گراف های کیلی روی گروه و حلقه

سید علی رضا اشرفی

گروه ریاضی محض – دانشکده علوم ریاضی

دانشگاه کاشان

فصل صفر

مقدمه ی تاریخی

در ادبیات ریاضی . گراف های زیادی روی یک گروه یا یک حلقه تعریف شده اند. این نوشته به مطالعه برخی . از این گراف ها مانند گراف کیلی، G-گراف جابجایی ، گراف توان تعمیم هایی از آن ها پرداخته خواهیم کرد مهمترین نتایج این بخش ها را مورد بررسی قرار داده و نگاهی نیز به مسائل حل نشده آن ها داشته باشیم. در این بخش مقدمه ای تاریخی از آنها را که در مطالعه باقی نوشته مفید خواهد بود، ارائه می کنیم.

در زمان کیلی . از مفهوم گروه وجود نداشت و هنگامی که کیلی . تعریف از مفهوم گروه را ارائه کرد، ارتباط این سی با گروه های شناخته شده قبلی که با جایگشت ها ساخته می شدند، بدرستی معلوم نبود. قضیه کیلی این دو مفهوم از گروه‌را متحد کرد و هنگام اثبات آن به مفهوم گراف کیلی رسید. اگرچه برنساید این قضیه را به جردن نسبت می دهد، با این وجود اریک نوملا استدلال می کند که نام استاندارد ***قضیه کیلی*** در واقع نامی مناسب برای این حکم است. جالب است بدانیم که کیلی در مقاله اصلی خود در سال 1854 نشان داد که تناظر موجود در قضیه یک به یک است، اما او نتوانست صریحا نشان دهد که این یکریختی است. نوملا خاطرنشان می کند که کیلی این نتیجه را شانزده سال قبل از جردن در نظریه گروه ریاضی . آن زمان اعلام کرد قضیه بعدا توسط والتر دایک در سال 1882 منتشر شد و در صفحه 92 از چاپ اول کتاب برنساید به او نسبت داده شد.

فصل اول

مفاهیم و نتایجی مقدماتی از نظریه گراف

در سراسر این درس منظور از **گراف** ی . مانند $\Gamma = (V,E)$ است که در آن V مجموعه ای ناتهی و $E \subseteq P_2(V)$ که در آن $P_2(V)$ مجموعه ی تمام زیرمجموعه های دوعضوی V است. اگر به جای $P_2(V)$ از مجموعه ی $D_2(V)$ که ازتمام زوج های مرتب با درایه های متمایز روی V تشکیل شده است، استفاده کنیم آنگاه به زوج $G = (V,E)$ یک گراف جهت دار[1] می گوئیم. مجموعه $V = V(\Gamma)$ را مجموعه ی راس های Γ و مجموعه ی $E = E(\Gamma)$ را مجموعه ی یال های آن می نامیم. تعداد راس های Γ را **مرتبه ی** Γ و تعداد یال های آن را **اندازه ی** Γ می نامند.

درجه هر راس از یک گراف Γ برابر تعداد یال هایی ـ است که از آن خارج می شود. گراف را **منظم** نامیم، هرگاه درجه تمام راس های آن با هم برابر باشند و این مقدار ثابت را **درجه منظمی** گراف می نامند. اگر درجه منظمی برابر r باشد، از اصلاح r-منظم برای بیان کوتاه این موضوع استفاده می کنیم. یک گراف منظم 3-r یک گراف مکعبی . نر ـ . می نامند گرافی . که درجات حداقل دو راس آن با هم متفاوت باشند را **نامنظم** می نامند.

فرض کنیم x و y رئوس یک گراف دلخواه Γ باشند. هر دنباله از رئوس $x_1=x, x_2,\dots, x_n=y$ را یک **مسیر** ـ از x به y نامیم در صورتی ـ که هر دو راس متوالی از دنباله ی فوق مجاور باشند مسیر ـ را **بسته** نامیم، هرگاه $x = y$. گراف G را همبند هرگاه بین ـ . هر دو راس آن یک مسیر ـ موجود باشد. یک گراف همبند فاقد یک مسیر ـ بسته را یک مدار می نامند. مرسوم است که مدار با n راس را با C_n نشان دهیم. طول یک کوتاهترین مسیر ـ بین ـ . راس های x و y از Γ فاصله بین ـ . x و y در گراف Γ نامیده و آن را با $d_\Gamma(x,y)$ نشان می دهیم.

فرض کنید G و H دو گراف باشند چنان که $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$. در این حالت می گوئیم H **زیرگراف** G است و می نویسیم $H \leq G$ بزرگتر ـ ین زیرگراف همبند G را یک **مولفه** آن می نامند زیرگرافی . که مجموعه ی راس های آن برابر مجموعه ی راس های گراف اصلی Γ باشد را زیرگراف مولد Γ می نامند.

---

[1] Directed graph

اگر این زیرگراف یک درخت باشد، آن گاه از عبارت **درخت مولد** به جای زیرگراف مولد استفاده می کنیم. فرض کنید x راسی از Γ است. **راس برسی** Γ نامند هرگاه حذف x (ولذا تمام یال های متصل به آن) تعداد مولفه های همبندی Γ را افزایش دهد. مشابها یال e را یک **یال برسی** می نامیم هرگاه حذف آن تعداد مولفه های همبندی گراف Γ را بیشتر کند.

فرض کنید Γ یک گراف و A مجموعه ای از یال های Γ است. مجموعه ی A را یک **جورسازی** برای Γ می نامیم، هر گاه هیچ دو یالی در A رأس مشترک نداشته باشند. یک جورسازی را **کامل** نامیم، هرگاه مجموعه ی حاصل از راس های دو سر یال های موجود در A برابر V(Γ) باشد. یک جورسازی را **بیشینه** نامیم، هرگاه جورسازی دیگری حاوی آن وجود نداشته باشد. اگر M یک جورسازی و A مجموعه ای از راس ها باشد که هر عضو آن راسی از یک یال M باشد آن گاه گوئیم که جورسازی M مجموعه ی A را **پوشش** می دهد. راس u از Γ را **پوششی** نامیم، هرگاه هر جورسازی بیشینه برای Γ راس u را پوشش دهد.

گراف های Γ و Δ درنظر بگیرید. تابع $g:V(\Gamma) \to V(\Delta)$ یک همریختی می نامیم هرگاه $uv \in E(\Gamma)$ ایجاب کند $g(u)g(v) \in E(\Delta)$. فرض کنیم $g:V(\Gamma) \to V(\Gamma)$ یک جایگشت از راس های Γ است. g یک خودریختی Γ می نامیم هرگاه $uv \in E(\Gamma)$ اگر و تنها اگر $g(u)g(v) \in E(\Gamma)$. فرض کنید Graph معرف کلاس تمام گراف های متناهی است. نگاشت $\theta: Graph \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ را یک پایای عددی گراف نامیم هرگاه $G \cong H$ نتیجه دهد $\theta(G) = \theta(H)$. مرتبه و اندازه ساده ترین پایاهای گراف هستند.

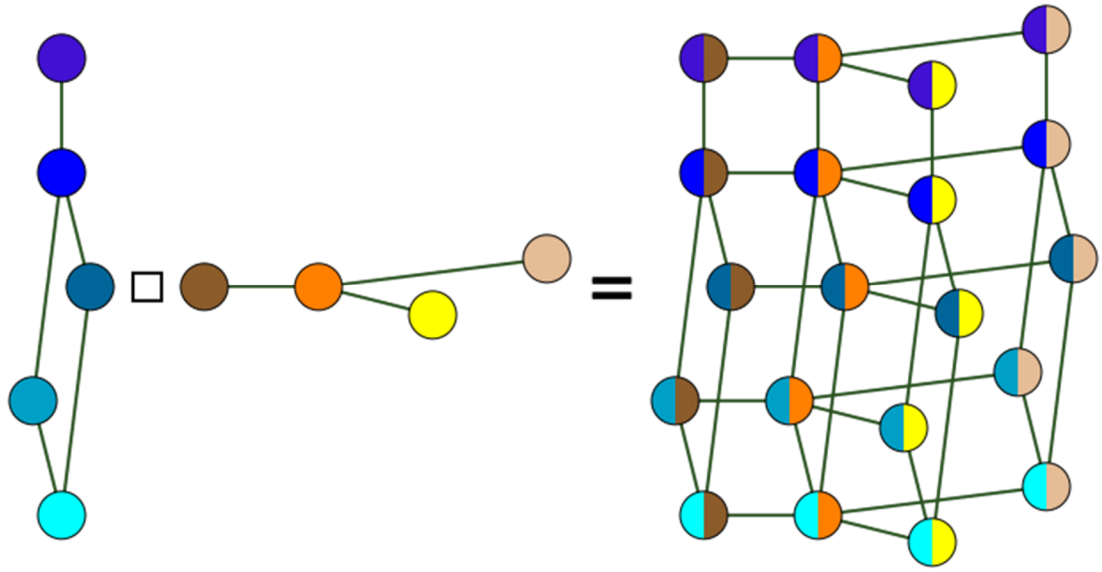
فرض کنید Γ یک گراف باشد. یک گراف زیرتقسیم S(Γ) گرافی است که از قرار دادن تعدادی راس جدید در وسط یالهای Γ بدست آمده است. راس های اصلی Γ راس هاس شاخه ای و راس های جدید را راس های زیرتقسیم می نامیم. توجه کنید که راس های زیرتقسیم همه از درجه ی 2 و درجه ی راس های اصلی برابر درجه همان راس ها در گراف Γ است. **متمم** گراف Γ که با Γ' نشان داده می شود را چنین تعریف می کنیم. راس های Γ همان راس های Γ' است و دو راس از Γ' مجاورند اگر و تنها اگر در Γ مجاور نباشند. گراف Γ را **خود متمم** نامیم هرگاه $\Gamma \cong \Gamma'$. حالت خاصی

از گراف زیرتقسیم گراف Γ را که در آن یک راس وسط هر یال Γ درج شده است را گراف دوگان Γ نامیده و با Γ^* نشان می دهیم.

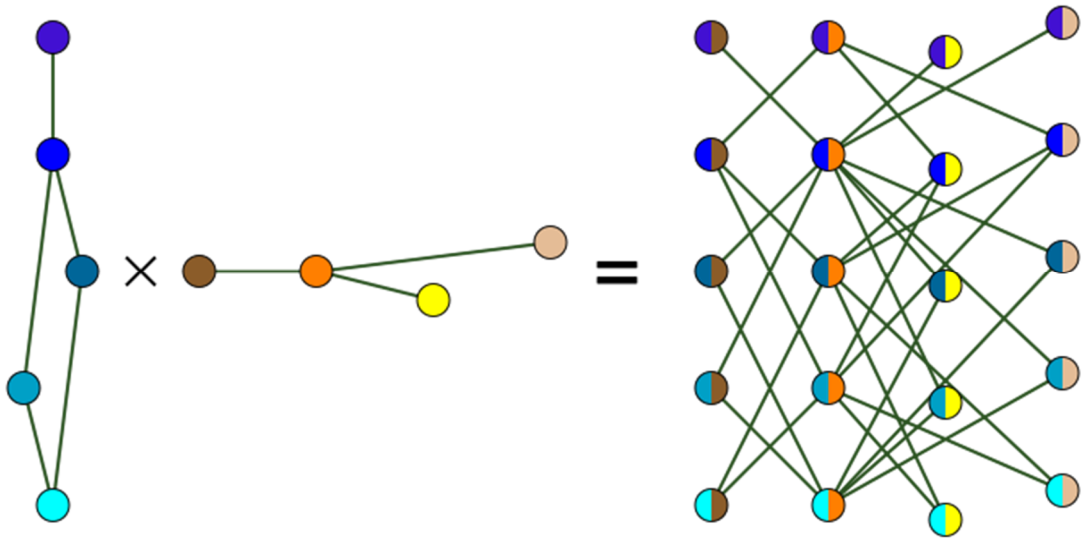
فرض کنید Γ و Δ دو گراف. حاصل ضرب . ب دکارتی ـ Γ و Δ که آنرا با $\Gamma\square\Delta$ نشان می دهند گراف . با مجموعه راس های $V(\Gamma) \times V(\Delta)$ است چنان که دو زوج (a,b) و (x,y) از راس های $\Gamma\times\Delta$ مجاور هستند اگر و تنها اگر $(x = a$ و $yb\in E(\Delta))$ یا $(xa\in E(\Gamma)$ و $y = b)$.

یک مشطح گراف . است که می تواند در صفحه جاسازی شود، یعنی . می توان آن را روی صفحه به گونه ای ترسیم کرد که یال های آن فقط در راس های انتهایی ـ آنها قطع شود. به عبارت دیگر، می توان آن را به گونه ای ترسیم کرد که هیچ دو یالی از یکدیگر عبور نکنند.

فرض کنید Δ و Γ دو گراف دلخواه باشند. حاص ضر . ب تانسوری یا کرونکر Δ و Γ که آن را با $\Gamma\otimes\Delta$ نشان می دهیم گراف . با مجموعه رئوس $V(\Delta) \times V(\Gamma)$ است چنان که دو زوج مرتب (a,b) و (x,y) در $\Delta\times\Gamma$ مجاورند اگر و تنها اگر $ax\in E(\Delta)$ و $by\in E(\Gamma)$ ـ . حاصل ضر . ب قوی دو گراف Δ و Γ که آن را با $\Gamma\boxtimes\Delta$ نشان می دهیم گراف . با مجموعه رئوس $V(\Delta) \times V(\Gamma)$ است چنان که دو زوج مرتب (a,b) و (x,y) در $\Delta\times\Gamma$ مجاورند اگر و تنها اگر این دو راس در $\Delta\square\Gamma$ یا $\Delta\times\Gamma$ مجاور باشند.



شکل 2. حاصل ضر . ب دکارتی ـ دو گراف.

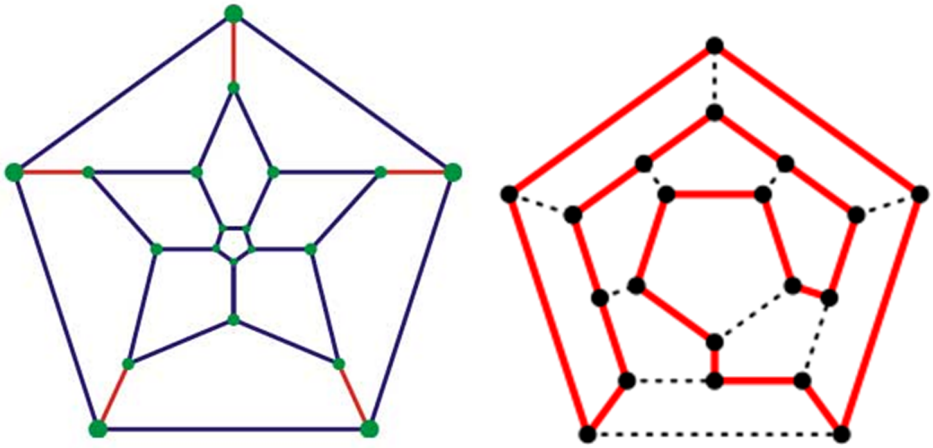


شکل 3. الف صر . ب تانسوری دو گراف.

1.1 گراف های اویلری و همیلتونی .

یک **مدار اویلری** در گراف G مسر ـ ی است که از یک راس آغاز و با عبور از تمام یال ها به همان راس بازگردد. گرافی . که حاوی مداری اویلری باشد را گراف اویلری می نامند. مسر ـ ی از یک گراف را که حاوی تمام رئوس و بدون راس تکراری باشد را **یک مسر همیلتونی** . می نامند. دور همیلتونی . دوری حاوی تمام رئوس گراف بدون راس تکراری است. توجه کنید که دور همیلتونی . لزوما حاوی تمام یال ها نیست. گراف شامل حداقل یک دور همیلتونی . را یک **گراف همیلتونی** . می نامیم.

مثال 1. دوازده وجهی منتظم از اجسام افلاطونی . است که از دوازده پنج ضلعی منتظم در فضای سه بعدی تشکیل شده است. گراف این شکل هندسی دارای 20 راس و 30 یال است. به علاوه درجه هر راس در زیر یک مسر ـ همیلتونی . برای این جسم افلاطونی . داده شده است.



شکل 1. دوبعدی یک دوازده وجهی منتظم همراه با یک مسر ـ هامیلتونی . .

قضیه بعد از اوره ریاصی . دانی . نروژی است که در اکتر . سال 1899 در شهر اسلو متولد و در 13 آگوست 1968 در همس ـ . شهر درگذشت. او به خاطر کارهایش در نظریه حلقه، نظریه گالوا، نظریه گراف و تاریخ ریاضیات معروف است. او رساله دکر ـ ی خود را تحت راهنمایی ـ تورالف اسکولم منطق‌دان نروژی نوشت و معروف ترین شاگرد او مارشال هال ریاصی . دان معروف آمریکایی ـ است که ریاصی . دانی . معروف در نظریه گروه و ترکیبیات بود. شاگرد دیگر او گریس بروسر ـ موری، متخصص معروف آمریکایی ـ علوم کامپیوتر است که در نامر . 1906 در شهر نیویورک متولد و در 1 ژانویه 1992 در ویرجینیا درگذشت. او از اولس ـ . برنامه نویسان کامپیوتر و مخر ـ ع زبان B-0 است که بعدها به زبان کوبول توسعه یافت.

قضیه 2. (اوره[2] 1960). فرض کنیم G یک راس با سر ـ ط n≥3 باشد چنان که برای هر دو راس غر ـ مجاور a و b داشته باشیم deg(a) + deg(b) ≥ n. در این صورت G هامیلتونی . است.

برهان. اجازه دهید این خاصیت را که برای هر دو راس غر ـ مجاور a و b، deg(a) + deg(b) ≥ n ـ ط (*) بنامیم. نشان می دهیم که هر گراف هامیلتونی . در سر ـ ط (*) صدق نمی کند. برای این منظور فرض کنیم G یک گراف . ساده با حداقل سه راس است که هامیلتونی . ندارد. فرض کنیم G1 یک . است که از

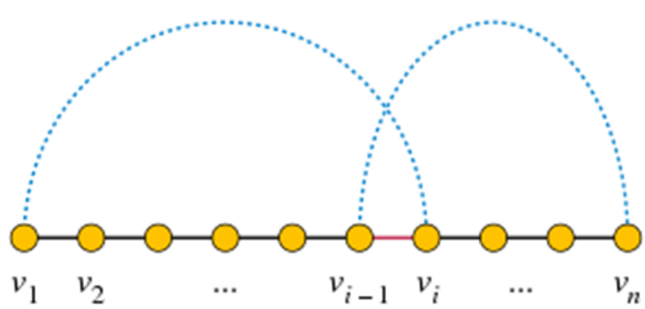
[2] Øystein Ore

افزودن یک یال به Γ بدست آمده است چنان گراف جدید دور هامیلتونی . ندارد. سپس Δ_2 گرافی . می گیریم که از افزودن یک یال به Δ_1 بدست آمده و دور هامیلتونی . ندارد. این فرآیند را ادامه داده و فرض می کنیم در نهایت $\Delta_k = \Delta$ گرافی . است که با فرآیند فوق ساخته شود و به علاوه اضافه کردن هر یال جدید به Δ_i گراف ساخته شده از آن دور هامیلتونی . پدید آورد.

فرض کنیم x و y دو راس غیر . مجاور از گراف Δ باشند. در این صورت افزودن یال xy به Δ دوری هامیلتونی پدید می آورد و یال های غیر . از xy گراف جدید مسیر . ی هامیلتونی . چون $v_1v_2...v_n$ سازند که $x=v_1$ و $y=v_n$. حال برای هر i که $1 \le i \le n$ اگر . یکی از دو یال v_1v_i و $v_{i-1}v_n$ می توانند در $E(\Delta)$ باشند زیرا در غیر . اینصورت Δ دور هامیلتونی . خواهد بود که غیر . ممکن است، شکل 1 را ببینید. بنابراین تعداد یال های . که یا با v_1 مجاور هستند و یا با v_n اگر . برابر تعداد انتخاب های یعنی . $n - 1$ ولی تعداد چنین . . یال های . برابر $\deg(v_1) + \deg(v_n)$ است و از این رو اگر . ط (*) صدق نمی کند. چون درجه رئوس در Δ گیر . یا مساوی درجه رئوس در Γ است، لذا اگر . ط (*) صدق نمی کند. □

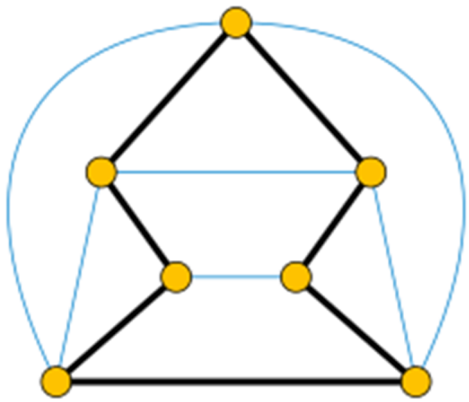
نتیجه 3 (**قضیه دایراک**) اگر درجه هر راس یک گراف n -راسی G حداقل n/2 باشد آن گاه G همیلتونی . است.

برهان. گراف G . ط (*) صدق می کند و لذا بنابر قضیه اوره هامیلتونی . است. □



شکل 1. با مسیر . هامیلتونی . $v_1v_2...v_n$ بدون دور هامیلتونی . .

گراف شکل 2 سر ۔ ط اوره صدق می کند. راس با درجه کمتر ۔ از n/2 در مرکز گراف وجود دارند و از این رو سر ۔ ایط قضیه دیراک فراهم نیست. با این حال، این دو رأس در مجاورت یکدیگر هستند و مجموع درجات سایر زوج رئوس گراف حداقل برابرهفت هستند. این ثابت می کند که قضیه اوره هامیلتونی . بودن دسته بزرگتر ۔ ی از گراف ها را در مقایسه با قضیه دایراک فراهم می کند.



شکل 2 گراف . صادق در ۔ ط اوره همراه دور هامیلتونی . آن.

فرض کنید G یک گراف ساده، بدون جهت و n راسی است. اگر دو راس غیر ۔ مجاور x و y وجود داشته باشند که $deg(x) + deg(y) \geq n$، آنگاه یال xy را به G اضافه کرده و این کار را ادامه می دهیم تا به گراف . برسیم که دیگر چنین ۔ . زوج هایی ۔ از رئوس نداشته باشد. این گراف را بستار G نامیده و آنرا با cl(G) نشان می دهیم.

قضیه 4 ثابت کنید که فرایند بالا به گراف . یکتا منتهی می شود و از ترتیب انتخاب زوج های رئوس مستقل است.

فرض کنیم Γ و Δ دو گراف با این خاصیت باشند که $V(\Gamma) \subseteq V(\Delta)$ و $E(\Gamma) \subseteq E(\Delta)$. در این صورت Γ را **زیرگراف** Δ نامیده و می نویسیم $\Gamma \leq \Delta$. Γ را **زیرگراف مولد** Δ می نامیم، هرگاه $\Gamma \leq \Delta$ و $V(\Gamma) = V(\Delta)$. اگر $uv \notin E(\Gamma)$ آنگاه گراف . که راس های آن همان راس های Γ بوده ولی یال های آن از اضافه کردن یال uv با یال های Γ بدست آمده است را با $\Gamma + uv$ نشان می دهیم.

قضیه 5. (**قضیه باندی**[3] **و فواتال**[4] **1976**) گراف همیلتونی Γ است اگر و تنها اگر بستار آن، $cl(\Gamma)$، همیلتونی باشد.

برهان. فرض کنیم Γ همیلتونی است. در اینصورت چون Γ زیرگراف مولد گراف $cl(\Gamma)$ است، بستار Γ نیز همیلتونی است. حال کفایت حکم را با برهان خلف ثابت می کنیم. برای این منظور گراف n-راسی Γ همراه با راس های غیر مجاور u و v به شرط $deg(u) + deg(v) \geq n$ را چنان برمی گزینیم که غیر همیلتونی بوده ولی $\Gamma + uv$ همیلتونی است. اخیر ایجاب می کند که هر دور همیلتونی در $\Gamma + uv$ حاوی یال uv است و در نتیجه گراف Γ همیلتونی است. از v به u راه همیلتونی را $v = v_1, v_2, \ldots, v_n = u$ نشان می دهیم. حال مجموعه های P و Q به صورت زیر معرفی می کنیم:

$$P = \{v_i \mid i \geq 2 \ \& \ v_i v_1 \in E(\Gamma)\} \ \ \& \ \ Q = \{v_i \mid i \geq 2 \ \& \ v_{i-1} v_n \in E(\Gamma)\}.$$

آن گاه $|P| + |Q| = deg(v) + deg(u) \geq n$ و چون $P \cup Q \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$، می توان مقدار i را چنان یافت که $2 \leq i \leq n$ و $v_i \in P \cap Q$. بنابراین v_1v_i و v_nv_{i-1} یال های از Γ هستند. حال با استفاده از این دو یال می توان دوری همیلتونی در Γ تشکیل داد که خلاف فرض است. □

گراف G را **راس انتقالی** می نامیم هرگاه برای هر دو راس a و b از گراف، خودریختی α از گراف را بتوان یافت چنان که $a\alpha=b$.

قضیه 6. ثابت کنید که حاصل ضرب دکارتی تعداد متناهی از گراف های همیلتونی مجددا گرافی همیلتونی است.

برهان. ابتدا فرض کنیم که حکم را برای دو گراف ثابت کرده ایم و Γ_1، Γ_2،...، Γ_n گراف های همیلتونی دلخواه باشند که $n \geq 3$. قرار می دهیم $\Delta = \Gamma_1 \square \ldots \square \Gamma_n$. چون بنابر فرض استقرا $\Gamma_1 \square \ldots \square \Gamma_{n-1}$

[3] Bondy
[4] Chvatal

ی . است و نر ـ . ثابت کرده ایم که حاصب صر . ب هر دو گراف هامیلتونی . مجددا گرافی . هامیلتونی .

است، Γn □ $(\Gamma_1$ □ نر □ $\Gamma_{n-1})$ گراف Δ هامیلتونی . است. پس کافی . است نشان دهیم که برای هر

دو گراف هامیلتونی . Γ_1 و Γ_2 حاصل صر . بنر □ Γ_1 □ Γ_2 گرافی . هامیلتونی . است. ما برهان را به دو حالت

می شکنیم. در حالت اول فرض می کنیم که حداقل یکی از دو گراف تعداد زوجی . راس دارد. در حالت دوم

فرض می کنیم که تعداد راس های هر دو گراف عددی فرد است.

1. تعداد راس های حداقل یکی از گراف های Γ_1 و Γ_2، عددی زوج است. بدون آن که هیچ خللی به

کلیت برهان وارد شود، فرض می کنیم که $|\Gamma_1|$ عددی زوج مثلا $2n$ است. دور هامیلتونی . Γ_1 را

$(v_1,\ldots,v_{2n})$ دور هامیلتونی . Γ_1 را $(w_1,\ldots,w_m)$ می خانیم. یک دور هامیلتونی . با سر ـ وع از

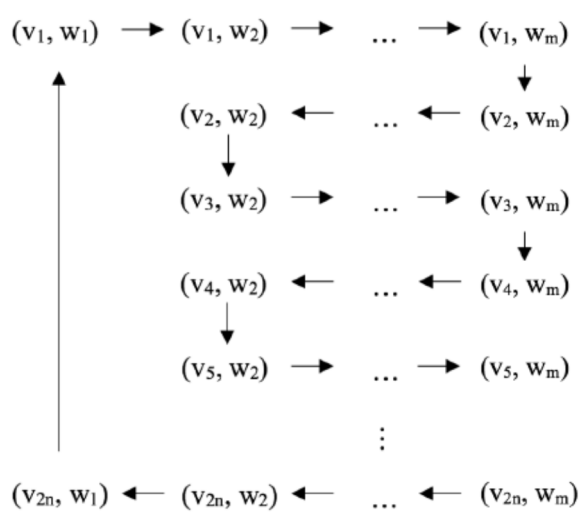
(v_1,w_1) در گراف Γ_1 □ Γ_2 می سازیم. این دور هامیلتونی . در شکل 4 ساخته شده است.

2. تعداد راس های هر دو گراف های Γ_1 و Γ_2 عددی فرد است. در این حالت دور هامیلتونی . Γ_1 را

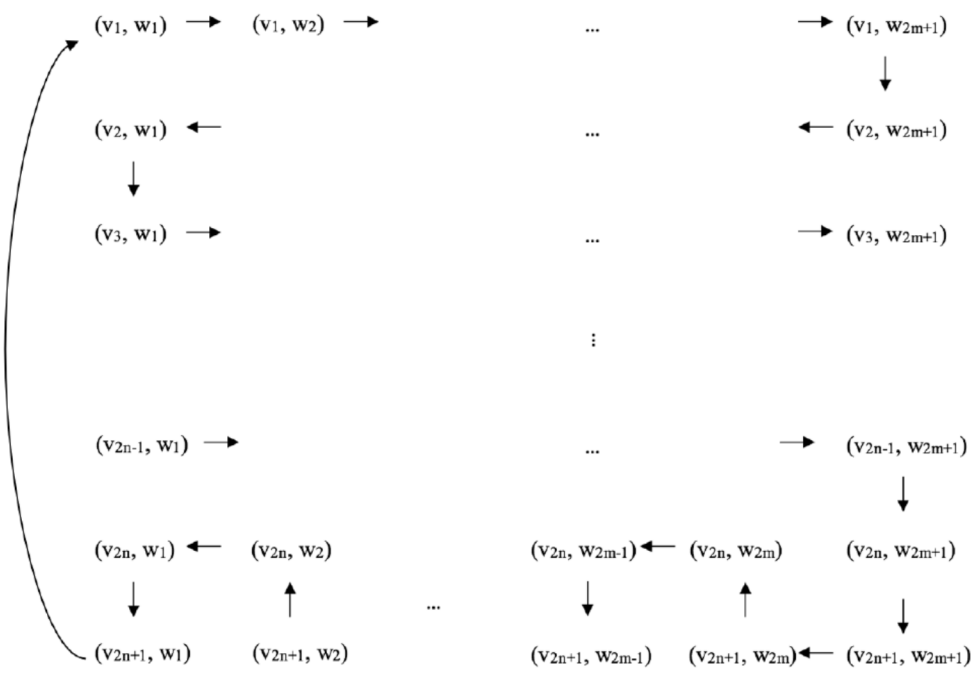
$(v_1,\ldots,v_{2n})$ دور هامیلتونی . Γ_1 را $(w_1,\ldots,w_m)$ نظر می گیر ـ یم. در شکل 5 دوری هامیلتونی . در

گراف Γ_1 □ Γ_2 داده شده است.

این برهان را کامل می کند. □



شکل 4. دور هامیلتونی . در گراف Γ_1 □ Γ_2 زمانی . که $|\Gamma_1|$ یا $|\Gamma_2|$ عددی زوجی . است.

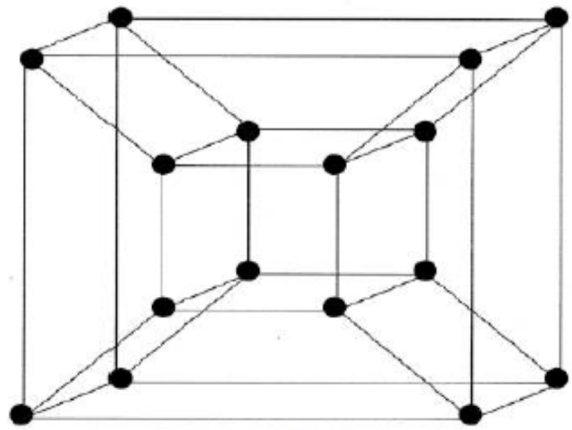


شکل 5. دور هامیلتونی . در گراف $\Gamma_1 \square \Gamma_2$. هر دوی $|\Gamma_1|$ و $|\Gamma_2|$ اعدادی فرد هستند.

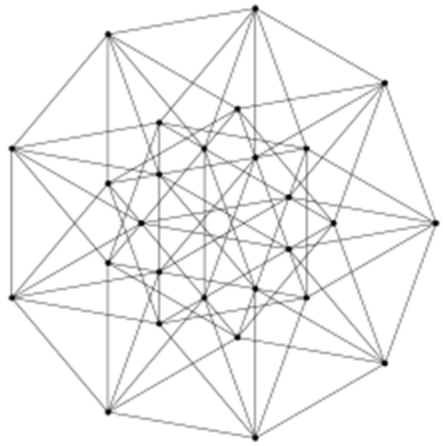
فرض کنیم Q_n یک . است که راس های آن دنباله های $a_1a_2...a_n$ از اعداد 0 و 1 باشد. دو دنباله $a_1a_2...a_n$ و $b_1b_2...b_n$ را مجاور نامیم هرگاه دقیقا یک i بتوان یافت که $a_i \neq b_i$ و برای سایر مقادیر j که $j \neq i$، داشته باشیم $a_j = b_j$. Q_n را گراف ابرمکعب یا مکعب n بعدی نر ـ . می نامند.

گراف همینگ H(d,q) حالت کلی گراف مکعب n است. برای تعریف این گراف، S را مجموعه ای q عضوی در نظرگرفته و تعریف می کنیم $V(H(d,q)) = S^d$. دو راس از این گراف مجاورند اگر و تنها اگر دقیقا در یک درایه متفاوت باشند. توجه کنید که اگر q=2 آنگاه به مکعب d بعدی می رسیم. گراف همینگ را به شکل دیگری نر ـ . می توان تعریف نمود که برخی . نویسندگان آنرا گراف همینگ تعمیم یافته می نامند. راس های این گراف دنباله های N عضوی $b_1b_2..b_N$ هستند که در آن b_i عضوی از مجموعه ی $\{1,2, \dots , n_i\}$ انتخاب می شود و همواره $n_i \geq 2$. مجاور بودن مانند قبل تعریف می شود. این گراف را با نماد $H_{n_1,\dots,n_N}$ نشان می دهند. توجه کنید که گراف همینگ H(d,q)، همان گراف همینگ تعمیم یافته $H_{q,\dots,q}$ است که تعداد q ها برابر d است.

تبصره 7. گراف همینگ $H(d,q)$ برای هامیلتونی است که در آن $d \neq 1$ و اگر $d = 2$، آنگاه $q > 1$.



شکل 6. مکعب چهار بعدی.

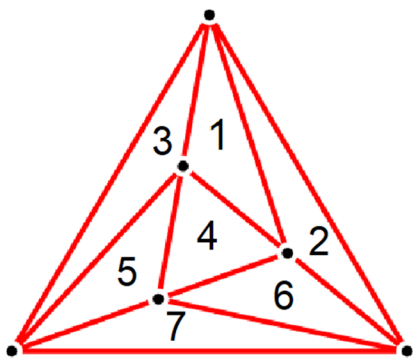


شکل 7. گراف همینگ $H(3,3)$.

2.1 گراف های مسطح

هدف این بخش بررسی خواص مهم گراف های مسطح است. ما قضیه مهم اویلر و همچنین قضیه کوراتوفسکی را ثابت خواهیم کرد. برای اثبات قضیه ی اویلر به مفهوم **وجه یک گراف مسطح** نیاز داریم که در ادامه آن را توضیح می دهیم. فرض کنید نمایشی مسطح از یک گراف Γ در دست باشد. یک وجه این نمایش مسطح یا به طور ساده یک وجه Γ، ناحیه ای محصور بین یال ها و راس های Γ است چنان که هیچ راس و یال دیگری از گراف در آن ناحیه نباشد.

مثال 8. گراف Δ در شکل 8 را در نظر بگیرید. نواحی شماره گذاری شده با اعداد 1 تا 8 همگی وجه هستند ولی هیچ اجتماعی از این نواحی وجه Δ نیستند. توجه کنید که هر گراف مسطح همواره یک وجه نامتناهی نیز دارد که در این حالت وجه بیرون مثلث بزرگی است که مجاور ناحیه های 2، 3 و 7 است.



شکل 9. گراف Δ از مثال 8.

قضیه 9 (**قضیه اویلر**). فرض کنید گراف G همبند و مسطح با n راس، m یال و f وجه باشد. در این صورت $n - m + f = 2$.

برهان. قضیه را با استقراء قوی روی تعداد یال ها ثابت می کنیم. اگر $m = 0$، آن گاه چون G همبند است، تنها یک راس خواهد داشت. بنابراین تعداد وجه ها برابر صفر بوده و $1 - 0 + 1 = 2$. بنابراین قضیه اویلر در حالت $m = 0$ برقرار است. در ادامه فرض کنیم که فرمول اویلر برای همه ی گراف های کمر ـ از m یال برقرار بوده و گراف G همبند و مسطح با m یال باشد. یال ثابت e از Γ را در نظر گرفته و تعداد راس ها، یال ها و وجه های گراف $\Delta = \Gamma - e$ را به ترتیب با n_1، m_1 و f_1 نشان می دهیم. اگر Δ همبند باشد آنگاه بنابر فرض $n_1 = n$ و $m_1 = m - 1$. حال بنابر فرض اسقراء $n_1 - m_1 + f_1 = 2$ و با توجه به برابری های داده شده می توان دید:

$$2 = n_1 - m_1 + f_1 = n - m + 1 + f_1 \qquad (1)$$

حال توجه کنید که یال e فصل مشر ـ ک دو وجه در Γ بوده است که با حذف آن، یکی از وجه های Γ کم می شود. بنابراین $f_1 = f - 1$. حال با جایگذاری این مقدار در معادله (1) به معادله ی

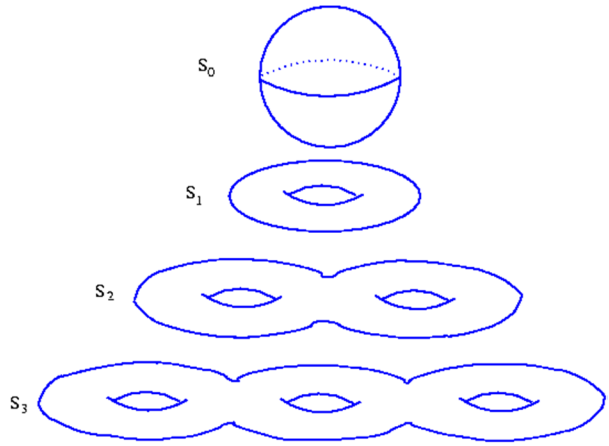
$$n - m + 1 + f - 1 = 2$$

می رسیم که همان حکم است. تا اینجا ثابت کرده ایم که اگر Δ همبند باشد آنگاه حکم استقراء برقرار است. حال فرض کنید e یال برشی ـ باشد. در این صورت گراف Δ دارای دو مولفه همبند Δ_1 و Δ_2 خواهد بود. چون هر دو مولفه کمر ـ از m یال دارند، هر دو مولفه در فرض استقراء صدق می کنند و می

توانیم از آن استفاده کنیم. فرض کنیم مولفه اول x_1 راس، y_1 یال و z_1 وجه و همچنین . . مولفه ی دوم x_2 راس، y_2 یال و z_2 وجه داشته باشد. بنابر فرض استقراء، $x_1 - y_1 + z_1 = 2$ و $x_2 - y_2 + z_2 = 2$. لذا

$$(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 4. \qquad (2)$$

بنابر تعریف یال برسی ، $n = x_1 + x_2$ و $m - 1 = y_1 + y_2$ حال ترکیب این دو برابری و همچنین . . رابطه (2) به رابطه ی $n - m + z_1 + z_2 = 3$ منتهی می شود. حال چون یال برسی بود، حذف آن هیچ وجهی از را از Γ بس . . نمی برد. بنابراین $z_1 + z_2 = f + 1$ و لذا $n - m + f = 2$ که اثبات را کامل می . کند. □



شکل 10. گونه یافس . . گونای یک گراف.

فرض کنیم Γ يك گراف ساده است. گوناي Γ که آن را با نماد $\gamma(\Gamma)$ نشان می . دهیم کوچکتر . ین عدد صحیح نامنفی . n است که Γ را بتوان چنان روی S_n رسم نمود که یال های آن تنها در رئوس هم را قطع کنند. به عنوان مثال گونای یک گراف مسطح برابر صفر است، یعنی . $\gamma(\Gamma) = 0$. در ادامه Γ را گرافی . مسطح و A را يك وجه در Γ نظر می گیر . یم. درجه وجه A که آن را با $d(A)$ نشان می . دهیم برابر تعداد یال هایی ... است که آن وجه را می . سازند. توجه کنید که در يك گراف مسطح ساده، درجه ي يك وجه نمی . تواند برابر يك یا دو باشد. مجموعه ي وجه هاي يك گراف Γ را با $F(\Gamma)$ نشان می . دهیم.

لم 10. گراف کامل روی پنج راس، غیر . مسطح است.

برهان. فرض کنیم K_5 مسطح است و یك نمایش مسطح آن را در نظر می ـ گیر ـ یم. می ـ دانیم که K_5 داراي 5 راس و 10 یال است. بنابراین بنابر قضیه اویلر K_5 هفت وجه دارد. حال درجه وجوه را مورد توجه قرار می ـ دهیم. چون K_5 ساده است، $d(A) \geq 3$ و لذا $\sum_{f \in F(K_5)} d(f) \geq 7 \cdot 3 = 21 = 2e = 20$. بنابراین گراف کامل K_5 مسطح نیست. □

گراف Γ را دوبخشی می ـ نامیم، هرگاه $V(\Gamma)$ را بتوان به دو زیرمجموعه ي A و B چنان افراز کرد به گونه اي که یك سر هر یال Γ در A و سر دیگر آن در B باشد. یك گراف دو بخشی را دوبخشی می ـ کامل می ـ نامیم، هر گاه هر راس A با هر راس B مجاور باشد. یك گراف دوبخشی کامل بوده و مجموعه هاي A و B به ترتیب m و n راس داشته باشند آن گاه Γ را با $K_{m,n}$ نشان می ـ دهیم.

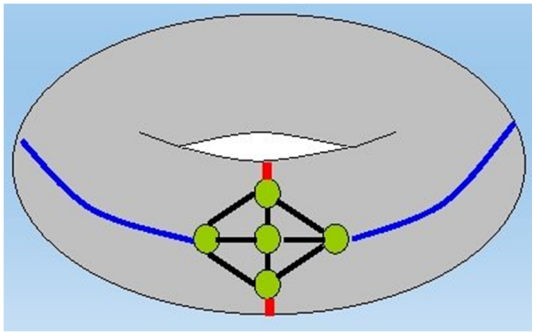
لم 11. گراف دو بخشی کامل $K_{3,3}$ مسطح نیست.

برهان. کنیم گراف دوبخشی کامل $K_{3,3}$ مسطح بوده و تعداد وجه هاي این گراف برابر f باشد. در این صورت بنابر قضیه اویلر $6 - 9 + f = 2$ و از این رو $f = 5$. مجددا درجه وجوه را مورد توجه قرار می ـ دهیم. چون $K_{3,3}$ ساده است، $d(A) \geq 3$ و لذا $\sum_{f \in F(K_{3,3})} d(f) \geq 5 \cdot 3 = 15 = 2e = 18$. بنابراین گراف دوبخشی کامل $K_{3,3}$ مسطح نیست. □

حال گونای گراف $K_{3,3}$ را بدست می آوریم. بنابر لم 11، $\gamma(\Gamma) > 0$. برای اثبات این که $\gamma(\Gamma) = 1$، شکل 11 را درنظر بگیر ـ ید.

شکل 11. گراف دوبخشی کامل $K_{3,3}$ و یك چنبر . ه.

شکل 11 نشان می دهد که گراف دوبخشی ـ کامل $K_{3,3}$ قابل رسم روی S_1 است. بنابراین $\gamma(K_{3,3}) = 1$. همچنین ـ . لم 10 و شکل 12 نشان می دهد که $\gamma(K_5) = 1$.



شکل 12. گراف دوبخشی ـ کامل K_5 روی چنبره .

حال آماده ایم تا قضیه معروف کوراتوفسکی در خصوص سر ـ ایط مسطح بودن یک گراف بیان و اثبات کنیم. برای این منظور به مفهوم گراف های هومومورفیک نیاز داریم. گراف های Γ و Δ را هومومورفیک می نامیم، هرگاه یکی زیرتقسیم دیگری باشد.

قضیه 12 (قضیه کوراتوفسکی) یک گراف مسطح است، اگر و فقط اگر شامل زیرگرافی ـ هومومورفیک با $K_{3,3}$ یا K_5 نداشته باشد.

3.1 حدس های معروف

هدف این بخش معرفی ـ سوالاتی ـ است که بعد از گذشت سال ها، هنوز ریاضی ـ دانی ـ موفق به حل آن ها نشده است. هدف از طرح این سوالات آشنایی دانشجویان با مهمترین مسائل حل نشده در مباحث مربوط به این فصل است. این مسائل عبارتند از:

1. **حدس لواش (1971):** گراف همبند راس انتقالی حاوی حداقل یک راه هامیلتونی ـ است.

مسئله دیگری مشابه حدس لواش بیان می کند که

2. تعدادی متناهی گراف راس انتقالی وجود دارد که حاوی همیلتونی نیست.

3. فرض کنید Γ یک گراف مکعبی باشد. در این صورت یک جورسازی کامل M در Γ وجود دارد چنان که $\Gamma - M$ یک دور همیلتونی است یا $\Gamma + M$ از دو دور غیر همبند تشکیل یافته است.

مسائل حل شده و تمرینات پایان فصل

مسائل حل شده

1. *فرض کنید n نقطه در صفحه که فاصله دو به دوی آن ها حداقل یک است داده شده اند. ثابت کنید که حداکثر 3n زیرمجموعه دو عضوی از این نقاط می توان یافت که نقاط آن ها دقیقا در فاصله یک باشند.*

حل. *گراف Γ را چنان در نظر می گیریم که این نقاط راس های آن بوده و دو راس مجاورند هرگاه در فاصله 1 از هم قرار داشته باشند. چون روی دایره واحد حداکثر شش نقطه می توان یافت که فاصله دو به دوی آن ها حداقل یک باشد، در نتیجه $\Delta(G) \leq 6$. بنابر این*

$$2|E(G)| = \sum_{x \in V(G)} \deg(x) \leq 6n$$

که نتیجه می دهد $|E(G)| \leq 3n$.

2. *ثابت کنید گراف های راس انتقالی، منظم هستند.*

حل. فرض کنید Γ گرافی راس انتقالی است. می دانیم که درجه یک راس تحت یک ریختی گراف تغییر نمی کند. بنابراین برای هر خودریختی α، همواره $\deg(\alpha(x)) = \deg(x)$. حال چون گراف راس انتقالی است با انتخاب راس ثابت x، برای هر راس y خودریختی α وجود دارد که $\alpha(x) = y$ و از این رو $\deg(x) = \deg(\alpha(x)) = \deg(y)$ که ثابت می کند تمام رئوس همدرجه هستند. یعنی گراف منتظم است.

3. هر گراف همبند راس انتقالی با حداقل سه راس فاقد برش پل است.

حل. فرض کنیم گراف راس انتقالی Γ دارای راس برسی ۰ x است. در این صورت بنابر مسئله 22 تمام راس های گراف راس برسی ۰ خواهند بود. ثابت می کنیم این غیر ـ ممکن است، زیرا هر گراف همبند با حداقل 3 حداقل، دو راس غیر ـ برسی ۰ خواهد داشت. برای این منظور درخت مولد T از Γ را اختیار می کنیم. چون هر درخت حداقل دو برگ دارد و برگ ها غیر ـ برسی ۰ هستند، T حداقل دو راس غیر ـ برسی ۰ u و v خواهد داشت. حال می دانیم $T-v \leq \Gamma-v$ و چون $T-v$ همبند است، $\Gamma-v$ نیز ـ . همبند است. بنابراین غیر ـ برسی ۰ Γ است که تناقض است. برای اثبات قسمت دوم توجه کنید که راس های دو سر یک یال های برسی ۰ هستند و ثابت کردیم که یک گراف همبند راس انتقالی با حداقل سه راس فاقد راس برسی ۰ است. بنابراین گراف راس انتقای Γ پل ـ . ندارد.

4. گراف مسطحی ـ که درجه ي هر راس و هر وجه آن برابر 4 است، وجود ندارد.

حل. فرض کنیم Γ گرافی باشد که در سر ۰ ط مسئله صدق کرده و داراي n راس، m یال و f وجه باشد. چون هر راس از درجه ي 4 است، $2m = 4n$ و چون درجه هر وجه برابر 4 است، $2m = 4f$. بنابراین $n = f = m/2$. حال بنابر قضیه اویلر $2 = n - m + f = n - 2n + n = 0$ که تناقض است.

5. فرض کنید Γ گرافی ـ همبند و راس انتقالی است. در این صورت می توان یک چورسازی برای Γ چنان یافت که حداکثر ۰ یک راس را پوشش ندهد.

حل. چون Γ راس انتقالی است فقط دو راس بحرانی ـ است و یا تمام راس ها بحرانی ـ هستند. بنابراین در صورت وجود حی ـ یک راس بحرانی ـ ، Γ جورسازی کامل خواهد داشت. پس می توان فرض نمود که راس Γ بحرانی ـ ندارد. این بدین معنی ـ است که هر راس توسط حداقل یک جورسازی بیشس ـ . پوشانده نمی شود. بنابرقرارداد، مجموعه ی یک M جورسازی بیشس ـ . در نظر می گیر ـ یم که راس v را نمی پوشاند. حال ثابت می کنیم که یک جورسازی بیشس با این سر ۰ ط که دو راس را نپوشاند، وجود ندارد. چون Γ همبند است فرض کنیم چنس ـ . جورسازی برای دو راس با فاصله ی d وجود دارد. اگر $d = 1$ و مثلا دو راس مورد بررسی u و v باشند آن گاه با اضافه کردن یال $e = uv$ به آن جورسازی، جورسازی بزرگ تر ی حاصل می شود که خلاف تعریف بیشس ـ . است. فرض کنیم یک جورسازی بیشس سر ۰ ط که دو راس را نپوشانده و آن دو راس با فاصله ی کمتر ـ از d هستند، وجود ندارد و

حکم را برای زمانی که فاصله ی بین دو راس d است ثابت می کنیم. بنابراین فرض کنیم N یک جورسازی بیشینه باشد که دو راس u و v با فاصله ی d را نمی پوشاند. راس x متفاوت از u و v را روی یک کوتاه ترین راه P بین u و v اختیار می کنیم. بنابرفرض استقراء، نمی توان یک جورسازی بیشینه یافت که u(و هم x) را نپوشاند؛ زیرا فاصله ی بین این دو راس کمتر از d است. این ایجاب می کند که جورسازی بیشینه N راس x را پوشانده و راس های u و v نه. توسط جورسازی M_x پوشانده می شود.

تفاضل متقارن $\Delta M_x = H$ را درنظر بگیرید. این مجموعه از یال ها به عنوان یک زیرگراف دارای حداکثر درجه 2 است و هر مولفه ی آن یا یک راه و یا یک دور است. به علاوه، یال های هر مولفه از H به طور متناوب در N و M_x قرار دارند و $deg_H(u) = deg_H(v) = deg_H(x) = 1$. راه های P_u و P_v را چنان اختیار می کنیم که راس پایانی آن ها به ترتیب u و v باشند. اگر $P_u = P_v$ آن گاه چون یال ها یک در میان در N و M_x هستند، با بیشینه بودن N تناقض می رسیم. همچنین اگر x راس پایانی هر دو راه باشد آن گاه بایستی $u = v$ که خلاف انتخاب u و v است.

6. ثابت کنید که تمام گراف های راس انتقالی r-منظم که r عددی فرد است، جورسازی کامل دارند.

حل. بنابر مسئله ی 5 می توان یک جورسازی برای آن یافت که حداکثر یک راس را پوشش ندهد. حال چون در یک گراف مکعبی $2m = rn$، لذا تعداد راس ها عددی زوج است و از این رو Γ یک جورسازی کامل خواهد داشت.

7. فرض کنید Γ گرافی مکعبی است. ثابت کنید Γ هامیلتونی است اگر و تنها اگر (Γ^*) هامیلتونی باشد.

حل. با توجه به این که گراف یالی گراف دوگان یک گراف مکعبی است به جایگزین کردن یک مثلث در راس های آن گراف حاصل می شود.

تمرینات پایان فصل

1. ثابت کنید گراف Γ اویلری است اگر و تنها اگر همبند بوده و درجه هر راس عددی زوج باشد.

2. فرض کنید H زیرگراف . از یک گزاف G است. ثابت کنید H مولفه همبندی است اگر و تنها اگر الف) H همبند باشد ب) بس ـ . یک راس H و یک راس G که خارج از H قرار دارد، هیچ مسر ـ ی وجود نداشته باشد.

3. فرض کنید g یک جایگشت از $V(\Gamma)$ است. ثابت کنید g خودریخی ـ از Γ است اگر و تنها اگر g و g^{-1} همریخی ـ گراف باشند. مثالی بیابید که g همریخی ـ و دوسوی ـ بوده ولی یک ریخی ـ نباشد.

4. تمام مسرهای همیلتونی . اجسام افلاطونی . را بدست آورید.

5. ثابت کنید گراف های متناظر با تمام اجسام افلاطونی . گراف هایی ـ هامیلتونی . هستند و گروه خودریخی ـ تمام آن ها را بدست آورید.

6. ثابت کنید مجموعه تمام گراف ها با همریخی ـ بس ـ . آن ها تشکیل یک رسته می دهد. به علاوه نشان دهید که حاصل تانسوری دو گراف صر . ب آن ها در رسته گراف هاست.

7. ثابت کنید $E(\Delta\otimes\Gamma) = E(\Delta\square\Gamma)\cup E(\Delta\times\Gamma)$.

8. تبصره 10 را ثابت کنید.

راهنمایی ـ : ابتدا ثابت کنید $H(d,q) \cong K_d \times \dots \times K_d$ که در آن گراف کامل K_d به تعداد q بار ظاهر شده است. سپس دو حالت $d = 2$ و $d \neq 2$ را جداگانه بررسی کنید.

9. شکل کلی یک راه هامیلتونی . در گراف مکعب n بعدی را بیابید.

10. ابتدا ثابت کنید که زوج (V,d) تعریف شده در درس یک فضای مر ـ یک است. سس گراف همینگ $H(d,q)$ را نظرگرفته و تعداد درایه های بس ـ . دو راس این گراف را فاصله ی همینگ ـ . آن دو راس بنامید. ثابت کنید این تعریف یک مر ـ روی مجموعه ی راس های گراف همینگ تعریف می کند همان مر ـ تعریف شده در درس است.

11. رابطه ای برای یافس ـ . فاصله ـ . دو حاصل صر . ب دکارتی ـ دو گراف یافته و آن را ثابت کنید. آیا می توانید این رابطه را در حالتی ـ که با حاصل صر . ب دکارتی ـ n گراف مواجه هستیم تعمیم دهید.

12. مسئله ی 11 حاصل صر . ب تانسوری نر ـ . حل کنید.

13. ثابت کنید $H_{n_1,\dots,n_N} \cong K_{n_1} \times \dots \times K_{n_N}$.

14. لازم و کافی . برای منظم بودن حاصل صر . ب دکارتی ـ گراف ها یافته و آن را ثابت کنید.

سر ـ طی

15. سر ۰ ی لازم و کافی . برای منظم بودن حاصل صر . ب تانسوری گراف ها یافته و آن را ثابت کنید.

16. سر ۰ ی لازم و کافی . برای منظم بودن حاصل صر . ب قوی گراف ها یافته و آن را ثابت کنید.

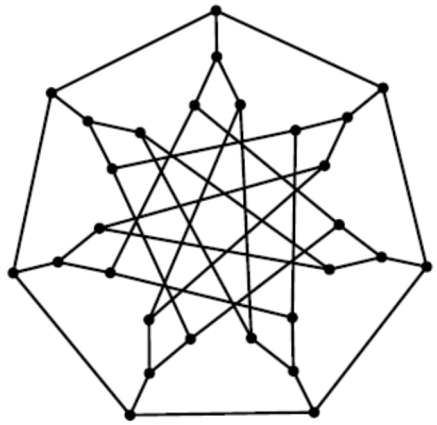
17. ثابت کنید که تصویر هر راس برسی ۰ تحت یک خودریخی ۰ مجددا یک راس برسی ۰ است. حکم مشابه را برای یک پال از ثلین نتیجه بگیر ۰ ید که تعداد راس های برسی ۰ و تعداد یال های برسی ۰ پایاهای عددی گراف هستند.

18. یک همریخی ۰ گراف بیابید که راس برسی ۰ را به راس برسی ۰ تصویر نکند.

19. یک همریخی ۰ گراف بیابید که پل را به پل تصویر نکند.

20. ثابت کنید گراف دورهامیلتونی . ندارد. آیا راه هامیلتونی . دارد؟

21. ثابت کنید که گراف مکعبی و 28 راسی کاگستر راس انتقالی است ولی هامیلتونی نیست.



شکل 13. گراف 28 راسی کاگستر.

22. ثابت کنید که دوسی ۰ حدس 3، حدس لواش را نتیجه می دهد.

23. ثابت کنید عکس قضایای اوره و دایراک در حالت کلی برقرار نیست.

24. گراف Γ را یک گراف (6فوق)اوری . می نامند، هرگاه Γ مسطح و 3-همبند بوده، و به علاوه وجوه آن r ضلعی و شش ضلعی باشند. ثابت کنید که در هر گراف (6فوق)اوری . ، r یکی از اعداد 3، 4 یا 5 است و در هر حالت تعداد r ضلعی ها و شش ضلعی ها را بدست آورید.

راهنمایی ۰ : از قضیه اویلر استفاده کنید.

25. ثابت کنید اجسام افلاطونی . درحدس سوم صدق می کنند.

26. ثابت کنید که هردرخت حداقل دو راس غیر ـ برسی ـ دارد ولی یال غیر ـ برسی ـ ندارد.

27. ثابت کنید که در هر گراف مسطح Γ با n راس، $n \geq 3$، و m یال، $m \leq 3n - 6$.

28. رابطه ای برای گراف ـ . فاصله بین ـ . دو راس در حاصل ضرب . ب دکارتی ـ دو گراف یافته و آن را ثابت کنید. آیا می توانید این رابطه را در حالتی ـ که با حاصل ضرب . ب دکارتی ـ n گراف مواجه هستیم تعمیم دهید.

29. دوگان یک گراف مسطح گرانی . چون Γ^* است که راس های آن وجه های Γ بوده و در آن دو راس مجاورند اگر وتنها اگر وجه های متناظر آن رئوس در یک یال مشترک باشند. با استفاده از گراف دوگان یا هر روش دیگر ثابت کنید که در یک گراف مسطح f وجه، حاص جمع درجات وجوه دوبرابر تعداد یال هاست.

30. فرض گرانی Γ با سر ـ ط $|E(\Gamma)| \geq 2 + \binom{n-1}{2}$ باشد که $n \geq 3$. ثابت کنید که Γ هامیلتونی . است.

31. ثابت کنید یک ریخی ـ گراف ها، راس بحرانی . را به راس بحرانی . و جورسازی بیشینه ـ . را به جورسازی بیشینه ـ . تصویر می کند.

32. آیا می توان مسئله ی 7 را به یک گراف r-منظم تعمیم داد؟

فصل دوم

مفاهیم و نتایجی از نظریه گروه

برای هر زیرگروه H از گروهی چون G، هر مجموعه به شکل $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ را یک همدسته راست H در G می نامیم. همدسته های چپ به طور مشابه تعریف می شوند. بنابر نتیجه ای معروف در نظریه مقدماتی گروه ها، تعداد همدسته های راست و چپ یک زیرگروه H با هم برابر بوده و این تعداد را با نماد $|G:H|$ نشان می دهیم. اگر G گروهی متناهی باشد آن گاه $|G:H| = \frac{|G|}{|H|}$.

یک خودریختی از گروهی چون G، تابعی دوسویی مانند f از G به روی G است که ضرب را حفظ کند. مجموعه چنین نگاشت هایی را با $Aut(G)$ نشان می دهند. زیرگروه H از گروه G را یک زیرگروه مشخصه G می نامیم هرگاه برای هر خودریختی β از G داشته باشیم $\beta(H)=H$.

فرض کنیم G یک گروه و X زیرمجموعه ای از G باشد. نرمال ساز X در G مجموعه تمام عناصری چون $g\in G$ است که $g^{-1}Xg=X$. نرمالساز X در G را با $N_G(X)$ نشان می دهیم. زیرمجموعه A از گروه G را زیرمجموعه نرمال می نامیم هرگاه همواره $g^{-1}Ag=A$.

فرض کنید G یک گروه باشد و $A\subseteq G$. زیرمجموعه A را مولد گروه G می نامیم هرگاه هر عضو G را بتوان به صورت حاصل ضربی از عناصر A نوشت و در این حالت می نویسیم $G = \langle A \rangle$. به زبان دقیق تر برای هر $g\in G$ بتوان عناصر $a_1,\dots a_r\in A$ را چنان یافت که $g = a_1a_2\dots a_r$.

مسئله توسيع در گروه ها يعني ساختن گروه هايي از مرتبه بزرگ با استفاده از گروه هايي شناخته شده از مرتبه كوچك تر. فرض كنيم M و N دو گروه داده شده هستند. سه شكل متفاوت از توسيع يك گروه بوسيله M و N وجود دارد كه موضوع بحث اين فصل است. در اولين شكل از توسيع دو گروه M و N داده شده است و ما دنبال گروهي چون G حاوي زيرگروه هايي نرمال چون H و K مي گرديم كه (الف) $H \cong M$ و $K \cong N$، (ب) $H \cap K = \{e\}$ و (ج) $G = HK$. اين شكل از توسيع به حاصل ضرب گروه ها منجر مي شود. در شكل دوم از توسيع گروه ها، ما شرط نرمال بودن را در توسيع نوع اول حذف مي كنيم. ما خواهيم ديد كه شكل دوم توسيع به مفهوم حاصل ضرب نيم مستقيم منتهي مي شود. در

سومين و آخرين شكل توسيع ما دنبال گروهي چون G حاوي زيرگروهي نرمال چون H مي گرديم كه H ≅ M و $\frac{G}{H} \cong N$. با شكل اول از توسيع گروه ها شروع مي كنيم. فرض كنيم كه M و N دو گروه داده شده هستند و G = M × N. براي عناصر دلخواه (x,y) و (a,b)، عمل ضرب را در G چنين تعريف مي كنيم (x,y)(a,b) = (xa,yb). حال به تعميمی از اين ضرب می پردازيم.

تعريف 1. گروه G همراه با زيرگروه های H و N داده شده است. گروه G را ضرب نيم مستقيم H بوسيله N می ناميم هرگاه شرايط زير برقرار باشند:

1. زيرگروه N در G نرمال است.
2. G = HN = {hn | h ∈H & n∈ N}.
3. H ∩N ={e}.

گروه G را ضرب نيم مستقيم زيرگروه H بوسيله N است با نماد $H \ltimes N$ يا $N \rtimes H$ نشان مي دهيم.

توجه كنيد كه هر گروه G را می توان به صورت ضرب نيم مستقيم خود G و زيرگروه بديهی نوشت. اين حالت را ضرب نيم مستقيم بديهی می نامند. توجه كنيد كه گروه هايی وجود دارند كه نمی توان آن ها را به صورت ضرب نيم مستقيم دو زيرگروه غير بديهی نوشت. مثال زير كوچک ترين چنين گروه هايی را بدست می دهد.

مثال 2. گروه كواترنيون های $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ است. توجه كنيد در اين گروه همواره ij = -ji = k، jk = -kj = i و نهايتا ki = -ik = j. به علاوه $(\pm i)^2 = (\pm j)^2 = (\pm k)^2 = -1$. لذا 6 عضو از مرتبه 4 خواهيم داشت. يک عضو همانی و عضو هشتم يعنی 1− از مرتبه 2 است. توجه كنيد كه در هرگروه G با زيرگروه های H و K همواره $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$. حال نشان می دهيم كه كواترنيون ها را نمی توان به شكل ضرب نيم مسقيم غيربديهی نوشت. فرض كنيم H و N چنان باشند كه Q_8 ضرب نيم مستقيم آن ها باشد. پس |H| = 2, 4 و |N|=2,4. توجه كنيد كه گروه Q_8 تنها يک زيرگروه مرتبه 2 داريم و آن زيرگروه {1, −1} است و عضو 1− در هر زيرگروه از مرتبه 4 وجود دارد. يعنی H∩N≠{1} كه تناقض است.

مثال 3. فرض کنید $D_{2n} = \langle x, y \mid x^n = y^2 = e, yxy = x^{-1}\rangle$ که $n \geq 3$. این گروه را گروه دووجهی از مرتبه $2n$ می نامند. توجه کنید که عناصر این گروه به صورت زیر هستند:

$$e, x, x^2, \ldots, x^{n-1},$$

$$y, xy, x^2y, \ldots, x^{n-1}y$$

به سادگی می توان دید عناصر سطر اول همگی داخل زیرگروه $\langle x\rangle$ قرار می گیرند و عناصر سطر دوم همگی از مرتبه 2 هستند (چرا؟). در این مثال نشان می دهیم که گروه دووجهی از مرتبه $2n$ را می توان به صورت ضرب نیم مستقیم نوشت. برای این منظور قرار می دهیم $N = \langle x\rangle$ و $H = \langle y\rangle$. در این صورت چون اندیس H در گروه دووجهی برابر 2 است لذا N زیرگروهی نرمال است. بنابر ساختار عناصر گروه دووجهی $H\cap N=\{e\}$ و بنابر قضیه ذکر شده در خصوص مرتبه HN، $|HN| = 2n$ و لذا $HN = D_{2n}$. پس گروه دوجهی را می توان به صورت ضرب نیم مستقیم زیرگروه های H و N نوشت.

فرض کنیم G یک گروه و X یک مجموعه است. گوئیم G روی X عمل می کند هرگاه تابعی چون $\square: X\times G \to X$ وجود داشته باشد که همواره $x\square e=x$ و $x\square gh=(x\square g)\square h$. دراینجا $x\square g=\square(x,g)$. اگر به علاوه X هم یک گروه باشد و همواره برابری $xy\square g = (x\square g)(y\square g)$ درست باشد، آنگاه می گوئیم گروه G به صورت گروهی روی گروه X عمل کرده است.

قضیه 4. فرض کنید G یک گروه، H زیرگروه G و N زیرگروه نرمال آن باشد. در این صورت احکام زیر معادل هستند:

1. $G = HN$ و $H\cap N = 1$.
2. برای هر عضو $g\in G$، عناصر یکتای $h\in H$ و $n\in N$ وجود دارند که $g=hn$.
3. نگاشت $\alpha:H\to G/N$ با ضابطه $\alpha(h)= hN$ یکریختی است.
4. همریختی $\beta:G\to H$ وجود دارد که روی H همانی عمل کرده و هسته آن N باشد.

برهان. فرض کنیم (1) برقرار بوده و $g\in G$ دلخواه است. چون $G = HN$، $h\in H$ و $n\in N$ وجود دارند که $g=hn$. حال فرض کنیم $h'\in H$ و $n'\in N$ هم وجود دارند که $g=h'n'$. در این صورت $hn=h'n'$ و از

این رو $(h')^{-1}h = n'n^{-1}$. چون طرف چپ این برابری عضو H و طرف راست آن عضو N است لذا هر دو داخل $H\cap N$ قرار می گیرند که برابر همانی است. پس $h = h'$ و $n = n'$ که یکتایی را ثابت می کند. حال فرض کنیم (2) برقرار باشد. واضح است که α همریختی است. فرض کنیم gN از طرف دوم دلخواه باشد. بنابر (2)، h و n را می توان چنان یافت که $g = hn$. پس $\alpha(h) = hN = hnN = gN$ و لذا α پوشاست. نهایتا فرض کنیم $\alpha(h) = \alpha(x)$ که در آن $h, x\in H$. در اینصورت $hN = xN$ و از این رو $h^{-1}x\in N$. حال قرار می دهیم $t = h^{-1}xe = eh^{-1}x$ و بنابر یکتایی نمایش t بایستی داشته باشیم $h^{-1}x = e$. این نتیجه می دهد که $h = x$ و α یک به یک است. پس α یکریختی بوده و حکم (3) حاصل می شود.

در ادامه فرض کنیم (3) برقرار باشد. بنابر فرض $\alpha^{-1}:G/N \to H$ يك همريختي است و تركيب آن با نگاشت كانوني $\gamma:G\to G/N$ نگاشت مورد نظر $\beta:G\to H$ را ايجاد مي كند. در واقع $\beta=\alpha^{-1}\gamma$ نگاشت مورد نظر است. فرض كنيم $h\in H$ دلخواه است. در اينصورت

$$\beta(h) = \alpha^{-1}\gamma(h) = \alpha^{-1}(hN) = h.$$

حال هسته همريختي β را بدست مي آوريم.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\beta &= \{x\in G \mid \beta(x) = e\}\\
&= \{x\in G \mid \alpha^{-1}\gamma(x) = e\}\\
&= \{x\in G \mid \gamma(x) = \alpha(e) = N\}\\
&= \{x\in G \mid xN = N\}\\
&= \{x\in G \mid x \in N\}\\
&= N.
\end{aligned}$$

اين اثبات (4) را كامل مي كند. براي كامل شدن اثبات قضيه از عبارت (4)، عبارت (1) را نتيجه مي گيريم. فرض كنيم (4) برقرار باشد. عضو $g\in G$ را دلخواه اختيار مي كنيم. بنابر فرض $\beta(g)\in H$ و لذا مي توان نوشت $g = \beta(g)\beta(g)^{-1}g$. نشان مي دهيم $\beta(g)^{-1}g\in N$. براي اين منظور مقدار β را روي اين عضو حساب مي كنيم.

$$\beta(\beta(g)^{-1}g) = \beta(\beta(g^{-1}))\,\beta(g) = \beta(g^{-1})\,\beta(g) = \beta(g^{-1}g) = \beta(e) = e$$

بنابراين $\beta(g)^{-1}g \in Ker\beta = N$ كه ثابت مي كند هر عضو G حاصل ضرب عضوي از H در عضوي از N است، يعني $G = HN$. نهايتا فرض كنيم $x \in H \cap N$ دلخواه باشد. چون $x \in H$، $\beta(x) = x$ و چون $x \in N$، $\beta(x) = e$. اين ثابت مي كند كه $x=e$ يا به طور معادل $H \cap N = 1$. □

فرض كنيد $G = H \times N$. قرار می دهیم $\bar{H} = \{(h,e)|h \in H\}$ و $\bar{K} = \{(e,k)|k \in K\}$. در این صورت به سادگی و با استفاده از تعریف می توان دید که $\bar{H}$ و $\bar{K}$ زیرگروه های نرمال G بوده، $G = \bar{H}\bar{K}$ و $\bar{H} \cap \bar{K} = 1$. بنابراین G حاصل ضرب نیم مستقیم زیرگروه های $\bar{H}$ و $\bar{K}$ است. چون به سادگی می توان ثابت کرد که $\bar{H} \cong H$ و $\bar{K} \cong K$ و به این دلیل مرسوم است تا بگوئیم که G حاصل ضرب نیم مستقیم گروه های H و K است.

قضیه 5. فرض کنید G یک گروه متناهی، H زیرگروهی از G و N یک زیرگروه نرمال آن باشد که در شرایط $G = HN$ و $H \cap N = 1$ صدق کند. نگاشت $\phi: H \to Aut(N)$ با ضابطه $\phi(h) = \phi_h$ يك همريختي G است. در اينجا تابع $\phi_h(n)$ با ضابطه $\phi_h(n) = hnh^{-1}$ تعریف می شود. در این صورت مجموعه $N \times H$ با عمل ضرب زیر يك گروه يكريخت با G است.

$$(n_1,h_1) \bullet (n_2,h_2) = (n_1\phi(h_1)(n_2), h_1h_2) = (n_1\phi_{h1}(n_2), h_1h_2).$$

برعكس فرض كنيم گروه هاي N و H به همراه همريختي $\phi: H \to Aut(N)$ داده شده است. در اين صورت $G = N \times H$ با عمل ضرب بالا يك گروه است كه می توان آن را به صورت ضرب نیم مستقیم زیرگروهی یک ریخت با H بوسیله زیرگروهی یک ریخت با N نوشت. این گروه را با $N \rtimes_\phi H$ نشان می دهند.

برهان. ابتدا فرض كنيم نگاشت $\phi: H \to Aut(N)$ با ضابطه $\phi(h)(n) = hnh^{-1}$ داده شده است. چون N نرمال است، $\phi(h)(n) = hnh^{-1} \in N$ و لذا $\phi(h)$ نگاشتی خوش تعریف است. به سادگی می توان دید که این نگاشت یک خودریختی روی N تعریف می کند و از این رو تابع ϕ خوش تعریف است. نهایتا

$$\phi(h_1h_2)(n) = h_1h_2nh_2^{-1}h_1^{-1} = h_1\phi(h_2)(n)h_1^{-1} = \phi(h_1)\phi(h_2)(n)$$

و لذا ϕ همریختی است. حال ثابت می کنیم که عمل زیر یک گروه روی $N \times H$ تعریف می کند:

$$(n_1,h_1) \bullet (n_2,h_2) = (n_1\phi_{h1}(n_2), h_1h_2).$$

با توجه به تعریف بالا $(n,h)\bullet(e,e)=(n\phi_h(e),he)=(n,h)$ و $(e,e)\bullet(n,h)=(e\phi_e(n),eh)=(n,h)$.

بنابراین (e,e) همانی $N \times H$ است. حال شرکت پذیری این عمل را بررسی می کنیم.

$$[(n_1,h_1) \bullet (n_2,h_2)] \bullet (n_3,h_3) = (n_1\phi_{h1}(n_2), h_1h_2) \bullet (n_3,h_3)$$
$$= (n_1\phi_{h1}(n_2)\phi_{h1h2}(n_3), (h_1h_2)h_3)$$
$$= (n_1\phi_{h1}(n_2)\phi_{h1h2}(n_3), h_1(h_2h_3))$$
$$= (n_1h_1n_2h_1^{-1}h_1h_2n_3h_2^{-1}h_1^{-1}, h_1(h_2h_3))$$

$$(n_1,h_1) \bullet [(n_2,h_2) \bullet (n_3,h_3)] = (n_1, h_1) \bullet (n_2\phi_{h2}(n_3), h_2h_3)$$
$$= (n_1, h_1) \bullet (n_2h_2n_3h_2^{-1} , h_2h_3)$$
$$= (n_1h_1n_2h_2n_3h_2^{-1}h_1^{-1}, h_1(h_2h_3))$$

بنابراین شرکت پذیری برقرار است. نهایتا هر عضو وارون دارد (چرا؟) و لذا $N \times H$ یک گروه است.

برای کامل شدن اثبات نگاشت $\alpha: N \times H \to G$ با ضابطه $\alpha(n,h) = nh$ یک ریختی گروه است.

مثال 6. فرض کنید $\mathbb{T}_n$ مجموعه تمام ماتریس هاي مربعي $n \times n$ بالا مثلثي است كه روي قطر اصلي آن درايه اي برابر صفر وجود ندارد. فرض كنيد $\mathbb{D}_n$ مجموعه تمام ماتريس هاي قطري با دترمينان ناصفر و $\mathbb{U}_n$ مجموعه تمام ماتريس هايي مثلثي باشد كه تمام درايه هاي واقع بر قطر اصلي آن ها برابر 1 است. گروه آخري را **گروه ماتريس هاي بالا مثلثي يكاني** مي نامند. حال با محاسباتي ساده مي توان ديد:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{11}^{-1}a_{12} & \cdots & a_{11}^{-1}a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

بنابر اين هر ماتريس دلخواه A نمايشي به صورت حاصل ضرب ماتريسي از $\mathbb{D}_n$ در ماتريسي از $\mathbb{U}_n$ است و از اين رو $\mathbb{T}_n = \mathbb{D}_n\mathbb{U}_n$. از طرف ديگر $\mathbb{D}_n \cap \mathbb{U}_n = 1$ و لذا $\mathbb{T}_n = \mathbb{D}_n \ltimes \mathbb{U}_n$.

قضیه 7. فرض کنید K گروهی دوری، H گروهی دلخواه و $f, g : M \to Aut(H)$ دو همریختی باشند چنان که f(M) و g(M) مزدوج هستند. در حالتی که K نامتناهی باشد، به علاوه فرض خواهیم کرد که f و g یک به یک نیز هستند. در این صورت $M \ltimes_f N \cong M \ltimes_g N$.

برهان بنابر فرض می توان نوشت $f(K) = \sigma g(K)\sigma^{-1}$ که $\sigma \in Aut(H)$. ابتدا فرض می کنیم K متناهی باشد. چون f(K) و g(K) مزدوج هستند، مرتبه یکسان داشته و

$$|Ker\ f| = |Ker\ g| = \frac{|K|}{|f(K)|} = \frac{|K|}{|g(K)|}.$$

چون K دوری است و Ker f و Ker g زیرگروه هایی از K با مرتبه یکسان هستند، Ker f = Ker g. برای سادگی این زیرگروه مشترک را با N نشان می دهیم. تابع $c_\sigma: Aut(H) \to Aut(H)$ با ضابطه ی $c_\sigma(\alpha)=\sigma^{-1}\alpha\sigma$ را در نظر بگیرید. به سادگی دیده می شود که نگاشت c_σ یک خودریختی است. حال تابع تحدید $c_\sigma|_{f(K)}: f(K) \longrightarrow \sigma^{-1}f(K)\sigma = g(K)$ را که بوضوح یک یک ریختی است اختیار می کنیم. بنابر قضیه اساسی همریختی همریختی های *f* و *g*، یک ریختی هایی بین $\frac{K}{N}$ و *f*(*K*) و همچنین بین $\frac{K}{N}$ و *g*(*K*) تعریف می کند که آن ها را نیز به ترتیب با همان *f* و g نشان می دهیم. بنابراین نگاشت $g^{-1}c_\sigma|_{f(K)}f: \frac{K}{N} \longrightarrow \frac{K}{N}$ یک خودریختی است. چون K دوری است، $\frac{K}{N}$ نیز گروهی دوری و مثلا یک ریخت با Z_m است که در آن *m* مرتبه K را می شمارد. حال بنابر دوری بودن $\frac{K}{N}$ ، $Aut\left(\frac{K}{N}\right) \cong U_m$ و لذا $g^{-1}c_\sigma|_{f(K)}f$ را می توان با یکالی مانند u از U_m یکی گرفت. از طرف دیگر اگر K گروهی از مرتبه n باشد آن گاه $Aut(K) \cong U_n$. نگاشت طبیعی $\beta: U_n \to U_m$ را با ضابطه ی $\beta(a) =$ در نظر می گیریم. ....

در نظریه گروه، حاصل ضرب حلقوی، حاصل ضرب نیم مستقیم خاصی از دو گروه است. این حاصل ضرب در محاسبه گروه خودریختی گراف ها مورد استفاده قرار می گیرد.

فرض کنید G و F دو گروه متناهی و Ω مجموعه ای باشد که G روی آن عمل می کند. قرار می دهیم $F^\Omega = \{f: \Omega \longrightarrow F \mid f$ یک نگاشت است$\}$. در این صورت مجموعه F^Ω با ضرب مولفه وار $(f.g)(x) = f(x)g(x)$ یک گروه است. همانی این گروه تابع $1: \Omega \to F$ با ضابطه $1(x) = 1_F$ می باشد.

همچنین وارون تابع f، تابعی چون g است که $g(x) = f(x)^{-1}$. ما عمل طبیعی G روی F^{Ω} را با ضابطه $(f\bullet g)(x) = f(xg^{-1})$ تعریف می کنیم که در آن $f \in F^{\Omega}$ و $g\in G$ دلخواه هستند. برای اثبات عمل بودن، توجه کنید که $(f\bullet e)(x) = f(xe) = f(x)$ و لذا $f\bullet e=f$. از طرف دیگر

$$f \bullet (gh)(x) = f(x(gh)^{-1}) = f((xh^{-1})g^{-1}) = (f \bullet g)(xh^{-1}) = (f \bullet g)\bullet h(x).$$

بنابراین $f\bullet(gh) = f\bullet(g\bullet h)$ و لذا G روی F^{Ω} عمل می کند. حال ثابت می کنیم که

$$(f_1.f_2)\bullet g = f_1\bullet g.\ f_2\bullet g.$$

برای این منظور چنین عمل می کنیم:

$$(f_1f_2) \bullet g\ (x) = (f_1f_2)(\ x\ g^{-1}) = f_1\ (x\ g^{-1})\ f_2\ (x\ g^{-1}) = (f_1\bullet g)(x)\ (f_2\bullet g)(x).$$

که حکم را بدست می دهد. نهایتا نشان می دهیم $(f \bullet g)^{-1} = f^{-1}\bullet g$.

$$(f \bullet g)^{-1}(x) = [(f \bullet g)(x)]^{-1} = [f(x\ g^{-1})]^{-1} = (f^{-1}\bullet g)(x).$$

بنابراین گروه G بعنوان گروهی از خودریختی ها روی F^{Ω} عمل می کند. حال یک ضرب روی مجموعه $F^{\Omega} \times G$ با ضابطه $(f,g)(f',g') = (f.(f'\bullet g^{-1}),gg')$ تعریف می کنیم. توجه کنید که در اینجا $(f.(\ f'\bullet g))(x) = f(x)f'(g^{-1}x)$.

قضیه 8. مجموعه $F^{\Omega} \times G$ با ضرب داده شده در بالا یک گروه با عضو همانی $(1,1_G)$ است که در آن 1_G همانی گروه G بوده و همواره $1(x) = 1_F$. به علاوه $(f,g)^{-1}=(\ f^{-1}\bullet g^{-1},g^{-1})$.

برهان. فرض کنیم $(f,g), (f',g'),(f'',g'') \in F^{\Omega} \times G$ دلخواه باشند. در اینصورت

$$\begin{aligned}
[(f,g)(f',g')](f'',g'') &= (f.(f'\bullet g^{-1}),gg')\ (f'',g'') \\
&= ([f.(f'\bullet g^{-1})].f''\bullet(gg')^{-1},(gg')g'') \\
&= (f.[(f'\bullet g^{-1}).(\ f''\bullet(gg')^{-1}],g(g'g'')) \\
&= (\ f.[(f'\bullet g^{-1}).(\ f''\bullet(g'^{-1}g^{-1})], g(g'g'')) \\
&= (f.[(f'\bullet g^{-1}).((f''\bullet g'^{-1})\bullet g^{-1})], g(g'g'')) \\
&= (f.[(f'\bullet g^{-1}).((f''\bullet g'^{-1})\bullet g^{-1})], g(g'g'')) \\
&= (f.([(f'\bullet g^{-1}).(f''\bullet g'^{-1})]\bullet g^{-1}), g(g'g''))
\end{aligned}$$

$$= ((f,g).[(f'\bullet g^{-1}).(f''\bullet g'^{-1})], g'g'')$$

$$= (f,g).([(f'. f'') \bullet g^{-1}], g'g'')$$

$$= (f,g).[(f', g').(f'', g'')]$$

این ثابت می کند که عمل گروه شرکتپذیر است. این که $(1,1_G)$ همانی گروه است به صورت زیر ثابت می شود. برای اثبات این موضوع ابتدا توجه کنید که $g\bullet 1(x)=1(xg^{-1})=1_F$ و لذا $g\bullet 1=1$. بنابراین $(f,g)(1,1_G) = (f.g\bullet 1, g1_G) = (f.1,g) = (f,g)$. مشابها $(1,1_G)(f,g) = (f,g)$. نهایتا

$$(f^{-1}\bullet g,g^{-1})(f,g) = ((f^{-1}\bullet g)(f\bullet g),gg^{-1})$$

$$= (f^{-1}f\bullet g,1_G)$$

$$= (1_F\bullet g, 1_G)$$

$$= (1_F, 1_G)$$

که ثابت می کند $(f,g)^{-1}=(g^{-1}f^{-1},g^{-1})$. پس $F^{\Omega} \times G$ با ضرب داده شده یک گروه است.

تعریف 9. گروه $F^{\Omega} \times G$ با عمل داده شده در بالا را حاصل ضرب حلقوی گروه F بوسیله G می نامند. این گروه با $F \wr G$ نشان داده می شود.

توجه کنید که بنابر تعریف حاصل ضرب حلقوی $|F \wr G| = |F|^{|\Omega|}|G|$.

قضیه 10. با نمادهای بالا $F \wr G \cong F^{\Omega} \rtimes G \cong (F \times \ldots \times F) \rtimes G$.

برهان. ابتدا ثابت می کنیم $F \wr G$ زیرگروه هایی یکریخت با F^{Ω} و G دارد. برای این منظور زیرگروه های H و K را مانند زیر تعریف می کنیم:

$$H = \{(f,1_G) \mid f\in F\},\ K = \{(1,g) \mid g\in G\}.$$

حال نشان می دهیم که H در $F \wr G$ نرمال است. فرض کنیم $(f,g)\in F \wr G$ و $(f',1_G)\in H$ دلخواه باشند. در اینصورت

$$(f,g)(f', 1_G)(f,g)^{-1} = (f,g)(f', 1_G)(f^{-1}\bullet g^{-1}, g^{-1})$$

$$= (f.(f'\bullet g^{-1}),g)\ (f^{-1}\bullet g^{-1}, g^{-1}) = (-,1_G) \in H.$$

پس H نرمال است. از طرف دیگر بوضوح $H \cap K = \{(1,1_G)\}$. نهایتا نشان می دهیم $F \wr G = H.K$.
عضو دلخواه $(f,g) \in F \wr G$ را در نظر می گیریم. در اینصورت

$$(f,1_G)\,(1,g) = (f.(1\bullet 1_G),g) = (f,g) \in H.K$$

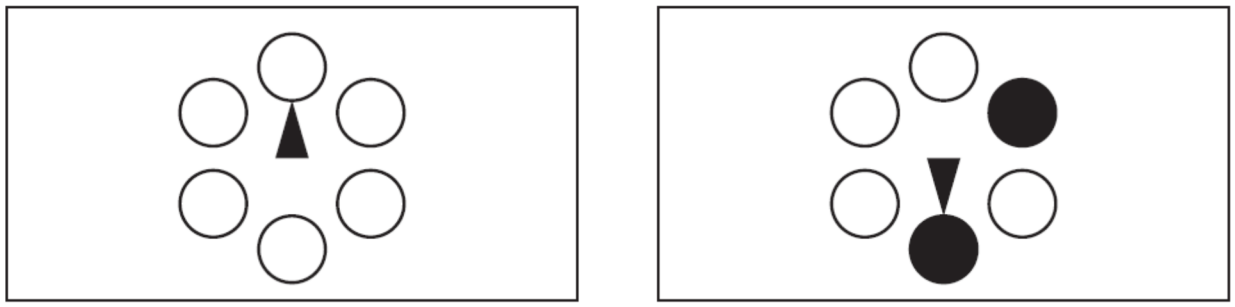
ولذا $F \wr G = H.K$. بنابراین $F \wr G \cong F^{\Omega} \rtimes G$. نهایتا توجه کنید $F^{\Omega} \cong F \times \ldots \times F$. □

مثال 11. فرض کنید $F = Z_2$ و $G=\{(),(123),(132)\}$ که برای ساخت حا صل ضرب حلقوی، عمل G روی $\Omega=\{1,2,3\}$ در نظر گرفته شده است. در اینصورت $F \wr G$ گروهی از مرتبه $8 \times 3 = 24$ خواهد بود. به علاوه یک عنصر از $F \wr G$ به شکل (f,g) است که $f:\{1,2,3\}\to F$ و $g\in G$.

در ادامه دسته ای معروف از گروه ها که به نشان گر لامپ معروف است معرفی می کنیم. این گروه را با L_n نشان می دهیم. ما در واقع برای هر عدد صحیح n یک گروه L_n (L به خاطر حرف اول لامپ) تعریف می کنیم. این گروه با روشی مشابه آن چه برای گروه دو وجهی انجام شده است و با استفاده از عملیات چرخش و انعکاس روی یک n-ضلعی منظم انجام می شود. ماشین M_n، متشکل از n لامپ مرتب شده روی یک دایره و یک نشان گر را که می تواند به سمت هر یک از لامپ ها چرخانده شود، در نظر بگیرید.

شکل 1: مدلی فیزیکی از گروه نشان گر لامپ در حالت $n = 6$.

عناصر این گروه به شکل زوج های مرتب $(u;i)$ است که در آن $u= u_1u_2\ldots u_n$ دنباله ای از عناصر 0 یا 1 به طول n و i عضوی از Z_n است.



الف عضو (100010;3). **ب** حالت آغازین (000000;0).

شکل 2: دوحالت از ماشین شش لامپی M_n.

توجه کنید که مولفه اول دنباله ای از 0 و 1 با طول n یعنی تعداد لامپ ها و مولفه دوم عضوی از گروه $Zn = \{0,1,...,n-1\}$ می باشد. در شکل 2 (حالت الف) نشان گر روی یک لامپ روش زوم شده است لذا درایه اول 1 و با حرکت در جهت عقربه های ساعت می بینیم که درایه چهارم نیز برابر 1 است باقی درایه ها که متناظر با لامپ های خاموش هستند، برابر صفر انتخاب شده اند. برای تعیین درایه دوم، اگر درایه ی واقع در شمال شکل را صفر بگیریم و در جهت عقربه های ساعت حرکت کنیم آنگاه درایه ای که نشان گر روی آن زوم شده است، عدد 3 را نشان می دهد.

فرض کنیم $\alpha = (100\ldots0;0)$ و $\rho = (0;1)$. حال عبارت $\alpha\rho^2\alpha\rho$ را بدست می آوریم. بنابراین،

$$\begin{aligned}\alpha\rho^2\alpha\rho &= (100\ldots0;0)(0;1)^2(100\ldots0;0)(0;1)\\ &= (100\ldots0;0)(0;2)\,(100\ldots0;0)(0;1)\\ &= (100\ldots0;2)(100\ldots0;1)\\ &= (100\ldots0 + 0\ldots010;3)\\ &= (10\ldots010;3)\end{aligned}$$

که همان عضو داده شده در شکل 2 (الف) است.

قبل از تعریف ضرب، به نمادی مفید می پردازیم که در ادامه کار به آن نیاز خواهیم داشت. فرض کنیم $u = u_1u_2\ldots u_n$ و k عضوی از Z_n است. چرخش عضو u به اندازه k به صورت $Rot(u_1u_2\ldots u_n,k) = u_{k+1}\ldots u_nu_1\ldots u_k$ تعریف می شود. حال تعریف می کنیم:

$$L_n = \{(u_1u_2\ldots u_n\,;\,j) \mid \forall i,\ u_i = 0 \text{ یا } 1;\ \ j \in Z_n\}.$$

روی L_n عمل ضرب را چنین تعریف می کنیم:

$$(v;k)(u;j) = (v+\mathrm{Rot}(u,k);k+j).$$

توجه کنید که جمع درایه های اول عضو به عضو و در میدان دو عضوی Z_2 انجام می شود. به عنوان مثال $L_2 = \{(00,0),(00,1),(01,0),(01,1),(10,0),(10,1),(11,0),(11,1)\}$ و حاصل ضرب دو عنصر (00;1) و (00;1) به صورت (00;1)(00;1) = (00+00; 1+1)=(00;0) تعریف می شود.

قضیه 12. مجموعه L_n با ضرب تعریف شده در بالا یک گروه از مرتبه $2^n\times n$ می باشد. در این گروه $O=(0,\ldots 0,0)$ عنصر همانی بوده و برای هر عضو دلخواه $(u_1u_2\ldots u_n;j)$ از گروه L_n، وارون از رابطه $(u_1u_2\ldots u_n;j)^{-1} = (u_{n-j+1}\ldots u_nu_1\ldots u_{n-j};-j)$ محاسبه می شود.

برهان. ثابت می کنیم که L_n یک گروه است. ابتدا عضو همانی را بررسی می کنیم.

$$(u;i)(0\ldots 0;0) = (u + \mathrm{Rot}(0\ldots 0,i),i+0) = (u+0;i) = (u,i).$$

حالت $(0\ldots 0;0)(u;i) = (u;i)$ مشابها ثابت می شود. حال وارون عضو (u;j) را می یابیم.

$$(u,j)(u_{n-j+1}\ldots u_nu_1\ldots u_{n-j};-j) = (u+\mathrm{Rot}(u_{n-j+1}\ldots u_nu_1\ldots u_{n-j},j),j + (-j))$$
$$= (u+u;0) = (0\ldots 0;0).$$

به طور مشابه $(u_{n-j+1}\ldots u_nu_1\ldots u_{n-j};-j)\ (u;j) = (0\ldots 0;0)$. نهایتا شرکت‌پذیری عمل داده شده به صورت زیر بررسی می شود:

$$[(u;i)(v;j)](w;k) = (u + \mathrm{Rot}(v,i);i+j)(w;k)$$
$$= (u + \mathrm{Rot}(v,i) + \mathrm{Rot}(w,i+j); i + j + k)$$
$$(u;i)[(v;j)(w;k)] = (u;i)(v + \mathrm{Rot}(w,j);j+k)$$
$$= (u + \mathrm{Rot}(v + \mathrm{Rot}(w,j),i); I + j + k)$$

بنابراین برای اثبات شرکت‌پذیری کافی است ثابت کنیم که

$$\mathrm{Rot}(v + \mathrm{Rot}(w,j),i) = \mathrm{Rot}(v,i) + \mathrm{Rot}(w,i+j).$$

که بنابر تمرین 18 برقرار است. □

فرض کنید U و V دو فضای برداری روی یک میدان F باشند. نگاشت $f:U\to V$ را یک تبدیل خطی یا همریختی بین فضاهای U و V نامیم هرگاه همواره $f(\lambda u+v) = \lambda f(u)+f(v)$. اگر U = V آن

گاه تبدیل خطی f را یک عملگر خطی می نامیم. بنابر قضیه رتبه–پوچی، $\dim U = \rho(f) + \upsilon(f)$ که در آن $\rho(f)$ معرف بعد تصویر و $\upsilon(f)$ معرف بعد هسته تبدیل خطی f است.

در ادامه تابع $f_k: \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$ با ضابطه $f_k(u) = u + Rot(u,k)$ را در نظر گرفته و خواص آن را مورد بررسی قرار می دهیم.

قضیه 13. نگاشت f_k یک تبدیل خطی است. به علاوه، هسته این تبدیل خطی شامل تمام بردارهای متناوب با دوره تناوب m است که در آن $m = (n,k)$. خصوصا هسته زیرفضایی از بعد m و تصویر زیرفضایی با بعد $n - m$ است.

برهان. بردارهای دلخواه u و v را اختیار می کنیم. در این صورت

$$\begin{aligned} f_k(u + v) &= u + v + \mathrm{Rot}(u+v,k) \\ &= u + v + \mathrm{Rot}(u,k) + \mathrm{Rot}(v,k) \\ &= [u + \mathrm{Rot}(u,k)] + [v + \mathrm{Rot}(v,k)] \\ &= f_k(u) + f_k(v) \end{aligned}$$

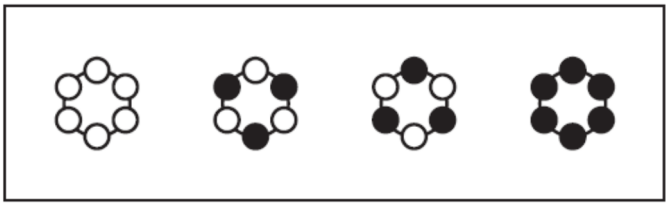
بنابراین f_k یک همریختی گروه جمعی $\mathbb{Z}_2^k$ بوده و از این رو $f_k(0) = 0$. در ادامه ثابت می کنیم که برای هر اسکالر λ از میدان $\mathbb{Z}_2$، $f_k(\lambda u) = \lambda f_k(u)$. توجه کنیم که $\lambda = 0$ یا 1. اگر $\lambda = 0$ آنگاه بنابر مطلبی که در بالا نشان دادیم $f_k(0u) = f_k(0) = 0 = 0f_k(u)$. به علاوه برای $\lambda = 1$، $f_k(1u) = f_k(u) = 1f_k(u)$.
این ثابت می کند که نگاشت f_k یک تبدیل خطی است. حال هسته f_k را بدست می آوریم.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker} f_k &= \{u \in \mathbb{Z}_2^k | f_k(u) = 0\} \\ &= \{u \in \mathbb{Z}_2^k | u + Rot(u,k) = 0\} \\ &= \{u \in \mathbb{Z}_2^k | u = Rot(u,k)\} \\ &= \{u \in \mathbb{Z}_2^k | u = Rot(u,tk);\ \forall t \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

حال فرض کنید $m = (n,k)$. در این صورت بنابر الگوریتم تقسیم می توان اعداد صحیح r و s را چنان یافت که $m = rn + sk$. این نتیجه می دهد که

$$\mathrm{Rot}(u,m) = \mathrm{Rot}(u,rn + sk) = \mathrm{Rot}(\mathrm{Rot}(u,sk),rn) = \mathrm{Rot}(u,rn) = u.$$

توجه کنید که چون u برداری از طول n است دوران آن حول مضارب n آن را تغییر نمی دهد. تا اینجا ما ثابت کرده ایم که اگر u بردار دلخواهی از $\mathrm{Ker} f_k$ باشد *آنگاه* u برداری متناوب با دوره تناوب m است. حال عکس این موضوع را ثابت می کنیم؛ یعنی نشان می دهیم که اگر u برداری متناوب با دوره تناوب m باشد آنگاه $u \in \mathrm{Ker}\ f_k$. چون u برداری متناوب با دوره تناوب m است و $m|k$، نتیجه می گیریم که $\mathrm{Rot}(u,k) = u$ و همان طور که در بالا دیدیم این معادل است با $u \in \mathrm{Ker}\ f_k$. توجه کنید که تناوب هنگامی که بردارها را به صورت دایره ای نشان دهیم، به صورت چشم گیرتری قابل مشاهده است. برای این منظور شکل 3 ملاحظه شود.



شکل 3. نمایش گرافیک چهار بردار 000000،010101، 101010 و 111111.

نهایتا واضح است که هسته تبدیل خطی f_k، زیرفضایی m بعدی و بنابر قضیه رتبه – پوچی، بعد تصویر برابر n – m است. □

در ادامه تبدیل خطی دیگری بین فضاهای برداری روی $\mathbb{Z}_2$ معرفی می کنیم که ارتباط نزدیکی با مسئله ی مورد مطالعه در اینجا دارد. این تبدیل خطی از روی تجزیه های خاصی از دنباله های روی $\mathbb{Z}_2$ بدست می آید. نگاشت $\rho_k: \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2^m$ را با ضابطه $\rho_k(u) = a_1 + \cdots + a_{n/m}$ تعریف می کنیم که در آن $m = (n,k)$ و اگر $u = u_1u_2\ldots u_n$ آنگاه برای هر i با شرط $1 \le i \le n/m$، $a_i = u_{(i-1)m+1}\ldots u_{im}$.

قضیه 14. نگاشت ρ_k یک تبدیل خطی پوشاست. این تبدیل خطی با تبدیلات دوران تعویض می شود و دارای این ویژگی است که $\mathrm{Im} f_k = \ker \rho_k$.

برهان. ابتدا ثابت می کنیم که ρ_k یک تبدیل خطی است. بردارهای u و v را دلخواه اختیار می کنیم. فرض کنیم $u = u_1u_2\ldots u_n$ و $v = v_1v_2\ldots v_n$. بنابر تعریف $u + v = (u_1+v_1)(u_2+v_2)\ldots(u_n+v_n)$ و از این رو

$$\rho_k(u+v) = (a_1+b_1)+\cdots+(a_{n/m}+b_{n/m})$$
$$= (a_1+\cdots+a_{n/m})+(b_1+\cdots+b_{n/m})$$
$$= \rho_k(u)+\rho_k(v).$$

چون ρ_k یک تبدیل خطی است، برهانی مشابه آنچه در اثبات قضیه 14 بکار رفت نشان می دهد که ρ_k ضرب اسکالر را حفظ کرده و از این رو یک تبدیل خطی است. به علاوه ρ_k نگاشتی پوشاست زیرا برای هر بردار $x \in \mathbb{Z}_2^m$، با افزودن n – m صفر به انتهای x بردار دیگر مانند $y \in \mathbb{Z}_2^n$ حاصل می شود که تصویر آن تحت ρ_k همان بردار x خواهد شد. بنابراین ρ_k پوشاست. حال نشان می دهیم که ρ_k با دوران ها نوعی تعویض پذیری دارد. در واقع $Rot: L_n \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$ و $\rho_k: \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2^m$، لذا ترکیب $\rho_k o Rot$ بامعنی است. فرض کنیم (u,j) دلخواه است که در آن $u=u_1u_2\ldots u_n$. با استفاده از الگوریتم تقسیم می توان نوشت $j = sm + r$، که s و r اعدادی صحیح و نامنفی بوده و $0 \le r < m$.

$$[\rho_k o Rot](u,j) = \rho_k(Rot(u,j))$$
$$= \rho_k(u_{j+1}\ldots u_n u_1 \ldots u_j)$$
$$= a_1+\cdots+a_{n/m},$$

که در آن $a_1 = u_{j+1}\ldots u_{m+j}$، $a_2 = u_{m+j+1}\ldots u_{2m+j}$، $a_{n/m} = u_{(n/m-1)m+j+1}\ldots u_n u_1\ldots u_j$. توجه کنید که اندیس ها در پیمانه ی n محاسبه می شوند. حال $Rot(\rho_k(u),j)$ را محاسبه می کنیم.

$$Rot(\rho_k(u),j) = Rot(b_1+\cdots+b_{n/m},j)$$
$$= Rot(b_1,j)+\cdots+Rot(b_{n/m},j)$$

که در آن برای هر i با شرط $1 \le i \le n/m$، $b_i = u_{(i-1)m+1}\ldots u_{im}$. بنابر این برای هر i با شرط داده شده داریم:

$$Rot(b_i,j) = u_{(i-1)m+j+1}\ldots u_{im}\, u_{(i-1)m+1}\ldots u_{(i-1)m+1+j}.$$

حال با جمع اندیس ها برابری خواسته شده بدست می آید. حال ثابت می کنیم که $Im f_k \subseteq \ker \rho_k$. برای این منظور عضو دلخواه $u + Rot(u,k)$ را در $Im f_k$ اختیار می کنیم.

$$\rho_k(u+Rot(u,k)) = \rho_k(u)+\rho_k(Rot(u,k))$$
$$= \rho_k(u)+Rot(\rho_k(u),k)$$
$$= \rho_k(u)+\rho_k(u)$$

دلیل برابری اخیر آن است که اولا $m|k$ و ثانیا $\rho_k(u) \in \mathbb{Z}_2^m$. حال چون محاسبات در پیمانه 2 انجام می شود، مقدار آخر برابر صفر خواهد بود. بنابراین $\mathrm{Im} f_k \subseteq \ker \rho_k$. حال چون ρ_k نگاشتی پوشاست، $n - m = \dim \mathrm{Im}\, f_k$ $\dim \ker \rho_k$ که ثابت می کند $\mathrm{Im} f_k = \ker \rho_k$. □

جال به ارتباط بین این تبدیلات خطی و کلاس های تزویج گروه L_n می پردازیم. برای سادگی $\rho_k(v)$ را p–بردار عضو (v,k) در L_n می نامیم.

در اثبات قضیه قبل رابطه ای برای محاسبه وارون یک عضو بدست آوردیم. در آنجا دیدیم که $(u;j)^{-1} = (u_{n-j+1}\ldots u_n u_1\ldots u_{n-j};-j)=(\mathrm{Rot}(u,-j);-j)$. بنابراین برای هر عضو دلخواه (u;j)، می توان دید:

$$\begin{aligned}(u;j)(v;k)(u;j)^{-1} &= (u+\mathrm{Rot}(v,j);k+j)(u_{n-j+1}\ldots u_n u_1\ldots u_{n-j};-j)\\ &= (u+\mathrm{Rot}(v,j) + \mathrm{Rot}(u_{n-j+1}\ldots u_n u_1\ldots u_{n-j},k+j);k + j - j) \quad (1)\\ &= (u+\mathrm{Rot}(v,j) + u_{k+1}\ldots u_n u_1\ldots u_k;k)\\ &= (u + \mathrm{Rot}(v,j) + \mathrm{Rot}(u,k);k)\end{aligned}$$

این محاسبات نشان می دهد که دو عضو مزدوج از گروه L_n عدد چرخشی یکسانی دارند که در بالا برابر k بود. بنابراین کلاس تزویج عضو (v;k) از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$(v;k)^{L_n} = \{(u + Rot(u,k) + Rot(v,j);k) \mid (v;k) \in L_n\}.$$

توجه کنید که مرکزساز یک عضو در یک گروه دلخواه مجموعه تمام عناصری است که با آن عضو جابجا می شود. مرکز ساز عضو x در گروه G را با $C_G(x)$ نشان می دهیم. بنابر نتیجه ای مقدماتی در نظریه گروه ها $|x^G| = |G: C_G(x)|$. در ادامه تلاش می کنیم رابطه ای برای مرتبه یک کلاس تزویج دلخواه از گروه گروه نشان گر لامپ بیابیم.

قضیه 15. دو عضو گروه L_n مزدوج هستند اگر و تنها اگر عدد چرخشی یکسانی داشته واختلاف p–بردارهای آنها نیز در حد یک چرخش باشد.

برهان. قبلا نشان داده بودیم که دو عضو مزدوج عدد چرخشی یکسانی دارند. لذا فرض می کنیم (v,k) و (w,k) دو عضو مزدوج دلخواه با عدد چرخشی یکسان باشند. بردار (u;j) را چنان انتخاب می کنیم که $(w,k) = (u;j)(v;k)(u;j)^{-1}$. در صفحه قبل دیدیم که

$$(w,k) = (u;j)(v;k)(u;j)^{-1} = (u + Rot(v,j) + Rot(u,k);k).$$

بنابر این (v,k) و (w,k) دو عضو مزدوج هستند اگر و تنها اگر بتوان عضو (u,j) را در L_n چنان یافت که $w = Rot(v,j) + u + Rot(u,k)$ اگر و تنها اگر $w \in Rot(v,j) + \mathrm{Im}\, f_k$. حال با استفاده از قضیه 15، $\mathrm{Im}\, f_k = Ker\, \rho_k$ و این ایجاب می کند که آخرین عبارت برقرار است اگر و تنها اگر

$$\rho_k(w) = \rho_k(Rot(v,j)).$$

حال استفاده مجدد از قضیه 5 در خصوص جابجایی ρ_k با تبدیلات دوران، ایجاب می کند که آخری برقرار است اگر و تنها اگر $\rho_k(w) = Rot(\rho_k(v),j)$؛ یعنی اختلاف p–بردارهای $\rho_k(w)$ و $\rho_k(v)$ در حد یک دوران است که این اثبات را کامل می کند. □

برای هر بردار $u = u_1u_2 \dots u_n$، متمم u را با $\bar{u}$ نشان داده و چنین تعریف می کنیم:

$$\bar{u} = 11 \dots 1 + u.$$

قضیه 16. فرض کنید $\alpha_i = (00 \dots 1^{\text{ام}i}0 \dots 0;0)$ و $\rho_i = (0,i)$. در اینصورت احکام زیر برقرار هستند:

i. $\alpha_i\alpha_j = \alpha_j\alpha_i$ و $\rho_i\rho_j = \rho_j\rho_i$.

ii. $\rho_j\alpha_i = \alpha_{i-j}\rho_j$ که در آن $i \geq j$.

iii. $(\alpha_i\alpha_{i-j}\rho_j)^m = \alpha_i\alpha_{i-mj}\rho_{mj}$ که در آن $i \geq j$.

iv. $\alpha_i\rho_j\bar{\alpha}_i\rho_j = \bar{\alpha}_i\ \rho_j\alpha_i\rho_j$.

برهان. بنابر تعریف ضرب

$$\begin{aligned}\alpha_i\alpha_j &= (00 \dots 1^{\text{ام}i}0 \dots 0;0)\ (00 \dots 1^{\text{ام}j}0 \dots 0;0)\\ &= (00 \dots 1^{\text{ام}i}0 \dots 0;0) + Rot((00 \dots 1^{\text{ام}j}0 \dots 0;0);0)\\ &= (00 \dots 1^{\text{ام}i}0 \dots 0;0) + (00 \dots 1^{\text{ام}j}0 \dots 0;0)\end{aligned}$$

$$= (00 \dots 1^{\text{ام}i}0 \dots 1^{\text{ام}j} \dots 0; 0)$$

$$\alpha_j\alpha_i = (00 \dots 1^{\text{ام}j}0 \dots 0; 0)\ (00 \dots 1^{\text{ام}i}0 \dots 0; 0)$$

$$= (00 \dots 1^{\text{ام}j}0 \dots 0; 0) + \mathrm{Rot}((00 \dots 1^{\text{ام}i}0 \dots 0; 0);0)$$

$$= (00 \dots 1^{\text{ام}i}0 \dots 1^{\text{ام}j} \dots 0; 0)$$

و از این رو $\alpha_i\alpha_j = \alpha_j\alpha_i$. از طرف دیگر، $\rho_i\rho_j = (0,i)(0,j) = (0+\mathrm{Rot}(0,i),i+j) = (0,i+j)$ و مشابها $\rho_j\rho_i = (0,j+i)$ که به برابری $\rho_i\rho_j = \rho_j\rho_i$ می انجامد.

برای اثبات (ii) فرض کنیم $i \geq j$ و به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\rho_j\alpha_i = (0;j)\ (00 \dots 1^{\text{ام}i}0 \dots 0; 0)$$

$$= \left(0 + Rot\left(00 \dots 1^{\text{ام}i}0 \dots 0; j\right); j\right)$$

چون $i \geq j$ ، عبارت آخری برابر مقدار زیر خواهد شد:

$$\rho_j\alpha_i = \left(00 \dots 1^{\text{ام}i-j}0 \dots 0; j\right).$$

حال مقدار $\alpha_{i-j}\rho_j$ را حساب می کنیم.

$$\alpha_{i-j}\rho_j = \left(00 \dots 1^{\text{ام}i-j}0 \dots 0; 0\right)(0; j)$$

$$= \left(00 \dots 1^{\text{ام}i-j}0 \dots 0 + Rot(0; 0); j\right)$$

$$= \left(00 \dots 1^{\text{ام}i-j}0 \dots 0; j\right)$$

و لذا $\rho_j\alpha_i = \alpha_{i-j}\rho_j$ که اثبات رابطه (ii) را کامل می کند.

برای اثبات قسمت (iii) ابتدا حالت $m = 2$ را بررسی می کنیم. توجه کنید که بنایر تعریف ضرب، همواره $(v;k)(u;j) = (v+\mathrm{Rot}(u,k),k+j)$. بنابراین

$$\alpha_i\alpha_i = (00 \dots 1^{\text{ام}i}0 \dots 0; 0)\ (00 \dots 1^{\text{ام}i}0 \dots 0; 0)$$

$$= (00 \dots 1^{\text{ام}i}0 \dots 0 + Rot(00 \dots 1^{\text{ام}i}0 \dots 0; 0);0)$$

$$= (00 \dots 1^{\text{ام}i}0 \dots 0 + 00 \dots 1^{\text{ام}i}0 \dots 0; 0) = (0;0).$$

از طرف دیگر، بنابر حالات (i) و (ii) داریم:

$$\alpha_i\alpha_{i-j}\rho_j\alpha_i\alpha_{i-j}\rho_j = \alpha_i\alpha_{i-j}\alpha_{i-j}\rho_j\alpha_{i-j}\rho_j = \alpha_i\alpha_{i-j}\alpha_{i-j}\alpha_{i-2j}\rho_j\rho_j = \alpha_i\alpha_{i-2j}\rho_{2j}$$

که همان حکم حالت m=2 است. حال به استقرا روی m ادامه می دهیم. فرض کنیم برای m دلخواه حکم را ثابت کرده ایم.

$$(\alpha_i\alpha_{i-j}\rho_j)^{m+1} = (\alpha_i\alpha_{i-j}\rho_j)(\alpha_i\alpha_{i-j}\rho_j)^m = \alpha_i\alpha_{i-j}\rho_j\alpha_i\alpha_{i-mj}\rho_{mj} = \alpha_i\alpha_{i-j}\alpha_{i-j}\rho_j\alpha_{i-mj}\rho_{mj}$$

$$= \alpha_i\rho_j\alpha_{i-mj}\rho_{mj} = \alpha_i\alpha_{i-(m+1)j}\rho_j\rho_{mj} = \alpha_i\alpha_{i-(m+1)j}\ \rho_{(m+1)j}$$

که اثبات (iii) را کامل می کند. □

قضیه 17 (قضیه اساسی گروه های آبلی متناهی). هر گروه آبلی متناهی G حاصل ضرب هایی به یکی از شکل های زیر دارد:

$$G \cong Z_{p_1}{}^{r_1} \times \ldots \times Z_{p_t}{}^{r_t},$$

$$G \cong Z_{n_1} \times \ldots \times Z_{n_d},$$

که در آن pi ها اعداد اول نه لزوما متمایز بوده و ni ها چنان هستند که $n_1 \mid n_2 \mid n_3 \ldots \mid n_d$. اعداد n_i را ضرائب تاب G می نامند.

فرض کنیم F یک گروه و X یک مجموعه باشد. گروه F را روی مجموعه X آزاد نامیم، هرگاه تابعی یک به یک مانند $i: X \to F$ موجود باشد چنان چه برای هر گروه G و هر تابع دیگر $f: X \to G$، بتوان همریختی یکتای $\alpha: F \to G$ را یافت که $\alpha o i = f$.

قضیه 18. فرض کنیم F و G گروه هایی آزاد به ترتیب روی مجموعه های S و R باشند. در این صورت $|S| = |R|$ اگر و تنها اگر F و G گروه هایی یک ریخت باشند.

برهان. چون $|S| = |R|$، می توان نگاشت دوسویی $f: S \to R$ رایافت. حال $g: R \to S$ را وارون f در نظر می گیریم. حال چون F و G آزاد هستند، بنابر تعریف می توان همریختی های $f_1: F \to G$ و $g_1: G \to F$ را چنان یافت که $f_1 o i = f$ و $g_1 o g = j$ که در آن $i: S \to F$ و $j: R \to G$ نگاشت های شمول هستند. جال بنابر یکتایی همریختی های $g_1 \circ f_1: F \to F$ و $f_1 \circ g_1: G \to G$ و همچنین وجود نگاشت همانی بین گروههای آزاد F و G که شرایط تعریف را برآورده می سازد، بایستی داشته باشیم $g_1 \circ f_1 = 1_F$ و $f_1 \circ g_1 = 1_G$. بنابراین f_1 و g_1 یک ریختی بوده و حکم ثابت است. □

مسائل حل شده

1. فرض کنید $G = Z_5 \times Z_{10}$ و یک مجموعه مولد برای G بیابید.

حل. قرار می دهیم $A = \{(1,0),(0,1)\}$ و ادعا می کنیم که A مولد است. برای هر عضو $(r,s)\in G$، می توانیم این عضو را به شکل $(r,s) = (r,0) + (0,s) = r(1,0) + s(0,1)$ نیز بنویسیم و لذا A مولد است. توجه کنید که برای G نمی توان مجموعه مولد تک عضوی پیدا کرد، زیرا $(5,10) = 5 \neq 1$.

2. خودریختی های گروه دووجهی از مرتبه n را بیابید.

حل. می دانیم عناصر D_{2n} به صورت زیر هستند:

$$e, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, y, xy, x^2y, \ldots, x^{n-1}y.$$

توجه کنید که گروه D_{2n} دقیقا یک زیرگروه از مرتبه n دارد که توسط x تولید می شود. قرار می دهیم $H=\langle x\rangle$. حال برای هر خودریختی β از گروه دووجهی D_{2n}، $\beta(H)$ هم زیرگروهی از مرتبه n خواهد بود. حال بنابر یکتایی زیرگروه از مرتبه n، $\beta(H)=H$. این نتیجه می دهد که β توان های x را به توان های x تصویر می کند. فرض کنید $\beta(x) = x^i$. می دانیم هر عضو تحت خودریختی به عضوی هم مرتبه با آن تصویر می شود و لذا $n = O(x) = O(x^i) = \frac{O(x)}{(i,O(x))} = \frac{n}{(n,i)}$. لذا $(n,i)=1$ و برای i به تعداد $\phi(n)$ انتخاب داریم. از طرف دیگر می دانیم که $\{x,y\}$ یک مجموعه مولد برای گروه دووجهی است و برای تعیین یک خودریختی، کافی است تصویر آن روی یک مجموعه مولد تعیین شود. تاکنون تصویر x تحت یک خودریختی مشخص شده است و کافی است تصویر y را مشخص سازیم. چون $\{x,x^iy\}$ نیز مجموعه مولد است نگاشتی که x را به x و y را به x^iy تصویر می کند را می توان به یک خودریختی گروه دووجهی توسعه داد. در واقع می خواهیم $\beta(x^ry^s) =\beta(x)^r\beta(y)^s$. بنابراین

$$\beta(x^ry^s) =\beta(x)^r\beta(y)^s = x^r(x^iy)^s = \begin{cases} x^{r+i}y & 2 \nmid s \\ x^r & 2|s \end{cases}.$$

همریختی شدن β واضح است. توجه کنید که $\mathrm{Im}\beta = \langle\beta(x),\beta(y)\rangle=\langle x,x^iy\rangle=D_{2n}$ و از این رو β پوشاست. حال چون β تابعی از یک مجموعه متناهی به خودش است یک به یک بودن معادل پوشا بودن است، یعنی β خودریختی است. این ثابت می کند که هر زوج از عناصر

$$y, xy, x^2y, \ldots, x^{n-1}y$$

می توانند تحت یک خودریختی به هم تصویر شوند. پس $|Aut(D_{2n})|=n\phi(n)$. به علاوه تمام خودریختی های گروه دووجهی به شکل $\eta_{i,j}: D_{2n} \to D_{2n}$است که در آن

$$\eta_{i,j}(x) = x^i \text{ ، } \eta_{i,j}(y) = x^j y, (i,n) = 1, 0 \le j \le n-1.$$

3. ثابت کنید گروه نشان گر لامپ را می توان به صورت حاصل ضرب حلقوی دو گروه دوری نوشت.

حل. فرض کنیم $G = Z_n = \langle(1,2,\ldots,n)\rangle$ ، $F = Z_2$ و $\Omega = \{1,2,\ldots,n\}$. یادآوری می کنیم که حاصل ضرب حلقوی روی مجموعه ی $F \wr G = Z_2^{\Omega} \times Z_n = \{(f;i) | i \in Z_n \,\&\, f: \Omega \longrightarrow Z_2\}$ تعریف می شود. نگاشت $\beta: Z_2^{\Omega} \times Z_n \longrightarrow L_n$ را با ضابطه ی $\beta((f,i)) = (f(1)f(2)\ldots f(n),i)$ تعریف می کنیم. ادعا می کنیم که β یک ریختی گروه است. ابتدا توجه کنیم که خوش تعریفی β واضح است. فرض کنیم $\beta((f,i)) = \beta((g,j))$. در این صورت $(f(1)f(2)\ldots f(n),i) = (g(1)g(2)\ldots g(n),j)$ که از آن نتیجه می شود که $i = j$ و $f = g$. بنابراین β یک به یک است. حال عضو دلخواه $(u_1u_2\ldots u_n;i) \in L_n$ را اختیار می کنیم. نگاشت $f:\Omega \to Z_2$ را با ضابطه ی $f(i) = u_i$ ، $1 \le i \le n$، در نظر گرفته و توجه می کنیم که $\beta(f)=(u_1u_2\ldots u_n;i)$. پس β پوشاست. حال کافی است همریختی گروهی بودن β را بررسی کنیم.

$$\begin{aligned}
\beta((f,i)(g,j)) &= \beta(f+(g\bullet -i),i + j) \\
&= ([f+(g\bullet -i)](1)[f+(g\bullet -i)(2)]\ldots[f+(g\bullet -i)(n)], i + j) \\
&= ([f(1) + g(i+1)]\ldots[f(n)+g(i+n)], i+j) \\
&= (f(1)\ldots f(n)g(i+1)\ldots g(i+n), i+j) \\
&= (f(1)\ldots f(n)+ Rot(g(1)\ldots g(n),i), i+j) \\
&= \beta((f,i))\beta((g,j))
\end{aligned}$$

بنابراین β یک ریختی است. □

4. ثابت کنید که $Aut(\Gamma) = Aut(\Gamma')$.

حل. توجه کنید که گزاره های $p \Leftrightarrow q$ و $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ هم ارز هستند. بنابر این اگر β جایگشتی از راس های یک گراف باشد آن گاه دو شرط زیر معادل هستند:

1. راس های u و v مجاور هستند اگر وتنها اگر راس های $\beta(u)$ و $\beta(v)$ مجاور باشند؛

2. راس های u و v مجاور نیستند اگر وتنها اگر راس های $\beta(u)$ و $\beta(v)$ مجاور نباشند.

بنابراین $\beta \in Aut(\Gamma)$ اگر و تنها اگر $\beta \in Aut(\Gamma')$. این نتیجه می دهد که $Aut(\Gamma) = Aut(\Gamma')$.

5. گروه خودریختی گراف های K_n، $K_n - \{e\}$، $K_n - \{e_1,e_2\}$ و $K_n - \{e_1,e_2,e_3\}$ را که در تمامی آن ها یال هایی از گراف کامل برداشته شده اند را به طور کامل تشریح کنید.

حل. هر جایگشت از گراف کامل n راسی یک خودریختی است. بنابراین $Aut(K_n) \cong S_n$. حال بنابر مسئله ی قبل $Aut(\emptyset_n) \cong S_n$. برای حالتی که $\Omega = K_n - e$، $Aut(\Omega) \cong Z_2 \times S_{n-2}$. دلیل این موضوع این است که اگر گراف Γ دارای n_1 مولفه یک ریخت با Δ_1، n_2 مولفه یک ریخت با Δ_2، ...، n_r مولفه یک ریخت با Δ_r باشد آن گاه $Aut(\Gamma) \cong Aut(\Gamma_1) \times \ldots \times Aut(\Gamma_r)$ که در آن زیرگراف های Γi، $1 \leq l \leq r$، از اجتماع n_i مولفه ی یک ریخت با Δ_i بدست آمده است. حال در مورد گراف Ω، می توان دید که متمم آن از یک یال و $n - 2$ راس تنها تشکیل یافته است. بنابراین با استفاده از مسئله ی قبل می توان دید که $Aut(\Omega) \cong Aut(K_2) \times Aut(\emptyset_{n-2}) \cong S_2 \times S_{n-2}$.

تمرینات پایان فصل

1. ثابت کنید که $G = M \times N$ یک گروه است.
2. ثابت کنید $Z_n \times Z_m$ دوری است اگر و تنها اگر $(n,m) = 1$. این را به حاصل ضرب تعداد متناهی گروه دوری تعمیم و آنرا اثبات کنید.
3. مرکز گروه دووجهی زیرگروه بدیهی است اگر و تنها اگر n فرد است. در حالتی که n عددی زوج باشد مرکز این گروه $\langle x^{n/2} \rangle$ است.
4. فرض کنید G یک گروه است. خواص زیر را ثابت کنید.
   - $N_G(X)$ زیرگروه G است و $N_G(X)=G$ اگر و تنها اگر X زیرمجموعه نرمال G باشد.
   - هر زیرمجموعه نرمال اجتماعی از کلاس های تزویج است.
   - X زیرمجموعه نرمال $N_G(X)$ است و $N_G(X)$ بزرگترین زیرگروه G است که X را بعنوان یک زیرمجموعه نرمال دربردارد.
   - اگر $H \leq K$ آنگاه $N_K(H) = N_G(H) \cap K$.
5. ثابت کنید که در ضرب نیم مستقیم اگر H نیز نرمال باشد آن گاه $G \cong H \times N$.
6. نشان دهید گروه خودریختی های گروه دو وجهی را نیز می توان به صورت ضرب نیم مستقیم نمایش داد.
7. ثابت کنید که اگر گروه G به عنوان گروه روی گروه X عمل کند آنگاه همواره نگاشت های $\kappa g: X \to X$ با ضابطه $\kappa g(x) = x \square g$ یک خودریختی گروه X است.
8. نشان دهید که ضرب یک گروه روی گروهی دیگر حاصل ضربی نیم مستقیم از G بوسیله X و هر حاصل ضرب نیم مستقیم از G بوسیله X عملی گروهی از گروه G روی گروه X تعریف می کند. نهایتا نشان دهید که این تناظر دوسویی است.
9. ثابت اگر n عددي فرد باشد آنگاه $D_{4n} \cong Z_2 \times D_{2n}$ ولي براي n زوج اين حكم برقرار نيست.
10. ثابت كنيد گروه خودريختي $(Z_n,+)$ با گروه تمام عناصر وارون پذير $(Z_n,.)$ يك ريخت است و از آنجا تعداد اين خودريختي ها را بيابيد.
11. تمام زیرگروه های مشخصه یک گروه دووجهی را بدست آورید.
12. تعداد راس های یک گراف خود متمم در چه شرطی صدق می کند؟ حدس خود را ثابت کنید.

13. تمامی گروه های از مرتبه p^7q^8 را که در آن p و q اعداد اول متمایز هستند، مشخص کنید. در حالت کلی چه می توان گفت؟

14. اگر در ضرب نیم مستقیم متناظر با یک همریختی داده شده f، همه عناصر دامنه توسط f به همانی تصویر شوند آنگاه ضرب نیم مستقیم به ضرب مستقیم تبدیل می شود.

15. ثابت کنید که گروه نشان گر لامپ دارای نمایشی به شکل زیر است:

$$L_n = \langle \alpha_i, \rho : \alpha_i{}^2 = \rho^n = 0, 1 \leq i \leq n, \rho^j \alpha_i = \alpha_{i-j} \rho^j \rangle.$$

به علاوه تعیین کنید که آیا گروه نشان گر لامپ با گروه خودریختی یک مکعب n بعدی یک ریخت است؟

16. فرض کنید Γ گرافی باشد که n_1 مولفه یک ریخت با Δ_1، n_2 مولفه یک ریخت با Δ_2 و .... و n_k مولفه یک ریخت با Δ_k داشته باشد و زیرگراف های Δ_1، ...، Δ_k دوبدو غیر یک ریخت هستند. گروه خودریختی Γ را بدست آورید.

17. برهان مسئله 15 را کامل کنید.

18. در گروه نشان گر لامپ ثابت کنید که همواره

$$\mathrm{Rot}(v + \mathrm{Rot}(w,j),i) = \mathrm{Rot}(v,i) + \mathrm{Rot}(w,i+j).$$

19. با شرایط قضیه 17 ثابت کنید $\alpha_i \rho_j \overline{\alpha_l} \rho_j = \overline{\alpha_l}\ \rho_j \alpha_i \rho_j$.

20. مرتبه یک عضو دلخواه از گروه نشان گر لامپ را بدست آورید. بزرگ ترین مرتبه بین اعضای این گروه چیست و توسط چه اعضایی بدست می آید؟

21. رابطه ای مشابه آن چه در قسمت های دوم و سوم قضیه 14 ظاهر شد را برای $i \leq j$ بدست آورید.

22. ثابت کنید که گروه L_n با دو عضو α و ρ تولید می شود.

راهنمایی: عضو دلخواه (u;j) را در نظر بگیرید. دو عضو بیابید که یکی درایه اول آن دنباله ای از صفر ها بوده و دومی درایه دوم آن صفر باشد و ثابت کنید (u;j) حاصل ضرب این دو مقدار است.

23. **(**)** فرمولی برای محاسبه اندازه کلاس تزویج عضو دلخواه (u;k) از گروه نشان گر لامپ بدست آورید. عناصر این کلاس به چه شکلی هستند.

24. **(**)** مرکزساز عضو دلخواه (u;k) را در L_n تعیین کنید.

25. **(**)** ثابت کنید $|x^G| = |G : C_G(x)|$. آیا می توانید مرتبه یک عضو دلخواه از گروه نشان گر لامپ بدست آورید.

26. عناصر β در L_n را چنان بیابید که β و ρ تمام L_n را تولید کند.

27.

28. در قضیه 14، ثابت کنید بعد هسته برابر m است. به علاوه شکل عناصر تصویر تبدیل خطی f_k را بدست آورید.

29. ثابت کنید نگاشت $\rho_k o Rot$ یک همریختی گروه است.

30. ثابت کنید که گروه ضربی هر میدان متناهی دوری است و گروه جمعی آن با حاصل ضربی از گروه های Z_p یک ریخت است که p عددی اول است.

31. فرض کنید U و V زیرفضاهای با بعد متناهی از یک فضای برداری W باشند و $U \subseteq V$. ثابت کنید که اگر U و V بعد یکسانی داشته باشند آنگاه U = V. اگر زیرفضاها با بعد نامتناهی باشند آیا حکم فوق مجددا برقرار می ماند؟

32. برهان قضیه 16 را کامل کنید.

33. ثابت کنید که برای هر گروه آبلی G شامل زیرگروه N، می توان زیرگروهی یک ریخت با $\frac{G}{N}$ در G یافت.

فصل سوم

مفاهیم و نتایجی از نظریه حلقه

این فصل به مرور نتایجی از نظریه حلقه ها اختصاص دارد که در فصل های آینده به آن نیاز خواهیم داشت. تمامی حلقه ها در این فصل متناهی فرض می شوند. مهمترین نتیجه در خصوص جلقه های متناهی نتیجه زیر است که اثبات آن به دانشجو واگذار می شود.

قضیه 1. فرض کنید R حلقه ای از مرتبه $n = {p_1}^{s_1} \dots {p_r}^{s_r}$ باشد که p_i ها اعداد اول متمایز و s_i ها اعداد طبیعی هستند. در این صورت حلقه های S_1، ...، S_r وجود دارند که $R \cong S_1 \times \dots \times S_r$ که در آن S_i حلقه ای از مرتبه ${p_i}^{r_i}$ خواهد بود.

برهان. چون $(R,+)$ گروهی آبلی است، بنابر قضیه اساسی گروههای آبلی متناهی،

$$(R,+) \cong (R_1,+) \times \dots \times (R_r,+).$$

که در آن R_i یک p_i-گروه از مرتبه ${p_i}^{s_i}$ بوده و p_i ها اعداد اول متمایز هستند. یک ریختی بین این گروههای آبلی را ξ می نامیم. حال روی هر R_i یک عمل ضرب چنان تعریف می کنیم که همراه با جمع بالا R_i به یک حلقه تبدیل شود و به علاوه ξ یکریختی بین حلقه ها شود. برای این منظور عناصر x_i و y_i را در R_i درنظر گرفته و تعریف می کنیم:

$$x_i y_i = \xi^{-1}(0, \dots 0, x_i, 0, \dots, 0)\xi^{-1}(0, \dots 0, y_i, 0, \dots, 0).$$

حال $(R_i,+)$ با عمل ضرب بالا یک حلقه بوده و نگاشت ξ یکریختی حلقه است.

فرض کنید R حلقه ای یکدار باشد. در اینصورت مجموعه تمام یکال های R با عمل ضرب حلقه تشکیل یک گروه می دهد که آن را گروه یکال های R می نامند.

تمرینات پایان فصل

1. ثابت کنید گروه یکال های حلقه $(Z_n,+,\times)$ عبارت است از مجموعه تمام عناصری چون r در حلقه چنان که $(r,n)=1$.
2. برهان قضیه 1 را کامل کنید.

فصل چهارم

گراف کیلی روی یک گروه متناهی

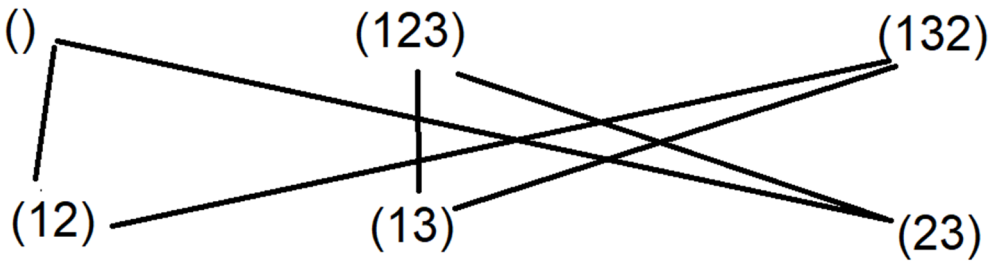
هدف این فصل مطالعه گراف های کیلی روی گروه هاست. ما خواص اصلی این گراف را روی گروه ها ی متناهی و برخی گروه های نامتناهی بررسی و در فصل های بعد آن را به ساختارهای دیگر توسعه می دهیم.

فرض کنیم G یک گروه متناهی است و S زیرمجموعه ای ناتهی از G است. گراف کیلی جهت دار $DiCay(G,S)$، گرافی است که مجموعه رئوس آن عناصر G بوده و برای دو راس x و y در $DiCay(G,S)$، یالی از x به y داریم اگر و تنها اگر $s\in S$ وجود داشته باشد که $y = xs$. به زبان معادل، یالی از راس x به راس y در $DiCay(G,S)$ داریم اگر و تنها اگر $x^{-1}y\in S$. توجه کنید که اگر S شامل عضو همانی باشد آنگاه روی هر عضو $x\in G$ یک لوپ در گراف کیلی خواهیم داشت. اگر بخواهیم گراف کیلی جهت دار بدون لوپ باشد آنگاه باید فرض کنیم $e_G \notin S$. در سراسر بحث گراف های کیلی جهت دار یا بدون جهت که بعدا تعریف خواهد شد، همواره فرض خواهیم کرد که S فاقد عضو همانی است. اگر بدانیم $S=S^{-1}$ آنگاه گراف کیلی بدون جهت خواهد بود و در این حالت از نماد $Cay(G,S)$ برای گراف کیلی بدون جهت استفاده می کنیم.

توجه کنید که در هر گراف کیلی $Cay(G,S)$ عضو همانی تنها با عناصر S مجاور است. زیرا برای هر عضو $s\in S$، $es=s$ و لذا e و s مجاور هستند. از طرف دیگر اگر یالی از e به داشته باشیم آنگاه $e^{-1}x\in S$ و از این رو $x \in S$. بنابراین ثابت کرده ایم که در هر گراف کیلی $Cay(G,S)$، همانی تنها و تنها با عناصر S مجاور است.

مثال 1. فرض کنیم $S_3 = \{(), (123), (132), (12), (13), (23)\}$ و $S = \{(12), (23)\}$. گراف کیلی $Cay(S_3,S)$ را مشخص کنید . بنابر لم 1، همانی با دورهای (12) و (23) مجاور است. چون

(23) = (12)(123)، لذا (123) و (23) مجاور هستند. مشابها (123) و (13) نیز مجاور هستند. نهایتا یالی از راس (132) به راس های (12) و (13) خواهیم داشت و این تمام یال های گراف است (چرا؟).

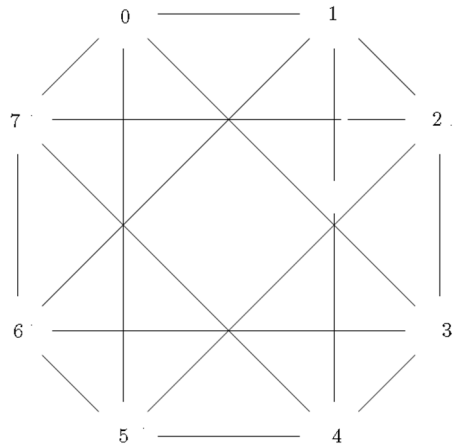


شکل 1: گراف کیلی Cay(S3, {(12), (23)}).

گراف G را **منظم** نامیم هرگاه درجه تمام راس های آن با هم برابر باشند.

مثال 2. هدف ما در این مثال رسم گراف کیلی $\Gamma = Cay(Z_8,S)$ است که در آن S={1,3,5,7}. توجه کنید که در اینجا $V(\Gamma) = Z_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$. واضح است که S حاوی صفر گروه Z_8 نیست و $-S = S$. بنابراین گراف کیلی حاصل جهت دار نیست. حال یال های Γ را بدست می آوریم. برای این منظور تعریف گراف کیلی را بکار می گیریم. بوضوح

$$E(\Gamma) = \{01, 03, 05, 07, 12, 14, 16, 23, 25, 27, 34, 36, 45, 47, 56, 67\}.$$



شکل 2. گراف کیلی $\Gamma = Cay(Z_8,S)$.

لم 3. گراف کیلی Cay(G,S)، منظم از درجه |S| است.

اثبات. بنابر تعریف گراف کیلی هر راس g تنها و تنها با راس های gs مجاور خواهد بود که در آن $s\in S$. بنابراین درجه هر راس برابر $|S|$ خواهد بود. □

لم 4. گراف کیلی $Cay(G,S)$ همبند است اگر و تنها اگر $G = \langle S\rangle$.

اثبات. فرض کنیم $Cay(G,S)$ همبند است. بنابر این برای هر دو عضو $x, y \in G$ مسیری بین x و y وجود خواهد داشت. یعنی عناصر $s_1, \dots, s_r \in S$ را می توان چنان یافت که

$$x, xs_1, xs_1s_2, \dots, xs_1\dots s_{r-1}s_r=y$$

مسیری در گراف است. بنابراین با انتخاب $x = e$، $s_1\dots s_{r-1}s_r=y$، یعنی عضو دلخواه y را توانستیم به شکل حاصل ضربی از عناصر S بنویسیم. بنابراین $G=\langle S\rangle$. برعکس فرض کنیم $G=\langle S\rangle$ و x و y رئوس دلخواهی از $Cay(G,S)$ باشند. بنابر تعریف می توان نوشت $x^{-1}y = s_1s_2\dots s_r$ که r عددی طبیعی s_i ها عناصری در S هستند. حال می نویسیم $y = xs_1s_2\dots s_r$. بنابر این $x, xs_1, xs_1s_2,\dots,xs_1s_2\dots s_r = y$ مسیری بین x و y در $Cay(G,S)$ است و از این رو این گراف همبند می باشد. □

حال فرض کنیم S مولد G نباشد. سوال این است که $Cay(G,S)$ چند مولفه همبندی دارد و ساختار این مولفه ها چگونه است؟

لم 5. مولفه های همبندی گراف کیلی با هم یک ریخت هستند و تعداد مولفه های همبندی برابر $|G:H|$ است که $H = \langle S\rangle$.

برهان. ابتدا فرض کنیم $H = \langle S\rangle$. ادعا می کنیم که $Cay(G,S)$ دقیقا $|G:H|$ مولفه همبندی دارد و مولفه های همبندی همدسته های H در G هستند. ابتدا نشان می دهیم که به تعداد $|G:H|$ مولفه همبندی داریم. ادعا می کنیم که اگر $x \in G - H$ آنگاه هیچ مسیری بین x و عضوی چون $h\in H$ وجود ندارد. فرض کنیم چنین نباشد و ما مسیری بین x و عضوی مانند $h\in H$ داشته باشیم. چون بنابر لم 5، $Cay(H,S)$ همبند

است بنابراین مسیری بین h و e وجود دارد و از این رو مسیری بین x و e داریم. پس دنباله ای مانند دنباله ی زیر بین e و x داریم:

$$e, es_1, es_1s_2, \ldots, es_1s_2\ldots s_r=x$$

که در آن s_i ها در S تغییر می کنند. بنابراین $x = s_1s_2\ldots s_r \in \langle S\rangle = H$ که تناقض است. لذا $Cay(H,S)$ یک مولفه همبندی از $Cay(G,S)$ است. حال نشان می دهیم که همدسته های H نیز مولفه های همبندی هستند و این مولفه ها با زیرگراف القایی از H یکریخت هستند. فرض کنیم aH یک همدسته دلخواه H است. عناصر دلخواه ah_1 و ah_2 از این همدسته را انتخاب می کنیم. چون H همبند است و $h_1, h_2 \in H$ لذا مسیری بین این دو راس در H مانند $h_1, h_1s_1, h_1s_1s_2, \ldots, h_1s_1s_2\ldots s_t = h_2$ وجود دارد. حال در عناصر این دنباله عضو a را از چپ ضرب می کنیم تا به دنباله

$$ah_1, ah_1s_1, ah_1s_1s_2, \ldots, ah_1s_1s_2\ldots s_t = ah_2$$

برسیم، پس بین ah_1 و ah_2 در aH یک مسیر داریم. یعنی aH همبند است.

در ادامه نگاشتی که h را به ah تصویر می کند با ξ نشان داده و ادعا می کنیم ξ یک ایزومورفیسم گراف بین H و aH برقرار می کند. توجه کنید این نگاشت همان نگاشتی است که در اثبات قضیه لاگرانژ بکار رفته است و در آنجا ثابت شده است که ξ دوسویی است. حال فرض کنیم که u و v در H مجاور باشند. لذا $s = u^{-1}v\in S$. توجه کنید $s = u^{-1}a^{-1}av\in S$ و از این رو $(au)^{-1}(av)\in S$. این نتیجه می دهد که au و av نیز در aH مجاور هستند. بنابر این ξ مجاورت را حفظ می کند. برهان مشابه ثابت می کند که ξ^{-1} نیز مجاورت را حفظ می کند، یعنی ξ یک ریختی گراف است. در نتیجه $Cay(G,S)$ دارای $|G:H|$ مولفه همبندی است که هر کدام با $Cay(H,S)$ یکریخت هستند. □

مثال 6. در این مثال گراف کیلی D_{2n} را نسبت به $S = \{a,b,a^{-1}\}$ بدست می آوریم. توجه کنیم که $Cay(D_{2n},S)$ گرافی مکعبی است یعنی درجه هر راس برابر 3 است. با در نظر گرفتن سه جهت از e به سمت راس های a، b و a^{-1} می توان دید که ما دو مدار مجزا به طول به طول n خواهیم داشت که راس های یکی $A = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$ و راس های دیگری $B = \{b, ba, ba^2, \ldots, ba^{n-1}\}$ خواهد بود حال برای هر i، راس a^i با راس a^ib مجاور می شود و لذا گراف حاصل، حاصل ضرب دکارتی دورهای C_2 و C_n یعنی $C_2 \times C_n$ خواهد بود.

با در دست داشتن ارائه یک گروه G و اضافه کردن روابطی که از مساوی همانی قرار دادن جابجاگرهای مولدهای G بدست آمده است، گروهی حاصل می شود که آن را آبلی سازی G می نامند.

فرض کنید $Dic_n = \langle a, b \mid a^{2n} = e, b^2 = a^n , b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$. این گروه را گروه دودوری می نامند. برای یافتن مرتبه این گروه ابتدا آبلی سازی آن را بدست می آوریم:

$$\frac{Dic_n}{Dic_n'} = < a, b : a^{2n} = 1, b^2 = a^n, b^{-1}ab = a^{-1}, ab = ba > = < b >.$$

بنابراین $\left|\frac{Dic_n}{Dic_n'}\right| = 4$. حال برای یافتن مرتبه گروه Dic_n کافی است مرتبه زیرگروه مشتق آن را بیابیم. ابتدا شکل کلی عناصر Dic_n را بدست می آوریم. یک عضو دلخواه این گروه به شکل زیر می باشد:

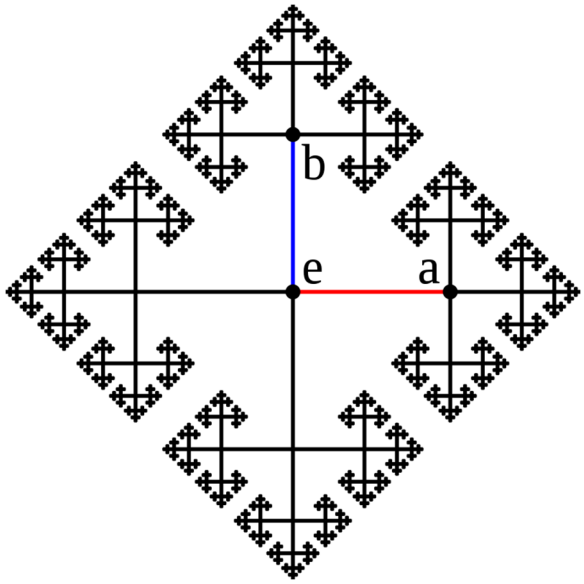
$$x = a^{r_1}b^{s_1}a^{r_2}b^{s_2} \dots a^{r_k}b^{s_k}.$$

ابتدا حالت k=2 را بررسی می کنیم. پس فرض کنیم $x = a^{r_1}b^{s_1}a^{r_2}b^{s_2}$. ابتدا توجه کنیم که رابطه $b^{-1}ab = a^{-1}$ نتیجه می دهد $b^{-2}ab^2 = b^{-1}a^{-1}b = (b^{-1}ab)^{-1} = a$ و از این رو $b^{-3}ab^3 = b^{-1}ab = a^{-1}$. بنابراین $ab = ba^{-1}$، $ab^2 = b^2a$ و $ab^3 = b^3a^{-1}$. در واقع شرط $b^{-1}ab = a^{-1}$ به ما نتیجه می دهد که هر عبارت با شروع از b را می توان با عبارتی با شروع از a جایگزین کرد. این نتیجه می دهد که توانهای a را می توانیم کنار هم و توان های b را کنار هم قرار دهیم. یعنی عناصر گروه دو دوری به شکل a^ib^j هستند و لذا این گروه از مرتبه 4n است. نهایتا توجه کنید که $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab = a^{-2}$ و لذا $G' = \langle a^2\rangle$. یعنی G' از مرتبه n است که این نیز مجددا نتیجه می دهد گروه از مرتبه 4n است.

مسئله 7. ثابت کنید گروه خودریختی یک گراف کیلی از گروه G نسخه ای یک ریخت از گروه G را در بر دارد.

حل. فرض کنیم $\Gamma = Cay(G,S)$. توجه کنید که $V(\Gamma) = G$. ابتدا نشان می دهیم که برای هر عضو $x \in G$، تابع $\delta_x:G\to G$ با ضابطه $\delta_x(g) = xg$ یک خودریختی Γ است. دوسویی بودن δ_x بدیهی است. می دانیم که $uv\in E(\Gamma)$ اگر و تنها اگر $v^{-1}u\in S$ اگر و تنها اگر $v^{-1}x^{-1}xu \in S$ اگر و تنها اگر $(xv)^{-1}(xu) \in S$ اگر و تنها اگر $\delta_x(v)^{-1}\delta_x(u) \in S$ اگر و تنها اگر $\delta_x(u)\,\delta_x(v)\in E(\Gamma)$. تعریف می

کنیم $L(G) = \{ \delta_x \mid x \in G\}$. بنابر اثبات قضیه کیلی $L(G)$ با ترکیب توابع گروهی یک ریخت با G است. حال چون عناصر $L(G)$ خود ریختی های گراف کیلی هستند، $L(G)$ زیرگروه $Aut(\Gamma)$ است.



شکل 2: گراف کیلی $Cay(F(a,b), \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\})$.

مجموعه تمام توابع γ_x با ضابطه $\gamma_x(g) = gx$ را با $R(G)$ نشان می دهیم. با اثباتی مشابه مسئله قبل می توان دید که $R(G)$ نیز زیرگروه $Aut(\Gamma)$ است. عناصر δ_x و γ_x را به ترتیب انتقال های چپ و راست عنصر $x \in G$ می نامند. به علاوه گروه های $L(G)$ و $R(G)$ را به ترتیب نمایش های منظم چپ و راست G می نامند.

فرض کنید گروه G روی مجموعه X عمل می کند. این عمل را منظم نامیم هرگاه تمام زیرگروه های پایدارساز، زیرگروه بدیهی باشند.

قضیه 8. فرض کنیم Γ گرافی همبند است. گروه $Aut(\Gamma)$ دارای زیرگروهی چون H است که روی $V(\Gamma)$ منظم عمل می کند اگر وتنها اگر Γ با یک گراف کیلی روی H یک ریخت باشد.

برهان. فرض کنیم $V(\Gamma) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

حال در ادامه به بررسی ساختار گروه حودریختی گراف کیلی می پردازیم.

قضیه 9. گراف کیلی $\Gamma = Cay(G,S)$ راس انتقالی است. اگر π خودریختی گروه G باشد چنان که $\pi(S)=S$ آنگاه π خودریختی Γ حافظ عضو همانی است.

اثبات. فرض کنیم g و h راس های دلخواه Γ باشند. باید خودریختی π را چنان بیابیم که $\pi(g) = h$. کافی است قرار دهیم $\pi = \gamma_{g^{-1}h}$. بنابراین $\pi(g) = \gamma_{g^{-1}h}(g) = gg^{-1}h = h$ و لذا Γ راس انتقالی است. حال فرض کنیم π خودریختی گروه G باشد چنان که $\pi(S)=S$. چون π خودریختی گروهی است لذا $\pi(e)=e$. حال ثابت می کنیم که π خودریختی Γ است. می دانیم که $uv\in E(\Gamma)$ اگر و تنها اگر $v^{-1}u\in S$ اگر و تنها اگر $\pi(v^{-1}u) \in S$ اگر و تنها اگر $\pi(v)^{-1}\pi(u) \in S$ اگر و تنها اگر $\pi(u)\pi(v)\in E(\Gamma)$. یعنی π خودریختی گراف کیلی است.

تعریف 10. فرض کنید $\Gamma = Cay(G,S)$ و تعریف می کنیم $Aut(G,S) = \{\pi \in Aut(G) \mid \pi(S)=S\}$.

روشن است که $Aut(G,S) \subseteq Aut(\Gamma)$ 14. حال فرض کنیم $\beta, \gamma \in Aut(G,S)$ دلخواه باشند. بنابراین $\beta\gamma(S) = \beta(\gamma(S)) = \beta(S) = S$. یعنی $Aut(G,S)$ نسبت به ترکیب توابع بسته است. حال چون خودریختی همانی نیز در $Aut(G,S)$ قرار دارد، بنابراین $Aut(G,S) \leq Aut(\Gamma)$ و چون تمام عناصر $Aut(G,S)$ همانی را ثابت نگه می دارند، بنابراین $Aut(G,S)$ زیرگروهی از $Aut(\Gamma)_e$ است.

تعریف 11. فرض کنید $\Gamma = Cay(G,S)$. در این صورت گوئیم Γ نرمال است اگر و تنها اگر $L(G)$ در $Aut(\Gamma)$ نرمال باشد.

مسئله 12. فرض کنید G یک گروه، $\Gamma = Cay(G,S)$ و α خودریختی G باشد. در این صورت α یک یک ریختی بین Γ و گراف $\Delta=Cay(G,\alpha(S))$ برقرار می کنید.

حل. برای اثبات مسئله توجه کنید که $uv \in E(\Gamma)$ اگر و تنها اگر $s\in S$ را بتوان چنان یافت که $v = us$. چون α خودریختی گروه است $v = us$ اگر و تنها اگر $\alpha(v)=\alpha(u)\alpha(s)$. بنابراین $uv \in E(\Gamma)$ اگر و تنها اگر $\alpha(u)\alpha(v)\in E(\Delta)$ و بنابراین α یک یک ریختی گراف بین Γ و Δ تعریف می کند.

قضیه 13. فرض کنید $\Gamma = Cay(G,S)$. در این صورت $N_{Aut(\Gamma)}(L(G)) = L(G)Aut(G,S)$. خصوصا $Aut(\Gamma) = L(G)Aut(G,S)$ اگر و تنها اگر $L(G) \trianglelefteq Aut(\Gamma)$. در حالت اخیر

$$Aut(\Gamma) = L(G)\rtimes Aut(G,S).$$

برهان. ابتدا بنابر تعریف نرمال ساز، $L(G)$ زیرگروه نرمالی از $N_{Aut(\Gamma)}(L(G))$ است. ثابت می کنیم که $Aut(G,S)$ نیز زیرگروه $N_{Aut(\Gamma)}(L(G))$ است. ما قبلا ثابت کردیم که هر $Aut(G,S)$ تحت ترکیب توابع تشکیل گروه می دهد و لذا تنها بررسی زیرمجموعه بودن آن کافی است. فرض کنیم $\alpha:G\to G$ عضو دلخواهی از $Aut(G,S)$ است. بنابر مسئله 12، α یک یک ریختی بین Γ و $\Delta=Cay(G,\alpha(S))$ برقرار می کنید. حال چون $\alpha(S) = S$، α یک خودریختی از Γ می باشد. حال عضو دلخواه $\delta_x:G\to G$ از $L(G)$ را در نظر گرفته و شکل خودریختی $\alpha^{-1}\delta_x\alpha$ را بدست می آوریم. بنابر تعریف:

$$\alpha^{-1}\delta_x\alpha(a) = \alpha^{-1}\big(x\alpha(a)\big) = \alpha^{-1}(x)a = \delta_{\alpha^{-1}(x)}(a).$$

بنابراین $\alpha^{-1}\delta_x\alpha = \delta_{\alpha^{-1}(x)} \in L(G)$ و از این رو $\alpha^{-1}L(G)\alpha = L(G)$. این نتیجه می دهد که $Aut(G,S)\subseteq N_{Aut(\Gamma)}(L(G))$. پس تا اینجا ثابت کرده ایم که $L(G)Aut(G,S)\subseteq N_{Aut(\Gamma)}(L(G))$. حال توجه کنیم که اگر $\alpha\in L(G) \cap Aut(G,S)$، آن گاه x ای می توان یافت که $\alpha = \delta_x$ و لذا برای هر $s\in S$،

$$\alpha(s) = s = \delta_x(s) = xs.$$

یعنی $x = e$ و α نگاشت همانی است. بنابراین $L(G) \cap Aut(G,S) = \{1_G\}$. چون $L(G)$ در گروه $N_{Aut(\Gamma)}(L(G))$ نرمال است، در زیرگروه آن یعنی $L(G)Aut(G,S)$ نیز نرمال خواهد بود. این ایجاب می

کند که $L(G) \rtimes Aut(G,S) = L(G)Aut(G,S)$. برای تکمیل برهان کافی است نشان دهیم $Aut(\Gamma) \subseteq L(G)Aut(G,S)$.

قضیه 14. هر گراف کیلی جهت دار و همبند روی گروهی آبلی دارای یک راه هامیلتونی است.

برهان. فرض کنیم $\Gamma = DiCay(G,S)$ که S مجموعه ی مولدی برای گروه G است. حکم را به استقرا روی مرتبه ی S ثابت می کنیم. اگر $|S| = 1$ آنگاه G گروهی دوری بوده و لذا گرف Γ دوری هامیلتونی دارد. به زبان دقیق تر اگر $S = \{x\}$ که x مولد گروه G است آن گاه $e,x,x^2,\dots,x^{n-1}$ راهی هامیلتونی در گراف $\Gamma = DiCay(G,\{x\})$ است که در آن $O(x) = |G|$. حال به استقرا فرض می کنیم که حکم را برای هر S با اندازه k ثابت کرده ایم. قرار می دهیم $S = \{s_1, \dots, s_{k+1}\}$ و فرض می کنیم که S مولد گروه G است. چون G آبلی است، لذا بنابر تمرین 33 از فصل دوم، $\frac{G}{H}$ با زیرگروهی از G چون K یک ریخت است که در آن $H = \langle s_{k+1} \rangle$. توجه کنید که اینجا فرض آبلی بودن گروه بکار رفته است. واضح است که

$$\{s_1H, \dots, s_{k+1}H\} = \{s_1H, \dots, s_kH\}$$

مولدی برای گروه $\frac{G}{H}$ است. چون $K \cong \frac{G}{H}$، لذا می توان مولدی چون $A = \{\overline{s_1}, \dots, \overline{s_k}\}$ برای زیر گروه K یافت. حال بنابر فرض استقرا، می توان دید که گراف کیلی $\Delta = DiCay(K,A)$ راه هامیلتونی دارد. قرار می دهیم $d = O(s_{k+1}) - 1$. ادعا می کنیم که مجموعه $\{s_1 + d, s_1, s_1 + d, s_2, \dots, s_1 + d, s_k\}$ یک راه هامیلتونی در گراف Γ ایجاد می کند (چرا؟).

تعریف 15. فرض کنید $\Gamma = Cay(G,S)$. گراف Γ را یک CI-گراف G می نامیم هرگاه برای هر گراف کیلی دیگر $\Delta = Cay(G,T)$ با شرط $\Gamma \cong \Delta$ بتوان $\alpha \in Aut(G)$ را چنان یافت که $\alpha(S) = T$. در این حالت گراف Γ را یک گراف یک ریخت کیلی برای گروه G می نامیم.

برای مطالعه گراف کیلی حلقه ها بایستی یکی از دو عمل جمع یا ضرب حلقه را انتخاب کرد. حالت اول به مطالعه گراف کیلی گروه های آبلی می انجامد که در قبلا مطالعه شده است. فرض کنیم R یک

حلقه جابجایی و یک دار باشد. **گراف کیلی یکانی** $\Gamma = Cay(R,R^*)$ گرافی است که راس های آن عناصر حلقه R بوده و دو راس x و y در گراف Γ مجاورند اگر و تنها اگر $x - y$ یکالی در R باشد.

مسائل حل شده و تمرینات پایان فصل

مسائل حل شده

1. فرض کنید $n \geq 5$ و ثابت کنید که روی هر گروه G از مرتبه n، می توان حداقل یک گراف کیلی غیر نرمال ساخت.

حل. ابتدا ثابت کنید که تنها زیرگروه های نرمال گروه متقارن S_n، زیرگروه بدیهی، زیرگروه متناوب A_n و خود گروه است و سپس نشان دهید که گراف کامل K_n را می توان با انتخاب مناسب S بعنوان گرافی کیلی ساخت. نهایتا از قضیه 8 کمک بگیرید.

تمرینات پایان فصل

2. گراف کیلی گروه دووجهی مرتبه 8 را نسبت به هر زیرمجموعه دو عضوی و سه عضوی بدست آورید. در اینجا مجموعه S را چنان فرض کنید که فاقد عضو همانی بوده و داشته باشیم $S=S^{-1}$.

3. شرط لازم و کافی برای آنکه $Cay(G,S)$ اویلری باشد آن است که S مولد G بوده و $|S|$ عددی زوج باشد.

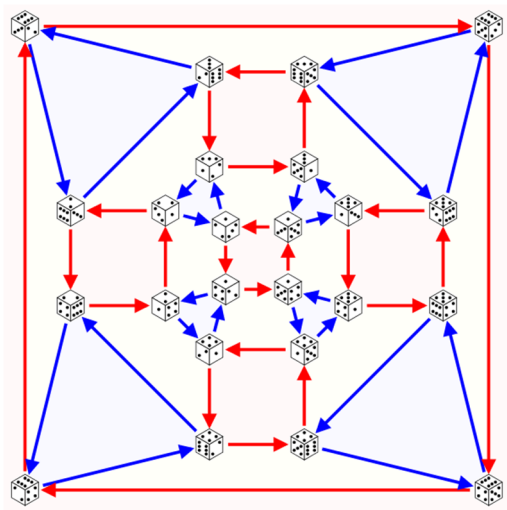
4. ثابت کنید آبلی سازی G همان گروه G/G' است.

5. فرض کنید $S = \{a,b,a^{-1}, b^{-1}\}$. $Cay(Dic_n,S)$ را تعیین کنید.

6. فرض کنید $F(a,b)$ مجموعه عناصری به شکل $a^{r_1}b^{s_1} \dots a^{r_t}b^{s_t}$ است که در آن r_i ها و s_i ها اعدادی صحیح هستند. ضرب روی این مجموعه را از کنارهم گذاشتن دو عنصر به این شکل و ساده کردن آن ها بر اساس قواعد $a^{r+s} = a^r a^s$ و $b^{r+s} = b^r b^s$ تعریف می کنیم. همانی را بر اساس توان صفر تعریف کنید، یعنی $e=a^0b^0$. ابتدا ثابت کنید $F(a,b)$ یک گروه است. سپس نشان دهید که

برای هر گروه G و هر تابع $f:\{a,b\} \to G$ می توان همریختی یکتای $g: F(a,b) \to G$ را یافت چنان که $f = goi$ که در آن $i:\{a,b\} \to F(a,b)$ نگاشتی است که $i(a) = a$ و $i(b) = b$. نهایتا نشان دهید که گراف کیلی گروه $F(a,b)$ نسبت به مجموعه $S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ گرافی است که در شکل 2 رسم شده است.

7. بگوئید که گراف زیر، گراف کیلی کدام گروه است.



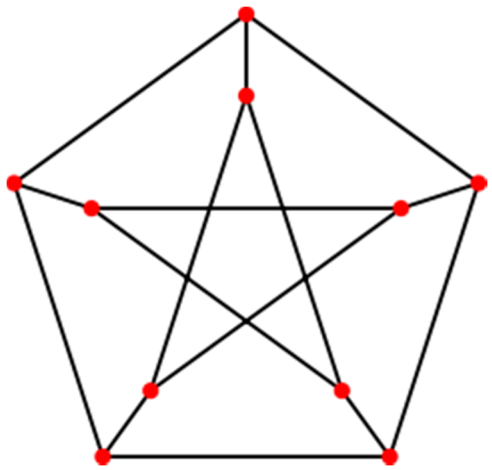
8. فرض کنید S زیرمجموعه ای دو عضوی از گروه G باشد. ثابت کنید گراف کیلی Cay(G,S) اجتماعی از دورهای هم طول می باشد که طول هر دور مقسوم علیهی از مرتبه گروه است.

9. مثالی از یک گراف کیلی نرمال بدست آورید.

10. اثبات لم 5 را کامل کنید.

11. فرض کنید G یک گروه، H زیرگروهی از G، Ω یک زیرمجموعه متقارن از $G - H$ باشد چنان که $G = \langle H \cup \Omega \rangle$. گراف $\Gamma = \Gamma(G,H,\Omega)$ را چنین تعریف می کنیم: راس های Γ همدسته های راست H در G هستند و دو راس Hx و Hy در Γ مجاورند اگر و تنها اگر $xy^{-1} \in \Omega$. ثابت کنید که Γ همبند و راس انتقالی است.

12. ثابت کنید که گراف پترسن که شکل آن در زیر آمده است، کیلی نیست.



راهنمایی: دو گروه از مرتبه 10 وجود دارند یکی Z_{10} و دیگری D_{10}. ثابت کنید در گراف کیلی هر دو گروه نسبت به مجموعه ای سه عضوی، همواره دوری از مرتبه 4 خواهیم داشت در حالی که گراف پترسن چنین دوری ندارد.

13. کدام یک از اجسام افلاطونی یک گراف کیلی هستند؟ ادعای خود را ثابت کنید.DiCay

14. ثابت کنید که $DiCay(Z_n, S)$ یک گراف هامیلتونی است.

15. بستار چه گراف هایی، یک گراف کامل است.

16. فرض کنید S زیرمجموعه ای از گروه G باشد که $S \cap S^{-1} = \phi$. ثابت کنید که Cay(G,S) درخت است اگر و تنها اگر گروه G روی مجموعه S آزاد باشد.

17. گراف کامل $\Gamma = K_4$ را در نظر بگیرید و ثابت کنید این گراف را می توان به دو شکل به صورت گرافی کیلی چنان نگریست که Γ نسبت به یک گروه گراف کیلی نرمال ولی نسبت به دیگری گراف کیلی غیرنرمال باشد.

18. مثال هایی از گراف های کیلی روی یک گروه G ارائه کنید که یک ریخت کیلی نباشد.

مراجع

1. N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1974.
2. R. Brauer and K. A. Fowler, On groups of even order, *Ann. Math.* **62** (1955), 565−583.
3. W. Burnside, Theory of Groups of Finite Order, Cambridge University Press, Cambridge, 1897.
4. A. Cayley, On the theory of groups as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$, *Philosophical Magazine* **7** (42) (1854) 40–47.
5. L. Lovasz, Combinatorial Problems and Exercises, Amsterdam, 1970.
6. E. Nummela, Cayley's Theorem for Topological Groups, *Amer. Math. Monthly* **87** (3) (1980) 202–203.
7. Ø. Ore, Note on Hamilton Circuits, *Amer. Math. Monthly* **67** (1960) 55.
8. E. M. Palmer, The hidden algorithm of Ore's theorem on Hamiltonian cycles, *Computers Math. Appl.* **34** (11) (1997) 113–119.
9. J. A. Siehler, The finite lamplighter groups: A guided tour, *College Math. J.* **43** (3) (2012) 203−211.
10. A. Tripi, *Cayley Graphs of Groups and Their Applications*, MSc Thesis, Missouri State University, 2017.