برنامهٔ درس معادلات دیفرانسیل، دانشگاه کاشان

جلسه	موضوع تدریس
۱	تعاریف مقدماتی شامل تعریف یک معادله دیفرانسیل عادی، جواب یک معادله دیفرانسیل عادی، مرتبهٔ یک معادله، جواب عمومی، جواب خصوصی، جواب غیر عادی به همراه مثالهایی از هر یک، بیان اهمیت معادلات دیفرانسیل عادی به همراه مثال‌های کاربردی.
۲	معادله دیفرانسیل نظیر یک دسته منحنی، مسیرهای متعامد و بیان مثال‌ها.
۳	معادلات تفکیک‌پذیر، معادلات به شکل $y' = f(ax + by + c)$، معادلات همگن، تبدیل برخی معادلات با تغییرمتغیر به معادلات همگن.
۴	تبدیل معادلات به شکل $y' = \frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}$به معادلهٔ همگن و بیان حالتهای خطوط موازی و متقاطع با ذکر مثال، معادلات کامل و مثال‌ها.
۵	معادلات دارای عامل انتگرال‌ساز به شکل $\mu(x,y) = \mu(x)$ و $\mu(x,y) = \mu(y)$.
۶	معادلات دارای عامل انتگرال‌ساز به شکل $\mu(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta}$ و $\mu(x,y) = \mu(z(x,y))$.
۷	معادلات خطی مرتبه اول و مثالها، معادلهٔ برنولی و برنولی معکوس.
۸	معادله ریکاتی، مثالهای تکمیلی.
۹	معادلات مرتبه دوم و بالاتر قابل تبدیل به مرتبه اول (معادلات فاقد $\boldsymbol{x}$، معادلات فاقد$\boldsymbol{y}$)، معرفی معادلات خطی مرتبه دوم همگن و ناهمگن، قضیه وجود و یکتایی، قضیه دربارهٔ شکل جواب معادله غیرهمگن، قضیه ترکیب خطی جواب‌ها، تعریف استقلال خطی جواب‌ها و معرفی رونسکین.
۱۰	قضیه دربارهٔ استقلال خطی جواب‌ها و رابطهٔ آن با رونسکین، قضیه دربارهٔ شکل جواب عمومی معادله همگن، اصل برهمنهی جواب‌ها، روش کاهش مرتبه برای معادلات مرتبه دوم همگن (فرمول آبل) به همراه مثالها.
۱۱	حل معادلات مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت، معرفی معادله شاخص و بررسی هر سه حالت (ریشه‌های حقیقی متمایز، ریشه حقیقی تکراری، ریشه‌های مختلط مزدوج)، تعمیم مفاهیم این جلسه برای حل معادلات مرتبه **n**-ام همگن با ضرایب ثابت.
۱۲	حل معادلات مرتبه دوم و مرتبه **n**-ام ناهمگن با ضرایب ثابت با روش ضرائب نامعین.
۱۳	روش تغییر پارامترها برای حل معادلات مرتبه دوم و مرتبه سوم.
۱۴	معرفی معادله کشی- اویلر و حالت کلی آن، حل معادلات کشی- اویلر مرتبه دو و مرتبه سه.
۱۵	معرفی تابع گاما و بیان برخی ویژگی‌های آن، تعریف لاپلاس، محاسبهٔ لاپلاس توابع چندجمله‌ای، محاسبهٔ لاپلاس توابع نمایی، محاسبهٔ لاپلاس توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس.
۱۶	تعریف توابع قطعه به قطعه پیوسته، معرفی توابع از مرتبهٔ نمایی، قضیهٔ وجود لاپلاس و نتایج آن، خاصیت خطی بودن لاپلاس، قضیهٔ اول انتقال، تبدیل لاپلاس مشتق و نتایج آن.
۱۷	تعریف معکوس لاپلاس، قضیهٔ وجود و یکتایی معکوس لاپلاس (شرط پیوستگی)، خطی‌بودن معکوس لاپلاس، تبدیل لاپلاس انتگرال ونتایج آن.
۱۸	مشتق‌گیری از لاپلاس و نتایج آن، انتگرال‌گیری از لاپلاس و نتایج آن، حل معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه توسط تبدیل لاپلاس.
۱۹	معرفی تابع پله‌ای واحد و محاسبهٔ لاپلاس آن، نوشتن توابع چندضابطه‌ای بر حسب تابع پله‌ای واحد و محاسبهٔ لاپلاس آنها، قضیه دوم انتقال، حل معادلات دیفرانسیل با قسمت ناهمگن چندضابطه‌ای توسط تبدیل لاپلاس.
۲۰	معرفی تابع دلتای دیراک و محاسبهٔ لاپلاس آن، حل معادلات شامل تابع دلتای دیراک توسط لاپلاس، معرفی انتگرال پیچشی (کانولوشن) و بیان ویژگی‌های آن.

برنامهٔ درس معادلات دیفرانسیل، دانشگاه کاشان

۲۱	لاپلاس انتگرال پیچشی، حل معادلات شامل انتگرال پیچشی و حل معادلات انتگرالی و معادلات دیفرانسیلی-انتگرالی توسط تبدیل لاپلاس.
۲۲	معرفی سری توانی، معرفی سری تیلور و مک‌لورن یک تابع، مفهوم تابع تحلیلی، معرفی نقاط عادی و نقاط تکین (منظم و نامنظم) یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم.
۲۳	جواب به‌صورت سری حول یک نقطهٔ عادی به همراه مثالها.
۲۴	جواب به‌صورت سری حول یک نقطهٔ تکین منظم (روش فروبنیوس)، معرفی معادله شاخص، مثال از حالت اول $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$.
۲۵	مثال از حالت دوم $r_1 - r_2 = 0$، مثال از حالت سوم $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}^+$، معرفی تابع بسل نوع اول و دوم، به‌طور خاص معرفی توابع بسل J_0 و J_1، بیان برخی ویژگی‌های توابع بسل.
۲۶	معرفی معادله بسل و تشریح جواب عمومی آن، مثال‌هایی از جواب عمومی معادله بسل از مرتبه غیرصحیح و از مرتبه‌صفر و یک، معادله بسل پارامتری.
۲۷	تبدیل برخی معادلات به معادله بسل با استفاده از تغییر متغیر، معرفی معادله لژاندر، معرفی چندجمله‌ای‌های لژاندر و ویژگی‌های آنها.
۲۸	معرفی دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل، حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل با روش لاپلاس.
۲۹	حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل با روش حذفی.
۳۰	ارائه مثالهای تکمیلی.

منابع درسی:

۱– معادلات دیفرانسیل و کاربردهای آن، تألیف دکتر اصغر کرایه‌چیان، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.

۲– معادلات دیفرانسیل، تألیف دکتر مسعود نیکوکار، انتشارات دانشگاه امیرکبیر.

* فصل ۱ : تعاریف و مفاهیم مقدماتی

* تعریف (معادله دیفرانسیل): به هر رابطه بین تابع مجهول و متغیرهای مستقل و مشتقات تابع مجهول نسبت به متغیرهای مستقل، یک معادله دیفرانسیل گفته می‌شود.

مثال:

① $xy' + 4y = e^{3x}$ ⟶ یک معادله دیفرانسیل معمولی با تابع مجهول $y=y(x)$ و یک متغیر مستقل x

② $x^2y'' + xy(y')^5 = 0$ ⟶ یک معادله دیفرانسیل معمولی با تابع مجهول $y=y(x)$ و یک متغیر مستقل x

③ $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ⟶ یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (معادله دیفرانسیل جزئی) با تابع مجهول $u=u(x,y)$ و متغیرهای مستقل x و y ⟶ در این درس ما با این نوع معادله دیفرانسیل سروکار نداریم.

یادآوری: از ریاضی عمومی ۲

مثال: اگر

$f(x,y) = 4x^2y^3 + x\sin(5y) - e^{7x} + y - 6 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 8xy^3 + \sin(5y) - 7e^{7x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = 12x^2y^2 + 5x\cos(5y) + 1$

* تعریف (جواب یک معادله دیفرانسیل): به هر تابعی که به جای تابع مجهول معادله قرار گیرد، تساوی برقرار باشد، آن را یک جواب آن معادله دیفرانسیل می‌نامیم.

مثال: معادله $y'+y=0$ را در نظر بگیرید. تابع $y=e^{-x}$ جوابی از این معادله است، زیرا

$y=e^{-x} \to y'=-e^{-x} \Rightarrow y'+y=-e^{-x}+e^{-x}=0$ ✓

البته $y=4e^{-x}$ نیز جوابی از این معادله است و همچنین $y=\frac{\sqrt{5}}{2}e^{-x}$.

مثال: معادله $y''+y=0$ را در نظر بگیرید. $y=\sin x$ جوابی از این معادله است، زیرا

$y=\sin x \to y'=\cos x \to y''=-\sin x$

$\Rightarrow y''+y=-\sin x+\sin x=0$ ✓

همچنین $y=\cos x$ نیز جوابی از این معادله است (چرا؟) و نیز $y=-3\sin x$ و $y=\sqrt{2}\cos x$ نیز جواب‌هایی از این معادله هستند (چرا؟).

* تعریف (مرتبه یک معادله دیفرانسیل): به بزرگترین مرتبه مشتق تابع مجهول موجود در یک معادله دیفرانسیل، مرتبه آن معادله می‌گوییم.

مثال:

① $x^2(y')^5 - 4xy = \sin x$ ⟶ یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۱

② $y'' + \frac{x}{x+1}y' = x$ ⟶ یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲

③ $yy'' + (y'')^4 = e^{3x}y$ ⟶ یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲

④ $xy'' - y^{(5)} + 2y'' = 0$ (مشتق مرتبه ۵) ⟶ یک معادله دیفرانسیل از مرتبه ۵

* تعریف (جواب عمومی): بعضی از معادلات دیفرانسیل دارای چند جواب و یا بینهایت جواب هستند که همهٔ آنها را می‌توان به صورت یک فرمول کلی که شامل یک یا چند ثابت دلخواه است، بیان کرد. این فرمول کلی را جواب عمومی معادله می‌نامیم.

مثال ①: جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبهٔ اول $y'+y=0$ به صورت $y=ce^{-x}$ است (چرا؟) که c ثابت دلخواه است.

دلیل آن در فصل ۲ بیان خواهد شد.

مثال ②: جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبهٔ دوم $y''+y=0$ به صورت $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ است (چرا؟) که c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواهی هستند.

دلیلش در فصل ۳ بیان خواهد شد.

* نکته: در معادلات مرتبه اول، در جواب عمومی، فقط یک ثابت دلخواه c داریم و در معادلات مرتبه دوم، در جواب عمومی، دو تا ثابت دلخواه c_1 و c_2 و به طور کلی در معادله مرتبه n، n تا ثابت دلخواه c_1 و c_2 و ... و c_n داریم.

* تعریف (جواب خصوصی): اگر در جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل، به جای ثابت‌ها دلخواه، اعداد مشخصی قرار دهیم، جواب حاصل را یک جواب خصوصی معادله می‌نامیم.

مثال: در مثال ① بالا، اگر $c=7$ آنگاه $y=7e^{-x}$ یک جواب خصوصی معادلهٔ $y'+y=0$ است. همچنین $y=\sqrt{3}\,e^{-x}$ نیز یک جواب خصوصی این معادله است.

مثال: معادله دیفرانسیل $y''+y=0$ را به همراه شرایط اولیهٔ $y(0)=3$ و $y'(0)=-2$ در نظر بگیرید.

طبق مثال ② بالا، جواب عمومی این معادله به شکل $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ است. با توجه به شرایط اولیهٔ مسأله، داریم

جای x — جای y

$$\begin{cases} y(0)=3 \longrightarrow c_1\cos(0)+c_2\sin(0)=3 \longrightarrow \boxed{c_1=3} \\ y'(0)=-2 \longrightarrow -c_1\sin(0)+c_2\cos(0)=-2 \longrightarrow \boxed{c_2=-2} \end{cases}$$

جای x — جای y'

توجه: $y'=-c_1\sin x+c_2\cos x$

و بدین ترتیب $y=3\cos x-2\sin x$ یک جواب خصوصی از معادلهٔ $y''+y=0$ است.

* تعریف (جواب غیرعادی): به جوابی از معادله دیفرانسیل که نتوان آن را از روی جواب عمومی به دست آورد، جواب غیرعادی معادله می‌نامیم.

مثال: جواب عمومی معادلهٔ $y'=2\sqrt{y}$ به صورت $y=(x+c)^2$ است (چرا؟) که c ثابت دلخواهی است. از طرفی

دلیلش در فصل ۲

$y=0$ نیز جوابی از این معادله است ولی به ازای هیچ مقداری از c، جواب $y=0$ از روی جواب عمومی به دست نمی‌آید.

لذا $y=0$ یک جواب غیرعادی معادلهٔ $y'=2\sqrt{y}$ است.

مثال: معادله دیفرانسیل $y = xy' + (y')^2$ را در نظر بگیرید. جواب عمومی این معادله به صورت

$y = cx + c^2$ است (چرا) که c ثابت دلخواه است. البته $y = -\frac{1}{4}x^2$ نیز جوابی از این معادله است (چرا) ولی

این جواب از روی جواب عمومی به دست نمی‌آید. لذا $y = -\frac{1}{4}x^2$ یک جواب غیرعادی معادله است.

دلیلش در فصل ۲

---

* معادله دیفرانسیل یک دسته منحنی:

شکل کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $F(x, y, y') = 0$ (1) است و جواب عمومی آن به صورت $g(x, y, c) = 0$ (2)

است که c ثابت دلخواهی است.

به ازای مقادیر مختلف c، بیانگر یک دسته منحنی است

با مشتق‌گیری از طرفین (2) نسبت به x داریم:

$$g_x + y' g_y = 0 \quad (3)$$

منظور از g_x، $\frac{\partial g}{\partial x}$ است

منظور از g_y، $\frac{\partial g}{\partial y}$ است

با حذف ثابت c از معادلات (2) و (3) به معادله (1) می‌رسیم که معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های (2) است.

مثال: معادله دیفرانسیل هر یک از دسته منحنی‌های زیر را به دست آورید:

حل)

(1) $y = ce^{-4x}$ (*)

معادله فقط شامل یک ثابت c است $\longrightarrow$ فقط یک بار مشتق‌گیری

$\hookrightarrow y' = -4ce^{-4x}$ (**)

اکنون برای حذف ثابت c از معادلات (*) و (**) داریم:

$$\frac{(*)}{(**)}: \quad \frac{y}{y'} = \frac{ce^{-4x}}{-4ce^{-4x}} \longrightarrow \frac{y}{y'} = -\frac{1}{4} \longrightarrow \text{یا}: \; y' = -4y$$

(2) $y = c_1 e^x + c_2 \sin x$ (*)

دارای دو ثابت دلخواه c_1 و c_2 $\longrightarrow$ دو بار مشتق‌گیری

$\hookrightarrow y' = c_1 e^x + c_2 \cos x$ (**)

$\hookrightarrow y'' = c_1 e^x - c_2 \sin x$ (***)

اکنون برای حذف ثابت‌های c_1 و c_2 به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$(*) + (***): \quad y + y'' = 2c_1 e^x \longrightarrow c_1 = \frac{y + y''}{2e^x} \longrightarrow$$

c_1 را در (*) جایگذاری می‌کنیم، c_2 را نیز به دست آوریم $\longrightarrow$

$$\longrightarrow y = \frac{y+y''}{2\cancel{e^x}}(\cancel{e^x}) + c_2 \sin x \longrightarrow c_2 = \frac{y - \left(\frac{y+y''}{2}\right)}{\sin x} \longrightarrow c_2 = \frac{y - y''}{2\sin x}$$

اکنون c_1 و c_2 را در معادلهٔ (**) (یعنی معادله‌ای که تا حالا از آن استفاده نکردیم) جایگذاری می‌کنیم:

$$y' = \frac{y+y''}{2\cancel{e^x}}(\cancel{e^x}) + \frac{y-y''}{2\sin x}(\cos x) \longrightarrow \boxed{y' = \frac{y+y''}{2} + \frac{y-y''}{2}\cot x} \checkmark$$

تمرین ③ $y = ce^{8x} \longrightarrow$ جواب: $y' = 8y$

تمرین ④ $y = c_1\cos x + c_2\sin x \longrightarrow$ جواب: $y'' + y = 0$

مثال: معادلهٔ دیفرانسیل همهٔ دایره‌های در صفحهٔ مختصات که مرکزشان روی محور y ها قرار دارد را بیابید.

حل) می‌دانیم معادلهٔ دایره‌ای که مرکزش روی محور y ها قرار دارد به صورت

$$x^2 + (y-c_1)^2 = c_2^2 \quad (*) \longrightarrow$$ دو ثابت دلخواه c_1 و c_2 دارد لذا دوبار مشتق می‌گیریم

است که c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواه‌اند. اکنون برای یافتن معادله دیفرانسیل مربوط به (*)، داریم:

از طرفین نسبت به x مشتق گرفتیم: $2x + 2y'(y-c_1) = 0 \quad (**)$

مجدداً از طرفین نسبت به x مشتق گرفتیم: $2 + 2y''(y-c_1) + 2(y')^2 = 0 \quad (***)$

اکنون برای حذف c_1 و c_2 از معادلات (*) و (**)، و (***)، کافیست $y-c_1$ را از (**) یافته و در (***) جایگذاری کنیم:

$$\text{از } (**) \longrightarrow y - c_1 = \frac{-2x}{2y'} = -\frac{x}{y'} \xrightarrow[\text{جایگذاری}]{\text{در } (***)} \boxed{2 + 2y''\left(-\frac{x}{y'}\right) + 2(y')^2 = 0} \checkmark$$

---

* مسیرهای متعامد (قائم) یک دسته منحنی:

* تعریف: دو دسته منحنی A و B را در نظر بگیرید. اگر هر منحنی از A بر همهٔ منحنی‌های B عمود باشد و برعکس، آنگاه می‌گوییم دو دسته منحنی A و B، متعامدند.

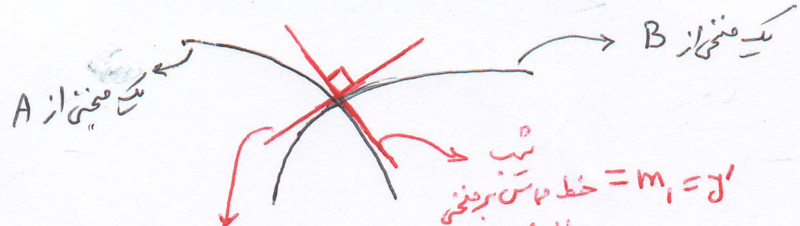
* یافتن مسیرهای متعامد یک دسته منحنی: فرض کنید دسته منحنی A داده شده است و هدف، یافتن مسیرهای متعامد آن (یعنی دسته منحنی B متعامد بر A) باشد، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

گام اول: حذف ثابت‌ها و یافتن معادله دیفرانسیل دسته منحنی A.

گام دوم: به جای y'، $-\frac{1}{y'}$ قرار می‌دهیم تا معادله دیفرانسیل دسته منحنی B به دست آید.

گام سوم: حل معادلهٔ دیفرانسیل جدید به دست آمده، که جواب عمومی آن، همان دسته منحنی B متعامد بر A است.

یعنی: دسته منحنی A داده شده است $\longrightarrow$ یافتن معادله دیفرانسیل دسته منحنی A $\xrightarrow{y' \to -\frac{1}{y'}}$ به معادلهٔ دیفرانسیل دسته منحنی B می‌رسیم $\xrightarrow[\text{دیفرانسیل جدید}]{\text{حل معادلهٔ}}$ به دسته منحنی B می‌رسیم

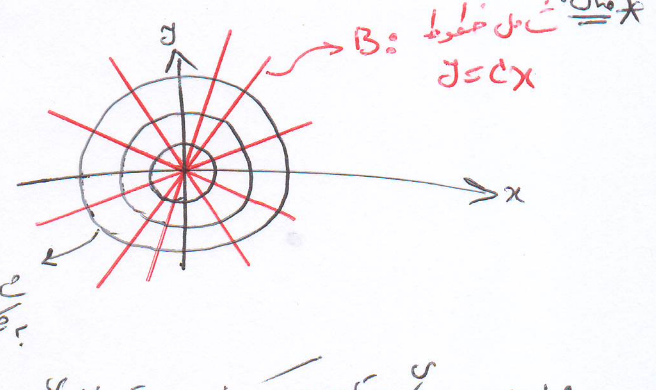


شیب خط مماس بر منحنی از B که عمود بر منحنی از A است $= m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{y'}$

چون $-1 = $ حاصلضرب شیب‌ها $\rightarrow m_1 m_2 = -1$

* بیان یک توضیح برای گام دوم :

* مثال:



مثال: مسیرهای متعامد هر یک از دسته منحنی‌های زیر را بدست آورید:

1) $y = cx^2 \quad (1) \rightarrow$ نشان‌دهنده دسته منحنی A

$\rightarrow y' = 2cx \quad (2)$

حل) گام اول: حذف c :

برای حذف c داریم:

$\frac{(1)}{(2)}: \frac{y}{y'} = \frac{cx^2}{2cx} \rightarrow \frac{y}{y'} = \frac{x}{2} \rightarrow$ همان معادله دیفرانسیل دسته منحنی A

گام دوم: باید y' را $\rightarrow -\frac{1}{y'}$ یعنی به جای y' ، $-\frac{1}{y'}$ قرار دهیم. پس:

$\frac{y}{-\frac{1}{y'}} = \frac{x}{2} \rightarrow \boxed{-yy' = \frac{x}{2}} \; (*) \rightarrow$ همان معادله دیفرانسیل دسته منحنی B

گام سوم: حل معادله جدید یعنی $(*)$:

$-yy' = \frac{x}{2} \rightarrow$ یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول تفکیک‌پذیر $\rightarrow$ روش حل در فصل 2 ، اما در اینجا هم به حل آن اشاره می‌کنم. $\rightarrow$

$-yy' = \frac{x}{2} \rightarrow -y\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2} \rightarrow -y\,dy = \frac{1}{2}x\,dx \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری از طرفین}} -\int y\,dy = \frac{1}{2}\int x\,dx$

متغیرهای y و x تفکیک شده‌اند

$\rightarrow -\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{4} + c \rightarrow$ همان دسته منحنی B متعامد بر دسته منحنی A

2) $y = cx^2 + 5 \quad (1) \rightarrow$ همان دسته منحنی A

$\rightarrow y' = 2cx \quad (2) \Longrightarrow$

حل) گام اول: حذف c برای این کار داریم:

حال از (2) داریم $c = \frac{y'}{2x} \rightarrow$ در (1) جایگذاری می‌کنیم و داریم

$y = \left(\frac{y'}{2x}\right)x^2 + 5 \Longrightarrow y = \frac{y'x}{2} + 5$

گام دوم: $y' \rightarrow -\frac{1}{y'}$

$$y=\frac{\left(-\frac{1}{y'}\right)x}{2}+5 \longrightarrow y=\frac{-x}{2y'}+5 \quad (*)$$

گام سوم: حل معادلهٔ جدید یعنی $(*)$:

معادله $(*)$ نیز از نوع تفکیک‌پذیر است که برای حل آن داریم:

$$y=\frac{-x}{2y'}+5 \Longrightarrow y-5=\frac{-x}{2y'} \longrightarrow (y-5)(2y')=-x$$

$$\longrightarrow (2y-10)y'=-x \longrightarrow (2y-10)\frac{dy}{dx}=-x \xrightarrow[\text{متغیرها}]{\text{تفکیک}} (2y-10)dy=-x\,dy$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \int(2y-10)dy=-\int x\,dx \longrightarrow (y^2-10y)=-\frac{x^2}{2}+c \longrightarrow B$$

همان دسته منحنی متعامد بر A

تمرین ③ $y=\frac{cx}{x+1} \longrightarrow A \qquad$ پاسخ: $-\frac{y^2}{2}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+c \longrightarrow B$

④ $\int_0^x t^2 y(t)\,dt = c + x^3 y(x)$

حل) گام اول: حذف c: با مشتق گیری از طرفین نسبت به x داریم:

$$x^2y(x)=3x^2y(x)+x^3y'(x) \longrightarrow -2x^2y=x^3y' \longrightarrow -2y=xy'$$

گام دوم: $y' \rightarrow -\frac{1}{y'}$

$$-2y=x\left(-\frac{1}{y'}\right) \longrightarrow 2yy'=x \quad (*)$$

گام سوم: حل معادلهٔ $(*)$: $(*)$ یک معادله مرتبه اول تفکیک‌پذیر است و داریم

$$2y\frac{dy}{dx}=x \longrightarrow 2y\,dy=x\,dx \longrightarrow \int 2y\,dy=\int x\,dx \longrightarrow y^2=\frac{x^2}{2}+c$$