فصل ۲ : معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

در این فصل، روش‌های حل معادلات مرتبه اول زیر را شرح می‌دهیم:

۱- معادلات تفکیک پذیر (جدایی پذیر)

۲- معادلات همگن

۳- معادلات کامل

۴- معادلات مرتبه اول خطی

۵- معادلات مرتبه اول غیرخطی (معادله برنولی و معادله ریکاتی)

۱- معادلات تفکیک پذیر:

این دسته از معادلات مرتبه اول به شکل $f(y)dy=g(x)dx$ و یا به شکل $f(y)\,y'=g(x)$ هستند که با انتگرال‌گیری از طرفین، جواب عمومی معادله بدست می‌آید.

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید:

① $y'=e^{3x+7y}$

حل) می‌توانیم بنویسیم

$$y'=e^{3x}\,e^{7y}$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{e^{7y}}=e^{3x} \Rightarrow e^{-7y}y'=e^{3x} \Rightarrow e^{-7y}\frac{dy}{dx}=e^{3x}$$

$$\xRightarrow{\text{تفکیک}} e^{-7y}dy=e^{3x}dx \xRightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \int e^{-7y}dy=\int e^{3x}dx \Rightarrow -\frac{1}{7}e^{-7y}=\frac{1}{3}e^{3x}+c$$

② $y'=1+x^2+y^2+x^2y^2$

حل) $y'=1+x^2+y^2(1+x^2) \Rightarrow \underset{\frac{dy}{dx}}{y'}=(1+x^2)(1+y^2)$

$$\xRightarrow{\text{تفکیک}} \frac{dy}{1+y^2}=(1+x^2)dx \xRightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \int\frac{dy}{1+y^2}=\int(1+x^2)dx \Rightarrow \operatorname{Arctan} y=x+\frac{x^3}{3}+c$$

③ تمرین $2x(1+y)dx+(x^2-1)dy=0 \longrightarrow$ جواب: $-\ln(x^2-1)+c=\ln(1+y)$

④ تمرین $y'=\tan x\tan y \longrightarrow$ جواب: $\ln(\sin y)=\ln(\cos x)+c$

نکته ۱ : معادلات به شکل $y'=f(ax+by+c)$ با تعریف متغیر $u=ax+by+c$ قابل تبدیل به تفکیک پذیر هستند.

$$\to u'=a+by' \to y'=\frac{u'-a}{b}$$

مثال: مطلوب است جواب عمومی معادلات زیر:

همان $f(9x-y+3)$

① $y'=(9x-y+3)^2$

حل) معادله به فرم نکته ۱ است. با تعریف متغیر $u=9x-y+3$ داریم

$$u=9x-y+3 \to u'=9-y' \to y'=9-u'$$

$\to$ با جایگذاری در معادله داریم:

$$9-u'=u^2 \to -u'=u^2-9 \to -\frac{du}{dx}=u^2-9 \xrightarrow{\text{تفکیک متغیر}} \frac{-du}{u^2-9}=dx$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} -\int\frac{du}{u^2-9}=\int dx \to$$

تجزیه کسر

$$\frac{1}{u^2-9}=\frac{1}{(u-3)(u+3)}=\frac{A}{u-3}+\frac{B}{u+3}=\frac{(A+B)u+(3A-3B)}{(u-3)(u+3)} \to \begin{cases}A+B=0\\3A-3B=1\end{cases} \to \begin{matrix}A=\frac{1}{6}\\B=-\frac{1}{6}\end{matrix}$$

$$\Rightarrow -\int\left(\frac{\frac{1}{6}}{u-3}+\frac{-\frac{1}{6}}{u+3}\right)du=x+c \Rightarrow -\left(\frac{1}{6}\ln(u-3)-\frac{1}{6}\ln(u+3)\right)=x+c$$

$$\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{u=9x-y+3} -\left(\frac{1}{6}\ln(9x-y+\cancel{3}-\cancel{3})-\frac{1}{6}\ln(9x-y+3+3)\right)=x+c$$

② تمرین $y'=(y-4x)^2$

نکته ۲ : در برخی معادلات، با توجه به فرم معادله، می‌توان با یک تعریف متغیر مناسب، معادله را به تفکیک پذیر تبدیل کرد.

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را به دست آورید:

① $y'=2+5xe^{2x-y}$ $\to u$

حل) با تعریف متغیر $u=2x-y$ داریم: $u'=2-y' \to y'=2-u'$ در معادله جایگذاری:

$$\cancel{2}-u'=\cancel{2}+5xe^u \to -u'=5xe^u \xRightarrow{\text{تفکیک پذیر}} -\frac{u'}{e^u}=5x \to -\frac{\frac{du}{dx}}{e^u}=5x$$

$$\to -\frac{du}{e^u}=5xdx \to -\int e^{-u}du=\int 5xdx \to e^{-u}=\frac{5x^2}{2}+c \xrightarrow[\text{جایگذاری}]{u=2x-y}$$

۲) $y' + 3x^2 = (x^3+y-2)^{2/3}$

$u = x^3+y-2$

حل) با تعویض متغیر $u=x^3+y-2$ داریم

$u' = 3x^2 + y'$

$y' = u' - 3x^2$ ← در معادله جایگذاری:

$$u' - 3x^2 + 3x^2 = u^{2/3} \longrightarrow u' = u^{2/3} \longrightarrow \frac{du}{dx} = u^{2/3} \xrightarrow{\text{تفکیک متغیر}} \frac{du}{u^{2/3}} = dx$$

$$\longrightarrow \int u^{-2/3}\,du = \int dx \longrightarrow \boxed{\frac{u^{1/3}}{\frac{1}{3}} = x+c} \checkmark \xrightarrow[\text{جایگذاری}]{u=x^3+y-2} \checkmark\checkmark$$

تمرین ۳) $\dfrac{dy}{dx} = y-x-1 + (x-y+2)^{-1}$

راهنمایی: روش اول: با تعویض متغیر $u=y-x$ — روش دوم: با تعویض متغیر $u=x-y$

روش سوم: با تعویض متغیر $u=y-x-1$ — روش چهارم: با تعویض متغیر $u=x-y+2$

جواب عمومی معادله: $\boxed{\frac{1}{2}\ln(2u-u^2) = x+c}$ ✓

۲- معادلات همگن:

* تعریف (تابع همگن): تابع دو متغیرهٔ $f(x,y)$ را همگن از درجهٔ n می‌نامیم هرگاه برای هر عدد حقیقی $\lambda \neq 0$ و هر دو زوج (x,y) و $(\lambda x, \lambda y)$ از دامنهٔ تابع داشته باشیم:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

مثال:

۱) $f(x,y) = 4x+7y$

$f(\lambda x,\lambda y) = 4(\lambda x) + 7(\lambda y) = \lambda(4x+7y) = \lambda f(x,y) \longrightarrow$ تابع f همگن از درجهٔ $n=1$

۲) $f(x,y) = \sin(2x-y)$

$f(\lambda x,\lambda y) = \sin(2\lambda x - \lambda y) = \sin(\lambda(2x-y)) \neq \lambda^n \sin(2x-y) \longrightarrow$ تابع f همگن نیست

۳) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+3y}$

$f(\lambda x,\lambda y) = \dfrac{1}{\lambda x + 3(\lambda y)} = \dfrac{1}{\lambda(x+3y)} = \dfrac{1}{\lambda} f(x,y) = \lambda^{-1} f(x,y) \longrightarrow$ تابع f همگن از درجهٔ $n=-1$

۴) $f(x,y) = \dfrac{3x+y}{x-2y}$

$f(\lambda x,\lambda y) = \dfrac{3(\lambda x)+(\lambda y)}{(\lambda x)-2(\lambda y)} = \dfrac{\lambda(3x+y)}{\lambda(x-2y)} = \dfrac{3x+y}{x-2y} = f(x,y) = \lambda^0 f(x,y) \longrightarrow$ تابع f همگن از درجهٔ $n=0$

⑤ $f(x,y)=x^4+6xy^3$

$\hookrightarrow f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^4+6(\lambda x)(\lambda y)^3=\lambda^4x^4+6\lambda^4xy^3=\lambda^4(x^4+6xy^3)=\lambda^4 f(x,y)$

تابع f همگن از درجه $n=4$

⑥ $f(x,y)=x^4+6xy^2$

$\hookrightarrow f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^4+6(\lambda x)(\lambda y)^2=\lambda^4x^4+6\lambda^3xy^2\neq\lambda^n f(x,y)\longrightarrow$ تابع f همگن نیست

* تعریف (معادله همگن): معادله دیفرانسیل مرتبه اول $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ را همگن می‌گوییم هرگاه

(1)

هر دو تابع $M(x,y)$ و $N(x,y)$ همگن از درجه یکسان باشند در این صورت با تعریف متغیر $y=vx$ ، معادله (1) به یک معادله تفکیک‌پذیر تبدیل می‌شود که با حل آن آشنا هستیم.

$dy=xdv+vdx$ یا $y'=v'x+v$

مثال: مطلوبست جواب عمومی معادلات زیر:

① $\boxed{(x^2+y^2)}dx\boxed{-5xy}dy=0$

$M(x,y)$ همگن از درجه ۲ (چرا)

$N(x,y)$ همگن از درجه ۲ (چرا)

پس معادله همگن است $\longrightarrow$ با تعریف متغیر $y=vx$ داریم: $dy=xdv+vdx \longrightarrow$ در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$(x^2+v^2x^2)dx-5x(vx)(xdv+vdx)=0\Rightarrow(x^2+v^2x^2)dx-5x^3vdv-5x^2v^2dx=0$

$\Rightarrow x^2(1+v^2-5v^2)dx-5x^3vdv=0\Rightarrow x^2(1-4v^2)dx-5x^3vdv=0\longrightarrow$ تفکیک‌پذیر

$\xrightarrow{\text{تفکیک و انتگرال‌گیری}}\int\frac{x^2}{5x^3}dx=\int\frac{vdv}{1-4v^2}$ ، $vdv\to-\frac{1}{8}dt$ ، $1-4v^2\to t$

$\Rightarrow\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x}=-\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t}\Rightarrow\frac{1}{5}\ln x=-\frac{1}{8}\ln t+c$

$t=1-4v^2=1-\frac{4y^2}{x^2}\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{}$

$\frac{1}{5}\ln x=-\frac{1}{8}\ln\left(1-\frac{4y^2}{x^2}\right)+c$

۲) $x\sin\left(\frac{y}{x}\right) y' = y\sin\left(\frac{y}{x}\right) + x$, $y' \to \frac{dy}{dx}$

حل) معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\underbrace{\left(y\sin\left(\frac{y}{x}\right)+x\right)}_{M(x,y)}dx \underbrace{-\,x\sin\left(\frac{y}{x}\right)}_{N(x,y)}dy = 0$$

(؟) هر دو همگن از درجه ۱

→ معادله، همگن (از درجه ۱) است.

پس با تعویض متغیر $y=vx$ داریم:

$dy = x\,dv + v\,dx$ ← در معادله جایگذاری:

$$\left(vx\sin\left(\frac{vx}{x}\right)+x\right)dx - x\sin\left(\frac{vx}{x}\right)(x\,dv+v\,dx)=0$$

$$\Rightarrow (vx\sin v + x)dx - x^2\sin v\,dv - xv\sin v\,dx = 0$$

$$\Rightarrow (\cancel{vx\sin v} + x - \cancel{xv\sin v})dx - x^2 v\sin v\,dv = 0$$

$$\Rightarrow x\,dx - x^2\sin v\,dv = 0 \xrightarrow{\text{تفکیک متغیر}} \frac{x\,dx}{x^2} = \sin v\,dv \longrightarrow \int\frac{dx}{x} = \int \sin v\,dv$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln x = -\cos v + c}$$

$$\xrightarrow[\text{با جایگذاری}]{v=\frac{y}{x}} \ln x = -\cos\left(\frac{y}{x}\right)+c.$$

مثال: مسیرهای متعامد دسته منحنی $x^2+y^2=2cx$ را بدست آورید. (همان دسته منحنی A)

حل) گام اول: حذف c و یافتن معادله دیفرانسیل دسته منحنی داده شده (همان دسته منحنی A)

$x^2+y^2=2cx$ ①

مشتق‌گیری نسبت به x:

$2x+2yy'=2c$ ②

$$\frac{①}{②}: \frac{x^2+y^2}{2x+2yy'} = \frac{2cx}{2c} \longrightarrow \frac{x^2+y^2}{2x+2yy'} = x$$

گام دوم: $y' \longrightarrow -\frac{1}{y'}$:

$$\frac{x^2+y^2}{2x+2y\left(-\frac{1}{y'}\right)} = x \longrightarrow (*)$$

گام سوم: حل معادله (*): با طرفین وسطین (*) داریم

$$x^2+y^2 = 2x^2 - 2\left(\frac{xy}{y'}\right) \Rightarrow (-x^2+y^2)y' = -2xy$$

$$\Rightarrow (-x^2+y^2)dy = -2xy\,dx \Rightarrow -2xy\,dx + (x^2-y^2)dy = 0 \longrightarrow$$ یک معادله همگن (از درجه ۲)

با تعویض متغیر $y=vx$ و مشابه با روش حل مثال ① بالا، در پایان بدست می‌آید

جواب: $\boxed{x^2+y^2=cy}$ یا: $\boxed{\ln y = \ln(x^2+y^2)+c}$

مثال ۶: با استفاده از تعویض متغیرهای مناسب، جواب عمومی معادله زیر را به دست آورید:

$$(3\tan x - 2\cos y)\sec^2 x\,dx + \tan x \sin y\,dy = 0$$

u $\to du = \sec^2 x\,dx$ ، $v \to dv = -\sin y\,dy$

حل) با تعویض متغیرها $u = \tan x$ و $v = \cos y$ داریم:

$$(3u - 2v)\,du - u\,dv = 0 \quad (*)$$

$\longrightarrow$ یک معادله همگن (از درجه ۱) برحسب متغیرهای u و v

پس با تعویض متغیر $v = tu$ داریم: $dv = u\,dt + t\,du$ $\longleftarrow$ در معادله (*) می‌گذاریم:

$$(3u - 2tu)\,du - u(u\,dt + t\,du) = 0 \Rightarrow (3u - 2tu)\,du - u^2\,dt - ut\,du = 0$$

$$\Rightarrow (3u - 2tu - ut)\,du - u^2\,dt = 0 \Rightarrow 3u(1-t)\,du - u^2\,dt = 0$$

$\longrightarrow$ تفکیک‌پذیر

$$\Rightarrow \int \frac{3u}{u^2}\,du = \int \frac{dt}{1-t} \Rightarrow 3\ln u = -\ln(t-1) + c$$

* نکته ۱: معادلات به فرم $y' = f\left(\frac{ax+by}{a'x+b'y}\right)$ همگن هستند و لذا با تعویض متغیر $y = vx$ به تفکیک‌پذیر تبدیل می‌شوند.

* نکته ۲: معادلات به فرم $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$ که c و c' هم‌زمان صفر نیستند (یعنی حداقل یکی از آن‌ها مخالف صفر است)،

دو حالت زیر را داریم:

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \longrightarrow$ حالت موازی ، $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \longrightarrow$ حالت تقاطع

حالت (الف) (حالت موازی خطوط): اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$، در این حالت با استفاده از تعویض متغیر $u = ax + by$ به یک معادله تفکیک‌پذیر می‌رسیم که با حل آن آشنا هستیم.

$$u' = a + by' \to y' = \frac{u' - a}{b}$$

حالت (ب) (حالت تقاطع خطوط): اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$، در این حالت ابتدا نقطهٔ تقاطع دو خط $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ (یعنی نقطهٔ $A\big|_{y_0}^{x_0}$) را به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از تعویض متغیرهای

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

به معادلهٔ $\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX+bY}{a'X+b'Y}\right)$ می‌رسیم که همگن است و در ادامه با تعویض متغیر $Y = vX$ به یک معادله تفکیک‌پذیر می‌رسیم که با حل آن آشنا هستیم.

مثال ۵) با استفاده از تعویض متغیرهای مناسب، جواب عمومی معادله زیر را به دست آورید:

$$(3\tan x-2\cos y)\sec^2 x\,dx+\tan x\,\sin y\,dy=0$$

$u \rightarrow du=\sec^2 x\,dx$, $v \rightarrow dv=-\sin y\,dy$

حل) با تعویض متغیرها $u=\tan x$ و $v=\cos y$ داریم:

$$(3u-2v)\,du-u\,dv=0 \quad (*)$$

$(*) \longrightarrow$ یک معادله همگن (از درجه ۱) برحسب متغیرهای u و v

پس با تعویض متغیر $v=tu$ داریم: $dv=u\,dt+t\,du$ $\longrightarrow$ در معادله $(*)$ جایگذاری:

$$(3u-2tu)\,du-u(u\,dt+t\,du)=0 \Rightarrow (3u-2tu)\,du-u^2dt-ut\,du=0$$

$$\Rightarrow (3u-2tu-ut)\,du-u^2dt=0 \Rightarrow 3u(1-t)\,du-u^2dt=0 \longrightarrow \text{تفکیک پذیر}$$

$$\Rightarrow \int\frac{3u}{u^2}\,du=\int\frac{dt}{1-t} \Rightarrow 3\ln u=-\ln(t-1)+c \; \checkmark$$

* نکته ۱: معادلات به فرم $y'=f\left(\frac{ax+by}{a'x+b'y}\right)$ همگن هستند و لذا با تعویض متغیر $y=vx$ به تفکیک پذیر تبدیل می‌شوند.

* نکته ۲: معادلات به فرم $y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$ که c و c' هم‌زمان صفر نیستند (یعنی حداقل یکی از آن‌ها مخالف صفر است)، دو حالت زیر را داریم:

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \longrightarrow$ حالت موازی $\qquad \frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'} \longrightarrow$ حالت تقاطع

حالت (الف) (حالت موازی خطوط): اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$، در این حالت با استفاده از تعویض متغیر $u=ax+by$ به یک معادله تفکیک پذیر می‌رسیم که با حل آن آشنا هستیم.

$$u'=a+by' \rightarrow y'=\frac{u'-a}{b}$$

حالت (ب) (حالت تقاطع خطوط): اگر $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$، در این حالت ابتدا نقطه تقاطع دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ (یعنی نقطه $A\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$) را به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از تعویض متغیرهای

$$\begin{cases}x=X+x_0\\y=Y+y_0\end{cases}$$

به معادله $\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{aX+bY}{a'X+b'Y}\right)$ می‌رسیم که همگن است و در ادامه با تعویض متغیر $Y=vX$ به یک معادله تفکیک پذیر می‌رسیم که با حل آن آشنا هستیم.

مثال: مطلوبست جواب عمومی معادلات زیر:

① $y' = \dfrac{2x+y-1}{4x+2y+5}$

حل) $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{1}{2}$ ⟵ حالت (الف) (خطوط موازی)

پس با تعویض متغیر $u = ax+by = 2x+y$ داریم:

$u' = 2 + y' \longrightarrow y' = u' - 2$ ⟶ در معادله جایگذاری می‌کنیم: $u'-2 = \dfrac{u-1}{2u+5} \longrightarrow u' = \dfrac{u-1}{2u+5} + 2$

$\Rightarrow \underbrace{u'}_{\frac{du}{dx}} = \dfrac{5u+9}{2u+5}$ ⟶ تفکیک پذیر ⟶ $\displaystyle\int \left(\frac{2u+5}{5u+9}\right) du = \int dx$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}\int \frac{u+5/2}{u+9/5}\, du = x + c \Rightarrow \frac{2}{5}\int \frac{u+\frac{9}{5}-\frac{9}{5}+\frac{5}{2}}{u+9/5}\, du = x+c$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}\left(\int du + \frac{7}{10}\int \frac{du}{u+9/5}\right) = x+c \Rightarrow \frac{2}{5}\left(u + \frac{7}{10}\ln\left(u+\frac{9}{5}\right)\right) = x+c$$

② $(4x-y+7)\,dx = (2x+y-1)\,dy$

$\underbrace{\dfrac{dy}{dx}}_{y'} = \dfrac{4x-y+7}{2x+y-1}$ ⟶ حل) $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{4}{2} \neq \dfrac{b}{b'} = \dfrac{-1}{1}$

حالت (ب) (خطوط متقاطع) ⟵ یافتن نقطه تقاطع خطوط

$$\begin{cases} 4x-y+7=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$$

که پس از حل دستگاه، نقطه تقاطع $A\left|\begin{matrix} x_0=-1 \\ y_0=3 \end{matrix}\right.$ بدست می‌آید. اکنون با تعویض متغیرهای $\begin{cases} x = X+x_0 = X-1 \\ y = Y+y_0 = Y+3 \end{cases}$ داریم:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{4X-Y}{2X+Y} \qquad (*)$$

یک معادله همگن است که با تعویض متغیر $Y = vX$ داریم ⟵ $dY = X\,dv + v\,dX$ ⟵ در معادله قرار می‌دهیم:

$\dfrac{X\,dv+v\,dX}{dX} = \dfrac{4X-vX}{2X+vX} \rightarrow \dfrac{4-v}{2+v}$ ⟶ از طرفین وسطین ⟶ $(2+v)(X\,dv+v\,dX) = (4-v)\,dX$

که پس از ساده کردن عبارت بدست می‌آوریم

$$X(2+v)\,dv = (4-v-v(2+v))\,dX \Rightarrow X(v+2)\,dv = (-v^2-3v+4)\,dX$$ ⟶ تفکیک پذیر

$$\Rightarrow \int \frac{v+2}{-v^2-3v+4}\,dv = \int \frac{dX}{X} \Rightarrow -\int \frac{v+2}{v^2+3v-4}\,dv = \ln X + c$$

تجزیه کسرها: $\dfrac{2/5}{v+4} + \dfrac{3/5}{v-1}$

$$\Rightarrow -\int\left(\frac{2/5}{v+4} + \frac{3/5}{v-1}\right)dv = \ln X + c \Rightarrow -\left(\frac{2}{5}\ln(v+4) + \frac{3}{5}\ln(v-1)\right) = \ln X + c$$

تمرین ③ $y' = \dfrac{-x+2y-3}{2x-4y-3} \longrightarrow \dfrac{a}{a'} = \dfrac{-1}{2} = \dfrac{b}{b} \longrightarrow$ حالت موازی

تمرین ④ $y' = \dfrac{y+2}{x+y-1} \longrightarrow \dfrac{a}{a'} = \dfrac{0}{1} \neq \dfrac{b}{b'} = \dfrac{1}{1} \longrightarrow$ حالت خطوط متقاطع

⑤ $(x+4y-2)dy = (x+y-1)dx$

حل) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y-1}{x+4y-2} \longrightarrow \dfrac{a}{a'} = \dfrac{1}{1} \neq \dfrac{b}{b'} = \dfrac{1}{4} \longrightarrow$

حالت خطوط متقاطع ⟵ یافتن نقطهٔ تقاطع $A\Big|{x_0 \atop y_0}$ از حل دستگاه

$$\begin{cases} x+4y-2=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \longrightarrow A\Big|{x_0=\frac{2}{3} \atop y_0=\frac{1}{3}} \longrightarrow \begin{cases} x = X + x_0 = X + \frac{2}{3} \\ y = Y + y_0 = Y + \frac{1}{3} \end{cases}$$ با تعویض متغیرهای

به معادلهٔ زیر می‌رسیم: $\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{X+Y}{X+4Y} \quad (*)$ که یک معادلهٔ همگن برحسب متغیرهای

X و Y است که با تعویض متغیر $Y = vX$ داریم: ($dY = Xdv + vdX$):

(در معادلهٔ (*) جایگذاری):

$$\frac{Xdv+vdX}{dX} = \frac{X+vX}{X+4vX} \Longrightarrow \frac{Xdv+vdX}{dX} = \frac{1+v}{1+4v}$$

$$\Longrightarrow (Xdv+vdX)(1+4v) = (1+v)dX \longrightarrow$$ پس از انجام ضرب و دسته‌بندی جملات به دست می‌آید

$$\frac{1}{x}dx = \frac{1+4v}{1-4v^2}dv \Longrightarrow \int \frac{dx}{X} = \int \frac{1+4v}{1-4v^2}dv$$

تجزیه کسرها: $\dfrac{\frac{3}{2}}{1-2v} + \dfrac{-\frac{1}{2}}{1+2v}$

$$\Longrightarrow \ln X + c = \int \left(\frac{\frac{3}{2}}{1-2v} + \frac{-\frac{1}{2}}{1+2v}\right)dv \Longrightarrow \ln X + c = \frac{3}{2}\ln(1-2v) - \frac{1}{2}\ln(1+2v)$$

تمرین ⑥ $(x+y)dx + (2x+2y-1)dy = 0$

۳- معادلات کامل:

*تعریف (معادله کامل): معادله

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0 \qquad (1)$$

را کامل گوئیم هرگاه تابع دو متغیره‌ای مانند $f(x,y)$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y) \quad (*) \qquad , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y) \quad (**)$$

* از آنجایی که $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$ ، بنابراین طبق $(*)$ و $(**)$ و ① به دست می‌آوریم

$$df=0 \Longrightarrow f(x,y)=c$$

که همان جواب عمومی معادله (1) است که c ثابتی دلخواه است.

* برای یافتن ضابطه $f(x,y)$ ، ابتدا یکی از رابطه‌ها $(*)$ یا $(**)$ را در نظر گرفته و به کمک آن، یک ضابطه اولیه برای تابع f به دست می‌آوریم و سپس به کمک رابطه دیگر، ضابطه f را تکمیل می‌کنیم.

مثال: معادله $3x^2dx+2y\,dy=0$ کامل است. زیرا مثلاً با انتخاب $f(x,y)=x^3+y^2$ داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2=M(x,y) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y=N(x,y)$$

و بنابراین جواب عمومی معادله به شکل $f(x,y)=c$ یعنی $x^3+y^2=c$ است.

*قضیه: فرض کنید در معادله $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ ①، در یک ناحیه از صفحه مختصات مانند D، توابع $M(x,y)$ و $N(x,y)$ و مشتقات جزئی مرتبه اول آنها پیوسته باشند. در این صورت:

معادله (1) کامل است $\Longleftrightarrow$ $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$: برای هر (x,y) در ناحیه D

مثال: جواب عمومی معادله‌های زیر را به دست آورید:

① $\underbrace{(2y^2-4x+5)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{(4-2y+4xy)}_{N(x,y)}dy=0$

حل)

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4y=\frac{\partial N}{\partial x} \Longrightarrow$$ طبق قضیه معادله کامل است $\Longrightarrow$ جواب عمومی معادله به صورت $f(x,y)=c$ است

که برای یافتن ضابطه f ، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

چون معادله کامل است $\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y) \quad (*) \qquad , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y) \quad (**)$

اکنون با درنظر گرفتن (*) داریم:

$$\partial f = M(x,y)\,\partial x \Rightarrow \int \partial f = \int M(x,y)\,dx$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \int (2y^2 - 4x + 5)\,dx \Rightarrow f(x,y) = 2xy^2 - 2x^2 + 5x + g(y) \quad ①$$

حال برای یافتن $g(y)$ و تکمیل ضابطه f، با جایگذاری ① در (**) داریم

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \Rightarrow 4xy + g'(y) = 4 - 2y + 4xy \Rightarrow g'(y) = 4 - 2y$$

$$\Rightarrow g(y) = \int (4 - 2y)\,dy \Rightarrow g(y) = 4y - y^2 + c_1 \longrightarrow$$ c_1 ثابتی دلخواه است

بنابراین با جایگذاری $g(y)$ در ①:

$$f(x,y) = 2xy^2 - 2x^2 + 5x + 4y - y^2 + c_1$$

و به این ترتیب:

جواب عمومی معادله: $f(x,y) = c \longrightarrow 2xy^2 - 2x^2 + 5x + 4y - y^2 + c_1 = c$

$$\longrightarrow 2xy^2 - 2x^2 + 5x + 4y - y^2 = c - c_1$$

فرض $c - c_1 = c_2 \longrightarrow$ ثابتی دلخواه

* تذکر: چون در نهایت c_2 ثابتی دلخواه است پس جواب عمومی شکل قبل را می‌توان به شکل

$$2xy^2 - 2x^2 + 5x + 4y - y^2 = c$$

نوشت که c ثابتی دلخواه است. لذا می‌توان در مثال قبل، $g(y)$ را به صورت $g(y) = 4y - y^2$ در نظر گرفت و از نوشتن c_1 در آن صرف‌نظر کرد (زیرا در جواب عمومی معادله، تأثیری ندارد.)

② $\underbrace{(3x^2 + 4xy^2)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(2y - 3y^2 + 4x^2y)}_{N(x,y)}dy = 0$

حل)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 8xy = \frac{\partial N}{\partial x} \longrightarrow$$ معادله کامل است $\longrightarrow$ جواب عمومی معادله به صورت $f(x,y) = c$ است

که برای یافتن ضابطه $f(x,y)$ داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \quad (*) \qquad , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \quad (**)$$

از (*) $\longrightarrow f(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int (3x^2 + 4xy^2)\,dx = x^3 + 2x^2y^2 + g(y)$

حال f را در (***) جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \Longrightarrow 4x^2y + g'(y) = 2y - 3y^2 + 4x^2y \Longrightarrow g'(y) = 2y - 3y^2$$

$$\Longrightarrow g(y) = \int (2y - 3y^2)\,dy = y^2 - y^3 + c_1 \xrightarrow[c_1]{\text{با در نظر گرفتن}} \text{اختیار می‌کنیم } g(y) = y^2 - y^3$$

و بنابراین:

جواب عمومی معادله: $f(x,y) = c \rightsquigarrow x^3 + 2x^2y^2 + y^2 - y^3 = c$

تمرین ③ $e^y dx + (xe^y + 2y)\,dy = 0$

* عامل‌ها (فاکتورها) انتگرال ساز:

گاهی اوقات معادله

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (1)$$

کامل نیست ولی با ضرب تابعی مانند μ (که ممکن است تابعی بر حسب x یا بر حسب y یا هر دو باشد) در طرفین معادله (۱)، به یک معادله کامل برسیم. این تابع μ را یک عامل انتگرال ساز (فاکتور انتگرال ساز) برای معادله (۱) می‌نامیم.

مثال: معادله $\underset{M}{2y}\,dx + \underset{N}{x}\,dy = 0$ کامل نیست (چون $\frac{\partial M}{\partial y} = 2 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 1$)، ولی با ضرب تابع $\mu = x$ در طرفین این معادله داریم $\underset{M_1}{2xy}\,dx + \underset{N_1}{x^2}\,dy = 0$ که کامل است (چون $\frac{\partial M_1}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N_1}{\partial x}$).

* در این بخش، چهار نوع عامل انتگرال ساز برای معادله (۱) معرفی می‌کنیم که عبارتند از:

۱- اگر μ تابعی بر حسب x باشد (یعنی اگر $\mu = \mu(x)$) $\longrightarrow$ $\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$ (باید تابعی بر حسب x باشد)

۲- اگر μ تابعی بر حسب y باشد (یعنی اگر $\mu = \mu(y)$) $\longrightarrow$ $\mu(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy}$ (باید تابعی بر حسب y باشد)

۳- اگر $\mu = \mu(z)$ که $z = g(x,y)$ (روش کلی) $\longrightarrow$ $\mu(z) = e^{-\int \frac{M_y - N_x}{z_y M - z_x N} dz}$

۴- اگر $\mu = x^\alpha y^\beta$

که در آن $M_y = \frac{\partial M}{\partial y}$ و $N_x = \frac{\partial N}{\partial x}$

حال f را در (***) جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \Longrightarrow 4x^2y + g'(y) = 2y - 3y^2 + 4x^2y \Longrightarrow g'(y) = 2y - 3y^2$$

$$\Longrightarrow g(y) = \int (2y - 3y^2)\,dy = y^2 - y^3 + c_1 \xrightarrow[c_1]{\text{با درنظر نگرفتن}} \text{اختیار می‌کنیم } g(y) = y^2 - y^3$$

و بنابراین:

جواب عمومی معادله: $f(x,y) = c \rightsquigarrow \boxed{x^3 + 2x^2y^2 + y^2 - y^3 = c}$

تمرین ③ $e^y dx + (xe^y + 2y)\,dy = 0$

* عامل‌ها (فاکتورها) انتگرال ساز:

گاهی اوقات معادله

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (1)$$

کامل نیست ولی با ضرب تابعی مانند μ (که ممکن است تابعی برحسب x یا برحسب y یا هردو باشد) درطرفین معادله (1)، به یک معادله کامل برسیم. این تابع μ را یک عامل انتگرال ساز (فاکتور انتگرال ساز) برای معادله (1) می‌نامیم.

مثال: معادله $2y\,dx + x\,dy = 0$ کامل نیست (چون $\frac{\partial M}{\partial y} = 2 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 1$)، ولی با ضرب تابع $\mu = x$ درطرفین این معادله داریم $2xy\,dx + x^2\,dy = 0$ که کامل است (چون $\frac{\partial M_1}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N_1}{\partial x}$).

* در این بخش، چهار نوع عامل انتگرال ساز برای معادله (1) معرفی می‌کنیم که عبارتند از:

1- اگر μ تابعی برحسب x باشد (یعنی اگر $\mu = \mu(x)$) $\longleftarrow$ $\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$ — باید تابعی برحسب x باشد

2- اگر μ تابعی برحسب y باشد (یعنی اگر $\mu = \mu(y)$) $\longleftarrow$ $\mu(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy}$ — باید تابعی برحسب y باشد

3- اگر $\mu = \mu(z)$ که $z = g(x,y)$ (روش کلی) $\longleftarrow$ $\mu(z) = e^{-\int \frac{M_y - N_x}{z_y M - z_x N} dz}$

4- اگر $\mu = x^\alpha y^\beta$

که در آن $M_y = \frac{\partial M}{\partial y}$ و $N_x = \frac{\partial N}{\partial x}$

* **توضیحات:** اگر μ یک عامل انتگرال ساز معادله

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

باشد پس با ضرب μ در طرفین معادله ، معادله

$$\mu M(x,y)\,dx + \mu N(x,y)\,dy = 0$$

کامل خواهد بود یعنی

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mu_y}_{\text{یعنی } \frac{\partial \mu}{\partial y}} \cdot M + \underbrace{M_y}_{\text{یعنی } \frac{\partial M}{\partial y}} \cdot \mu = \underbrace{\mu_x}_{\text{یعنی } \frac{\partial \mu}{\partial x}} \cdot N + \underbrace{N_x}_{\text{یعنی } \frac{\partial N}{\partial x}} \cdot \mu$$

$$\Rightarrow (M_y - N_x)\mu = \mu_x \cdot N - \mu_y \cdot M \qquad (***)$$

اکنون:

۱- اگر $\mu = \mu(x)$:

$$\mu_y = \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0, \qquad \mu_x = \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}$$

در $(***)$ جایگذاری می‌کنیم:

$$(M_y - N_x)\mu = \frac{d\mu}{dx}\cdot N - 0 \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \int \frac{M_y - N_x}{N}\,dx = \underbrace{\int \frac{d\mu}{\mu}}_{\ln \mu}$$

$$\Rightarrow \mu = \mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}dx}$$

۲- اگر $\mu = \mu(y)$:

$$\mu_x = \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0, \qquad \mu_y = \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dy}$$

در $(***)$ جایگذاری می‌کنیم:

$$(M_y - N_x)\mu = 0 - \frac{d\mu}{dy}\cdot M \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \int \frac{M_y - N_x}{-M}\,dy = \int \frac{d\mu}{\mu}$$

$$\Rightarrow \mu = \mu(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M}dy}$$

مثال: ابتدا برای هر یک از معادلات زیر، یک عامل انتگرال ساز بیابید و سپس جواب عمومی معادله را بدست آورید:

$$① \quad \underbrace{(4xy + 3y^2 - x)}_{M}dx + \underbrace{(x^2 + 2xy)}_{N}dy = 0$$

حل)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x + 6y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 2y$$

$$\Rightarrow M_y - N_x = (4x + 6y) - (2x + 2y) = 2x + 4y$$

$$\Rightarrow \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2x+4y}{x^2+2xy} = \frac{2(x+2y)}{x(x+2y)} = \frac{2}{x} \longrightarrow$$ تابعی برحسب x

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$\mu(x)=x^2$ را در طرفین معادله ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \underbrace{(4x^3y + 3x^2y^2 - x^3)}_{M_1}dx + \underbrace{(x^4 + 2x^3y)}_{N_1}dy = 0$$

این معادله کامل است (چون $\frac{\partial M_1}{\partial y} = 4x^3 + 6x^2y = \frac{\partial N_1}{\partial x}$) و بنابراین جواب عمومی آن به صورت $f(x,y)=c$ است که برای یافتن تابع f داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M_1 \quad (*) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N_1 \quad (**)$$

$$\xrightarrow{\text{از } (*)} f(x,y) = \int M_1 dx = \int (4x^3y + 3x^2y^2 - x^3)dx = x^4y + x^3y^2 - \frac{x^4}{4} + g(y) \quad (1)$$

حال برای یافتن $g(y)$، با جایگذاری (1) در $(**)$ داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N_1 \Rightarrow x^4 + 2x^3y + g'(y) = x^4 + 2x^3y \Rightarrow g'(y) = 0 \longrightarrow$$

می‌توانیم $g(y)=0$ اختیار کنیم، در این ترتیب،

جواب عمومی معادله: $f(x,y)=c \longrightarrow x^4y + x^3y^2 - \frac{x^4}{4} = c$

(2) $(xy + y^2 + y)dx + (x^2 + 3xy + 2x)dy = 0$

حل) $M_y = \frac{\partial M}{\partial y} = x + 2y + 1 \quad , \quad N_x = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 3y + 2$

$$\Rightarrow M_y - N_x = (x+2y+1) - (2x+3y+2) = -x - y - 1$$

$$\Rightarrow \frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{-x-y-1}{-y(x+y+1)} = \frac{-(x+y+1)}{-y(x+y+1)} = \frac{1}{y} \longrightarrow$$ تابعی برحسب y

$$\Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M}dy} = e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{\ln y} = y$$

$\mu(y)=y$ را در طرفین معادله ضرب می‌کنیم.

$$\Rightarrow \underbrace{(xy^2+y^3+y^2)}_{M_1}dx + \underbrace{(x^2y+3xy^2+2xy)}_{N_1}dy = 0 \longrightarrow$$ یک معادله کامل است (چرا)

بنابراین: $f(x,y)=c$: جواب عمومی معادله

که باید یافتن تابع $f(x,y)$ ، از آنجا که

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M_1 \quad (*) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N_1 \quad (**)$$

$$\xrightarrow{\text{از } (*)} f(x,y) = \int M_1\,dx = \int (xy^2+y^3+y^2)\,dx = \frac{x^2y^2}{2} + xy^3 + xy^2 + g(y)$$

$$\xrightarrow{\text{از } (**)} \frac{\partial f}{\partial y} = N_1 \longrightarrow x^2y + 3xy^2 + 2xy + g'(y) = x^2y + 3xy^2 + 2xy$$

$$\Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = 0$$ اختیاری می‌گیریم

$\Rightarrow$ جواب عمومی : $f(x,y) = c \longrightarrow \boxed{\frac{x^2y^2}{2} + xy^3 + xy^2 = c}$

تمرین ③ $(\sin y + \cos y)\,dx + 2x\cos y\,dy = 0$

تمرین ④ $(x^4 \ln x - 2xy^3)\,dx + 3x^2y^2\,dy = 0$

تمرین ⑤ $(xy + y^2)\,dx - (x^2 + xy)\,dy = 0 \longrightarrow$ این هم با $\mu(x)$ می‌شود و هم با $\mu(y)$

۳- اگر $\mu = \mu(z)$ که $z = g(x,y)$:

$z \leftarrow$ در مسأله داده می‌شود

از نتیجه در بخش قبل بدست آوردیم داریم

$$\mu_x N - \mu_y M = (M_y - N_x)\mu \qquad (***)$$

از طرفی، طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای:

$$\mu_x = \frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz}\cdot z_x \ , \ \mu_y = \frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz}\cdot z_y$$

که با جایگذاری در $(***)$ بدست می‌آید

$$\frac{d\mu}{dz}\cdot z_x \cdot N - \frac{d\mu}{dz}\cdot z_y \cdot M = (M_y - N_x)\mu$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{dz}(z_x N - z_y M) = (M_y - N_x)\mu \xrightarrow{\text{تفکیک}} \int \underbrace{\frac{d\mu}{\mu}}_{\ln\mu} = \int \frac{(M_y - N_x)\,dz}{\underbrace{z_x N - z_y M}_{-(z_y M - z_x N)}}$$

$$\Rightarrow \mu = \mu(z) = e^{-\int \frac{(M_y - N_x)}{z_y M - z_x N}dz}$$

مثال: ابتدا یک عامل انتگرال‌ساز برای معادلهٔ زیر بیابید سپس جواب عمومی معادله را بدست آورید:

$$(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0 \ , \quad \mu = \mu(xy)$$

حل)

$$\text{ص} : z = xy \ \Rightarrow \ \begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases}$$

$$\mu(z) = e^{-\int \frac{(M_y - N_x)}{z_y M - z_x N}dz}$$

$$\frac{M_y - N_x}{z_y M - z_x N} = \frac{(1 - 2xy) - (1 + 2xy^2)}{x(y - xy^2) - y(x + x^2y^2)} = \frac{-2xy - 2xy^2}{\cancel{xy} - x^2y^2 - \cancel{xy} - x^2y^3} = \frac{-2xy(1+y)}{-x^2y^2(1+y)} = \frac{2}{xy} = \frac{2}{z}$$

$$\Rightarrow \mu(z) = e^{-\int \frac{2}{z}dz} = e^{-2\ln z} = z^{-2} = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{(xy)^2} = \frac{1}{x^2y^2}$$

در طرفین معادله ضرب:

$$\frac{1}{x^2y^2}(y - xy^2)dx + \frac{1}{x^2y^2}(x + x^2y^2)dy = \underbrace{\left(\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x}\right)}_{M_1}dx + \underbrace{\left(\frac{1}{xy^2} + 1\right)}_{N_1}dy = 0$$

$\Rightarrow$ کامل است (؟) بنابراین:

جواب عمومی: $f(x,y) = c$

که برای یافتن ضابطهٔ f داریم: $\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} = M_1}_{(*)} \ , \ \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} = N_1}_{(**)}$

$$\xrightarrow{(*) \text{ از}} f(x,y) = \int M_1\,dx = \int\left(\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x}\right)dx = -\frac{1}{xy} - \ln x + g(y)$$

$$\xrightarrow{(**) \text{ از}} \frac{\partial f}{\partial y} = N_1 \rightsquigarrow \frac{1}{xy^2} + g'(y) = \frac{1}{xy^2} + 1 \longrightarrow g'(y) = 1 \longrightarrow g(y) = y \text{ اختیار می‌کنیم}$$

$\Rightarrow$ جواب عمومی: $f(x,y) = c \rightsquigarrow -\frac{1}{xy} - \ln x + y = c$

۲/ل

مثال: $(2x^2+2y^2+x)dx+(x^2+y^2+y)dy=0 \quad , \quad z=x^2+y^2$

حل)

$z_x=2x, \quad z_y=2y$

$$\mu(z)=e^{-\int \boxed{\frac{M_y-N_x}{z_yM-z_xN}}dz}$$

$$\frac{M_y-N_x}{z_yM-z_xN}=\frac{4y-2x}{2y(2x^2+2y^2+x)-2x(x^2+y^2+y)}$$

$$=\frac{4y-2x}{4x^2y+4y^3+\cancel{2xy}-2x^3-2xy^2-\cancel{2xy}}=\frac{4y-2x}{2x^2(2y-x)+2y^2(2y-x)}$$

$$=\frac{2(2y-x)}{(2y-x)(2x^2+2y^2)}=\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \mu(z)=e^{-\int\frac{1}{z}dz}=e^{-\ln z}=z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{x^2+y^2} \longrightarrow$$ در طرفین معادله ضرب:

$$\underbrace{\left(\frac{2x^2+2y^2+x}{x^2+y^2}\right)}_{M_1}dx+\underbrace{\left(\frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}\right)}_{N_1}dy=0 \longrightarrow$$ یک معادله کامل (؟)

جواب عمومی: $f(x,y)=c$

بنابراین: برای یافتن f: $\quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}=M_1}_{(*)} \quad , \quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}=N_1}_{(**)}$

از $(*)$: $f(x,y)=\int M_1dx$

$$=\int\frac{2x^2+2y^2+x}{x^2+y^2}dx=\int\frac{2\cancel{(x^2+y^2)}dx}{\cancel{x^2+y^2}}+\int\frac{x}{x^2+y^2}dx=2x+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+g(y)$$

از $(**)$: $$\frac{\partial f}{\partial y}=N_1 \to \frac{1}{2}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)+g'(y)=\frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2} \Rightarrow \cancel{\frac{y}{x^2+y^2}}+g'(y)=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+\cancel{\frac{y}{x^2+y^2}}$$

$$\to g'(y)=1 \xrightarrow{\text{اختیاری}} g(y)=y$$

$\Rightarrow$ جواب عمومی: $f(x,y)=c \longrightarrow 2x+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+y=c$

* تمرین:

(۱) $(x^2+y^2-x)dx-ydy=0 \quad , \quad \mu=\mu(x^2+y^2)$

(۲) $(8y+4x^2y^4)dx+(8x+5x^3y^3)dy=0 \quad , \quad \mu=\mu(z)=z=xy$

(۳) $(4x^2y+2x+2y^2)dx+(2x^3+3xy+1)dy=0 \quad , \quad \mu=\mu(xy)$

(۴) $(3y^2-x)dx+(2y^3-6xy)dy=0 \quad , \quad \mu=\mu(x+y^2)$

ل۳

۴- اگر $\mu = x^\alpha y^\beta$:

در این حالت، ابتدا با ضرب $\mu = x^\alpha y^\beta$ در طرفین معادله و لحاظ کردن شرط کامل بودن، مقادیر α و β را به دست می‌آوریم، سپس با گذاشتن α و β در معادله جدید، به یک معادله کامل می‌رسیم که با حل آن آشنا هستیم.

مثال: ابتدا برای هر یک از معادلات زیر، عامل انتگرال‌سازی به صورت $\mu = x^\alpha y^\beta$ بیابید. سپس جواب عمومی معادله را به دست آورید.

① $(xy - 2y^2)dx + (3xy - x^2)dy = 0$

حل) ابتدا $\mu = x^\alpha y^\beta$ در طرفین معادله ضرب:

$$x^\alpha y^\beta (xy - 2y^2)dx + x^\alpha y^\beta (3xy - x^2)dy = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x^{\alpha+1}y^{\beta+1} - 2x^\alpha y^{\beta+2})}_{M_1}dx + \underbrace{(3x^{\alpha+1}y^{\beta+1} - x^{\alpha+2}y^\beta)}_{N_1}dy = 0 \quad (*)$$

چون معادله (*) می‌خواهیم کامل باشه پس داریم

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x} \Rightarrow \boxed{(\beta+1)}x^{\alpha+1}y^\beta \boxed{-2(\beta+2)}x^\alpha y^{\beta+1} = \boxed{3(\alpha+1)}x^\alpha y^{\beta+1} \boxed{-(\alpha+2)}x^{\alpha+1}y^\beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\beta+1 = -(\alpha+2)\\ -2(\beta+2) = 3(\alpha+1)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta = -3\\ -3\alpha - 2\beta = 7\end{cases} \to$$

با حل دستگاه: $\alpha = -1$ ، $\beta = -2$

در معادله (*) جایگذاری:

$$(y^{-1} - 2x^{-1})dx + (3y^{-1} - xy^{-2})dy = 0 \to$$

کامل است (؟)

پس: $f(x,y) = c$: جواب عمومی

که برای یافتن f:

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} = M_1}_{(*)} \quad , \quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} = N_1}_{(**)}$$

از (*): $f(x,y) = \int M_1 dx = \int (y^{-1} - 2x^{-1})dx = xy^{-1} - 2\ln x + g(y)$

از (**): $\frac{\partial f}{\partial y} = N_1 \to -\cancel{x}y^{-2} + g'(y) = 3y^{-1} - \cancel{x}y^{-2} \Rightarrow g'(y) = 3y^{-1} \to g(y) = \int 3y^{-1}dy$

$\to$ $g(y) = 3\ln y$ اختیاری ثابت

$\Rightarrow$ جواب عمومی: $f(x,y) = c \to \boxed{xy^{-1} - 2\ln x + 3\ln y = c}$

ص ۴

(۲) $y(2x^2+y^3)dx - x(2x^2-y^3)dy=0$

حل) ابتدا $\mu=x^\alpha y^\beta$ در معادله ضرب:

$$x^\alpha y^\beta(2x^2y+y^4)dx + x^\alpha y^\beta(-2x^3+xy^3)dy=0$$

$$\Rightarrow (\underbrace{2x^{\alpha+2}y^{\beta+1}+x^\alpha y^{\beta+4}}_{M_1})dx+(\underbrace{-2x^{\alpha+3}y^\beta+x^{\alpha+1}y^{\beta+3}}_{N_1})dy=0 \quad (*)$$

شرط کامل بودن: $\dfrac{\partial M_1}{\partial y}=\dfrac{\partial N_1}{\partial x}$

$$\Rightarrow \boxed{2(\beta+1)}x^{\alpha+2}y^\beta+\boxed{(\beta+4)}x^\alpha y^{\beta+3} = \boxed{-2(\alpha+3)}x^{\alpha+2}y^\beta+\boxed{(\alpha+1)}x^\alpha y^{\beta+3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(\beta+1)=-2(\alpha+3) \\ \beta+4=\alpha+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha+2\beta=-8 \\ -\alpha+\beta=-3 \end{cases}$$

پس از حل دستگاه: $\alpha=-\frac{1}{2}\,,\ \beta=-\frac{7}{2}$

در معادله $(*)$ قرار:

$$(\underbrace{2x^{3/2}y^{-5/2}+x^{-1/2}y^{1/2}}_{M_1})dx+(\underbrace{-2x^{5/2}y^{-7/2}+x^{1/2}y^{-1/2}}_{N_1})dy=0 \rightarrow$$

کامل است (؟) لذا: جواب عمومی: $f(x,y)=c$

که برای یافتن f داریم:

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}=M_1}_{(*)}\ ,\quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}=N_1}_{(**)}$$

از $(*)$: $f(x,y)=\int M_1dx=\int(2x^{3/2}y^{-5/2}+x^{-1/2}y^{1/2})dx=\dfrac{2x^{5/2}y^{-5/2}}{5/2}+\dfrac{x^{1/2}y^{1/2}}{1/2}+g(y)$

$$=\frac{4}{5}x^{5/2}y^{-5/2}+2x^{1/2}y^{1/2}+g(y)$$

از $(**)$: $\dfrac{\partial f}{\partial y}=N_1 \rightarrow \frac{4}{5}\left(\cancel{-\frac{5}{2}x^{5/2}y^{-7/2}}\right)+2\left(\cancel{\frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2}}\right)+g'(y)=\cancel{-2x^{5/2}y^{-7/2}}+\cancel{x^{1/2}y^{-1/2}}$

$\rightarrow g'(y)=0 \rightarrow$ اختیاری $g(y)=0$

$\Rightarrow$ جواب عمومی: $f(x,y)=c \rightarrow \boxed{\frac{4}{5}x^{5/2}y^{-5/2}+2x^{1/2}y^{1/2}=c}$

تمرین:

(۳) $y\,dx+(x-3x^3y^2)dy=0$

(۴) $y^2(1-x^2)dx+(x^3y+2x^2+xy)dy=0$

(۵) $(xy+y^2)dx-(x^2+xy)dy=0$

۴- معادلات مرتبه اول خطی:

به شکل کلی زیر هستند:

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (1)$$

که در آن $p(x)$ و $q(x)$ توابعی پیوسته هستند. معادله (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{dy}{dx} = q(x) - p(x)y \Longrightarrow \big(q(x) - p(x)y\big)dx - dy = 0$$

که چون $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-p(x) - 0}{-1} = p(x)$ ، لذا دارای عامل انتگرال‌ساز به صورت

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

است. با ضرب $\mu(x)$ در طرفین (۱) داریم

$$e^{\int p(x)dx}\, y' + p(x)\, e^{\int p(x)dx}\, y = q(x)\, e^{\int p(x)dx}$$

$$\Longrightarrow \left(e^{\int p(x)dx}\, y\right)' = q(x)\, e^{\int p(x)dx} \Longrightarrow e^{\int p(x)dx}\, y = \int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx + c$$

که با ضرب طرفین در $e^{-\int p(x)dx}$ جواب عمومی (۱) به صورت زیر خواهد بود:

$$y = y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx + c\right).$$

مثال: جواب عمومی هر یک از معادلات زیر را بدست آورید:

① $xy' + y = 5x^2$

حل) ابتدا طرفین بر ضریب y' تقسیم تا ضریب y' برابر ۱ شود

$$\longrightarrow y' \underbrace{+\frac{1}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{5x}_{q(x)}$$

بنابراین طبق فرمول بالا:

جواب عمومی: $y = y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx + c\right)$

$$\Longrightarrow y = \underbrace{e^{-\int \frac{1}{x}dx}}_{e^{-\ln x} = x^{-1} = \frac{1}{x}}\left(\int 5x \underbrace{e^{\int \frac{1}{x}dx}}_{e^{\ln x} = x} dx + c\right) = \frac{1}{x}\left(\int 5x^2 dx + c\right)$$

$$\Longrightarrow y = \frac{1}{x}\left(5\frac{x^3}{3} + c\right)$$

② $(x^5+3y)\,dx - x\,dy = 0$ → با عامل انتگرال ساز $\mu(x)$: روش دوم

حل) روش اول: بر dx تقسیم:

$$x^5+3y-x\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow x^5+3y-xy'=0 \xrightarrow[\text{تقسیم}]{\text{بر } -x} \frac{x^5}{-x}+\frac{3}{-x}y+y'=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{y'-\frac{3}{x}y}_{p(x)}=\underbrace{x^4}_{q(x)} \Rightarrow \text{جواب عمومی}: y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c\right)$$

$$\Rightarrow y=\underbrace{e^{-\int -\frac{3}{x}dx}}_{e^{3\ln x}=x^3}\left(\int x^4\underbrace{e^{\int -\frac{3}{x}dx}}_{e^{-3\ln x}=x^{-3}=\frac{1}{x^3}}dx+c\right)=x^3\left(\int x\,dx+c\right)=x^3\left(\frac{x^2}{2}+c\right)$$

$$\Rightarrow y=x^3\left(\frac{x^2}{2}+c\right)$$

تمرین:

③ $y'+y=\dfrac{1}{1+e^{2x}}$

④ $(x\sin x-y)\,dx-x\,dy=0$

⑤ $x^2(x^2-1)\dfrac{dy}{dx}+x(x^2+1)y=x^2-1$

* تذکر (نکته ۱): برخی معادلات به شکل خطی مرتبه اول بر حسب $\frac{dx}{dy}$ به صورت

$$\frac{dx}{dy}+p(y)x=q(y)$$

هستند که به طور مشابه جواب عمومی آن به صورت زیر است:

$$x=x(y)=e^{-\int p(y)dy}\left(\int q(y)e^{\int p(y)dy}dy+c\right)$$

مثال: مطلوبست جواب عمومی معادلات زیر:

① $y\,dx+(2xy-e^{-2y})\,dy=0$ → با عامل انتگرال ساز $\mu(y)$: روش دوم

حل) روش اول: تقسیم بر y:

$$dx+\frac{(2xy-e^{-2y})}{y}dy=0 \xrightarrow[\text{تقسیم}]{\text{بر } dy} \frac{dx}{dy}+2x-\frac{e^{-2y}}{y}=0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}\underbrace{+2}_{p(y)}x=\underbrace{\frac{e^{-2y}}{y}}_{q(y)}$$

$$\Rightarrow \text{جواب عمومی}: x=x(y)=e^{-\int p(y)dy}\left(\int q(y)e^{\int p(y)dy}dy+c\right)=\underbrace{e^{-\int 2dy}}_{e^{-2y}}\left(\int\frac{e^{-2y}}{y}\underbrace{e^{\int 2dy}}_{e^{2y}}dy+c\right)$$

$$\int e^{-2y}\frac{e^{2y}}{y}dy=\int\frac{dy}{y}=\ln y$$

اختیاری

$$\Rightarrow x=e^{-2y}(\ln y+c)$$

② $y'(x\sin y+\sin 2y)=1$

حل) $y'=\frac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow x\sin y+\sin 2y=\frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{dx}{dy}\underbrace{+(-\sin y)}_{p(y)}x=\underbrace{\sin 2y}_{q(y)}$$

$$\Rightarrow x=x(y)=\underbrace{e^{-\int -\sin y\,dy}}_{e^{-\cos y}}\left(\int\underbrace{\sin 2y}_{2\sin y\cos y}\underbrace{e^{\int -\sin y\,dy}}_{e^{\cos y}}dy+c\right)=e^{-\cos y}\left(2\int\sin y\cos y\,e^{\cos y}dy+c\right)$$

$$t=\cos y,\quad -\sin y\,dy=dt$$

$$\Rightarrow x=e^{-\cos y}\left(-2\int te^t dt+c\right)=e^{-\cos y}\left(-2(te^t-e^t)+c\right)=e^{-\cos y}\left(-2(\cos y\,e^{\cos y}-e^{\cos y})+c\right)$$

ص ۷

(۳) $(3\tan x - 2\cos y)\sec^2 x\,dx + \tan x\,\sin y\,dy = 0$

حل) قبلاً در بحث معادلات خطی، با استفاده از تغییر متغیرهای $u=\tan x$ و $v=\cos y$ به معادله‌ی زیر رسیدیم:

$$(3u-2v)\,du - u\,dv = 0$$

بر du تقسیم $\Rightarrow 3u - 2v - u\dfrac{dv}{du} = 0 \xrightarrow[\text{تقسیم}]{\text{بر } -u} \dfrac{3u}{-u} - \dfrac{2}{-u}v + \dfrac{dv}{du} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dv}{du} + \underbrace{\frac{2}{u}}_{p(u)}v = \underbrace{3}_{q(u)} \Rightarrow v = v(u) = e^{-\int p(u)du}\left(\int q(u)\, e^{\int p(u)du}\,du + c\right)$$

$$\Rightarrow v = \underbrace{e^{-\int \frac{2}{u}du}}_{e^{-2\ln u} = u^{-2}}\left(\int 3\,\underbrace{e^{\int \frac{2}{u}du}}_{e^{2\ln u} = u^{2}}\,du + c\right) = u^{-2}\left(\int 3u^2\,du + c\right)$$

$$\Rightarrow v = u^{-2}(u^3 + c) = u + cu^{-2}$$

$$\xrightarrow[v=\cos y]{u=\tan x} \cos y = \tan x + c(\tan x)^{-2}$$

تمرین:

(۴) $dx + (2x - y + 1)\,dy = 0$

(۵) $y\,dx + (3x - xy - 2)\,dy = 0$

نکته ۲: برخی معادلات را می‌توان با استفاده از تغییر متغیرهای مناسب به خطی مرتبه اول تبدیل کرد.

مثال: مطلوبست جواب عمومی معادلات زیر:

(۱) $y'\cos y + \sin y = e^{-x}$

حل) با تغییر متغیر $u = \sin y \to u' = y'\cos y \to$ در معادله قرار:

$\Rightarrow u' + u = e^{-x} \to \dfrac{du}{dx}$ خطی مرتبه اول برحسب : $p(x) = 1$ ، $q(x) = e^{-x}$

$$\Rightarrow u = u(x) = \underbrace{e^{-\int 1\,dx}}_{e^{-x}}\left(\int e^{-x}\,\underbrace{e^{\int 1\,dx}}_{e^{x}}\,dx + c\right) = e^{-x}(x + c), \quad \int dx = x$$

$$\Rightarrow u = e^{-x}(x + c) \xrightarrow{u=\sin y} \sin y = e^{-x}(x + c)$$

تمرین (۲) $e^{y}y' + e^{y} = 4\sin x \Rightarrow u' + u = 4\sin x \to$ خطی مرتبه اول $\to$ ادامه حل؟

یادآوری:

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + c$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + c$$

۵ـ معادلات مرتبه اول غیرخطی:

(الف) معادلات برنولی:

این معادلات به شکل کلی زیر هستند:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \qquad (1)$$

که در آن $p(x)$ و $q(x)$ توابعی پیوسته‌اند و n عددی حقیقی است و $n \neq 0, 1$.

(زیرا اگر $n=0$ ← معادله (۱) به شکل $y'+p(x)y=q(x)$ ← خطی مرتبه اول ← در بخش قبل بیان شد.

اگر $n=1$ ← معادله (۱) به شکل $y'+p(x)y=q(x)y$ ← $y'=(q(x)-p(x))y$ ← تفکیک‌پذیر قبلاً بیان شد.)

پس برای $n\neq 0,1$ معادله (۱) یک معادله برنولی نامیده می‌شود. با تعویض متغیر $u=y^{1-n}$ داریم:

$$u' = (1-n)y'y^{-n} \qquad (2)$$

اکنون معادله (۱) را بر y^n تقسیم که پس:

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{y}{y^n} = q(x) \Longrightarrow y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x) \qquad (3)$$

که با جایگذاری u و (۲) در (۳) داریم:

$$\frac{u'}{1-n} + p(x)u = q(x)$$

طرفین در $1-n$ ضرب ← $u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$ ← خطی مرتبه اول برحسب u' (یعنی $\frac{du}{dx}$) که با حل آن آشنا هستیم.

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را به دست آورید:

① $x\,dy + y(1-4x^6y^4)\,dx = 0$

حل: طرفین بر dx تقسیم: $x\frac{dy}{dx} + y(1-4x^6y^4)=0 \xrightarrow[\text{یعنی } x \text{ تقسیم تا ضریب } y' \text{ برابر ۱ شود}]{\text{طرفین بر ضریب } y'} y' + y\left(\frac{1}{x} - \frac{4x^6y^4}{x}\right) = 0$

$$\Longrightarrow y' + \frac{1}{x}y - 4x^5y^5 = 0 \Longrightarrow y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{p(x)}y = \underbrace{4x^5}_{q(x)}y^{\overset{n}{5}}$$

یک معادله برنولی با $n=5$ و برحسب $\frac{dy}{dx}$ ← با تعویض متغیر $u = y^{1-n} = y^{-4}$ داریم:

$$u'+(1-n)p(x)u = (1-n)q(x) \Longrightarrow u' - 4\left(\frac{1}{x}\right)u = -4(4x^5) \Longrightarrow u' - \frac{4}{x}u = -16x^5$$

← خطی مرتبه اول ← طبق فرمول ص ۵ جزوه:

$$u = u(x) = \underbrace{e^{-\int -\frac{4}{x}dx}}_{e^{4\ln x} = x^4}\left(\int -16x^5 \underbrace{e^{\int -\frac{4}{x}dx}}_{e^{-4\ln x} = x^{-4} = \frac{1}{x^4}}dx + c\right) = x^4\left(-16\int x\,dx + c\right) \Longrightarrow u = x^4\left(-16\frac{x^2}{2} + c\right)$$

✓✓ ?? ← $u = y^{-4}$

ص ۹

(۲) $y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3\cos(x^2)}{y}$

حل) $y' - \underbrace{\frac{1}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{\left(2x^3\cos(x^2)\right)}_{q(x)} y^{-1} \quad (-1 \to n)$

⟵ برنولی از نوع y' یعنی $\frac{dy}{dx}$ با $n=-1$

با تعویض متغیر $u = y^{1-n} = y^2$ داریم:

$$u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x) \longrightarrow u' + 2\left(-\frac{1}{x}\right)u = 2\left(2x^3\cos(x^2)\right)$$

$$\longrightarrow u' - \frac{2}{x}u = 4x^3\cos x^2 \longrightarrow u = u(x) = e^{-\int -\frac{2}{x}dx}\left(\int 4x^3\cos x^2\, e^{\int -\frac{2}{x}dx}\, dx + c\right)$$

خطی مرتبه اول

$e^{-2\ln x} = x^{-2}$ ، $e^{2\ln x} = x^2$ ، $4\int x\cos x^2\, dx$

$t \to 2x\,dx = dt$ ، $x\,dx = \frac{1}{2}dt$

$$\hookrightarrow u = x^2\left(4\int \frac{1}{2}\cos t\, dt + c\right) = x^2\left(2\sin(x^2) + c\right). \checkmark$$

$\frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}\sin x^2$

تمرین:

(۳) $xy' - \frac{y}{2\ln x} = y^2$

(۴) $dy + (4y - 8y^{-3})x\,dx = 0$

نکته: (برنولی معکوس) ممکن است بتوان یک معادله را به شکل برنولی برحسب $\frac{dx}{dy}$ به صورت زیر نوشت:

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y)x^n$$

که مشابه قبل، با تعویض متغیر $u = x^{1-n}$ به خطی مرتبه اول زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{du}{dy} + (1-n)p(y)u = (1-n)q(x)$$

که با حل آن آشنا هستیم.

مثال: مطلوب است جواب عمومی معادلات زیر:

(۱) $x\underbrace{y'}_{\frac{dy}{dx}}(x - 1 + xe^y) = 1$

حل) وارون نویسی: $x(x-1+xe^y) = \frac{dx}{dy} \Rightarrow x^2 - x + x^2e^y = \frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{dx}{dy} + x = \underbrace{(1+e^y)}_{q(y)}x^2 \quad (2 \to n)$

$p(y) = 1$

برنولی از نوع $\frac{dx}{dy}$ (برنولی معکوس) با $n=2$ ⟵ با تعویض متغیر $u = x^{1-n} = x^{-1}$ داریم:

$$\frac{du}{dy} + (1-n)p(y)u = (1-n)q(y) \longrightarrow \frac{du}{dy} - 1(1)u = -(1+e^y) \longrightarrow \frac{du}{dy} - u = -(1+e^y)$$

خطی مرتبه اول برحسب $\frac{du}{dy}$

$$u = u(y) = e^{-\int -1\,dy}\left(-\int (1+e^y)\, e^{\int -1\,dy}\, dy + c\right)$$

e^y ، e^{-y}

$$\Longrightarrow u = e^y\left(-\int (e^{-y}+1)\,dy + c\right) = e^y\left(+e^{-y} - y + c\right). \checkmark$$

(۲) $xy' + y = 2x^2 y y' \ln y$

حل) $(x - 2x^2 y \ln y)\, y' = -y \xrightarrow[\text{و تقسیم بر } -y]{\text{طرفین وسطین}} \frac{x}{-y} - \frac{2x^2 y \ln y}{-y} = \frac{dx}{dy}$

$y' = \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy} + \underbrace{\frac{1}{y}}_{p(y)} x = \underbrace{(2\ln y)}_{q(y)} x^{2}$ ، $2 \to n$ $\longrightarrow$ برنولی برحسب $\frac{dx}{dy}$ یا (برنولی معکوس)

$n=2$ ، با تعویض متغیر $u = x^{1-n} = x^{-1}$ داریم:

$\frac{du}{dy} + (1-n)p(y)u = (1-n)q(y) \longrightarrow \frac{du}{dy} - \frac{1}{y}u = -2\ln y \longrightarrow$ خطی مرتبه اول

$\Rightarrow u = u(y) = e^{-\int -\frac{1}{y}dy}\left(\int -2\ln y\, e^{\int -\frac{1}{y}dy}\, dy + c\right) = y\left(-2\int \frac{\ln y\, dy}{y} + c\right)$

$e^{\ln y} = y$ ، $e^{-\ln y} = y^{-1} = \frac{1}{y}$ ، $t \to \frac{dy}{y} = dt$ ، $\int t\,dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\ln y)^2}{2}$

$\Longrightarrow u = y\left(-2\left(\frac{(\ln y)^2}{2}\right) + c\right) \longrightarrow \boxed{u = y\left(-(\ln y)^2 + c\right)}$ ✓ $\xrightarrow{u = x^{-1}}$?? ✓✓

تمرین:

(۳) $y\,dx + x(1 - 3x^2y^2)\,dy = 0$

(۴) $y' x^3 \sin y + 2y = xy'$

(۵) $y' = \frac{2xy}{x^2 - 3y^2 - 3}$ $\longrightarrow$ هم با برنولی معکوس شود هم با $\mu(y) = y^{-2}$ حل شود!

(ب) معادله ریکاتی:

این معادله به شکل

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x) \qquad (1)$$

است که $p(x)$ و $q(x)$ و $r(x)$ پیوسته‌اند. اگر $y_1 = u(x)$ یک جواب از معادله (۱) باشد (در صورت سوال $u(x)$ داده می‌شود!)

آنگاه جواب عمومی معادله ریکاتی (۱) به صورت

$$y = u(x) + \frac{1}{v(x)} \qquad (2)$$

است که $v(x)$ جواب عمومی معادله خطی مرتبه اول زیر است:

$$v' - (p(x) + 2q(x)u(x))v = q(x)$$

تذکر: این معادله با جاگذاری (۲) در (۱) بدست آمده است.

مثال (۱) اگر $y_1 = x$ جوابی از معادله $y' + (2x-1)y - y^2 = x^2 - x + 1$ باشد، جواب عمومی معادله را بدست آورید:

حل) این همان $u(x)$ است. $u(x) = x$. یک معادله ریکاتی با

$p(x) = 2x - 1$

$q(x) = -1$

$r(x) = x^2 - x + 1$

است.

جواب عمومی معادله به صورت $y = u(x) + \frac{1}{v(x)} = x + \frac{1}{v(x)}$ (*) است که برای یافتن $v(x)$:

$v' - (p(x) + 2q(x)u(x))v = q(x) \longrightarrow v' - (\cancel{2x} - 1 + 2\cancel{(-1)}(x))v = -1$

صفحه ۱۱

$\Rightarrow v' + v = -1$ خطی مرتبه اول $\rightarrow v = v(x) = e^{-\int 1 dx}\left(\int -1\, e^{\int 1 dx} dx + c\right)$

تذکر: البته با روش تفکیک پذیر هم حل می‌شود.

$\Rightarrow v = e^{-x}\left(-e^{x} + c\right) \rightarrow v(x) = -1 + c\,e^{-x}$

در (*) جایگذاری:

$\Rightarrow$ جواب عمومی: $y = x + \dfrac{1}{v(x)} = x + \dfrac{1}{-1 + c\,e^{-x}}$

(۲) $y' = x^{3}(y - x)^{2} + \dfrac{y}{x}, \quad y_1 = x$

حل) $y' = x^{3}(y^{2} - 2xy + x^{2}) + \dfrac{y}{x} \rightarrow y' = x^{3}y^{2} - 2x^{4}y + x^{5} + \dfrac{y}{x}$

$\left(-2x^{4} + \dfrac{1}{x}\right) y$

$\rightarrow \underbrace{y' - \left(-2x^{4} + \dfrac{1}{x}\right)}_{p(x)} y \underbrace{- x^{3}}_{q(x)} y^{2} = \underbrace{x^{5}}_{r(x)}$

یک جواب خصوصی با $u(x) = x$

جواب عمومی: $y(x) = u(x) + \dfrac{1}{v(x)} = x + \dfrac{1}{v(x)}$ (*)

که برای یافتن $v(x)$:

$v' - \left(p(x) + 2q(x)u(x)\right) v = q(x) \rightarrow v' - \left(\cancel{-2x^{4}} + \dfrac{1}{x} + \cancel{2(-x^{3})(x)}\right) v = -x^{3}$

$\Rightarrow v' + \dfrac{1}{x} v = -x^{3}$ خطی مرتبه اول $\rightarrow v = v(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx}\left(\int -x^{3} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + c\right)$

$e^{-\ln x} = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$, $\quad e^{\ln x} = x$

$\Rightarrow v(x) = \dfrac{1}{x}\left(-\int x^{4} dx + c\right) = \dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{x^{5}}{5} + c\right)$

در (*) قرار می‌دهیم:

$\rightarrow$ جواب عمومی: $y = x + \dfrac{1}{v(x)} = x + \dfrac{1}{\frac{1}{x}\left(-\frac{x^{5}}{5} + c\right)}$

تمرین:

(۳) $y' = 1 + x^{2} - 2xy + y^{2}, \quad y_1 = x$

(۴) $y' = x^{2} + \dfrac{2y}{x} - \dfrac{y^{2}}{x^{2}}, \quad y_1 = -x^{2}$

(۵) $y' + e^{x} = e^{-x}y^{2} + y, \quad y_1 = e^{x}$

(پایان فصل ۲)