frac{(P-2)P(P+1)(P+3)}{4!}x^4-\cdots\right)}_{\text{همان } y_1(x)}+a_1\underbrace{\left(x-\frac{(P-1)(P+1)}{3!}x^3+\frac{(P-3)(P-1)(P+2)(P+4)}{5!}x^5-\cdots\right)}_{\text{همان } y_2(x)}$$

که a_0 و a_1 ثابت‌های دلخواهی‌اند.

*** چندجمله‌ای لژاندر:** این چندجمله‌ای برای $n=0,1,2,3,\ldots$ به صورت زیر هستند:

$$P_n(x)=\sum_{K=0}^{M}\frac{(-1)^K(2n-2K)!}{2^n K!(n-K)!(n-2K)!}x^{n-2K}, \quad n=0,1,2,3,\ldots$$

که در آن:
$$M=\begin{cases}\frac{n}{2} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد}\\ \frac{n-1}{2} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد}\end{cases}.$$

*** نکته:** هر $P_n(x)$، یک جواب برای معادلهٔ لژاندر (1) با $P=n$ است (یعنی $P_n(x)$ نقش همان جواب $y_1(x)$ از معادلهٔ (1) با $P=n$ آن)

*** نتیجه:**

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\quad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\quad P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),\ldots$$

$P_0(x)=1$: همان جواب $y_1(x)$ از معادلهٔ لژاندر با $P=0$ ← با فرمول آبل: $y_2(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$P_1(x)=x$: همان جواب $y_1(x)$ از معادلهٔ لژاندر با $P=1$ ← $y_2(x)=1+\frac{1}{2}x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

*** برخی ویژگی‌های چندجمله‌ای لژاندر:**

۱- این چندجمله‌ای در بازهٔ $(-1,1)$ یک مجموعهٔ متعامد تشکیل می‌دهند، یعنی:

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \frac{2}{2n+1} & n=m\end{cases}\quad (n=0,1,2,3,\ldots)$$

۲- این چندجمله‌ای در رابطهٔ بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$P_{n+1}(x)=\frac{(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)}{n+1},\quad n=1,2,3,\ldots$$

بنابراین با توجه به اینکه $P_0(x)=1$ و $P_1(x)=x$، می‌توان با استفاده از رابطهٔ فوق همهٔ چندجمله‌ای لژاندر را بدست آورد.

۳- فرمول رودریگ: برای چندجمله‌ای لژاندر، رابطهٔ زیر نیز برقرار است:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right),\quad n=0,1,2,3,\ldots.$$

Created in Master PDF Editor - Demo Version

* فصل ۶: دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل

در این فصل، با بیان مثال‌هایی، روش‌های حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل به دو روش لاپلاس و حذفی را بیان می‌کنیم.

مثال: دستگاه زیر را با روش لاپلاس حل کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 3y_1 - 2y_2 + e^t & ① \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 5y_1 - 3y_2 & ② \end{cases} \qquad y_1(0) = y_2(0) = 0$$

هدف: یافتن $y_1(t)$ و $y_2(t)$ است.

حل) از طرفین هر یک از معادلات تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 + e^t \\ y_2' = 5y_1 - 3y_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} L\{y_1'\} = 3L\{y_1\} - 2L\{y_2\} + L\{e^t\} \\ L\{y_2'\} = 5L\{y_1\} - 3L\{y_2\} \end{cases}$$

با فرض $L\{y_1\} = Y_1(s)$ و $L\{y_2\} = Y_2(s)$ داریم:

$$\Longrightarrow \begin{cases} sL\{y_1\} - \underbrace{y_1(0)}_{=0} = 3Y_1(s) - 2Y_2(s) + \dfrac{1}{s-1} \\ sL\{y_2\} - \underbrace{y_2(0)}_{=0} = 5Y_1(s) - 3Y_2(s) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} sY_1(s) = 3Y_1(s) - 2Y_2(s) + \dfrac{1}{s-1} \\ sY_2(s) = 5Y_1(s) - 3Y_2(s) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (s-3)Y_1 + 2Y_2 = \dfrac{1}{s-1} \\ -5Y_1 + (s+3)Y_2 = 0 \end{cases}$$

با روش کرامر، $Y_1(s)$ را از این دستگاه به دست می‌آوریم $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow Y_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s-1} & 2 \\ 0 & s+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-3 & 2 \\ -5 & s+3 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{s+3}{s-1}}{(s-3)(s+3)+10} = \frac{\frac{(s+3)}{s-1}}{s^2+1} = \frac{(s+3)}{(s-1)(s^2+1)} \Longrightarrow Y_1 = \frac{s+3}{(s-1)(s^2+1)}$$

$$\Longrightarrow y_1(t) = L^{-1}\{Y_1(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s-1)(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s-1} + \frac{-2s-1}{s^2+1}\right\} = 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\Longrightarrow y_1(t) = 2e^t - 2\cos t - \sin t \quad ③$$

تجزیه کسر:

$$\frac{s+3}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \cdots = \frac{2}{s-1} + \frac{-2s-1}{s^2+1}$$

$$A = 2,\ B = -2,\ C = -1$$

اکنون برای یافتن $y_2(t)$: * روش اول: مشابه آنچه برای یافتن $y_1(t)$ انجام دادیم:

$$Y_2 \underset{\text{از کرامر}}{=} \frac{\begin{vmatrix} s-3 & \frac{1}{s-1} \\ -5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-3 & 2 \\ -5 & s+3 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{5}{s-1}}{(s-3)(s+3)+10} = \frac{5}{(s-1)(s^2+1)} \Longrightarrow Y_2 = \frac{5}{(s-1)(s^2+1)}$$

$$\Longrightarrow y_2(t) = L^{-1}\{Y_2(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{5}{(s-1)(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{5}{2}}{s-1} + \frac{-\frac{5}{2}s - \frac{5}{2}}{s^2+1}\right\} = \frac{5}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{5}{2}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - \frac{5}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\Longrightarrow y_2(t) = \frac{5}{2}e^t - \frac{5}{2}\cos t - \frac{5}{2}\sin t$$

تجزیه کسر:

$$\frac{5}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A'}{s-1} + \frac{B's+C'}{s^2+1} = \cdots =$$

$$A' = \frac{5}{2},\ B' = C' = -\frac{5}{2}$$

* روش دوم (برای یافتن $y_2(t)$): می‌توان جواب $y_1(t)$ به دست آمده در بالا را در معادله ① دستگاه اصلی مسئله جایگذاری کنیم و $y_2(t)$ را به دست آوریم:

$$\xrightarrow{\text{از ①}} y_1' = 3y_1 - 2y_2 + e^t \Longrightarrow y_2(t) = \frac{y_1' - 3y_1 - e^t}{-2} \underset{\text{از ③}}{=} \frac{(2e^t + 2\sin t - \cos t) - 3(2e^t - 2\cos t - \sin t) - e^t}{-2}$$

$\Longrightarrow$ پس از ساده کردن عبارات: $y_2(t) = \frac{5}{2}e^t - \frac{5}{2}\cos t - \frac{5}{2}\sin t$

مثال: دستگاه زیر را به روش لاپلاس حل کنید:

تابع هویساید

$$\begin{cases} x'(t)+2x(t)+6\int_0^t y(x)\,dx = -2u_0(t) \\ x'(t)+y'(t)+y(t) = 0 \end{cases} \qquad x(0)=-5,\quad y(0)=6$$

حل) هدف یافتن $x(t)$ و $y(t)$ است. از گرفتن هر یک از معادلات، لاپلاس می‌گیریم:

$$\begin{cases} L\{x'(t)\}+2L\{x(t)\}+6\underbrace{L\{\int_0^t y(x)dx\}}_{\frac{Y(s)}{s}} = -2\underbrace{L\{u_0(t)\}}_{\frac{1}{s}} \\ L\{x'(t)\}+L\{y'(t)\}+L\{y(t)\}=0 \end{cases} \Longrightarrow$$

با فرض $L\{x\}=X(s)$ و $L\{y\}=Y(s)$ داریم:

$$\Longrightarrow \begin{cases} (sL\{x(t)\}-x(0))+2L\{x(t)\}+\frac{6Y(s)}{s} = -\frac{2}{s} \\ (sL\{x(t)\}-x(0))+(sL\{y(t)\}-y(0))+L\{y(t)\}=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} sX(s)-(-5)+2X(s)+\frac{6Y(s)}{s} = -\frac{2}{s} \\ sX(s)-(-5)+sY(s)-6+Y(s)=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (s+2)X+\frac{6}{s}Y = -\frac{2}{s}-5 \\ sX+(s+1)Y=1 \end{cases}$$

برای سادگی و خارج کردن جملات از حالت کسری طرفین در s ضرب

$$\Longrightarrow \begin{cases} (s^2+2s)X+6Y=-2-5s \\ sX+(s+1)Y=1 \end{cases} \qquad (*)$$

اکنون در دستگاه $(*)$، X را با روش کرامر بدست می‌آوریم:

$$X=\frac{\begin{vmatrix} -2-5s & 6 \\ 1 & s+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+2s & 6 \\ s & s+1 \end{vmatrix}} = \frac{(-2-5s)(s+1)-6}{(s^2+2s)(s+1)-6s} = \frac{-5s^2-7s-8}{s^3+3s^2-4s}$$

$$\Longrightarrow x(t)=L^{-1}\{X(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{-5s^2-7s-8}{s^3+3s^2-4s}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{2}{s}\right\}-3L^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}-4L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} \Longrightarrow x(t)=2-3e^{-4t}-4e^{t}$$

تجزیه کسر:

$$\frac{-5s^2-7s-8}{s(s^2+3s-4)}=\frac{-5s^2-7s-8}{s(s+4)(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+4}+\frac{C}{s-1}=\cdots=\frac{2}{s}-\frac{3}{s+4}-\frac{4}{s-1}$$

$$A=2,\ B=-3,\ C=-4$$

حال برای یافتن $y(t)$، مشابه آنچه که در بالا برای یافتن $x(t)$ انجام دادیم، راحت‌تر است. بجای این کار $Y(s)$ را از دستگاه $(*)$ با کرامر می‌یابیم:

$$Y=\frac{\begin{vmatrix} s^2+2s & -2-5s \\ s & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+2s & 6 \\ s & s+1 \end{vmatrix}}=\frac{(s^2+2s)-s(-2-5s)}{s^3+3s^2-4s}=\frac{6s^2+4s}{s^3+3s^2-4s}$$

$$\Longrightarrow y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{6s^2+4s}{s^3+3s^2-4s}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{s(6s+4)}{s(s+4)(s-1)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{6s+4}{(s+4)(s-1)}\right\}$$

تجزیه کسر:

$$\frac{6s+4}{(s+4)(s-1)}=\frac{A'}{s+4}+\frac{B'}{s-1}=\cdots=\frac{4}{s+4}+\frac{2}{s-1}$$

$$A'=4,\ B'=2$$

$$\Longrightarrow y(t)=L^{-1}\left\{\frac{4}{s+4}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}\right\}=4e^{-4t}+2e^{t}$$

تمرین: دستگاه‌های زیر را با روش لاپلاس حل کنید:

(۱)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}+x(t)-y(t)=10 \\ x(t)-y(t)-2\int_0^t y(x)dx=0 \end{cases} \qquad x(0)=y(0)=0$$

(۲)
$$\begin{cases} y_2''(t)-4y_1(t)=-4e^{t} \\ y_1''(t)-y_1(t)=3y_2(t) \end{cases} \qquad y_1(0)=2,\ y_1'(0)=3,\ y_2(0)=1,\ y_2'(0)=2$$

مثال: دستگاه زیر را به روش حذفی حل کنید:

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 2y(t) & (1) \\ y'(t) = 5x(t) - 3y(t) & (2) \end{cases}$$

حل) ابتدا دستگاه را به شکل عملگری یعنی $D=\frac{d}{dt}$ می‌نویسیم:

$$\begin{cases} Dx = 3x - 2y \\ Dy = 5x - 3y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Dx - 3x + 2y = 0 \\ Dy - 5x + 3y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (D-3)x + 2y = 0 \\ -5x + (D+3)y = 0 \end{cases} \quad (*)$$

اکنون تصمیم داریم y را از دستگاه (۱) حذف کنیم. برای این کار معادله اول دستگاه (*) را در $(D+3)$ و معادله دوم دستگاه (*) را در ۲− ضرب می‌کنیم

$$\Longrightarrow \begin{cases} (D+3)(D-3)x + \cancel{(D+3)}(2y) = 0 \\ (-2)\times(-5x) - 2\cancel{(D+3)}y = 0 \end{cases}$$

$$(D+3)(D-3)x + 10x = 0 \Longrightarrow (D^2-9)x + 10x = 0 \Longrightarrow D^2x - 9x + 10x = 0 \Longrightarrow x''(t) + x(t) = 0 \quad (3)$$

یک معادله مرتبه دوم خطی همگن (با ضرایب ثابت) با تابع مجهول $x(t)$ است که با حل آن، $x(t)$ را می‌یابیم:

معادله مشخصه (۳): $\lambda^2 + 1 = 0 \longrightarrow \lambda^2 = -1 \Longrightarrow \lambda = \pm i \longrightarrow$ جواب عمومی معادله (۳) $= x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \quad (4)$

حال اگرچه می‌توان مشابه آنچه برای یافتن $x(t)$ انجام داده‌ام، از دستگاه (*)، x را حذف و مشابه بالا در نهایت $y(t)$ را به دست آوردیم اما برای یافتن $y(t)$، ساده‌تر آن است که $x(t)$ به دست آمده را در معادله (۱) دستگاه اصلی مسئله جایگذاری کنیم تا داریم:

$$\xrightarrow{\text{از } (1)} x'(t) = 3x(t) - 2y(t) \Longrightarrow y(t) = \frac{x'(t) - 3x(t)}{-2} \underset{\text{از } (4)}{=} \frac{(-c_1 \sin t + c_2 \cos t) - 3(c_1 \cos t + c_2 \sin t)}{-2}$$

$$\Longrightarrow y(t) = \frac{(c_2 - 3c_1)\cos t + (-c_1 - 3c_2)\sin t}{-2}$$

مثال: دستگاه زیر را به روش حذفی حل کنید:

$$\begin{cases} x' + y' + 5x + 3y = e^{-t} & (1) \\ 2x' + y' + x + y = 3 & (2) \end{cases}$$

حل) ابتدا دستگاه را به صورت عملگری می‌نویسیم:

$$\begin{cases} Dx + Dy + 5x + 3y = e^{-t} \\ 2Dx + Dy + x + y = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (D+5)x + (D+3)y = e^{-t} \xrightarrow{\times -(D+1)} \\ (2D+1)x + (D+1)y = 3 \xrightarrow{\times (D+3)} \end{cases}$$

y را حذف می‌کنیم

(توجه: فرقی نمی‌کند، می‌توانید x را حذف کنید)

$$\Longrightarrow \begin{cases} -(D+1)(D+5)x - \cancel{(D+1)(D+3)}y = -(D+1)e^{-t} \\ (D+3)(2D+1)x + \cancel{(D+3)(D+1)}y = (D+3)3 \end{cases}$$

$$-(D+1)(D+5)x + (D+3)(2D+1)x = -(D+1)e^{-t} + (D+3)3$$

$$\Rightarrow (-D^2-6D-5)x+(2D^2+7D+3)x=-\boxed{De^{-t}}-e^{-t}+\boxed{D3}+9$$

$$De^{-t}=\frac{d}{dt}(e^{-t})=-e^{-t} \qquad D3=\frac{d}{dt}(3)=0$$

$$\Rightarrow -D^2x-6Dx-5x+2D^2x+7Dx+3x=-(\cancel{-e^{-t}})-\cancel{e^{-t}}+0+9$$

$$\Rightarrow D^2x+Dx-2x=9 \Rightarrow x''(t)+x'(t)-2x(t)=9 \quad (3)$$

یک معادله مرتبه دوم خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت است که جواب عمومی آن به شکل زیر است:

$$x(t)=x_g(t)+x_p(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+x_p(t)$$

معادله مشخصه: $\lambda^2+\lambda-2=0$ ← ?

$$(\lambda+2)(\lambda-1)=0 \to \lambda_1=-2,\ \lambda_2=1$$

$$x_1(t)=e^{-2t} \qquad x_2(t)=e^{t}$$

$$c_1e^{-2t}+c_2e^{t}$$

?

روش دوم: تغییر پارامترها

$$x_p(t)=v_1(t)x_1(t)+v_2(t)x_2(t)$$

$$v_1(t)=-\int\frac{x_2(t)f(t)}{W(x_1,x_2)(t)}dt=-\int\frac{9e^{t}}{3e^{-t}}=-3\int e^{2t}dt=-\frac{3}{2}e^{2t}$$

$$\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ x_1' & x_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^{-2t} & e^{t}\\ -2e^{-2t} & e^{t}\end{vmatrix}=e^{-t}+2e^{-t}=3e^{-t}$$

$$v_2(t)=\int\frac{x_1(t)f(t)}{W(x_1,x_2)(t)}dt=\int\frac{9e^{-2t}}{3e^{-t}}dt=3\int e^{-t}dt=-3e^{-t}$$

$$\Rightarrow x_p(t)=v_1x_1+v_2x_2=\left(-\frac{3}{2}e^{2t}\right)(e^{-2t})+(-3e^{-t})(e^{t})$$

$$=-\frac{3}{2}-3=-\frac{9}{2} \Rightarrow x_p(t)=-\frac{9}{2}$$

روش اول: ضرایب نامعین

سمت راست (3)، عدد 9 یعنی به صورت یک چند جمله‌ای از درجه صفر → $x_p(t)=At^r$

r = تعداد تکرار ریشه صفر در معادله مشخصه، $r=0$

$$\Downarrow$$

$$x_p(t)=A$$

در معادله (3) جایگذاری ($x_p'=0$ و $x_p''=0$):

$$0+0-2A=9 \Rightarrow A=-\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow x_p(t)=-\frac{9}{2}$$

و در هر صورت، جواب عمومی (3) یعنی $x(t)$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+x_p(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{t}-\frac{9}{2} \quad (4)$$

اکنون باید $y(t)$ را تعیین کنیم. برای این کار، کافیست ابتدا y' را در دستگاه (1) و (2) حذف کنیم که برای این کار نیز داریم:

$$\begin{cases}x'+y'+5x+3y=e^{-t}\\ 2x'+y'+x+y=3\end{cases}\xrightarrow[\times(-1)]{}\begin{cases}x'+\cancel{y'}+5x+3y=e^{-t}\\ -2x'-\cancel{y'}-x-y=-3\end{cases}$$

$$-x'+4x+2y=e^{-t}-3 \Rightarrow y=\frac{x'-4x+e^{-t}-3}{2} \xrightarrow{\text{از }(4)}$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{(-2c_1e^{-2t}+c_2e^{t})-4\left(c_1e^{-2t}+c_2e^{t}-\frac{9}{2}\right)+e^{-t}-3}{2}=\frac{1}{2}\left(-6c_1e^{-2t}-3c_2e^{t}+e^{-t}+15\right)$$

تمرین: دستگاه‌های زیر را با روش حذفی حل کنید:

$$(1)\begin{cases}2x'(t)+y'(t)-4x(t)-y(t)=e^{t}\\ x'(t)+3x(t)+y(t)=0\end{cases} \qquad (2)\begin{cases}y_1'=3y_1-2y_2+e^{t}\\ y_2'=5y_1-3y_2\end{cases}$$