جلسه ۱۲

* فصل ۳: معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

بخش ۱: معادلات قابل تبدیل به معادلات مرتبه اول:

در این بخش، دو دسته از معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ها بالاتر را مطالعه می‌کنیم که با یک تغییر متغیر ساده به معادلات مرتبه اول تبدیل می‌شوند و لذا با روش‌های معادلات مرتبه اول می‌توانیم جواب عمومی آنها را بدست آوریم. این دو دسته عبارتند از:

(الف) معادلات فاقد y به شکل $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ ؛ با تغییر متغیر $u = y^{(n-1)}$ آنگاه: $u' = y^{(n)}$

مشتق مرتبه $n-1$ام y — مشتق مرتبه nام y

(ب) معادلات فاقد x به شکل $G(y, y', y'') = 0$ ؛ با تغییر متغیر $u = y'$ ، $y'' = u\frac{du}{dy}$

اکنون تشریح حل (الف) و (ب):

* **تشریح (الف):** معادلات فاقد y به شکل $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ $(*)$ هستند که با تغییر متغیر $u = y^{(n-1)}$ داریم:

شامل دو مشتق متوالی y در معادله

یعنی مشتق مرتبه کوچکتر

$$u = y^{(n-1)} \longrightarrow u' = \underset{\text{نسبت به } x}{\text{مشتق}}\, y^{(n-1)} = \text{مشتق } n\text{ام } y = y^{(n)} \longrightarrow \text{در } (*) \text{ جایگذاری:}$$

$F(x, u, u') = 0 \longrightarrow$ به یک معادله مرتبه اول می‌رسیم که با حل آن کار تمام است.

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید:

① $xy''' - y'' = 0$

حل) معادله به شکل $F(x, y'', y''') = 0$ است (یعنی معادله شامل x و y'' و y''') و معادله از نوع فاقد y است (یعنی در معادله نیز y نداریم). لذا با تغییر متغیر $u = y''$ داریم $u' = y'''$ که با جایگذاری در معادله داریم:

دو مشتق متوالی y یعنی y'' و y'''

$$xu' - u = 0 \xrightarrow[\text{(البته تفکیک‌پذیر)}]{} \text{مرتبه اول} \longrightarrow xu' = u \longrightarrow x\frac{du}{dx} = u$$

$$\xrightarrow{\text{تفکیک}} \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} \longrightarrow \ln u = \ln x + c$$

تذکر ۱: برای هر عدد حقیقی مانند c، عددی حقیقی مانند c_1 وجود دارد که $c = \ln c_1$

$$\Longrightarrow \ln u = \ln x + \ln c_1 \longrightarrow \ln u = \ln(xc_1) \longrightarrow u = c_1 x$$

تذکر ۲: این رابطه بین u و x یعنی y'' و x است و باید رابطه بین y و x را بیابیم!

$$\xrightarrow{u = y''} y'' = c_1 x \xrightarrow{\text{انتگرال}} \int y''\,dx = \int c_1 x\,dx \longrightarrow y' = c_1\frac{x^2}{2} + c_2$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} \int y'\,dx = \int \left(c_1\frac{x^2}{2} + c_2\right)dx \longrightarrow y = c_1\frac{x^3}{6} + c_2 x + c_3$$

رابطه بین x و y که همان جواب عمومی معادله است.

تمرین

② $xy'' + y' = x$

③ $xy'' + y' = 4x^2 + 3x$

④ $(1+x^2)y'' + 2xy' = \dfrac{1}{1+x^2}$

حل) معادله فاقد y و به شکل

$F(x, y', y'') = 0$

با تعویض متغیر $u = y' \longrightarrow u' = y'' \longrightarrow$ در معادله قرار می‌دهیم:

$$(1+x^2)u' + 2xu = \frac{1}{1+x^2} \longrightarrow \text{یک معادله مرتبه اول خطی}$$

$$\xrightarrow{\text{بر } 1+x^2 \text{ تقسیم}} u' + \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{p(x)} u = \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^2}}_{q(x)} \Longrightarrow u = u(x) = e^{-\int \frac{2x\,dx}{1+x^2}} \left(\int \frac{1}{(1+x^2)^2} e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} dx + c_1 \right)$$

$e^{-\ln(1+x^2)} = (1+x^2)^{-1} = \dfrac{1}{1+x^2}$

$e^{\int \frac{dt}{t}} = e^{\ln t} = t = 1+x^2$

$$\longrightarrow u = \frac{1}{1+x^2}\left(\int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} dx + c_1 \right) = \frac{1}{1+x^2}\operatorname{Arctan}x + \frac{c_1}{1+x^2}$$

$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arctan}x$

$$\xrightarrow{u = y'} y' = \frac{1}{1+x^2}\operatorname{Arctan}x + \frac{c_1}{1+x^2} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \int y'dx = \int \frac{\operatorname{Arctan}x}{1+x^2}dx + \int \frac{c_1}{1+x^2}dx$$

$\int t\,dt = \dfrac{t^2}{2} = \dfrac{(\operatorname{Arctan}x)^2}{2}$, $c_1 \operatorname{Arctan}x + c_2$

$$\longrightarrow y = \frac{(\operatorname{Arctan}x)^2}{2} + c_1 \operatorname{Arctan}x + c_2$$

تمرین ⑤ $y'' = \dfrac{y'}{x}\left(1 + \ln\left(\dfrac{y'}{x}\right)\right)$

تشریح (ب): معادلات فاقد x به شکل $G(y, y', y'') = 0$ (مشتقات اول و دوم y) هستند. کردشبیه به حالت (الف) با تعویض متغیر $u = y'$ (مشتق مرتبه کمتر) داریم (چون در معادله x نداریم لذا در اینجا هم y'' را بر حسب y می‌نویسیم که در معادله x ظاهر نشود!)

$$y'' = u' = \frac{du}{dx} \underset{\text{قاعده زنجیره‌ای در مشتق}}{=} \frac{du}{dy} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y' = u \text{ همان}} = u\frac{du}{dy}$$

که با جایگذاری در معادله به معادله $G\left(y, u, u\dfrac{du}{dy}\right) = 0$ می‌رسیم که یک معادله مرتبه اول است و با حل آن آشناییم.

مثال ۸: مطلوبست جواب عمومی معادلات زیر:

① $yy''+(y')^2=0$

حل) معادله به صورت $G(y,y',y'')=0$ → فاقد x به فرم (ب) → با تعویض متغیر $u=y'$ داریم

$$y''=u\frac{du}{dy}$$

در معادله قرار می‌دهیم:

$$y\left(u\frac{du}{dy}\right)+u^2=0 \longrightarrow \text{مرتبه اول تفکیک‌پذیر}$$

$$\Rightarrow yu\frac{du}{dy}=-u^2 \xrightarrow{\text{تفکیک}} \int\frac{u\,du}{u^2}=-\int\frac{dy}{y} \longrightarrow \int\frac{du}{u}=-\int\frac{dy}{y}$$

$$\longrightarrow \ln u=-\ln y+c \quad (c \to \ln c_1) \Rightarrow \ln u=-\ln y+\ln c_1 \Rightarrow \ln u=\ln\left(\frac{c_1}{y}\right)$$

$$\longrightarrow u=\frac{c_1}{y} \xrightarrow{u=y'} y'=\frac{c_1}{y} \Longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{c_1}{y} \xrightarrow{\text{تفکیک}} \int y\,dy=\int c_1\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{2}=c_1x+c_2} \longrightarrow$$

رابطه بین x و y، نامعین جواب عمومی معادله

② $yy''+(y')^2-(y')^3\ln y=0$

حل) معادله به صورت $G(y,y',y'')=0$ فاقد x → تعویض متغیر $u=y' \longrightarrow y''=u\frac{du}{dy} \longrightarrow$ در معادله قرار می‌دهیم

$$\Longrightarrow yu\frac{du}{dy}+u^2-u^3\ln y=0 \xrightarrow[\text{تنها شدن } \frac{du}{dy}]{\text{طرفین بر } yu} \frac{du}{dy}+\frac{u^2}{yu}-\frac{u^3\ln y}{yu}=0$$

$$-\frac{\ln y}{y}u^2$$

$$\Longrightarrow \frac{du}{dy}+\underbrace{\frac{1}{y}}_{P(y)}u=\underbrace{\frac{\ln y}{y}}_{q(y)}u^{2\,(\to n)} \longrightarrow \frac{du}{dy} \text{ برنولی برحسب}$$

با $n=2$ → با تعویض متغیر $v=u^{1-n}=u^{-1}$ داریم:

$$\frac{dv}{dy}+(1-n)P(y)v=(1-n)q(y)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dy}-\frac{1}{y}v=-\frac{\ln y}{y} \xrightarrow{\text{مرتبه اول خطی}} v=v(y)=e^{-\int-\frac{1}{y}dy}\left(\int-\frac{\ln y}{y}e^{\int-\frac{1}{y}dy}dy+c_1\right)$$

$e^{-\ln y}=\frac{1}{y}$ ، $e^{\ln y}=y$

$$-\int\frac{\ln y}{y^2}dy \xrightarrow{\text{با جزء به جزء}} \frac{\ln y}{y}+\frac{1}{y}$$

$$\begin{cases} u_1=\ln y \\ dv_1=\frac{dy}{y^2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow v=y\left(\frac{\ln y}{y}+\frac{1}{y}+c_1\right)=\ln y+1+c_1y$$

$$\xrightarrow{v=u^{-1}=\frac{1}{u}=\frac{1}{y'}} \frac{1}{y'}=\ln y+1+c_1y \longrightarrow \frac{dx}{dy}=\ln y+1+c_1y \qquad (y'\to dy/dx)$$

$$\xrightarrow{\text{تفکیک متغیر}} \int dx=\int(\ln y+1+c_1y)dy \Longrightarrow x=\underbrace{\int\ln y\,dy}_{y\ln y-\cancel{y}}+\underbrace{\int dy}_{\cancel{y}}+\int c_1y\,dy \Longrightarrow \boxed{x=y\ln y+\frac{c_1y^2}{2}+c_2}$$

تمرین ③ $y''=y'(y'+y)$ ، $y(0)=0$ ، $y'(0)=-1$

تذکر: در لابلای حل این مثال، این شرایط استفاده می‌شود!

بخش ۲ : معادلات خطی مرتبه دوم :

این معادلات به شکل کلی زیر هستند:

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x) \qquad (1)$$

که در آن ضریب $a_2(x)$، تابع ثابت صفر نیست. با تقسیم طرفین (۱) بر $a_2(x)$ داریم

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \qquad (2)$$

که در آن، $p(x)=\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ و $q(x)=\frac{a_0(x)}{a_2(x)}$. مقادیری از x که به ازای آنها $a_2(x)=0$، نقاط تکین معادله (۱) نامیده می‌شوند. اگر در معادله (۲)، $f(x)\equiv 0$ (یعنی f تابع ثابت صفر باشد)، آنگاه معادله

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (3)$$

همگن نامیده می‌شود و اگر $f(x)$ تابع ثابت صفر نباشد، معادله را غیرهمگن می‌نامیم.

تذکر: در قضیه‌های زیر فرض می‌کنیم توابع $f(x)$، $p(x)$ و $q(x)$ در یک بازه I، پیوسته‌اند.

* قضیه ۱: فرض کنید توابع $p(x)$، $q(x)$ و $f(x)$ در یک بازه I پیوسته‌اند. فرض کنید x_0 نقطه‌ای در I باشد و y_0 و z_0 دو عدد حقیقی باشند. آنگاه مسئله مقدار اولیه

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \quad \text{و} \quad y(x_0)=y_0 \ , \ y'(x_0)=z_0$$

دارای یک جواب منحصربفرد است و این جواب، بر تمام بازه I تعریف می‌شود.

* قضیه ۲: اگر $y_g(x,c_1,c_2)$ جواب عمومی معادله همگن (۳) و $y_p(x)$ یک جواب خصوصی معادله غیرهمگن (۲) باشد آنگاه جواب عمومی معادله غیرهمگن (۲) به صورت زیر است:

$$y(x)=y_g(x,c_1,c_2)+y_p(x)$$

* قضیه ۳: اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب معادله همگن (۳) باشند آنگاه

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

نیز جوابی از (۳) است که در آن، c_1 و c_2 اعداد ثابت دلخواهی هستند.

* تعریف (توابع وابسته و مستقل خطی): فرض کنید دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در بازه $[a,b]$ تعریف شده باشند. اگر عدد ثابتی مانند K وجود داشته باشد که برای هر x در $[a,b]$ داشته باشیم $f(x)=Kg(x)$، در این صورت می‌گوییم دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در بازه $[a,b]$ نامستقل خطی (وابسته خطی) هستند و در غیر اینصورت آنها را در بازه $[a,b]$، مستقل خطی می‌نامیم.

یعنی به نوعی: $\frac{f(x)}{g(x)}=K=$ عدد ثابت

مثال: دو تابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=5\sin x$ وابسته خطی‌اند زیرا: $f(x)=\frac{1}{5}g(x)$.

ولی دو تابع $f(x)=e^{2x}$ و $g(x)=xe^{2x}$ مستقل خطی‌اند. زیرا: $\frac{f(x)}{g(x)}=x$ و عدد ثابتی نمی‌شود.

*تعریف (رونسکین): فرض کنید $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب معادله همگن (۳) ص ۱۵ باشند. رونسکین دو تابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ که آنرا با $W(y_1,y_2)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)$$

مثال: رونسکین دو تابع $y_1(x)=e^{3x}$ و $y_2(x)=e^{5x}$ را بیابید.

حل)

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{3x} & e^{5x} \\ 3e^{3x} & 5e^{5x}\end{vmatrix}=5e^{8x}-3e^{8x}=2e^{8x}$$

مثال: رونسکین دو تابع $y_1(x)=\sin 2x$ و $y_2(x)=-3\sin 2x$ را بیابید.

حل)

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sin 2x & -3\sin 2x \\ 2\cos 2x & -6\cos 2x\end{vmatrix}=-6\sin 2x\cos 2x+6\sin 2x\cos 2x=0$$

*قضیه ۴: فرض کنید در معادله همگن (۳) ص ۱۵، توابع $p(x)$ و $q(x)$ بر یک بازه I، پیوسته و $y_1(x)$ و $y_2(x)$ نیز دو جواب معادله (۳) باشند. آنگاه:

به ازای هر x در I، $W(y_1,y_2)\neq 0$ $\Longleftrightarrow$ به ازای xای در I، $W(y_1,y_2)\neq 0$

*قضیه ۵: اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جواب‌های معادله همگن (۳) در بازه $[a,b]$ باشند آنگاه:

$W(y_1,y_2)\neq 0$ $\Longleftrightarrow$ دو جواب $y_1(x)$ و $y_2(x)$ در بازه $[a,b]$ مستقل خطی اند

*قضیه ۶: اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جواب‌های مستقل خطی معادله همگن (۳) ص ۱۵ در بازه $[a,b]$ باشند آنگاه جواب عمومی معادله همگن (۳) به صورت زیر است

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

که c_1 و c_2 دو عدد ثابت دلخواه هستند.

*قضیه ۷ (اصل برهم‌نهی جواب‌ها): اگر $y_p(x)$ جواب معادله $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$ و $\tilde{y}_p(x)$ جواب معادله $y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$ باشند آنگاه $y(x)=y_p(x)+\tilde{y}_p(x)$ جواب معادله

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$$

است.

* استفاده از یک جواب برای یافتن جواب دیگر (روش کاهش مرتبه یا فرمول آبل):

فرض کنید $y_1(x)$ جوابی از معادله خطی مرتبه دوم همگن

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (1)$$

باشد. می‌خواهیم جواب دیگری از معادله (۱) را به دست آوریم (مانند $y_2(x)$) به طوری که $y_1(x)$ و $y_2(x)$ مستقل خطی باشند.
برای این کار فرض می‌کنیم

$$y_2(x)=y_1(x)v(x) \qquad (2)$$

برای یافتن $v_2(x)$، با جایگذاری (۲) در (۱) به دست می‌آوریم

$$(y_1v)''+p(x)(y_1v)'+q(x)(y_1v)=0$$

$$\Rightarrow y_1v''+(2y_1'+p(x)y_1)v'+\underbrace{(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1)}_{=0}v=0$$

چون y_1 جوابی از (۱) است

$$\Rightarrow y_1v''+(2y_1'+p(x)y_1)v'=0$$

اکنون با تعریف متغیر $W=v'$ به دست می‌آوریم

$$y_1\underbrace{W'}_{\frac{dW}{dx}}+(2y_1'+p(x)y_1)W=0$$

مرتبه اول (تفکیک‌پذیر)

$$\xRightarrow{\text{تفکیک}} \int\frac{dW}{W}=-\int\left(\frac{2y_1'}{y_1}+\frac{p(x)y_1}{y_1}\right)dx$$

$$\Rightarrow \ln W=-\int\frac{2y_1'}{y_1}dx-\int p(x)dx \Rightarrow \ln W=-2\ln y_1-\int p(x)dx$$

$$\Rightarrow W=e^{-2\ln y_1-\int p(x)dx}=e^{-2\ln y_1}e^{-\int p(x)dx}=y_1^{-2}e^{-\int p(x)dx}\Rightarrow W=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}$$

$$\xRightarrow{W=v'} v'=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}\Rightarrow v=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx$$

در (۲) جایگذاری

$$\Rightarrow \boxed{y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx}$$

(فرمول آبل)

مثال: جواب عمومی هر یک از معادلات زیر را به دست آورید:

① $x^2y''-xy'+y=0,\ x>0$ و $y_1(x)=x$

حل) یک جواب از معادله مرتبه دوم همگن فوق یعنی $y_1=x$ داده شده است. ابتدا جواب دیگر یعنی $y_2(x)$ را با استفاده از فرمول آبل بالا به دست می‌آوریم و سپس جواب عمومی معادله فوق طبق صفحه ۶ یا ص ۱۶ به شکل زیر خواهد بود:

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

که c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواهی‌اند. برای یافتن $y_2(x)$ طبق فرمول آبل داریم:

فرمول آبل : $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx$

توجه: برای یافتن $p(x)$ توجه کنیم که ضریب y'' در معادله باید برابر ۱ باشد پس ابتدا طرفین معادله را بر ضریب y'' تقسیم می‌کنیم:

بر x^2 تقسیم

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$$

$$-\frac{1}{x} \to p(x) \qquad \frac{1}{x^2} \to q(x)$$

$$\Rightarrow y_2(x) = x\int \frac{1}{x^2} e^{-\int -\frac{1}{x}dx} dx$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\Rightarrow y_2(x) = x\int \frac{x\,dx}{x^2} = x\int \frac{dx}{x} = x\ln x$$

مستقل خطی با $y_1 = x$ است

بنابراین طبق قضیه ۶ ص ۱۶ :

جواب عمومی معادله مرتبه دوم خطی همگن : $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 x + c_2 x\ln x$

تمرین ۲ $\quad xy'' - y' + 4x^3 y = 0 \quad , \quad x > 0 \quad , \quad y_1 = \sin(x^2)$

مثال ۳: اگر $y_1 = e^{mx}$ جوابی از معادله همگن $xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$ باشد، جواب عمومی معادله را بدست آورید.

حل) ابتدا مقدار m در y_1 را پیدا می‌کنیم: چون y_1 جوابی از معادله است پس در آن صدق می‌کند. با جایگذاری $y_1'' = m^2 e^{mx}$ و $y_1' = me^{mx}$ و $y = e^{mx}$ در معادله داریم

$$x(m^2 e^{mx}) - 2(x+1)(me^{mx}) + (x+2)e^{mx} = 0$$

طرفین بر e^{mx} تقسیم

$$\Rightarrow m^2 x - 2(x+1)m + (x+2) = 0 \Rightarrow m^2 x - 2mx - 2m + x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (m^2 - 2m + 1)x + (-2m + 2) = 0$$

چون به ازای هر x این برابر صفر است پس باید:

$$\begin{cases} m^2 - 2m + 1 = 0 \\ -2m + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} (m-1)^2 = 0 \\ -2m = -2 \end{cases}$$

mهای مشترک، قابل قبول : $m = 1 \to y_1 = e^x$

اکنون y_2 را با استفاده از فرمول آبل می‌یابیم:

$$y_2 = y_1\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx$$

$$p(x) = \frac{-2(x+1)}{x} = \frac{-2x-2}{x}$$

$$e^{-\int \frac{-2x-2}{x}dx} = e^{\int \frac{2x+2}{x}dx} = e^{\int (2 + \frac{2}{x})dx} = e^{2x + 2\ln x} = e^{2x} e^{2\ln x} = e^{2x} x^2 = x^2 e^{2x}$$

$$\Rightarrow y_2 = e^x \int \frac{x^2 e^{2x}}{(e^x)^2} dx = e^x \int \frac{x^2 \cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}}} dx = e^x \frac{x^3}{3}$$

$\Rightarrow$ جواب عمومی : $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 e^x \frac{x^3}{3}$

تمرین : ۴ $\quad x^2(x^2-1)y'' - x(x^2+1)y' + (x^2+1)y = 0 \;,\; y_1 = x$

۵ $\quad (1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \;,\; y_1 = x^m$

۶ $\quad x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0 \;,\; y_1 = x$

* معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرائب ثابت:

این معادلات به شکل کلی زیر هستند:

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (1)$$

که در آن a و b و c اعداد ثابتی هستند. برای معادله (1) به دنبال جوابی به شکل $y_1 = e^{\lambda x}$ هستیم. با جایگذاری $y_1 = e^{\lambda x}$ در (1) داریم:

$$a(\lambda^2 e^{\lambda x}) + b(\lambda e^{\lambda x}) + c e^{\lambda x} = 0 \xrightarrow[\text{تقسیم}]{\text{بر } e^{\lambda x}} \underbrace{a\lambda^2 + b\lambda + c = 0}_{\text{معادله مشخصه}} \quad (2)$$

که با توجه به مقادیر $\Delta = b^2 - 4ac$ حالتهای زیر را داریم:

(الف) اگر $\Delta > 0 \longrightarrow$ معادله (2) دو ریشه حقیقی متمایز λ_1 و λ_2 دارد $\longrightarrow y_1 = e^{\lambda_1 x}, \; y_2 = e^{\lambda_2 x}$

$$\text{جواب عمومی (1)}: \; y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

(ب) اگر $\Delta = 0 \longrightarrow$ معادله (2) دو ریشه مساوی (یا ریشه مضاعف) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ دارد $\longrightarrow y_1 = e^{\lambda x}$ و $y_2 = x e^{\lambda x}$

از دلیل آن بگذریم

$$\text{جواب عمومی (1)}: \; y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

(ج) اگر $\Delta < 0 \longrightarrow$ معادله (2) دو ریشه مختلط دارد که اگر این دو ریشه به صورت $\alpha \pm \beta i$ باشند $\longrightarrow y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \; y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$

$$\text{جواب عمومی (1)}: \; y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$$

مثال: مطلوبست جواب عمومی معادلات زیر:

(1) $y'' - 2y' - 15y = 0 \longrightarrow$ یک معادله مرتبه دوم خطی همگن با ضرائب ثابت

حل) معادله مشخصه: $\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0 \longrightarrow (\lambda - 5)(\lambda + 3) = 0 \xrightarrow[\text{(الف)}]{\text{حالت}} \begin{cases} \lambda_1 = 5 \longrightarrow y_1 = e^{5x} \\ \lambda_2 = -3 \longrightarrow y_2 = e^{-3x} \end{cases}$

$\Longrightarrow$ جواب عمومی: $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-3x}$

(۲) $4y''+4y'+y=0 \longrightarrow$ معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت

حل) معادله مشخصه: $4\lambda^2+4\lambda+1=0 \longrightarrow (2\lambda+1)^2=0 \longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=-\frac{1}{2}$ ریشه مضاعف

طبق حالت (ب): $\Longrightarrow y_1=e^{-\frac{1}{2}x}\ ,\ y_2=xe^{-\frac{1}{2}x}$

$\Longrightarrow$ جواب عمومی: $y(x)=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{-\frac{1}{2}x}+c_2xe^{-\frac{1}{2}x}$

(۳) $y''+2y'+5y=0$

حل) معادله مشخصه: $\lambda^2+2\lambda+5=0 \longrightarrow \lambda=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-2\pm4i}{2}=-1\pm2i$

$\Delta=4-20=-16<0 \longrightarrow$ حالت (ج)

$\alpha=-1$, $\beta=2$

طبق حالت (ج) $\Longrightarrow y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x=e^{-x}\cos2x\ ,\ y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x=e^{-x}\sin2x$

$\Longrightarrow$ جواب عمومی: $y(x)=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)=e^{-x}(c_1\cos2x+c_2\sin2x)$

تمرین:

(۴) $4y''+y'=0$

(۵) $y''-6y'+9y=0$

(۶) $y''+3y'+4y=0$

(۷) $y''+4y'+5y=0$

* بخش ۳: معادلات خطی مرتبه n:

این معادلات به شکل کلی زیر هستند:

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x) \qquad (1)$$

اگر $f(x)\equiv0$ (یعنی f تابع ثابت صفر باشد) آنگاه معادله (1) را همگن می‌خوانند.

* قضیه ۱ (قضیه وجود و یکتایی): فرض کنید توابع $a_0(x)$، $a_1(x)$، ...، $a_n(x)$، $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشند و در این بازه $a_n(x)\neq0$. فرض کنید x_0 نقطه‌ای در بازه $[a,b]$ باشد و β_0 و β_1 و ... و β_{n-1} اعداد حقیقی مفروضی باشند. آنگاه معادله همگن (1) به همراه شرایط اولیه

$$y(x_0)=\beta_0\ ,\ y'(x_0)=\beta_1\ ,\ y''(x_0)=\beta_2\ ,\ \dots\ ,\ y^{(n-1)}(x_0)=\beta_{n-1}$$

دارای جواب یکتایی است که این جواب بر تمام بازه $[a,b]$ تعریف شده است.

* قضیهٔ ۲ : اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ و ... و $y_n(x)$ جواب‌های معادله همگن

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \qquad (2)$$

باشند آنگاه

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$$

نیز جوابی از معادلهٔ (۲) است که در آن c_1، c_2، ... و c_n اعداد ثابت دلخواه‌اند.

* تعریف: فرض کنید توابع $f_1(x)$، $f_2(x)$، ... و $f_n(x)$ بر بازهٔ $[a,b]$ تعریف شده باشند. اگر اعداد ثابت c_1، c_2، ... و c_n که همگی صفر نیستند وجود داشته باشند به طوری که برای هر x در $[a,b]$،

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_nf_n(x)=0$$

آنگاه گوییم که f_1، f_2، ... و f_n بر بازهٔ $[a,b]$ وابستهٔ خطی (نامستقل خطی) هستند، در غیر اینصورت این توابع بر بازهٔ $[a,b]$ مستقل خطی نامیده می‌شوند.

مثال: توابع $f_1(x)=\cos 2x$ و $f_2(x)=3\sin 2x$ و $f_3(x)=\sin 2x-5\cos 2x$ وابسته خطی‌اند زیرا اگر $c_1=5$ و $c_2=-\frac{1}{3}$ و $c_3=1$ داریم

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+c_3f_3(x)=5\cos 2x-\sin 2x+\sin 2x-5\cos 2x=0$$

* تعریف: فرض کنید توابع $f_1(x)$، $f_2(x)$، ... و $f_n(x)$ حداقل $n-1$ بار بر بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشند. رونسکین f_1، f_2، ... و f_n در نقطهٔ x_0 از بازهٔ $[a,b]$ برابر است با

$$W(f_1,f_2,\ldots,f_n)(x_0)=\begin{vmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & \cdots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & \cdots & f_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & f_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

* قضیهٔ ۳ : اگر رونسکین توابع $f_1(x)$، $f_2(x)$، ... و $f_n(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ صفر نباشد آنگاه این توابع بر بازه $[a,b]$ مستقل خطی‌اند.

* قضیهٔ ۴ : اگر y_1، y_2، ... و y_n جواب‌های معادلهٔ همگن (۲) در بازهٔ $[a,b]$ باشند آنگاه:

برای هر x در $[a,b]$: $W(y_1,y_2,\ldots,y_n)(x)\neq 0 \iff$ y_1 و y_2 و ... و y_n در بازهٔ $[a,b]$ مستقل خطی‌اند

* قضیهٔ ۵ : اگر y_1، y_2، ... و y_n جواب‌های مستقل خطی معادلهٔ همگن (۲) در بازهٔ $[a,b]$ باشند آنگاه، جواب عمومی معادلهٔ همگن (۲) به صورت

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$$

است که c_1، c_2، ... و c_n اعداد ثابت دلخواه‌اند.

* قضیهٔ ۶ : اگر $y_p(x)$ یک جواب خصوصی معادلهٔ غیرهمگن (۱) ص ۲۰ و $y_g(x)$ جواب عمومی معادلهٔ همگن (۲) بالا باشد آنگاه جواب عمومی معادلهٔ غیرهمگن (۱) ص ۲۰ به صورت زیر است

$$y(x)=y_g(x)+y_p(x).$$

* معادلات خطی مرتبه n همگن با ضرایب ثابت:

به شکل کلی زیر هستند

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

که در آن a_0، a_1، ...، a_n اعداد ثابتی هستند و $a_n \neq 0$.

برای یافتن جواب عمومی معادله، به n تا جواب مستقل خطی نیاز داریم. اینجا نیز مثل معادلات مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت که در ص ۱۹ تشریح شد، با جایگذاری توابع نمایی به شکل $y = e^{\lambda x}$ در معادله بالا، به معادله مشخصه زیر می‌رسیم:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

می‌رسیم که با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه فوق، دقیقاً مشابه آنچه برای حالت مرتبه دوم در ص ۱۹ و ۲۰ انجام شد، عمل می‌کنیم.

مثال: جواب عمومی هر یک از معادلات زیر را بدست آورید:

① $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$

حل) معادله مشخصه: $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \longrightarrow$ مجموع ضرایب $= 0 \longrightarrow \lambda = 1$ یک ریشه $\longrightarrow$ برای یافتن عامل دیگر و تجزیه عبارت، بر $\lambda - 1$ تقسیم می‌کنیم

$$\Longrightarrow \frac{\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6}{\lambda - 1} = \lambda^2 - \lambda - 6$$

$$\begin{array}{l} \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ -\lambda^3 + \lambda^2 \\ \hline -\lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ \lambda^2 - \lambda \\ \hline -6\lambda + 6 \\ 6\lambda - 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\longrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 6) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda - 1 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 1 \longrightarrow y_1(x) = e^{x} \\ \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \longrightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0 \longrightarrow \lambda_2 = 3 ,\ \lambda_3 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2(x) = e^{3x} \\ y_3(x) = e^{-2x} \end{cases} \Longrightarrow \text{طبق قضیه ۵ ص ۲۱}$$

جواب عمومی معادله: $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x}$

② $2y^{(4)} - 3y''' - 2y'' = 0$

حل) معادله مشخصه: $2\lambda^4 - 3\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0 \longrightarrow \lambda^2(2\lambda^2 - 3\lambda - 2) = 0$

$$\lambda^2 = 0 \xrightarrow[\text{ریشه ۲}]{\text{درجه ۲}} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \longrightarrow y_1 = e^{0x} = 1 ,\ y_2 = x e^{0x} = x$$

$$2\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$\lambda_3 = \frac{3+5}{4} = 2 \longrightarrow y_3 = e^{2x}$$

$$\lambda_4 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \longrightarrow y_4 = e^{-\frac{1}{2}x}$$

$\Longrightarrow$ جواب عمومی: $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4 = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-\frac{1}{2}x}$

③ $y''' - 3y' + 2y = 0$

حل) معادله مشخصه: $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=0} \lambda = 1$ یک ریشه $\longrightarrow \lambda^3 - 3\lambda + 2 \,\Big|\, \lambda - 1$ ، $\lambda^2 + \lambda - 2$

$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2) = (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-1) = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$

$\Rightarrow (\lambda-1)^2(\lambda+2) = 0$

$\Rightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \longrightarrow y_1 = e^x ,\ y_2 = xe^x$

$\lambda + 2 = 0 \longrightarrow \lambda_3 = -2 \longrightarrow y_3 = e^{-2x}$

$\Rightarrow$ جواب عمومی: $y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-2x}$

④ $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

حل) معادله مشخصه: $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مکعب}} (\lambda+1)^3 = 0 \xrightarrow[\text{۳ تا ریشه}]{\text{درجه ۳}} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$

$y_1 = e^{-x} ,\ y_2 = xe^{-x} ,\ y_3 = x^2e^{-x}$

جواب عمومی: $y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x}$

⑤ $y^{(4)} - y = 0$

حل) معادله مشخصه: $\lambda^4 - 1 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (\lambda^2-1)(\lambda^2+1) = 0$

$\lambda^2 - 1 = 0 \longrightarrow \lambda^2 = 1 \longrightarrow \lambda = \pm 1 \longrightarrow y_1 = e^x ,\ y_2 = e^{-x}$

$\lambda^2 + 1 = 0 \longrightarrow \lambda^2 = -1 \longrightarrow \lambda = \pm i \longrightarrow y_3 = \cos x ,\ y_4 = \sin x$

$\Rightarrow$ جواب عمومی: $y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + c_4y_4$
$= c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x$

تمرین: جواب عمومی هر یک از معادلات زیر را بدست آورید:

① $y''' - 2y'' - 11y' + 12y = 0$

② $y^{(5)} - 2y^{(4)} + y''' = 0$

③ $y''' - 3y'' + 3y' - 1 = 0$

④ $y''' + y'' + 3y' - 5y = 0$

⑤ $4y''' - 8y'' + 5y' - y = 0$

* معادلات خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت :

این معادلات به شکل کلی زیر هستند:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \qquad (1)$$

که در آن a_0 و a_1 و ... و a_n ضرایب ثابت و $a_n \neq 0$ است. از قضیه ۶ صفحه ۲۱ جزوه می‌دانیم که جواب عمومی (۱) به صورت

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x)$$

است که $y_g(x)$ جواب عمومی معادله همگن

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

است و $y_p(x)$ یک جواب خصوصی از معادله غیرهمگن (۱) است. هدف ما در این بخش، ارائه روشی است که بتوانیم یک جواب خصوصی $y_p(x)$ برای معادله (۱) بیابیم. این روش فقط در حالت‌های خاص زیر برای $f(x)$ تشریح می‌شود که به روش ضرایب نامعین معروف است:

(۷ حالت)

حالت ۱: اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجه m به شکل $f(x) = k_m x^m + \dots + k_1 x + k_0$ باشد آنگاه

یک چندجمله‌ای درجه m

$$y_p(x) = x^r \left(A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0\right)$$

که در آن، $r =$ تعداد تکرار ریشه صفر در معادله مشخصه

تذکر: ضرایب نامعین A_0 و A_1 و ... و A_m با جایگذاری $y_p(x)$ در معادله (۱) به دست می‌آیند.

حالت ۲: اگر $f(x)$ یک تابع نمایی به شکل $f(x) = k e^{\alpha x}$ باشد آنگاه

یک تابع نمایی

$$y_p(x) = A x^r e^{\alpha x}$$

که در آن، $r =$ تعداد تکرار ریشه α در معادله مشخصه

تذکر: ضریب نامعین A با جایگذاری $y_p(x)$ در معادله (۱) به دست می‌آید.

حالت ۳: اگر $f(x)$ به شکل $f(x) = k_1 \cos\beta x + k_2 \sin\beta x$ باشد آنگاه

مثلثاتی

$$y_p(x) = x^r \left(A_1 \cos\beta x + A_2 \sin\beta x\right)$$

است که در آن، $r =$ تعداد تکرار ریشه βi در معادله مشخصه

حالت ۴: اگر $f(x)$ به شکل $f(x) = (k_m x^m + \dots + k_1 x + k_0) e^{\alpha x}$ باشد آنگاه

نمایی × چندجمله‌ای

$$y_p(x) = x^r \left(A_m x^m + \dots + A_1 x + A_0\right) e^{\alpha x}$$

که در آن، $r =$ تعداد تکرار ریشه α در معادله مشخصه

مثلثاتی × چندجمله‌ای

حالت ۵: اگر $f(x)$ به شکل

$$f(x)=(k_mx^m+\cdots+k_1x+k_0)\cos\beta x+(l_nx^n+\cdots+l_1x+l_0)\sin\beta x$$ باشد، آنگاه

$$\boxed{y_p(x)=x^r\{(A_sx^s+\cdots+A_1x+A_0)\cos\beta x+(B_sx^s+\cdots+B_1x+B_0)\sin\beta x\}}$$

که در آن، $s=\max\{m,n\}$ و $r=$ تعداد تکرار ریشه βi در معادله مشخصه

نمایی × مثلثاتی

حالت ۶: اگر $f(x)$ به شکل $f(x)=e^{\alpha x}(k_1\cos\beta x+k_2\sin\beta x)$ باشد آنگاه

$$\boxed{y_p(x)=x^re^{\alpha x}(A_1\cos\beta x+A_2\sin\beta x)}$$

که در آن،

$r=$ تعداد تکرار ریشه $\alpha+\beta i$ در معادله مشخصه

حالت ۷: اگر $f(x)$ به صورت مجموع چند تابع از نوع حالت‌های ۱ تا ۶ باشد، در این حالت، ابتدا جواب خصوصی مربوط به هر حالت را می‌یابیم سپس طبق اصل برهم‌نهی جواب‌ها (قضیه ۷ ص ۱۶ جزوه)، مجموع جواب‌های خصوصی به دست آمده می‌شود جواب خصوصی نهایی.

مثال: جواب عمومی هر یک از معادلات زیر را به دست آورید:

ضرایب ثابت

(1) $y''-4y=3x+1 \longrightarrow f(x)=3x+1 \longrightarrow$ یک چندجمله‌ای درجه ۱ $\longrightarrow$ طبق حالت ۱: $y_p(x)=x^r(A_1x+A_0)$

حل) که در آن: $r=$ تعداد تکرار ریشه صفر در معادله مشخصه ← پس ابتدا معادله مشخصه مسأله را تشکیل و ریشه‌هایش را می‌یابیم:

$$\lambda^2-4=0 \Longrightarrow \lambda^2=4 \longrightarrow \lambda=\pm2 \longrightarrow r=0$$

$y_1=e^{2x}$, $y_2=e^{-2x}$

$$\Longrightarrow y_p(x)=x^0(A_1x+A_0)=A_1x+A_0 \quad (1)$$

اکنون برای یافتن ضرایب A_1 و A_0، y_p را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$y_p'=A_1 \to y_p''=0 \longrightarrow$ در معادله جایگذاری: $0-4(A_1x+A_0)=3x+1$

$$\Longrightarrow (-4A_1)x-4A_0=3x+1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}-4A_1=3 \longrightarrow A_1=-\frac{3}{4}\\ -4A_0=1 \longrightarrow A_0=-\frac{1}{4}\end{cases} \longrightarrow \text{جواب خصوصی معادله}=y_p(x)\overset{\text{از }(1)}{=}-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$$

بنابراین، طبق قضیه ۶ ص ۲۱ جزوه:

جواب عمومی معادله $=y(x)=y_g(x)+y_p(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$ ✓

جواب عمومی همگن: $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$

$-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$

~~حل ۲۶~~

تمرین ۲ $\quad y''-3y'+2y=2x^2+1 \to f(x) \to$ چندجمله‌ای درجه ۲ $\to$ حالت ۱ $\to$ حالت ۱

$$y_p(x)=x^r(A_2x^2+A_1x+A_0)$$

که: $r=$ تعداد تکرار ریشه صفر در معادله مشخصه $\leftarrow$ ادامه با شما

تمرین ۳ $\quad y''-y'=2x+3 \to f(x) \to$ چندجمله‌ای درجه ۱ $\to$ حالت ۱: $f(x)=x^r(A_1x+A_0)$

که در آن:

حل: معادله مشخصه: $\lambda^2-\lambda=0$

$\Rightarrow \lambda(\lambda-1)=0$

$\Rightarrow \begin{cases}\lambda=0 \to y_1=e^{0x}=1\\ \lambda=1 \to y_2=e^x\end{cases}$

$r=$ تعداد تکرار ریشه صفر در معادله مشخصه $=1$

$\Rightarrow y_p(x)=x(A_1x+A_0)=A_1x^2+A_0x \quad (1)$

در معادله جایگذاری:

$y_p'=2A_1x+A_0$

$y_p''=2A_1$

در معادله قرار:

$(2A_1)-(2A_1x+A_0)=2x+3$

$\Rightarrow (-2A_1)x+(2A_1-A_0)=2x+3$

$\Rightarrow \begin{cases}-2A_1=2 \to A_1=-1\\ 2A_1-A_0=3\end{cases} \to A_0=-5 \Longrightarrow y_p(x)=-x^2-5x$ (از ①)

بنابراین:

جواب عمومی معادله: $y(x)=y_g(x)+y_p(x)=c_1+c_2e^x-x^2-5x$ ✓

جواب عمومی همگن $=c_1y_1+c_2y_2=c_1+c_2e^x$

تمرین ۴ $\quad y''-4y'=-4$

تمرین ۵ $\quad y''-y'=2x-1$

۶ $\quad 4y''+4y'+y=e^{-\frac{1}{2}x} \to \alpha=-\frac{1}{2}$

$f(x)=$ نمایی با $\alpha=-\frac{1}{2}$ $\to$ حالت ۲ $\to y_p(x)=Ax^re^{-\frac{1}{2}x}$

که: $r=$ تعداد تکرار ریشه $\alpha=-\frac{1}{2}$ در معادله مشخصه $=2$

حل: $4\lambda^2+4\lambda+1=0$

$\Rightarrow (2\lambda+1)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-\frac{1}{2}$

$y_1=e^{-\frac{1}{2}x}$ و $y_2=xe^{-\frac{1}{2}x}$

پس:

برای یافتن A، y_p را در معادله جایگذاری می‌کنیم: $\leftarrow y_p(x)=Ax^2e^{-\frac{1}{2}x}$

$y_p'=2Axe^{-\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}Ax^2e^{-\frac{1}{2}x} \longrightarrow y_p''=2Ae^{-\frac{1}{2}x}-Axe^{-\frac{1}{2}x}-Axe^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{4}Ax^2e^{-\frac{1}{2}x}$

$$\Rightarrow y_p'' = 2Ae^{-\frac{1}{2}x} - 2Axe^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}Ax^2e^{-\frac{1}{2}x}$$

y و y' و y'' را در معادله قرار:

$$4\left(2Ae^{-\frac{1}{2}x} - 2Axe^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}Ax^2e^{-\frac{1}{2}x}\right) + 4\left(2Axe^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}Ax^2e^{-\frac{1}{2}x}\right) + Ax^2e^{-\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\Rightarrow 8Ae^{-\frac{1}{2}x} - \cancel{8Axe^{-\frac{1}{2}x}} + \cancel{Ax^2e^{-\frac{1}{2}x}} + \cancel{8Axe^{-\frac{1}{2}x}} - \cancel{2Ax^2e^{-\frac{1}{2}x}} + \cancel{Ax^2e^{-\frac{1}{2}x}} = e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\Rightarrow \boxed{8A}e^{-\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow 8A = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{8} \Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{8}x^2e^{-\frac{1}{2}x}$$

بنابراین: جواب عمومی معادله: $y(x) = y_g(x) + y_p(x) = c_1e^{-\frac{1}{2}x} + c_2xe^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{8}x^2e^{-\frac{1}{2}x}$

$c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{-\frac{1}{2}x} + c_2xe^{-\frac{1}{2}x}$

تمرین ⑦ $y'' - 4y' + 3y = e^{3x}$ تمرین ⑧ $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$

مثال ۲: برای هر یک از معادلات زیر یک جواب خصوصی بدون محاسبه ضرایب به دست آورید:

① $y'' + 4y' + 3y = 2\cos 2x \xrightarrow{f(x)}$ مثلثاتی $\longrightarrow$ حالت ۳ $\longrightarrow y_p(x) = x^r(A_1\cos 2x + A_2\sin 2x)$

که در آن

حل) معادله مشخصه: $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

$\Rightarrow (\lambda+1)(\lambda+3) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -3$

$r =$ تعداد تکرار ریشه $2i$ یعنی βi در معادله مشخصه $= 0$

$\longrightarrow y_p(x) = A_1\cos 2x + A_2\sin 2x$

تذکر: در مثال فوق اگر با جایگذاری $y_p(x)$ در معادله به دست می‌آوریم $A = \frac{16}{65}$ و $B = -\frac{2}{65}$ و بنابراین

$y_p(x) = \frac{16}{65}\cos 2x + \frac{2}{65}\sin 2x$

جواب عمومی: $y(x) = y_g(x) + y_p(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x} + \frac{16}{65}\cos 2x - \frac{2}{65}\sin 2x$

تمرین ③ $y'' + 9y = \sin 3x - \cos 3x$

④ $y'' - y' = (1-2x)e^x \longrightarrow \alpha = 1$

یک چندجمله‌ای از درجه 1 ، $f(x)$ $\longrightarrow$ حالت ۴ $\longrightarrow y_p(x) = x^r(A_1x + A_0)e^x$

که در آن $r =$ تعداد تکرار ریشه $\alpha = 1$ در معادله مشخصه $= 1$

حل) معادله مشخصه: $\lambda^2 - \lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$

پس: $y_p(x) = x(A_1x + A_0)e^x$

(۴) $y'' - y = x\sin x \rightarrow f(x) \rightarrow$ حالت ۵ $\rightarrow y_p(x) = x^r\{(A_1x+A_0)\cos x + (B_1x+B_0)\sin x\}$

یک جمله‌ای درجه ۱

حل) معادله مشخصه: $\lambda^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 = 1$

$\Rightarrow \lambda = \pm 1$

که در آن: $r =$ تعداد تکرار ریشه i یعنی βi در معادله مشخصه $= 0$

پس: $y_p(x) = (A_1x+A_0)\cos x + (B_1x+B_0)\sin x$ ✓

(۵) $y'' - 5y' + 6y = e^x \sin x \rightarrow f(x) \rightarrow$ حالت ۶ $\rightarrow y_p(x) = x^r e^x\{A_1\cos x + A_2\sin x\}$

$\alpha = 1$, $\beta = 1$

حل) معادله مشخصه: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$

که در آن: $r =$ تعداد تکرار ریشه $1+i$ یعنی $\alpha + \beta i$ در معادله مشخصه $\rightarrow r = 0$

پس: $y_p(x) = e^x\{A_1\cos x + A_2\sin x\}$ ✓

(۶) $y'' + y' - 6y = 7e^{2x} + 3x^2$

حل) معادله مشخصه: $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

$\Rightarrow (\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$

$f_1(x)$ نمایی $\rightarrow$ حالت ۲ $\rightarrow y_{p_1}(x) = Ax^{r_1}e^{2x}$

$r_1 =$ تعداد تکرار ریشه $\alpha = 2$ در مشخصه $\rightarrow r_1 = 1$

$\rightarrow y_{p_1}(x) = Axe^{2x}$

$f_2(x)$ چندجمله‌ای درجه ۲ $\rightarrow$ حالت ۱ $\rightarrow y_{p_2}(x) = x^{r_2}(B_2x^2 + B_1x + B_0)$

$r_2 =$ تعداد تکرار ریشه صفر در مشخصه $\rightarrow r_1 = 0$

$\rightarrow y_{p_2}(x) = B_2x^2 + B_1x + B_0$

در نتیجه، جواب خصوصی نوعی برای معادله طبق اصل برهم‌نهی جواب‌ها (صفحه ۷ ص ۱۶) برابر است با مجموع دو جواب خصوصی y_{p_1} و y_{p_2} یعنی:

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = Axe^{2x} + B_2x^2 + B_1x + B_0$$ ✓

* تمرین: $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}\cos x$

صفحه ۲۹

(۷) $y^{(4)}+4y''=3x^2+xe^x+\sin^2 x$

این را نداشتیم ولی $\dfrac{1-\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$

حل) معادله مشخصه: $\lambda^4+4\lambda^2=0$

$\Rightarrow \lambda^2(\lambda^2+4)=0$

$\Rightarrow \begin{cases}\lambda^2=0 \longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=0\\ \lambda^2+4=0 \longrightarrow \lambda^2=-4\end{cases}$

$\lambda=\pm 2i$

پس: $f(x)=3x^2+xe^x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$

$\Rightarrow f(x)=\underbrace{(3x^2+\tfrac{1}{2})}_{\text{حالت ۱}}+\underbrace{xe^x}_{\text{حالت ۴}}-\underbrace{\tfrac{1}{2}\cos 2x}_{\text{حالت ۳}}$

$y_{p_1}(x)=x^{r_1}(A_2x^2+A_1x+A_0)$

که: $r_1=$ تعداد تکرار ریشه صفر $=2$

$y_{p_2}(x)=x^{r_2}(B_1x+B_0)e^x$

$r_2=$ تعداد تکرار ریشه $\alpha=1$ $=0$

$y_{p_3}(x)=x^{r_3}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

$r_3=$ تعداد تکرار ریشه $2i$ $=1$

بنابراین:

طبق اصل برهمنهی جوابها

جواب خصوصی معادله $=y_p(x)=y_{p_1}(x)+y_{p_2}(x)+y_{p_3}(x)$

$\Rightarrow y_p(x)=x^2(A_2x^2+A_1x+A_0)+(B_1x+B_0)+x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$ ✓

(۸) $D^2(D^2-4)(D^2+2D+5)^2y=x^2+x\sin 2x+e^{-x}\cos^2 x+5$ ، $D^n=\dfrac{d^n}{dx^n}$

(یعنی در صورت سوال، D ، D^2 ، ... به این صورت هستند یعنی $Dy=\dfrac{dy}{dx}=y'$ ، $D^2y=\dfrac{d^2y}{dx^2}=y''$ ، ...)

حل) اولاً: معادله مشخصه: $\lambda^2(\lambda^2-4)(\lambda^2+2\lambda+5)^2=0$

$\Rightarrow \begin{cases}\lambda^2=0 \longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=0\\ \lambda^2-4=0 \longrightarrow \lambda^2=4 \longrightarrow \lambda_3=-2\ ,\ \lambda_4=2\\ (\lambda^2+2\lambda+5)^2=0 \longrightarrow \lambda=\dfrac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=\dfrac{-2\pm 4i}{2}=-1\pm 2i\end{cases}$

با ۲ بار تکرار

با ۲ بار تکرار

ثانیاً: $f(x)=x^2+x\sin 2x+e^{-x}\cos^2 x+5$ ، $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x$

$=x^2+x\sin 2x+e^{-x}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 2x)+5=x^2+x\sin 2x+\tfrac{1}{2}e^{-x}+\tfrac{1}{2}e^{-x}\cos 2x+5$

$\Rightarrow f(x)=\underbrace{(x^2+5)}_{f_1(x)}+\underbrace{x\sin 2x}_{f_2(x)}+\underbrace{\tfrac{1}{2}e^{-x}}_{f_3(x)}+\underbrace{\tfrac{1}{2}e^{-x}\cos 2x}_{f_4(x)}$

$f_1(x)$: از حالت ۱ — $f_2(x)$: از حالت ۵ — $f_3(x)$: از حالت ۳ — $f_4(x)$: از حالت ۴

ادامه

$f_1(x)=x^2+5 \longrightarrow y_{p_1}(x)=x^{r_1}(A_2x^2+A_1x+A_0) = x^2(A_2x^2+A_1x+A_0)$

r_1 = تعداد تکرار ریشه صفر در مشخصه $=2$

$f_2(x)=x\sin 2x \longrightarrow y_{p_2}(x)=x^{r_2}\{(A_1x+A_0)\cos 2x+(B_1x+B_0)\sin 2x\}=(A_1x+A_0)\cos 2x+(B_1x+B_0)\sin 2x$

r_2 = تعداد تکرار ریشه $2i$ $=0$

x: یک چندجمله‌ای درجه ۱

$f_3(x)=\frac{1}{2}e^{-x} \longrightarrow y_{p_3}(x)=Ax^{r_3}e^{-x}=Ae^{-x}$

r_3 = تعداد تکرار ریشه $\alpha=-1$ $=0$

$f_4(x)=\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x \longrightarrow y_{p_4}(x)=x^{r_4}e^{-x}(A_1\cos 2x+A_2\sin 2x)=x^2e^{-x}(A_1\cos 2x+A_2\sin 2x)$

r_4 = تعداد تکرار ریشه $\alpha+\beta i$ یعنی $-1+2i$ $=2$

و در نتیجه: جواب خصوصی معادله $=y_p(x)=y_{p_1}(x)+y_{p_2}(x)+y_{p_3}(x)+y_{p_4}(x)=\,??$ ✓✓

(۹) $D^2(D^2+1)^2(D^3-9D)y=x^2+2\sinh(x)+x^3e^{3x}+1+x\cos x\cos^2 x$

حل: اولاً: معادله مشخصه: $\lambda^2(\lambda^2+1)^2(\underbrace{\lambda^3-9\lambda}_{\lambda(\lambda^2-9)})=0 \longrightarrow \lambda^3(\lambda^2+1)^2(\lambda^2-9)=0$

- $\lambda^3=0 \longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$
- $(\lambda^2+1)^2=0 \longrightarrow \lambda=\pm i$ با تکرار ۲
- $\lambda^2-9=0 \longrightarrow \lambda=\pm 3$

ثانیاً: $f(x)=x^2+2\sinh(x)+x^3e^{3x}+1+x\cos x\cos^2 x$

$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$

$\cos x\cos^2 x=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\cos x\cos 2x$

$\cos x\cos 2x \to \frac{1}{2}\{\cos(x-2x)+\cos(x+2x)\}=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\cos 3x$

$\Rightarrow f(x)=(x^2+1)+e^{x}-e^{-x}+x^3e^{3x}+\frac{1}{2}x\cos x+\frac{1}{4}x\cos x+\frac{1}{4}x\cos 3x$

$\Rightarrow f(x)=\underbrace{(x^2+1)}_{f_1(x)}+\underbrace{e^{x}}_{f_2(x)}\underbrace{-e^{-x}}_{f_3(x)}+\underbrace{x^3e^{3x}}_{f_4(x)}+\underbrace{\frac{3}{4}x\cos x}_{f_5(x)}+\underbrace{\frac{1}{4}x\cos 3x}_{f_6(x)}$

f_1: حالت ۱، f_2: حالت ۲، f_3: حالت ۲، f_4: حالت ۴، f_5: حالت ۵، f_6: حالت ۵

نمادگذاری:

$\Longrightarrow$ ادامه کار (راهنمایی: $r_1=3$ ، $r_2=0$ ، $r_3=0$ ، $r_4=1$ ، $r_5=2$ ، $r_6=0$)

تمرین

(۱۰) $D^2(D^2+4)(D-1)^3y=4x^2+xe^{x}+\cos^2 x$

(۱۱) $D^3(D^2+16)(D-3)^2y=5x^2-2xe^{3x}+\sin^2(2x)+\cosh(3x)$

(۱۲) $D^3(D^2+D+1)(D^2+1)(D^2-3D+2)y=x^3+e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+xe^{2x}+\cos^2 x$

* روش تغییر پارامترها :

این روش نیز برای یافتن یک جواب خصوصی برای معادله خطی ناهمگن

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

به کار می رود. در روش ضرایب نامعین باید a_0، a_1، ...، و a_n ثابت باشند و $f(x)$ باید به شکل یکی از ۷ حالت بیان شده باشد. ولی در روش تغییر پارامترها، این دو محدودیت وجود ندارد. در عوض باید مجموعه ای از جوابهای مستقل خطی معادله همگن یعنی y_1، y_2، ...، و y_n مستقل خطی را در اختیار داشته باشیم.

ابتدا این روش را برای معادلات مرتبه دوم تشریح می کنیم.

معادله مرتبه دوم

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (1)$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب مستقل خطی معادله همگن نظیر یعنی

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (2)$$

باشند. می دانیم جواب عمومی (۲) به صورت $y_g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ است. برای یافتن یک جواب خصوصی برای (۱) یعنی $y_p(x)$، فرض می کنیم

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) \qquad (3)$$

باشد که در آن $v_1(x)$ و $v_2(x)$ توابعی بر حسب x هستند. برای یافتن $v_1(x)$ و $v_2(x)$، با جایگذاری (۳) در (۲) داریم

$$(v_1y_1 + v_2y_2)'' + p(x)(v_1y_1 + v_2y_2)' + q(x)(v_1y_1 + v_2y_2) = f(x)$$

$$\Rightarrow v_1''y_1 + 2v_1'y_1' + v_1y_1'' + v_2''y_2 + 2v_2'y_2' + v_2y_2'' + p(x)(v_1'y_1 + v_1y_1' + v_2'y_2 + v_2y_2') + v_1y_1q(x) + v_2y_2q(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow v_1\underbrace{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)}_{=0\ \text{چون } y_1 \text{ جوابی از (۲) است}} + v_2\underbrace{(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)}_{=0\ \text{چون } y_2 \text{ جوابی از (۲) است}} + v_1''y_1 + 2v_1'y_1' + v_2''y_2 + 2v_2'y_2' + p(x)(v_1'y_1 + v_2'y_2) = f(x)$$

$$\Rightarrow v_1''y_1 + \underbrace{2v_1'y_1'}_{v_1'y_1' + v_1'y_1'} + v_2''y_2 + \underbrace{2v_2'y_2'}_{v_2'y_2' + v_2'y_2'} + p(x)\underbrace{(v_1'y_1 + v_2'y_2)} = f(x) \qquad (4)$$

از v_1 و v_2 طوری انتخاب می شوند که

$$v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0 \qquad (5)$$

با مشتق گیری از طرفین (۵) به دست می آوریم

$$\Rightarrow v_1''y_1 + v_1'y_1' + v_2''y_2 + v_2'y_2' = 0 \qquad (6)$$

با جایگذاری (۵) و (۶) در (۴) داریم

$$v_1'y_1' + v_2'y_2' = f(x) \qquad (7)$$

اکنون با تشکیل دستگاه شامل معادلات (۵) و (۷) داریم

$$\begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{بر حسب مجهولات } v_1' \text{ و } v_2']{\text{حل دستگاه با روش کرامر}} \quad v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} \xrightarrow[\text{از طرفین}]{\text{انتگرال‌گیری}} v_1(x) = \int \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} v_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

مثال: جواب عمومی معادلهٔ زیر را به دست آورید:

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}, \qquad x > 0$$

حل) ابتدا یافتن جواب‌های مستقل خطی y_1 و y_2 از معادلهٔ همگن. چون معادلهٔ خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت است با تشکیل معادلهٔ مشخصه و محاسبهٔ ریشه‌هایش، y_1 و y_2 را می‌یابیم:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \longrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \longrightarrow y_1 = e^x \text{ و } y_2 = x e^x$$

اکنون برای یافتن $y_p(x)$، جواب خصوصی معادله، با روش تغییر پارامترها داریم (توجه: در سمت راست، $f(x) = \frac{e^x}{x}$ است که به شکل هیچ یک از حالت‌های (۷ حالت) در روش ضرایب نامعین نیست لذا با روش ضرایب نامعین نمی‌شود!)

$$y_p(x) = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

که برای یافتن $v_1(x)$ و $v_2(x)$:

$$v_1(x) = \int \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx = \int \frac{-x e^x \left(\frac{e^x}{x}\right)}{e^{2x}} dx = -\int dx = -x$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & e^x + x e^x \end{vmatrix} = e^{2x} + x e^{2x} - x e^{2x} = e^{2x}$$

$$v_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx = \int \frac{e^x \left(\frac{e^x}{x}\right)}{e^{2x}} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\Longrightarrow y_p(x) = v_1 y_1 + v_2 y_2 = (-x) e^x + (\ln x) x e^x$$

و در نتیجه:

جواب عمومی: $y(x) = y_g(x) + y_p(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p(x)$

$$= c_1 e^x + c_2 x e^x + (-x) e^x + (\ln x) x e^x$$

تمرین: جواب عمومی معادله $y''-3y'+2y=\frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$ را بدست آورید.

مثال: اگر $y_1=x$ جوابی از معادله همگن $(x^2+1)y''-2xy'+2y=0$ باشد جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید:

$$(x^2+1)y''-2xy'+2y=6(x^2+1)^2$$

حل) اولاً:

طرفین بر ضریب y'' تقسیم: $\underbrace{y''-\frac{2x}{x^2+1}}_{p(x)}y'+\frac{2}{x^2+1}y=\underbrace{6(x^2+1)}_{f(x)}$

ثانیاً: $y_2(x)$ را می‌یابیم (با فرمول آبل):

$$y_2(x)=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx$$

$$=x\int\frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{-2x}{x^2+1}dx}dx=x\int\frac{x^2+1}{x^2}dx=x\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$e^{\int\frac{2x}{x^2+1}dx}=e^{\ln(x^2+1)}=x^2+1$$

$$=x\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2-1$$

ثالثاً: یافتن جواب خصوصی $y_p(x)$ با روش تغییر پارامترها:

$$y_p(x)=v_1y_1+v_2y_2$$

که:

$$v_1=\int\frac{-y_2f(x)}{W(y_1,y_2)}dx=\int-\frac{(x^2-1)6(x^2+1)}{x^2+1}dx=-6\int(x^2-1)dx=-6\left(\frac{x^3}{3}-x\right)=-2x^3+6x$$

$$\begin{vmatrix}y_1&y_2\\y_1'&y_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&x^2-1\\1&2x\end{vmatrix}=2x^2-x^2+1=x^2+1$$

$$v_2=\int\frac{y_1f(x)}{W(y_1,y_2)}dx=\int\frac{x\left(6(x^2+1)\right)}{x^2+1}dx=6\int x\,dx=6\frac{x^2}{2}=3x^2$$

$$\Rightarrow y_p(x)=v_1y_1+v_2y_2=(-2x^3+6x)x+(3x^2)(x^2-1)$$

و بالاخره: جواب عمومی: $y(x)=y_g(x)+y_p(x)=c_1y_1+c_2y_2+y_p(x)$ ⇐

$$=c_1x+c_2(x^2-1)+(-2x^3+6x)x+3x^2(x^2-1)$$

تذکر: در مثال بالا، اگر چه سمت راست $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجه دوم و به شکل حالت ۱ در روش ضرایب نامعین است ولی سمت چپ معادله، با ضرایب ثابت نیست و لذا نمی‌توان از روش ضرایب نامعین استفاده کرد!

تمرین: جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید:

(۱) $y''+y=\sec x$

(۲) $xy''-2(x+1)y'+(x+2)y=x^3e^{2x}$, $y_1=e^x$

(۳) $y''-y'+e^{2x}y=e^{2x}$, $y_1=\sin(e^x)$

* نکته: روش تغییر پارامترها را می‌توان برای معادلات خطی غیرهمگن مرتبه‌های بالاتر به صورت زیر تعمیم داد:

اگر y_1، y_2، ...، y_n جواب‌های مستقل خطی معادله خطی مرتبه n غیرهمگن

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x)$$

باشند آنگاه یک جواب خصوصی برای این معادله به صورت

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) + \dots + v_n(x)y_n(x)$$

است که در آن

$$v_1(x) = \int \frac{W_1}{W}dx,\quad v_2(x) = \int \frac{W_2}{W}dx,\quad \dots,\quad v_n(x) = \int \frac{W_n}{W}dx$$

که در آن، W رونسکین y_1، y_2، ...، y_n است و W_k ($k=1,2,3,\dots,n$) نیز رونسکین حاصل از جانشینی بردار ستونی

$$\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ f(x)\end{bmatrix}$$

به جای ستون k-ام در W است.

مثال ۵: جواب خصوصی معادله $y''' + y' = \underbrace{\csc x}_{f(x)}$ را به دست آورید.

حل) اولاً: سمت چپ خطی با ضرایب ثابت ⟵ $\lambda^3 + \lambda = 0$: معادله مشخصه

$$\Rightarrow \lambda(\lambda^2+1) = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 0 \longrightarrow y_1 = e^{0x} = 1 \longrightarrow y_1 = 1 \\ \lambda^2 + 1 = 0 \longrightarrow \lambda^2 = -1 \longrightarrow \lambda = \pm i \longrightarrow y_2 = \cos x,\ y_3 = \sin x \end{cases}$$

ثانیاً: یک جواب خصوصی معادله به صورت

$$y_p(x) = v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3$$

است که:

$$v_1 = \int \frac{W_1}{W}dx,\quad v_2 = \int \frac{W_2}{W}dx,\quad v_3 = \int \frac{W_3}{W}dx$$

و

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{اول}]{\text{برحسب ستون}} 1 \times \begin{vmatrix} -\sin x & \cos x \\ -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} + 0 + 0 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ f(x) & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \csc x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{ستون اول}]{\text{برحسب}} 0 - 0 + \csc x \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \csc x(\cos^2 x + \sin^2 x) = \csc x$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & f(x) & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \csc x & -\sin x \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{ستون اول}]{\text{برحسب}} 1 \times \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \csc x & -\sin x \end{vmatrix} + 0 + 0 = -\csc x \cos x = -\frac{1}{\sin x}\cos x = -\cot x$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \csc x \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{ستون اول}]{\text{برحسب}} 1 \times \begin{vmatrix} -\sin x & 0 \\ -\cos x & \csc x \end{vmatrix} - 0 + 0 = -\sin x \csc x = -\sin x\left(\frac{1}{\sin x}\right) = -1$$

بنابراین:

$$\Rightarrow v_1 = \int \frac{W_1}{W}dx = \int \frac{\csc x}{1}dx = \int \csc x\, dx = -\ln|\csc x + \cot x|,\quad v_2 = \int \frac{W_2}{W}dx = \int \frac{-\cot x}{1}dx = -\int \cot x\, dx = -\ln|\sin x|$$

$$v_3 = \int \frac{W_3}{W}dx = \int \frac{-1}{1}dx = -\int dx = -x \Rightarrow y_p(x) = v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 = ??\ \checkmark\checkmark$$

بنابراین: $\Rightarrow y(x) = y_g + y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + y_p(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x - \ln|\csc x + \cot x| + (-\ln|\sin x|)\cos x - x \sin x$: جواب عمومی

جلسه ۲۵

*معادلات اویلر (کوشی ـ اویلر):

شکل ساده این معادله به صورت

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = f(x) \quad (1)$$

و شکل کلی آن به صورت

$$a_n (ax+b)^n y^{(n)} + a_{n-1} (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 (ax+b) y' + a_0 y = f(x) \quad (2)$$

است که در آن $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a$ و b اعداد ثابتی هستند.

* در حالت ساده (۱) با فرض $x>0$ از تعویض متغیر $x=e^t$ استفاده می‌کنیم.

* در حالت کلی (۲) نیز با فرض $ax+b>0$ از تعویض متغیر $ax+b=e^t$ استفاده می‌کنیم.

*(الف) اکنون برای تشریح حل معادله کوشی ـ اویلر، حالت ساده (۱) را در نظر بگیرید، با تعویض متغیر $x=e^t$ داریم:

$$x=e^t \longrightarrow t=\ln x \longrightarrow \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{1}{x}\right) \Longrightarrow y'=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \Longrightarrow xy'=\frac{dy}{dt} \underset{\text{فرض کنیم}}{\overset{\text{برای ساده‌نویسی}}{=}} \bar{y}'(t) \quad (1)$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dy}{dt}+\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\times\frac{dt}{dx}\,\frac{1}{x}$$

$$\Longrightarrow y''=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} \Longrightarrow y''=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\Longrightarrow x^2y''=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}=\bar{y}''(t)-\bar{y}'(t) \quad (2)$$

به طور مشابه، با ادامه این روند داریم:

$$x^3y'''=\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}=\bar{y}'''(t)-3\bar{y}''(t)+2\bar{y}'(t) \quad (3)$$

و به همین ترتیب الی آخر. با جایگذاری (۱)، (۲)، (۳)، ... در معادله (۱)، به یک معادله خطی با ضرایب ثابت با متغیر مستقل t و تابع مجهول $y(t)$ می‌رسیم که با حل آن آشنا هستیم.

*نتیجه: برای معادله کوشی ـ اویلر مرتبه دوم ساده $x^2y''+axy'+by=f(x)$ $(*)$، با تعویض متغیر $x=e^t$ و جایگذاری روابط (۱) و (۲) در معادله $(*)$ به معادله زیر می‌رسیم

$$\bar{y}''(t)+(a-1)\bar{y}'(t)+b\bar{y}(t)=f(e^t)$$

که یک معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت است و با حل آن آشناییم.

توضیح: با جایگذاری (۱) و (۲) در $(*)$ و نیز $x=e^t$: $\left(\bar{y}''(t)-\bar{y}'(t)\right)+a\left(\bar{y}'(t)\right)+b\bar{y}(t)=f(e^t)$

$$\Longrightarrow \bar{y}''(t)+(a-1)\bar{y}'(t)+b\bar{y}(t)=f(e^t)$$

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید:

① $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0 \longrightarrow (1)$

a ، b

حل) یک معادله کوشی-اویلر است همگن مرتبه ۲: با تعویض متغیر $x=e^t$ به معادله زیر میرسیم

$$\bar y''(t) + (a-1)\bar y'(t) + b\bar y(t) = 0 \Rightarrow \bar y''(t) + (-2-1)\bar y'(t) - 4\bar y(t) = 0$$

$\Rightarrow \bar y''(t) - 3\bar y'(t) - 4\bar y(t) = 0 \longrightarrow (2)$ همگن با ضرایب ثابت

$\Rightarrow$ معادله مشخصه: $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \longrightarrow (\lambda-4)(\lambda+1) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 4 \to \bar y_1(t) = e^{4t}$ ، $\lambda_2 = -1 \to \bar y_2(t) = e^{-t}$

$\Rightarrow$ جواب عمومی معادله (۲): $\bar y(t) = c_1\bar y_1(t) + c_2\bar y_2(t) = c_1e^{4t} + c_2e^{-t}$

$(e^t)^4 = x^4$ ، $(e^t)^{-1} = x^{-1}$

$= c_1x^4 + c_2x^{-1} = y(x)$ همان جواب عمومی معادله (۱)

تمرین ② $x^2y'' + 3xy' + 3y = 0$

③ $x^3y''' + xy' - y = 0 \longrightarrow (1)$

حل) کوشی-اویلر همگن مرتبه سوم: با تعویض متغیر $x=e^t$ داریم:

$$\begin{cases} xy' = \bar y'(t) \\ x^2y'' = \bar y''(t) - \bar y'(t) \\ x^3y''' = \bar y'''(t) - 3\bar y''(t) + 2\bar y'(t) \end{cases}$$

در معادله (۱) جایگذاری $\Rightarrow \left(\bar y'''(t) - 3\bar y''(t) + 2\bar y'(t)\right) + \bar y'(t) - \bar y(t) = 0$

$\Rightarrow \bar y'''(t) - 3\bar y''(t) + 3\bar y'(t) - \bar y(t) = 0 \longrightarrow (2)$ $\longrightarrow$ مرتبه سوم خطی همگن با ضرایب ثابت

$\Rightarrow$ معادله مشخصه: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^3 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \Rightarrow \bar y_1(t) = e^t$ ، $\bar y_2(t) = te^t$ ، $\bar y_3(t) = t^2e^t$

$\Rightarrow$ جواب عمومی (۲): $\bar y(t) = c_1\bar y_1 + c_2\bar y_2 + c_3\bar y_3 = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t$

x ، $\ln x$ ، x ، $(\ln x)^2$ ، x

$\xrightarrow[x=e^t,\ t=\ln x]{\text{با تغییر}} c_1x + c_2x\ln x + c_3x(\ln x)^2 =$ همان جواب عمومی معادله (۱) $= y(x)$

تمرین ④

$$\begin{cases} x^3y''' + 5x^2y'' + 7xy' + 8y = 0 \\ x^2y''' - y' + \frac{1}{x}y = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ راهنمایی: طرفین در x ضرب

ص ۳۷

⑤ $x^2y'' \underbrace{+3}_{a} xy' \underbrace{+2}_{b} y = x^2+x \to f(x)$, $x>0$ (1)

حل) کوشی-اویلر مرتبه دوم غیرهمگن ← با تعویض متغیر $x=e^t$ داریم:

$$\bar{y}''(t)+(a-1)\bar{y}'(t)+b\bar{y}(t)=(e^t)^2+e^t \to f(e^t)\ \text{همان}$$

$$\Rightarrow \bar{y}''(t)+(3-1)\bar{y}'(t)+2\bar{y}(t)=e^{2t}+e^t$$

$$\Rightarrow \bar{y}''(t)+2\bar{y}'(t)+2\bar{y}(t)=e^{2t}+e^t \to (2)$$

⟵ مرتبه دوم غیرهمگن با ضرایب ثابت

معادله مشخصه: $\lambda^2+2\lambda+2=0 \to \lambda=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2\pm2i}{2}=-1\pm i \to \bar{y}_1(t)=e^{-t}\cos t$ ، $\bar{y}_2(t)=e^{-t}\sin t$

جواب عمومی (۲): $\bar{y}(t)=\bar{y}_g(t)+\bar{y}_p(t)$

$\bar{y}_g(t) \to c_1\bar{y}_1(t)+c_2\bar{y}_2(t)$

$\bar{y}_p(t)$ ← روش اول ← چون سمت راست (۲): $e^{2t}+e^t \overset{\text{فرض}}{=} \bar{f}(t)$ ← پس برای یافتن جواب خصوصی (۲) از روش ضرایب نامعین (حالت ۷) استفاده می‌کنیم.

سمت چپ (۲) نیز با ضرایب ثابت

(تذکر: روش دوم برای یافتن جواب خصوصی (۲)، استفاده از روش تغییر پارامترها).

یعنی:

$$\bar{f}(t)=e^{2t}+e^t$$

e^{2t} ← حالت ۲: $\bar{y}_{p_1}(t)=At^{r_1}e^{2t}=Ae^{2t}$ ← چون: $r_1 =$ تعداد تکرار ریشه $\alpha=2$ در مشخصه $=0$

e^t ← حالت ۲: $\bar{y}_{p_2}(t)=Bt^{r_2}e^t=Be^t$ ← چون: $r_2 =$ تعداد تکرار ریشه $\alpha=1$ در مشخصه $=0$

$$\Rightarrow \text{جواب خصوصی (۲)}: \bar{y}_p(t)=\bar{y}_{p_1}(t)+\bar{y}_{p_2}(t)=Ae^{2t}+Be^t$$

⟵ برای یافتن ضرایب A و B، $\bar{y}_p(t)$ را در (۲) جایگذاری می‌کنیم. برای این کار:

$$\bar{y}_p'(t)=2Ae^{2t}+Be^t \to \bar{y}_p''(t)=4Ae^{2t}+Be^t$$

$$\xRightarrow[\text{قرار}]{\text{در (۲)}} (4Ae^{2t}+Be^t)+2(2Ae^{2t}+Be^t)+2(Ae^{2t}+Be^t)=e^{2t}+e^t$$

$$\Rightarrow 10Ae^{2t}+5Be^t=e^{2t}+e^t$$

$$\Rightarrow \begin{cases}10A=1 \to A=\frac{1}{10}\\ 5B=1 \to B=\frac{1}{5}\end{cases} \longrightarrow \bar{y}_p(t)=\frac{1}{10}e^{2t}+\frac{1}{5}e^t$$

$$\Rightarrow \text{جواب عمومی (۲)}: \bar{y}(t)=\bar{y}_g(t)+\bar{y}_p(t)=c_1\bar{y}_1+c_2\bar{y}_2+\bar{y}_p=e^{-t}(c_1\cos t+c_2\sin t)+\frac{1}{10}e^{2t}+\frac{1}{5}e^t$$

$(e^t)^{-1}$ ، $\operatorname{Ln}x$ ، $(e^t)^2=x^2$ ، x

$$\xlongequal[t=\operatorname{Ln}x]{x=e^t} x^{-1}\left(c_1\cos(\operatorname{Ln}x)+c_2\sin(\operatorname{Ln}x)\right)+\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{5}x$$

تمرین ⑥ $y''+\frac{1}{x}y'-\frac{y}{x^2}=\frac{1}{x^2+x^3}$, $x>0$

راهنمایی: طرفین در x^2 ضرب $\Rightarrow x^2y''+xy'-y=\frac{x^2}{x^2+x^3} \to \frac{1}{1+x} \to f(x)$

که یک معادله کوشی-اویلر مرتبه دوم غیرهمگن است ← با تعویض متغیر $x=e^t$ ← ادامه ح.ح.

تمرین ⑦ $x^3y'''+xy'-y=\sin(\ln x^2)$ تمرین ⑧ $x^2y''-2xy'+2y=3\ln x-\frac{1}{x^2}$

* (ب) اکنون برای تشریح حل معادله کوشی-اویلر در حالت کلی (۲) ص ۳۵ ، با تعویض متغیر $ax+b=e^t$ و مشابه آنچه برای حالت ساده در (الف) تشریح شد بدست می‌آوریم

$(ax+b)y'=a\bar{y}'(t)$ و $(ax+b)^2y''=a^2(\bar{y}''-\bar{y}')$ و ...

و به همین ترتیب الی آخر. با جایگذاری عبارات فوق در معادله کوشی-اویلر کلی (۲) ص ۳۵ به یک معادله خطی مرتبه n با ضرایب ثابت می‌رسیم که با حل آن آشنا شده‌ایم.

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید:

① $\frac{1}{16}\big((\underbrace{4x+1}_{ax+b})\big)^2y''+(\underbrace{4x+1}_{ax+b})y'-4y=\frac{\ln(4x+1)}{4x+1}$ (1)

$a=4, b=1$

حل: کوشی-اویلر کلی ← با تعویض متغیر $4x+1=e^t$ داریم:

$(ax+b)y'=a\bar{y}'(t) \longrightarrow (4x+1)y'=4\bar{y}'(t)$

$(ax+b)^2y''=a^2(\bar{y}''(t)-\bar{y}'(t)) \longrightarrow (4x+1)^2y''=4^2(\bar{y}''(t)-\bar{y}'(t))=16(\bar{y}''(t)-\bar{y}'(t))$

در معادله جایگذاری

$$\Rightarrow \frac{1}{16}\left(16(\bar{y}''(t)-\bar{y}'(t))\right)+4\bar{y}'(t)-4\bar{y}(t)=\frac{\ln(e^t)}{e^t}=\frac{t}{e^t}=te^{-t}$$

$$\Rightarrow \bar{y}''(t)-\bar{y}'(t)+4\bar{y}'(t)-4\bar{y}(t)=te^{-t}$$

$$\Rightarrow \bar{y}''(t)+3\bar{y}'(t)-4\bar{y}(t)=te^{-t} \longrightarrow (2)$$

مرتبه دوم خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت

$$\Rightarrow \lambda^2+3\lambda-4=0 \longrightarrow (\lambda+4)(\lambda-1)=0$$

$\lambda_1=-4 \longrightarrow \bar{y}_1(t)=e^{-4t}$

$\lambda_2=1 \longrightarrow \bar{y}_2(t)=e^t$

جواب عمومی (۲): $\bar{y}(t)=\bar{y}_g(t)+\bar{y}_p(t)$

$\bar{y}_g$: $c_1\bar{y}_1+c_2\bar{y}_2=c_1e^{-4t}+c_2e^t$

روش اول: طرف راست (۲) $=te^{-t} \overset{\text{فرض}}{=} \bar{f}(t)$ ← با روش ضرایب نامعین حالت ۴ می‌شود

روش دوم: از روش تغییر پارامترها $\longrightarrow \bar{y}_p(t)=\bar{v}_1(t)\bar{y}_1(t)+\bar{v}_2(t)\bar{y}_2(t)$

که برای یافتن $\bar{v}_1(t)$ و $\bar{v}_2(t)$ داریم:

۳۹

$$\bar v_1(t)=\int \frac{-\bar y_2\,\bar f(t)}{W(\bar y_1,\bar y_2)}\,dt=\int -\frac{e^{t}(te^{-t})}{5e^{-3t}}\,dt=-\frac15\int\frac{t}{e^{-3t}}\,dt=-\frac15\int te^{3t}\,dt$$

$$\begin{vmatrix}\bar y_1&\bar y_2\\ \bar y_1'&\bar y_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^{-4t}&e^{t}\\ -4e^{-4t}&e^{t}\end{vmatrix}=e^{-3t}+4e^{-3t}=5e^{-3t}$$

$$\overset{\text{از جزء به جزء}}{=}-\frac15\left(\frac13te^{3t}-\frac19e^{3t}\right)$$

$$\bar v_2(t)=\int\frac{\bar y_1\,\bar f(t)}{W(\bar y_1,\bar y_2)}\,dt=\int\frac{e^{-4t}(te^{-t})}{5e^{-3t}}\,dt=\frac15\int te^{-2t}\,dt$$

$$\overset{\text{از جزء به جزء}}{=}\frac15\left(-\frac12te^{-2t}-\frac14e^{-2t}\right)$$

بنابراین:

$$\bar y_p(t)=\bar v_1\bar y_1+\bar v_2\bar y_2=-\frac15\left(\frac13te^{3t}-\frac19e^{3t}\right)e^{-4t}+\frac15\left(-\frac12te^{-2t}-\frac14e^{-2t}\right)e^{t}$$

در نتیجه:

جواب عمومی (۲): $\bar y(t)=\bar y_g(t)+\bar y_p(t)$

$$=c_1e^{-4t}+c_2e^{t}-\frac15\left(\frac13te^{3t}-\frac19e^{3t}\right)e^{-4t}+\frac15\left(-\frac12te^{-2t}-\frac14e^{-2t}\right)e^{t}$$

$(e^t)^{-4}=(4x+1)^{-4}$, $\quad e^t \to 4x+1$, $\quad t\to\ln(4x+1)$, $\quad (e^t)^3=(4x+1)^3$, $\quad (e^t)^{-2}=(4x+1)^{-2}$

$$\xrightarrow[t=\ln(4x+1)]{4x+1=e^t} c_1(4x+1)^{-4}+c_2(4x+1)-\frac15\left(\frac13\ln(4x+1)\times(4x+1)^3-\frac19(4x+1)^3\right)(4x+1)^{-4}$$
$$+\frac15\left(-\frac12\ln(4x+1)\times(4x+1)^{-2}-\frac14(4x+1)^{-2}\right)(4x+1)$$

$=$ جواب عمومی (۱) $=y(x)$

تمرین ۲: $(2x+1)^2y''+2(2x+1)y'+16y=4\ln(2x+1)$

تمرین ۳: $(3x+2)^2y''+\underbrace{(9x+6)}_{3(3x+2)}y'-36y=3x^2+4x+1$

راهنمایی: با $3x+2=e^t$ ← $x=\frac{e^t-2}{3}$ ← داریم:

$$f(x)=3x^2+4x+1=3\left(\frac{e^t-2}{3}\right)^2+4\left(\frac{e^t-2}{3}\right)+1=\cancel{3}\left(\frac{e^{2t}-4e^t+4}{\cancel{9}\,3}\right)+\frac{4e^t-8}{3}+1\xrightarrow{\text{جمع مخرج مشترک}}\frac{e^{2t}-1}{3}$$
$$=\frac13e^{2t}-\frac13=\bar f(t)$$

ادامه حل مث به شکل بالا انجام شود!