به نام خدا

نام درس: معادلات دیفرانسیل

مدرس: رسول کاظمی

@rasoolkazemi تلگرام

مرجع:

۱- معادلات دیفرانسیل و کاربرد آن تألیف: دکتر/ مهوش ایرانی چیان انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.

۲- معادلات دیفرانسیل تألیف دکتر بیژن طاهری انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان

فصل اول: تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف: هر رابطه بین یک تابع مجهول، متغیرهای مستقل تابع و مشتقهای تابع نسبت به متغیرهای مستقل یک معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود.

مثال: $y = y(x)$ متغیر مستقل، متغیر وابسته

الف) $\underbrace{y'' + xy' = \sin x}$ یک معادله دیفرانسیل

ب) $\underbrace{y'' + 2yy' = 0}$ یک معادله دیفرانسیل

مثال: $u = u(t, x)$ متغیر وابسته، متغیرهای مستقل

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t + \sin x}_{\text{معادله دیفرانسیل}}$$

تعریف: اگر تابع مجهول ظاهر شده در یک معادله دیفرانسیل تنها تابعی از یک متغیر مستقل باشد آنگاه معادله را یک معادله دیفرانسیل عادی می‌نامیم. اما اگر تابع مجهول به بیش از یک متغیر مستقل، وابسته باشد آنگاه معادله را یک معادله مشتق جزئی گوئیم.

مثال:

$y'' + e^x y' = \sinh x$ معادله دیفرانسیل معمولی

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ معادله دیفرانسیل جزئی $u = u(x, t)$

در این درس فقط با معادلات دیفرانسیل عادی سروکار داریم. ODE

ODE → ordinary differential equation

تعریف (جواب یک معادله دیفرانسیل) به هر تابعی که به جای تابع مجهول معادله قرار گیرد و تساوی در معادله برقرار باشد یک جواب معادله دیفرانسیل گوئیم

مثال: معادله دیفرانسیل $y'+y=0$ مفروض است تابع $y=e^{-x}$ جوابی از این معادله است زیرا

$$\begin{cases} y=e^{-x} \\ y'=-e^{-x} \end{cases} \Longrightarrow y+y'=e^{-x}-e^{-x}=0 \xrightarrow{\text{جواب معادله است}} y=e^{-x}$$

البته $y=3e^{-x}$ نیز جواب است. همچنین $y=\sqrt{2}\,e^{-x}$. در واقع برای هر ثابت c تابع $y=ce^{-x}$ جواب معادله است.

مثال: معادله دیفرانسیل $y''-y=0$ مفروض است.

$y=e^{x}$ یک جواب معادله است زیرا

$$y=e^{x}\Rightarrow y'=e^{x}\Rightarrow y''=e^{x}\Rightarrow y''-y=0$$

همچنین $y=e^{-x}$ نیز یک جواب معادله است (چک کنید)

$y=\sinh x$ نیز جواب معادله است

$y=\cosh x$ نیز جواب معادله است

$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$ نیز جواب معادله است که c_1 و c_2 اعداد حقیقی اند.

تعریف: (مرتبه یک معادله): به بزرگترین مرتبه مشتق تابع مجهول موجود در یک معادله دیفرانسیل، مرتبه آن معادله گوئیم.

مثال:

الف) $xy''' + y'' - y'^{4} = e^{x} \longrightarrow$ معادله مرتبه ۳

ب) $y'' - 2xy' + x^2y = \sin x \longrightarrow$ معادله مرتبه ۲

ج) $y'' + y(y'')^{3} + \frac{x}{1+x}y' = e^{-x} \longrightarrow$ مرتبه ۲

تعریف (جواب عمومی): برخی از معادلات دیفرانسیل دارای چند جواب یا حتی بی نهایت جواب هستند که همه آنها را می توان به صورت یک فرمول کلی که شامل یک یا چند ثابت دلخواه است بیان کرد. این فرمول کلی را جواب عمومی معادله می نامیم.

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\underbrace{y'-y=0}_{\text{مرتبه ۱}}$ به صورت $\underbrace{y=ce^{x}}_{\text{جواب ۱ پارامتری}}$ است که c یک ثابت دلخواه است.

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\underbrace{y''-y=0}_{\text{مرتبه ۲}}$ به صورت

$$\underbrace{y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}}_{\text{جواب ۲ پارامتری}}=d_1\sinh x+d_2\cosh x$$

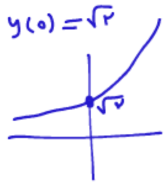
است که c_1، c_2 ثابتهای دلخواه هستند.

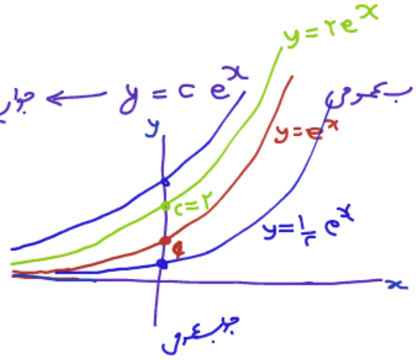
نکته: به صورت کلی جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n، یک تابع n-پارامتری شامل n ثابت دلخواه است.

تعریف: (جواب خصوصی) اگر در جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل به جای پارامترها اعداد مشخصی قرار دهیم جواب حاصل را یک جواب خصوصی معادله می‌نامیم.

مثال: معادله $y'-y=0$ ⟵ جواب عمومی $y=ce^x$ ⟵ جواب خصوصی $y=\sqrt{2}e^x$

$y(0)=\sqrt{2}$





مثال: معادله $y''-y=0$ مفروض است. جواب عمومی $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$

مثال: معادله $y''-y=0$ را همراه شرایط اولیه $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=-1 \end{cases}$ حل کنید.

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x} \Rightarrow \begin{cases} c_1e^0+c_2e^{-0}=1 \\ c_1e^0-c_2e^{-0}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2=1 \\ c_1-c_2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c_1=0 \\ c_2=1 \end{matrix}$$

$y=e^{-x}$ جواب خصوصی

تعریف (جواب غیرعادی): به جوابی از معادله دیفرانسیل که نتوانیم آن را از روی جواب عمومی به دست آوریم جواب غیرعادی (جواب منفرد) معادله گوئیم.

مثال: معادله $y'=\frac{3}{2}\sqrt[3]{y}$ مفروض است.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{y} \Rightarrow \frac{2}{3}\frac{dy}{\sqrt[3]{y}}=dx \Rightarrow \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}dy=dx$$

از دو طرف انتگرال می‌گیریم:

$$\int \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}dy=\int dx \Rightarrow y^{\frac{2}{3}}=x+c \Rightarrow y=(x+c)^{\frac{3}{2}}$$

جواب عمومی معادله.

از طرفی $y=0$ نیز جواب معادله است (چون $y=0 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow 0=\frac{3}{2}\sqrt[3]{0}$ ✓)

اما این جواب به ازای هیچ مقدار ثابت c از جواب عمومی به دست نمی‌آید. پس $y=0$ جواب غیرعادی یا منفرد معادله است.

سؤال: چگونه می‌توان جواب غیرعادی یک معادله را به دست آورد؟ برای معادلات مرتبه اول پاسخ به این سؤال ...

معادله دیفرانسیل مرتبه اول $F(x,y,y')=0$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم جواب عمومی آن $G(x,y,c)=0$ باشد. برای تعیین پوش (پوش یک دسته منحنی $G(x,y,c)=0$ منحنی است که تمام اعضای

$G(x,y,c)=0$ را به‌طور مماس قطع می‌کند) یا جواب غیرعادی معادله کافی است c را از دستگاه

$$\begin{cases} G(x,y,c)=0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial c}=0 \end{cases}$$

حذف کنیم تا منحنی جواب غیرعادی به دست آید.

مثال: می‌دانیم که جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y=xy'+(y')^2$ به صورت $y=cx+c^2$ است. جواب غیرعادی معادله را در صورت وجود بیابید.

$G(x,y,c)=y-cx-c^2=0$ $\qquad F(x,y,y')=y-xy'-(y')^2=0$

حل: برای یافتن جواب غیرعادی باید c را از دستگاه روبه‌رو حذف کنیم:

$$\begin{cases} y=cx+c^2 \\ 0=x+2c \end{cases} \Rightarrow c=-\frac{x}{2} \xrightarrow{\text{معادله اول}} y=-\frac{x}{2}(x)+\left(-\frac{x}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}x^2$$

پس $y=-\frac{1}{4}x^2$ جواب غیرعادی معادله است.

مثال: جواب‌های غیرعادی معادله $(y')^2-4y=0$ را بیابید.

حل:

$$(y')^2=4y \Rightarrow y'=\pm 2\sqrt{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\pm 2\sqrt{y} \Rightarrow \frac{dy}{2\sqrt{y}}=\pm dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{2\sqrt{y}}=\int \pm dx \Rightarrow \sqrt{y}=\pm x+c \rightsquigarrow \sqrt{y}=\pm x \pm c$$

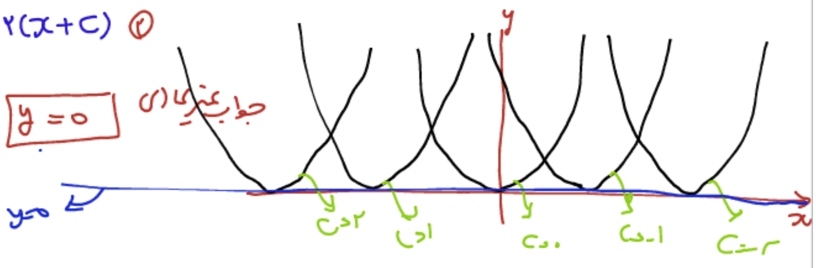
$$\Rightarrow y=(x+c)^2 \quad \text{جواب عمومی}$$

حال برای یافتن جواب منفرد معادله اخیر باید c را از دستگاه

$$\begin{cases} y=(x+c)^2 & (1) \\ 0=2(x+c) & (2) \end{cases}$$

حذف کنیم

$$(2) \Rightarrow c=-x \xrightarrow{(1)} \boxed{y=0} \quad \text{جواب غیرعادی}$$



مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y=(y')^2-3xy'+3x^2$ به صورت $y=x^2+cx+c^2$ است. جواب های منفرد دستگاه را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} y=x^2+cx+c^2 \\ 0=0+x+2c \Rightarrow c=-\frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow y=x^2+\left(-\frac{x}{2}\right)x+\left(-\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow y=x^2-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{4}=\frac{3}{4}x^2$$

پس $y=\frac{3}{4}x^2$ جواب منفرد (غیرعادی) معادله است

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(xy'-yy')^2+(y-x)'=2(x+yy')^2$ به صورت $(x-c)^2+(y-c)^2=2c^2$ است. جواب منفرد دستگاه را بیابید.

حل: باید c را از دستگاه روبرو حذف کنیم.

$$\begin{cases} (x-c)^2+(y-c)^2=2c^2 \\ -2(x-c)-2(y-c)=\cancel{4c} \end{cases} \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow \boxed{y=-x}$$

از معادله دوم c خود به خود حذف شد

پس $y=-x$ جواب منفرد معادله است

مثال: جوابهای منفرد معادله $1+(y')^2=\frac{1}{y^2}$ را بیابید.

حل: ابتدا باید جواب عمومی معادله را بیابیم.

$$(y')^2=\frac{1}{y^2}-1=\frac{1-y^2}{y^2} \Rightarrow y'=\pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

$$\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=\pm dx \Rightarrow \int\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=\pm\int dx$$

با تغییر متغیر $\begin{cases} z=1-y^2 \\ dz=-2y\,dy \end{cases}$ داریم

$$\int\frac{-\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z}}=\pm(x+c)$$

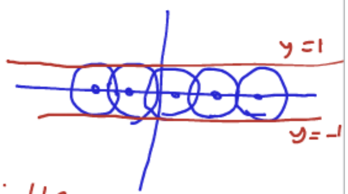
$$-\sqrt{z}=\pm(x+c) \Rightarrow -\sqrt{1-y^2}=\pm(x+c) \Rightarrow 1-y^2=(x+c)^2$$

$$\Rightarrow (x+c)^2+y^2=1$$

برای یافتن جوابهای منفرد از دستگاه زیر c را حذف می کنیم

$$\begin{cases} (x+c)^2+y^2=1 \\ 2(x+c)=0 \Rightarrow c=-x \end{cases} \quad y^2=1 \Rightarrow \boxed{y=\pm 1}$$

جوابهای منفرد



تمرین ۱- جوابهای منفرد معادله $(y')^2(1-y)^2 = 2-y$ را بیابید.

تمرین ۲: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x(y')^2 - 2yy' + x = 0$ به صورت $y = \frac{c}{2}x^2 + \frac{1}{2c}$ است. جوابهای غیرعادی را بیابید.

معادله دیفرانسیل نظیر یک دسته منحنی:

همانطور که در بخش قبل بیان شد جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n در صورت وجود یک خانواده n-پارامتری از خمهادر صفحه به دست می دهد. حال برعکس فرض کنید یک خانواده n پارامتری از خمهای مسطح (درصفحه xy) $G(x,y,c_1,\dots,c_n)$ داده شده باشد. می خواهیم معادله دیفرانسیلی را بیابیم که $G(x,y,c_1,\dots,c_n)$ جواب عمومی آن باشد. بدین منظور الگوریتم زیر را دنبال می کنیم:

۱- به تعداد پارامترهای ظاهر شده در دسته منحنی از آن نسبت به x مشتق می گیریم. (در این مرحله توجه کنید که y تابعی از x است)

۲- n معادله به دست آمده در مرحله ۱ با خود معادله $G(x,y,c_1,\dots,c_n)=0$ تشکیل یک دستگاه $n+1$ معادله ای می دهد. از این دستگاه پارامترها را حذف می کنیم تا یک معادله دیفرانسیل مرتبه n بدست آید.

(مرتبه معادله = تعداد پارامترهای دسته منحنی)

مثال: معادله دیفرانسیل نظیر دسته منحنی $y = ce^{2x}$ را بیابید.

$$\begin{cases} y = ce^{2x} \\ y' = 2ce^{2x} \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{y'} = \frac{\cancel{c}\,\cancel{e^{2x}}}{2\cancel{c}\,\cancel{e^{2x}}} \Rightarrow \boxed{y' = 2y}$$

مثال: معادله دیفرانسیل نظیر دسته منحنی $y = \tan(x+c)$ را بیابید.

$$\begin{cases} y = \tan(x+c) \\ y' = \underline{1 + \tan^2(x+c)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y' = 1 + y^2}$$

مثال: معادله دیفرانسیل نظیر دسته منحنی $y = c_1e^x + c_2\sin x$ را بیابید.

$$\begin{cases} y = c_1e^x + c_2\sin x \\ y' = c_1e^x + c_2\cos x \\ y'' = c_1e^x - c_2\sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + y'' = 2c_1e^x \Rightarrow c_1 = \frac{y+y''}{2e^x} \\ y - y'' = 2c_2\sin x \Rightarrow c_2 = \frac{y-y''}{2\sin x} \end{cases}$$

جایگذاری در معادله دوم (چون تا حالا از معادله دوم استفاده نکرده ایم)

$$y' = \frac{y+y''}{2e^x}e^x + \frac{y-y''}{2\sin x}\cos x \Rightarrow \boxed{y' = \frac{y+y''}{2} + \frac{y-y''}{2}\cot x}$$

معادله دیفرانسیل نظیر.

مثال: معادله دیفرانسیل نظیر دسته منحنی $y = c_1\cos x + c_2\sin x$ را به دست آورید.

$$\begin{cases} y = c_1\cos x + c_2\sin x \\ y' = -c_1\sin x + c_2\cos x \\ y'' = -c_1\cos x - c_2\sin x \end{cases} \Longrightarrow \boxed{y + y'' = 0}$$

مثال: معادله دیفرانسیل همهٔ دایره‌های در صفحه مختصات که مرکزشان روی محور yها قرار دارد را بیابید.

معادلهٔ دایره هائی که مرکزشان روی محور yها قرار دارد به صورت $x^2+(y-c_1)^2=c_2^2$ است که یک خانواده دو پارامتری است. برای یافتن معادله دیفرانسیل نظیر آن باید c_1 و c_2 را از دستگاه زیر حذف کنیم

$$\begin{cases} x^2+(y-c_1)^2=c_2^2 \\ 2x+2(y')(y-c_1)=0 \Longrightarrow y-c_1 = \dfrac{-2x}{2y'} = -\dfrac{x}{y'} \\ 2+2y''(y-c_1)+2(y')^2=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 2+2y''\left(\frac{-x}{y'}\right)+2(y')^2=0$$

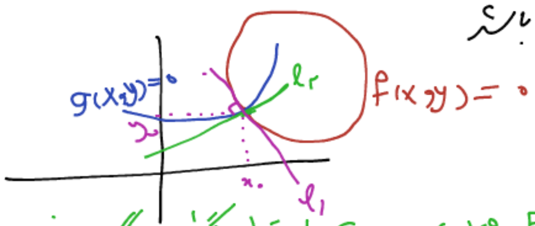
$$\Longrightarrow \boxed{1-\frac{xy''}{y'}+(y')^2=0}$$ معادله دیفرانسیل

تمرین ۳: معادله دیفرانسیل نظیر دسته منحنی $y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}$ را بیابید.

تمرین ۴: " " " " $y^2=cx^3$ را بیابید.

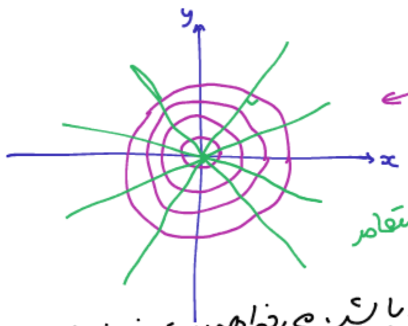
مسیرهای متعامد (قائم) یک دسته منحنی

تعریف: دو منحنی $f(x,y)=0$ و $g(x,y)=0$ را بر هم در نقطهٔ $P(x_0,y_0)$ عمود گوئیم هرگاه اولاً دو خم در این نقطه یکدیگر را قطع کنند ($f(x_0,y_0)=0$ و $g(x_0,y_0)=0$) در ثانی اگر l_1 خط مماس بر $f(x,y)$ در P و l_2 خط مماس بر $g(x,y)$ در P باشد آنگاه l_1 و l_2 بر هم عمود باشند یعنی حاصلضرب شیب l_1 و l_2 برابر با -1 باشد.



تعریف: دو دسته منحنی $F(x,y,c_1)=0$ و $G(x,y,c_2)=0$ را متعامد گوئیم هرگاه هر خم از دسته منحنی $F(x,y,c_1)=0$ بر هر خم از دسته منحنی $G(x,y,c_2)$ عمود باشد و بر عکس.

مثال: دو دسته منحنی $x^2+y^2=c_1^2$ و $y=c_2x$ برهم عمودند (به شکل زیر توجه کنید)



$F(x,y,c_1) = x^2+y^2-c_1^2=0$

$G(x,y,c_2) = y-c_2x=0$

دو دسته منحنی متعامد

حال فرض کنید دسته منحنی $F(x,y,c_1)=0$ داده شده باشد. می خواهیم دسته منحنی $G(x,y,c_2)$ را چنان بیابیم که دو دسته منحنی برهم عمود باشند. در این حالت گوئیم مسیرهای متعامد (قائم) دسته منحنی $F(x,y,c_1)=0$ به صورت $G(x,y,c_2)=0$ است. بدین منظور الگوریتم زیر را دنبال می کنیم.

۱- معادله دیفرانسیل مرتبه اول تغییر دسته منحنی $F(x,y,c_1)=0$ را می یابیم.

۲- در معادله یافت شده در مرحله ۱، y' را با $-\frac{1}{y'}$ جایگزین می کنیم.

۳- جواب معادله دیفرانسیل حاصل از مرحله ۲ را می یابیم که همان $G(x,y,c_2)=0$ است.

مثال: مسیرهای متعامد دسته منحنی $x^2+y^2=2cx$ را بیابید.

ابتدا c را از دستگاه روبرو حذف می کنیم:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2cx \\ 2x+2yy'=2c \Rightarrow c = x+yy' \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=2(x+yy')x$$

جایگذاری در معادله اول

$$\Rightarrow \boxed{2xyy'=y^2-x^2}$$

معادله دیفرانسیل تغییر دسته منحنی

$y' \to -\frac{1}{y'}$

$$2xy\left(-\frac{1}{y'}\right) = y^2-x^2$$

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$$ بعداً حل آن را می آموزیم

مثال: مسیرهای متعامد دسته منحنی $y=cx^2$ را بیابید.

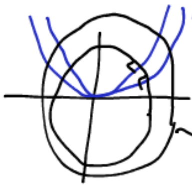
ابتدا معادله دیفرانسیل تغییر دسته منحنی $y=cx^2$ را می یابیم. بدین منظور c را از دستگاه زیر حذف می کنیم:

$$\begin{cases} y=cx^2 \\ y'=2cx\end{cases} \xRightarrow{\text{تقسیم}} \frac{y}{y'}=\frac{cx^2}{2cx}=\frac{x}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{y}{y'}=\frac{x}{2}} \xrightarrow{y'\to -\frac{1}{y'}} \boxed{-yy'=x/2}$$

باید حل کنیم:

$$\Rightarrow -yy'=\frac{x}{2} \Rightarrow -y\frac{dy}{dx}=x/2 \Rightarrow \int -y\,dy=\int\frac{x}{2}dx \Rightarrow -\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{4}+c$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=-C \Rightarrow \frac{x^2}{2}+y^2=\boxed{\overset{C_1}{-2C}} \Rightarrow \frac{x^2}{2}+y^2=C_1>0$$



مثال: مسیرهای متعامد دسته منحنی $x^2+2y^2=c^2$ را بیابید.

ابتدا معادله دیفرانسیل نظیر دسته منحنی $x^2+2y^2=c^2$ را می‌یابیم.
بدین منظور c را از دستگاه زیر حذف می‌کنیم

$$\begin{cases} x^2+2y^2=c^2 \\ 2x+4yy'=0 \end{cases} \Rightarrow 2yy'+x=0$$

$$y' \longrightarrow -\frac{1}{y'}$$

$$-\frac{2y}{y'}+x=0 \Rightarrow xy'=2y$$

$$x\frac{dy}{dx}=2y \Rightarrow \frac{dy}{2y}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{2y}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|y|=\ln|x|+C_1$$

$$\Rightarrow \ln|y|=2\ln|x|+2C_1 \Rightarrow \ln|y|=\ln x^2+2C_1 \Rightarrow |y|=e^{\ln x^2+2C}$$

$$\Rightarrow |y|=e^{\ln x^2}e^{2C_1} \Rightarrow |y|=x^2e^{2C_1} \Rightarrow y=\underbrace{\pm e^{2C_1}}_{C}x^2$$

$$\Rightarrow y=cx^2$$

مثال: مسیرهای متعامد دسته منحنی $y=cx^2+4$ را به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} y=cx^2+4 \quad ① \\ y'=2cx \end{cases} \Rightarrow c=\frac{y'}{2x} \xrightarrow[①]{\text{جاگذاری در}} y=\frac{y'}{2x}x^2+4 \Rightarrow \boxed{y=\frac{y'x}{2}+4}$$

$$y' \longrightarrow -\frac{1}{y'} \Rightarrow y=-\frac{x}{2y'}+4 \Rightarrow (y-4)2y'=-x$$

$$\Rightarrow (2y-8)y'=-x \Rightarrow (2y-8)\frac{dy}{dx}=-x \Rightarrow (2y-8)\,dy=-x\,dx$$

$$\int(2y-8)\,dy=-\int x\,dx \Rightarrow y^2-8y=-\frac{x^2}{2}+C \Rightarrow \boxed{y^2-8y+\frac{x^2}{2}=c}$$

مثال: مسیرهای متعامد دسته منحنی $y = c\sin x$ را بیابید.

$$\begin{cases} y = c\sin x \\ y' = c\cos x \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{y}{y'} = tg x} \xrightarrow{y' \to -\frac{1}{y'}} -yy' = tg x$$

تانژانت

$$-y\frac{dy}{dx} = tg x \Rightarrow -y\,dy = tg x\,dx \Rightarrow +\int y\,dy = +\int -\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{2} = \ln|\cos x| + c}$$

تمرین ⑤ مسیرهای متعامد دسته منحنی $y = \frac{cx}{x+1}$ را بیابید.

تمرین ۶ مسیرهای متعامد دسته منحنی $y^2 = cx^3$ را بیابید.

مثال: مسیرهای متعامد دسته منحنی $\int_0^x t^2 y(t)\,dt = c + x^3 y$ را بیابید.

$$\begin{cases} \int_0^x t^2 y(t)\,dt = c + x^3 y \\ x^2 y = 3x^2 y + x^3 y' \end{cases} \Rightarrow -2x^2 y = x^3 y' \Rightarrow \boxed{-2y = xy'}$$

$$y' \longrightarrow -\frac{1}{y'} \Rightarrow -2y = \frac{-x}{y'} \Rightarrow 2yy' = x \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = x \Rightarrow 2y\,dy = x\,dx$$

$$\Rightarrow \int 2y\,dy = \int x\,dx \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y^2 - \frac{x^2}{2} = c$$

فصل دوم: معادلات دیفرانسیل مرتبه اول:

همانطور که در فصل قبل اشاره شد معادله دیفرانسیل مرتبه اول $F(x,y,y')=0$ را یک معادله صریح گوئیم هرگاه بتوانیم y' را برحسب x و y بدست آوریم یعنی بتوانیم معادله مذکور را به صورت $y'=f(x,y)$ بنویسیم. در غیر اینصورت آن را یک معادله ضمنی گوئیم. در ادامه ابتدا به بررسی نحوه حل معادلات صریح $y'=f(x,y)$ می‌پردازیم و سپس روش حل معادلات مرتبه اول $F(x,y,y')=0$ را بررسی می‌کنیم.

۱- معادلات تفکیک پذیر (جدا شدنی):

تعریف: معادله دیفرانسیل مرتبه اول صریح $y'=f(x,y)$ را تفکیک پذیر گوئیم هرگاه $f(x,y)$ را بتوانیم به صورت حاصلضرب دو تابع، یکی تنها برحسب x و دیگری تنها برحسب y بنویسیم یعنی $f(x,y)=p(x)q(y)$ که در آن p و q توابع پیوسته هستند. برای حل توجه کنید که

$$y' = p(x)q(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p(x)q(y) \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{q(y)} = p(x)\,dx \quad *}$$

البته در این مرحله توجه کنید که $q(y) \neq 0$. اما اگر y_0 چنان باشد که $q(y_0)=0$ آنگاه $y(x)=y_0$ خود جوابی از معادله است که در $*$ به حساب نیامده و آن را جواب تعادلی می‌نامیم. برای y هایی که $q(y)\neq 0$ از دو طرف $*$ انتگرال می‌گیریم

$$Q(y) \leftarrow \int \frac{dy}{q(y)} = \overbrace{\int p(x)\,dx}^{P(x)} + C \Rightarrow \boxed{Q(y) = P(x) + C}$$

جواب معادله

مثال: جواب عمومی معادله $y' = 2xy$ را بیابید.

$$y' = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

توجه کنید که $y=0$ جواب تعادلی است. با انتگرال گیری از دو طرف رابطه را خواهیم داشت:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx \Rightarrow \ln|y| = x^2 + C_1 \Rightarrow |y| = e^{x^2+C_1} = e^{x^2}e^{C_1}$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{\pm e^{C_1}}_{C} e^{x^2} \Longrightarrow y = Ce^{x^2}$$ جواب عمومی

مثال: معادله دیفرانسیل $y' = e^{x-2y}$ را حل کنید.

حل:

$$y' = e^{x}e^{-2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{x}e^{-2y} \Rightarrow \frac{dy}{e^{-2y}} = e^{x}dx$$

$$\Rightarrow e^{2y}dy = e^{x}dx \Longrightarrow \int e^{2y}dy = \int e^{x}dx \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}e^{2y} = e^{x} + C}$$

مثال: جواب عمومی معادله $y' = 1+x^2+y^2+x^2y^2$ را بدست آورید.

$$y' = 1+x^2+y^2(1+x^2) = (1+x^2)(1+y^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1+x^2)(1+y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = (1+x^2)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = (1+x^2)\,dx \Rightarrow \boxed{tg^{-1}y = x + \frac{x^3}{3} + C}$$

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$2x(1+y)dx = (1-x^2)\,dy \Longrightarrow 2x(1+y) = (1-x^2)\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'}$$

$$\Longrightarrow y' = \frac{2x}{1-x^2}(1+y) \Longrightarrow \frac{dy}{1+y} = \frac{2x}{1-x^2}dx$$

$y=-1$ جواب تعادلی

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{2x}{1-x^2}dx \Rightarrow \ln|1+y| = -\ln|1-x^2| + C_1$$

$$\Longrightarrow \ln|1+y| = \ln\frac{1}{|x^2-1|} + C_1 \Longrightarrow |1+y| = |x^2-1|e^{C_1}$$

$$\Longrightarrow 1+y = \underbrace{\pm e^{C_1}}_{C}|x^2-1| \Longrightarrow \boxed{y = C|x^2-1| - 1}$$

مثال: جواب عمومی معادله $y' = xe^{x^2-\ln y}$ را به دست آورید.

$$y' = xe^{x^2}e^{-\ln y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = xe^{x^2}e^{\ln\frac{1}{y}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = xe^{x^2}\frac{1}{y} \Longrightarrow$$

$$y\,dy = xe^{x^2}dx \Longrightarrow \int y\,dy = \int xe^{x^2}dx \Longrightarrow \boxed{\frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}e^{x^2} + C}$$

تمرین ۷ جواب عمومی معادلهٔ $y' = tgx \cdot tgy$ را به دست آورید

تمرین ۸. جواب عمومی معادلهٔ $x^2 dx + \sec x \cos y \, dy = 0$ را بیابید.

مثال: جواب عمومی معادلهٔ $y' \ln y \sec x = y$ را به دست آورید.

حل:

$$\frac{dy}{dx} \ln y \, \cancel{\sec x}^{\frac{1}{\cos x}} = y \Rightarrow \frac{\ln y}{y} dy = \cos x \, dx \Rightarrow \int \frac{\ln y}{y} dy = \int \cos x \, dx$$

$\ln y = u \Rightarrow \frac{1}{y} dy = du$

$$\int u \, du = \sin x + c \Rightarrow \frac{u^2}{2} = \sin x + C$$

$$\Rightarrow (\ln y)^2 = 2 \sin x + 2C$$

مثال: جواب خصوصی معادلهٔ $xyy' = \ln x + e$ را با شرط $y(1) = e$ بیابید.

$$yy' = \frac{\ln x + e}{x} \Rightarrow y \, dy = \frac{\ln x + e}{x} dx \Rightarrow \underbrace{\int y \, dy}_{\frac{y^2}{2}} = \int \frac{\ln x + e}{x} dx$$

$\ln x + e = u \Rightarrow \frac{1}{x} dx = du$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{(\ln x + e)^2}{2} + C$$

$$\boxed{e = y(1)} \Rightarrow \frac{e^2}{2} = \frac{(0 + e)^2}{2} + C \Rightarrow \boxed{C = 0} \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{(\ln x + e)^2}{2}$$ جواب خصوصی

تذکر ۱: معادلات به شکل $y' = f(ax + by + c)$ با تغییر متغیر $u = ax + by + c$ به یک معادلهٔ تفکیک‌پذیر تبدیل می‌شود.

مثال: جواب عمومی معادلهٔ $y' = (y - 4x + 3)^2$ را بیابید.

حل: با تغییر متغیر $u = y - 4x + 3$ داریم: $u' = y' - 4$ پس $y' = u' + 4$. با جاگذاری در معادله خواهیم داشت

$$u' + 4 = u^2 \Rightarrow u' = u^2 - 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \underbrace{u^2 - 4}_{(u-2)(u+2)} \Rightarrow \frac{du}{(u-2)(u+2)} = dx$$

$u = 2$ و $u = -2$ جواب‌های تعادلی دستگاه هستند. برای $u \neq \pm 2$ از رابطهٔ اخیر انتگرال می‌گیریم

$$\int \frac{du}{(u-2)(u+2)} = \int dx \quad *$$

$$\frac{1}{(u-2)(u+2)} = \frac{\overset{\frac{1}{4}}{\cancel{A}}}{u-2} + \frac{\overset{-\frac{1}{4}}{\cancel{B}}}{u+2}$$

$$\times (u-2): \quad \frac{1}{u+2} = A + \frac{B}{u+2}(u-2) \xrightarrow{u=2} A = \frac{1}{4}$$

$$\times (u+2): \quad \frac{1}{u-2} = \frac{A}{u-2}(u+2) + B \xrightarrow{u=-2} B = \frac{1}{-4}$$

$$* \ \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2} \right) du = x + C \Rightarrow \frac{1}{4} \left(\ln|u-2| - \ln|u+2| \right) = x + C$$

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| = x+c \Rightarrow \begin{cases} \ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| = 4(x+c) \\ u=2 \\ u=-2 \end{cases}$$ جوابهای تعادلی

$$\xRightarrow{u=y-4x+3} \begin{cases} \ln\left|\dfrac{y-4x+1}{y-4x+5}\right| = 4(x+c) \\ y-4x+3=2 \\ y-4x+3=-2 \end{cases}$$

مثال: جواب عمومی معادله $y' = 1+\sqrt{x-y+1}$ را بیابید.

$$u = x-y+1 \Rightarrow u' = 1-y' \Rightarrow y' = 1-u' \xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جایگذاری}} 1-u' = 1+\sqrt{u}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sqrt{u} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{u}} = -dx$$. جواب تعادلی $u=0$

برای $u\neq 0$ از دو طرف رابطه فوق انتگرال می‌گیریم

$$\int\frac{du}{\sqrt{u}} = -\int dx \Rightarrow 2\sqrt{u} = -x+c \Rightarrow \sqrt{u} = \frac{-x+c}{2}$$

$$\Rightarrow u = \frac{(-x+c)^2}{4} \xRightarrow{u=x-y+1} \begin{cases} x-y+1 = \frac{(-x+c)^2}{4} \\ x-y+1=0 \longrightarrow \text{جواب تعادلی} \end{cases}$$

تمرین ۹: جواب عمومی معادله $y' = 2+\dfrac{1}{\sin(2x-y)}$ را بیابید.

تمرین ۱۰: جواب عمومی معادله $y' = (9x-y+3)^2$ را بیابید.

تذکر: در برخی از معادلات با اعمال یک تغییر متغیر مناسب می‌توان معادله را به یک معادله دیفرانسیل تفکیک پذیر تبدیل کرد.

مثال: جواب عمومی معادله $y' = 1+xe^{x-y}$ را بیابید.

حل: با تغییر متغیر $u=x-y$ داریم $u'=1-y'$ و در نتیجه $y'=1-u'$ پس با جایگذاری در معادله خواهیم داشت

$$1-u' = 1+xe^{u} \Rightarrow -\frac{du}{dx} = xe^{u} \Rightarrow -\frac{du}{e^{u}} = +x\,dx$$

$$\Rightarrow \int -e^{-u}\,du = \int x\,dx \Rightarrow e^{-u} = \frac{1}{2}x^2+c \Rightarrow$$

$$-u = \ln\left(\frac{1}{2}x^2+c\right) \xRightarrow{u=x-y} y-x = \ln\left(\frac{1}{2}x^2+c\right)$$

$$\Rightarrow y = x+\ln\left(\frac{1}{2}x^2+c\right)$$

مثال: جواب عمومی معادله $y'+x=(x^2+2y+3)^{\frac{1}{3}}$ را بیابید.

$$u=x^2+2y+3 \Rightarrow u'=2x+2y'=2(x+y') \Rightarrow x+y'=\frac{u'}{2}$$

با جاگذاری در معادله داریم:

$$\frac{u'}{2}=u^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{du}{2dx}=u^{\frac{1}{3}} \xrightarrow[\text{جواب تقاطعی}]{u=0} \int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{3}}du=\int dx$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}u^{\frac{2}{3}}=x+c \Rightarrow \frac{3}{4}u^{\frac{2}{3}}=x+c \Rightarrow u^{\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}(x+c)$$

$$\Rightarrow u=\left[\frac{4}{3}(x+c)\right]^{\frac{3}{2}} \xrightarrow{u=x^2+2y+3} \begin{cases} x^2+2y+3=\left[\frac{4}{3}(x+c)\right]^{\frac{3}{2}} \\ x^2+2y+3=0 \quad \text{جواب تقاطعی} \end{cases}$$

مثال: معادله $xy^2(y^2+2xyy')=2x+1$ را حل کنید.

$$u=xy^2 \Rightarrow u'=y^2+2xyy' \Rightarrow uu'=2x+1 \Rightarrow u\frac{du}{dx}=2x+1$$

$$\Rightarrow \int u\,du=\int(2x+1)dx \Rightarrow \frac{u^2}{2}=x^2+x+c \Rightarrow u=\sqrt{2(x^2+x+c)}$$

$$\xrightarrow{u=xy^2} xy^2=\sqrt{2(x^2+x+c)}$$

تمرین ۱۱: معادله $y'+3x^2=\sqrt{y+x^3}$ را حل کنید.

تمرین ۱۲: جواب عمومی معادله $y'=2+3xe^{2x-y}$ را به دست آورید.

معادلات همگن:

تعریف: تابع $f(x,y)$ یک تابع همگن از درجه n نامیده می‌شود هرگاه برای هر عدد حقیقی $\lambda>0$ داشته باشیم $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$.

مثال:

الف: $f(x,y)=x^2-2xy \Rightarrow f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2x^2-2\lambda x\lambda y=\lambda^2(x^2-2xy)$
$=\lambda^2 f(x,y)$

پس f همگن از درجه ۲ است.

ب) $f(x,y)=xe^{\frac{x}{y}} \Rightarrow f(\lambda x,\lambda y)=\lambda x e^{\frac{\lambda x}{\lambda y}}$
$=\lambda xe^{\frac{x}{y}}=\lambda f(x,y)$

پس f همگن از درجه ۱ است.

ج) $f(x,y)=\sin(x-2y^2) \Rightarrow f(\lambda x,\lambda y)=\sin(\lambda x-2\lambda^2y^2)\neq\lambda^n\sin(x-2y^2)$

پس f همگن نیست.

تعریف: معادله دیفرانسیل $y'=f(x,y)$ را یک معادله دیفرانسیل همگن گوئیم هرگاه f تابع همگن از مرتبه صفر باشد یعنی

برای هر $\lambda>0$ داشته باشیم $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$

تذکر: می توان نشان داد که یک معادله دیفرانسیل $y'=f(x,y)$ همگن است اگر طرف راست تابعی از $\frac{y}{x}$ باشد یعنی
بتوانیم آن را به صورت $y'=g(\frac{y}{x})$ بنویسیم

$$\left(\lambda=\frac{1}{x}\Rightarrow f(\lambda x,\lambda y)=f(\tfrac{1}{x}x,\tfrac{1}{x}y)=f(1,\tfrac{y}{x})=g(\tfrac{y}{x})\right)$$

نکته: معادله دیفرانسیل $p(x,y)\,dx+q(x,y)\,dy=0$ همگن است هرگاه توابع p و q هر دو همگن از مرتبه یکسان باشند.) نیز

$$q(x,y)\,dy=-p(x,y)\,dx\Rightarrow y'=\underbrace{-\frac{p(x,y)}{q(x,y)}}_{f(x,y)}$$

برای حل یک معادله همگن از تغییر متغیر $u=\frac{y}{x}$ یا به طور معادل $y=xu$ استفاده می کنیم.
پس $y'=u+xu'$ و با جاگذاری در معادله همگن یک معادله تفکیک پذیر بدست می آوریم.

مثال: معادله $y'=\frac{y}{x}\ln\frac{x}{y}$ را حل کنید.

$$f(x,y)=\frac{y}{x}\ln\left(\frac{x}{y}\right)\Rightarrow f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda y}{\lambda x}\ln\frac{\lambda x}{\lambda y}=\frac{y}{x}\ln\frac{x}{y}=f(x,y)$$

پس معادله همگن است.

$$u=\frac{y}{x}\Rightarrow y=xu\Rightarrow y'=u+xu'\xrightarrow{\text{جاگذاری}}$$

$$u+xu'=u\ln u^{-1}\Rightarrow xu'=-u\ln u-u=-u(\ln u+1)$$

$$x\frac{du}{dx}=-u(\ln u+1)\Rightarrow\int\frac{du}{u(\ln u+1)}=\int-\frac{dx}{x}$$

$z=\ln u+1$
$dz=\frac{1}{u}du$

$$\Rightarrow\int\frac{dz}{z}=\int-\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln|z|=-\ln|x|+c_1$$

$$\Rightarrow\ln|z|+\ln|x|=c_1\Rightarrow\ln|zx|=c_1$$

$$\Rightarrow zx=\underbrace{\pm e^{c_1}}_{c}\Rightarrow x(\ln u+1)=c$$

$$\Rightarrow x\left(\ln\frac{y}{x}+1\right)=c$$

مثال: جواب عمومی $xy\,dx-(x^2+y^2)dy=0$ را بیابید.

$$p(x,y)=xy \Longrightarrow p(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{2}p(x,y)$$
$$q(x,y)=-(x^2+y^2) \Longrightarrow q(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{2}q(x,y) \Longrightarrow$$ معادله همگن است

معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$y'=\frac{xy}{x^2+y^2} \xrightarrow[\text{را بر } x^2 \text{ تقسیم می‌کنیم}]{\text{صورت و مخرج}} y'=\frac{y/x}{1+(y/x)^2}$$

قرار می‌دهیم

$$u=\frac{y}{x} \Rightarrow y=xu \Rightarrow y'=u+xu'$$

با جاگذاری در معادله داریم

$$u+xu'=\frac{u}{1+u^2} \Rightarrow xu'=\frac{u}{1+u^2}-u=\frac{\cancel{u}-\cancel{u}-u^3}{1+u^2}=\frac{-u^3}{1+u^2}$$

$$\Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{-u^3}{1+u^2} \Rightarrow \int\frac{1+u^2}{u^3}du=-\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\left(\frac{1}{u^2}+1\right)du=-\ln|x|+c$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{u}+u=-\ln|x|+c \Rightarrow \boxed{-\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-\ln|x|+c}$$

مثال: مسیرهای متعامد دسته منحنی $x^2+y^2=2cx$ را بیابید.

$$\begin{cases} x^2+y^2=2cx \\ 2x+2yy'=2c \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{2x+2yy'}=x \xrightarrow{y'\to -\frac{1}{y'}}$$

$$\frac{x^2+y^2}{2x-2y/y'}=x \Rightarrow x^2+y^2=2x^2-\frac{2xy}{y'}$$

$$\Rightarrow y^2-x^2=-\frac{2xy}{y'} \Rightarrow y'=\frac{2xy}{x^2-y^2} \Rightarrow y'=\frac{2\frac{y}{x}}{1-(\frac{y}{x})^2}$$

همگن

$$u=\frac{y}{x} \Rightarrow y=xu \Rightarrow y'=u+xu'$$

جاگذاری در معادله

$$u+xu'=\frac{2u}{1-u^2} \Rightarrow xu'=\frac{2u}{1-u^2}-u=\frac{2u-u+u^3}{1-u^2}$$

$$\Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{u+u^3}{1-u^2} \Rightarrow \frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du=\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1-u^2}{u(1+u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{1+u^2} = \frac{A+Au^2+Bu^2+Cu}{u(1+u^2)} = \frac{(A+B)u^2+Cu+A}{u(1+u^2)}$$

$$\begin{cases} A=1 \\ C=0 \\ A+B=-1 \end{cases} \Rightarrow B=-2$$

$$\Rightarrow \int \frac{1-u^2}{u(1+u^2)}\,du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{1+u^2}\right)du = \ln|x| + c$$

$$\ln|u| - \ln(1+u^2) = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow \ln\frac{|u|}{1+u^2} = \ln|x| + c \Rightarrow \ln\frac{\left|\frac{y}{x}\right|}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \ln|x| + c$$

تمرین ۱۳- معادله $y' = y\sin(\frac{y}{x}) + x$ $x\sin(\frac{y}{x})$ را حل کنید.

تمرین ۱۴- معادله $y' = \frac{y}{x+\sqrt{xy}}$ را حل کنید.

تمرین ۱۵- مسیرهای متعامد دسته منحنی $x^2+y^2=2cy$ را بیابید.

تذکر: معادلات به شکل $y' = f\left(\frac{ax+by}{a'x+b'y}\right)$ همگن هستند.

مثال: معادله $y' = \frac{x+2y}{2x-y}$ را حل کنید.

حل: ابتدا معادله را به صورت روبرو بازنویسی می‌کنیم

$$y' = \frac{\frac{x+2y}{x}}{\frac{2x-y}{x}} = \frac{1+2\frac{y}{x}}{2-\frac{y}{x}}$$

حال از تغییر متغیر $u = \frac{y}{x}$ یا به طور معادل $y = xu$ استفاده می‌کنیم. $y' = u + xu'$

با جایگذاری در معادله داریم

$$u + xu' = \frac{1+2u}{2-u} \Rightarrow xu' = \frac{1+2u}{2-u} - u = \frac{-2u+u^2+1+2u}{2-u} = \frac{u^2+1}{2-u}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u^2+1}{2-u} \Rightarrow \int\frac{2-u}{u^2+1}\,du = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\left(\frac{2}{1+u^2} - \frac{u}{1+u^2}\right)du = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow 2\tan^{-1}u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|x| + c \xRightarrow{u=\frac{y}{x}} 2\tan^{-1}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = \ln|x| + C$$

تمرین ۱۶: معادله $(x-y)\,dx + (x+y)\,dy = 0$ را حل کنید.

$$(x+y)\,dy = (y-x)\,dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x} \Rightarrow y' = \frac{y-x}{y+x} \Rightarrow \text{همگن}$$

تذکر ۲: معادلات به شکل $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$ که c و c' همزمان صفر نیستند همگن نیستند. اما در مورد آن دو حالت رخ می دهد:

حالت اول) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ (یعنی دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ موازی هستند) با تغییر متغیر

$$\begin{cases} u = ax+by \\ u' = a+by' \Rightarrow y' = \frac{u'-a}{b} \end{cases}$$

معادله به یک معادله دیفرانسیل تفکیک پذیر تبدیل می شود.

حالت دوم) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ (یعنی دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ متقاطع هستند)

ابتدا نقطه تقاطع دو خط را بدست می آوریم $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. حال از تغییر متغیر $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$ معادله به شکل $\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX+bY}{a'X+b'Y}\right)$ در می آید که یک معادله همگن است.

مثال: معادله زیر را حل کنید

$$y' = \frac{x+2y-1}{2x+4y+3}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{a'} , = \frac{b}{b'} = \frac{2}{4}$$

پس دو خط موازی. پس از تغییر متغیر استفاده می کنیم

$$u = x+2y$$

$$u' = 1+2y' \Rightarrow y' = \frac{u'-1}{2}$$

با جاگذاری در معادله داریم:

$$\frac{u'-1}{2} = \frac{u-1}{2u+3} \Rightarrow u' = \frac{2(u-1)}{2u+3} + 1 = \frac{2u-2+2u+3}{2u+3} = \frac{4u+1}{2u+3}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{4u+1}{2u+3} \Rightarrow \int \frac{2u+3}{4u+1}\,du = \int dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{\cancel{4u+6}\ \ 4u+1+5}{4u+1}\,du = \int dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \left(1 + \frac{5}{4u+1}\right) du = x + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(u + \frac{5}{4}\ln\left|u+\frac{1}{4}\right|\right) = x + c \Rightarrow \frac{1}{2}\left[(x+2y) + \frac{5}{4}\ln\left|x+2y+\frac{1}{4}\right|\right] = x + C$$

تمرین ۱۷: معادله زیر را حل کنید

$$(2x-y)\,dy + (2x-y+3)\,dx = 0 \Rightarrow (2x-y)\,dy = -(2x-y+3)\,dx$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{2x-y+3}{2x-y}$$

مثال: جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$(4x-y+7)dx=(2x+y-1)dy$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{4x-y+7}{2x+y-1} \qquad \frac{4}{2}=\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}=\frac{-1}{1}$$

پس دو خط متقاطع اند. نقطهٔ تقاطع آنها را می‌یابیم.

$$\begin{cases}4x-y=-7\\ 2x+y=1\end{cases}\Rightarrow 6x=-6\Rightarrow \boxed{x=-1},\ \boxed{y=3} \qquad A=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

حال از تغییر متغیر $\begin{cases}x=X-1\\ y=Y+3\end{cases}$ در این صورت با جاگذاری در معادله داریم

$$\frac{dY}{dX}=\frac{4X-Y}{2X+Y}=\frac{4-Y/X}{2+Y/X}$$

حال $u=Y/X \Leftarrow Y=Xu \Leftarrow Y'=u+Xu'$ در معادلهٔ اخیر جاگذاری می‌کنیم

$$u+Xu'=\frac{4-u}{2+u}\Rightarrow Xu'=\frac{4-u}{2+u}-u=\frac{4-u-2u-u^2}{2+u}=\frac{-u^2-3u+4}{2+u}$$

$$\Rightarrow X\frac{du}{dX}=\frac{-u^2-3u+4}{u+2}\Rightarrow \int -\frac{u+2}{u^2+3u-4}\,du=\int\frac{dX}{X}$$

$$-\int\frac{u+2}{u^2+3u-4}\,du=\ln|X|+c$$

$$\frac{u+2}{u^2+3u-4}=\frac{u+2}{(u+4)(u-1)}=\frac{\overset{2/5}{\cancel{A}}}{u+4}+\frac{\overset{3/5}{\cancel{B}}}{u-1}$$

$$-\left(\int\left(\frac{2/5}{u+4}+\frac{3/5}{u-1}\right)du\right)=\ln|X|+c\Rightarrow -\left(\frac{2}{5}\ln|u+4|+\frac{3}{5}\ln|u-1|\right)=\ln|X|+c$$

$$\xrightarrow{u=Y/X} -\left(\frac{2}{5}\ln\left|\frac{Y}{X}+4\right|+\frac{3}{5}\ln\left|\frac{Y}{X}-1\right|\right)=\ln|X|+C$$

$$\xrightarrow[Y=y-3]{X=x+1} -\left(\frac{2}{5}\ln\left|\frac{y-3}{x+1}+4\right|+\frac{3}{5}\ln\left|\frac{y-3}{x+1}-1\right|\right)=\ln|x+1|+C$$

تمرین ۱۸: جواب عمومی معادله $y'=\frac{y+2}{x+y-1}$ را به دست آورید.

تمرین ۱۹: جواب عمومی معادله $(x+4y-2)dy=(x+y-1)dx$ را بیابید.

تذکر: در بعضی مواقع یک تغییر متغیر مناسب می تواند معادله را به یک معادله دیفرانسیل همگن تبدیل کند.

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$(x - e^y + 1)\,dx + (x + e^y + 1)\,e^y\,dy = 0$$

حل: از تغییر متغیر $z = e^y$ استفاده می کنیم. با جاگذاری $dz = e^y\,dy$ در معادله داریم:

$$(x - z + 1)\,dx + (x + z + 1)\,dz = 0 \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{x - z + 1}{x + z + 1}$$

تقاطع دو خط را می یابیم:

$$\begin{cases} x - z = -1 \\ x + z = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ z = 0 \end{matrix}$$

حال از تغییر متغیر $\begin{cases} x = X - 1 \\ z = Y \end{cases}$ با جاگذاری معادله به شکل زیر در می آید

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{X - Y}{X + Y} = \frac{Y/X - 1}{Y/X + 1} \Longrightarrow u = Y/X \Longrightarrow \begin{matrix} Y = Xu \\ Y' = u + Xu' \end{matrix}$$

جاگذاری در معادله

$$u + Xu' = \frac{u-1}{u+1} \Longrightarrow Xu' = \frac{u-1}{u+1} - u = \frac{u - 1 - u^2 - u}{u+1} = -\frac{u^2+1}{u+1}$$

$$X\frac{du}{dX} = -\frac{u^2+1}{u+1} \Longrightarrow \int \frac{u+1}{u^2+1}\,du = -\int \frac{dX}{X}$$

$$\int \left(\frac{u}{1+u^2} + \frac{1}{1+u^2}\right) du = -\ln|X| + C$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+u^2) + \tan^{-1}u = -\ln|X| + C$$

$$\xrightarrow{u = Y/X} \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{Y^2}{X^2}\right) + tg^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) = -\ln|X| + C$$

$$\xrightarrow[X = x+1]{Y = z} \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{z^2}{(x+1)^2}\right) + tg^{-1}\left(\frac{z}{x+1}\right) = -\ln|x+1| + C$$

$$\xrightarrow{z = e^y} \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{e^{2y}}{(x+1)^2}\right) + tg^{-1}\left(\frac{e^y}{x+1}\right) = -\ln|x+1| + C$$

مثال: معادله زیر را با تبدیل به معادله همگن حل کنید.

$$y' = \frac{xy^2+1}{yx^2}$$

حل: از تغییر متغیر $y=u^{\alpha}$ استفاده می‌کنیم (α را بعداً تعیین می‌کنیم)

$$y' = \alpha u^{\alpha-1}u'$$

با جاگذاری در معادله داریم:

$$\alpha u^{\alpha-1}u' = \frac{xu^{2\alpha}+1}{u^{\alpha}x^2} \Rightarrow \boxed{\alpha u' = \frac{x u^{2\alpha}+1}{u^{2\alpha-1}x^2}}$$

حل برای آنکه معادله همگن باشد باید صورت و مخرج کسر فوق هر دو همگن از درجهٔ یکسان باشند. برای اینکه صورت همگن باشد باید همگن از درجهٔ صفر باشد.

$$1+2\alpha=0 \Rightarrow \alpha=-\frac{1}{2}$$

جاگذاری در مخرج

$$2\left(-\frac{1}{2}\right)-1+2=0$$

پس تغییر متغیر $y=u^{-\frac{1}{2}}$ است. پس معادله به شکل

$$-\frac{1}{2}u' = \frac{x/u+1}{x^2/u^2}$$

در می‌آید که یک معادله همگن است.

$$-\frac{1}{2}u' = \frac{\frac{x}{u}+1}{x^2/u^2}$$

قرار می‌دهیم $v=u/x$ پس $u=xv \Rightarrow u'=v+xv'$. با جاگذاری

$$-\frac{1}{2}(v+xv') = \frac{\frac{1}{v}+1}{\frac{1}{v^2}} \Rightarrow -\frac{1}{2}(v+xv') = v+v^2$$

$$xv' = -3v-2v^2 \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = -3v-2v^2$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{2v^2+3v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dv}{v(2v+3)} = -\ln|x|+C$$

$$\frac{1}{v(2v+3)} = \frac{A}{v}+\frac{B}{2v+3}, \quad A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{2}{3} \Rightarrow \int\left(\frac{\frac{1}{3}}{v}-\frac{\frac{2}{3}}{2v+3}\right)dv = -\ln|x|+C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\ln|v| - \frac{1}{3}\ln|2v+3| = -\ln|x|+C \Rightarrow \frac{1}{3}\ln\left|\frac{v}{2v+3}\right|+\ln|x| = C$$

$$v=\frac{u}{x} \Rightarrow \frac{1}{3}\ln\left|\frac{u/x}{2u/x+3}\right|+\ln|x|=C \xrightarrow{u=1/y^2} \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\frac{1}{y^2x}}{\frac{2}{y^2x}+3}\right|+\ln|x|=C$$

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{1}{2+3y^2x}\right|+\ln|x|=C$$

۳- معادلات کامل:

تعریف: معادله $P(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = 0$ * را کامل گوئیم هرگاه تابع دو متغیره‌ای مانند $\varphi(x,y)$ موجود باشد که

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x,y) \\[2mm] \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = q(x,y) \end{cases} \quad **$$

از آنجاکه

$$d\varphi(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy \overset{**}{=} P(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy \overset{*}{=} 0$$

$$\Rightarrow d\varphi(x,y) = 0 \Longrightarrow \boxed{\varphi(x,y) = C}$$

تابع پتانسیل — جواب عمومی معادله *

دو سؤال قابل طرح است

۱) سؤال اول چگونه متوجه شویم که معادله * کامل است. پاسخ: از ** داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial q}{\partial x} \end{cases} \xrightarrow[\text{مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند}]{\text{و } P \text{ دارای } \varphi} \boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \quad *}$$

شرط کامل بودن معادله *

۲- حال اگر معادله کامل بود چگونه جواب آن یعنی تابع پتانسیل φ را بیابیم: پاسخ: معادلات ** را در نظر می‌گیریم،

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x,y) \; ① \xrightarrow[x \text{ به}]{\text{انتگرال نسبت}} \varphi(x,y) = \int P(x,y)\,dx + g(y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = q(x,y) \; ②$$

حال از φ فوق نسبت به y مشتق می‌گیریم و با ② مقایسه می‌کنیم تا g به دست آید.

مثال: جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$(\underbrace{2y^2 - 4x + 5}_{P(x,y)})\,dx + (\underbrace{4 - 2y + 4xy}_{q(x,y)})\,dy = 0$$

حل:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= 4y \\ \frac{\partial q}{\partial x} &= 4y \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \Longrightarrow$$

معادله کامل است.

برای حل (یافتن تابع پتانسیل) در نظر بگیرید که تابع φ را چنان می‌یابیم که

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \overbrace{2y^2 - 4x + 5}^{P} \\[2mm] \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \overbrace{4 - 2y + 4xy}^{q} \; ③ \end{cases} \xrightarrow[x \text{ نسبت به}]{\text{انتگرال}} \varphi(x,y) = 2y^2x - 2x^2 + 5x + g(y)$$

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4xy + g'(y)} \; ④$$

از مقایسه (۳) و (۴) داریم

$$g'(y) = 4-2y \Rightarrow g(y) = 4y - y^2 + c_1$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = 2xy^2 - 3x^2 + 5x + 4y - y^2 + c_1$$

$$\varphi(x,y) = c_2 \Rightarrow 2xy^2 - 3x^2 + 5x + 4y - y^2 + c_1 = c_2$$ جواب

$$\Rightarrow 2xy^2 - 3x^2 + 5x + 4y - y^2 = c_2 - c_1 \quad c$$

$$\Rightarrow \boxed{2xy^2 - 3x^2 + 5x + 4y - y^2 = c}$$ جواب معادله

مثال: معادله $(y-x)y' = \frac{x}{1+x^2} + y$ را حل کنید.

حل: معادله را در فرم دیفرانسیلی بازنویسی می‌کنیم. داریم

$$\underbrace{\left(\frac{x}{1+x^2} + y\right)}_{p} dx + \underbrace{(x-y)}_{q} dy = 0$$

$$P_y = \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad q_x = \frac{\partial q}{\partial x} = 1 \Longrightarrow P_y = q_x \Rightarrow$$ معادله کامل است.

حال برای یافتن تابع پتانسیل φ باید دستگاه
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{x}{1+x^2} + y \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = x - y \end{cases}$$
را حل کنیم.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{x}{1+x^2} + y \xrightarrow{\text{انتگرال نسبت به } x} \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + xy + g(y) \\ \boxed{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = x - y} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x + g'(y)}$$

$$x + g'(y) = x - y \Rightarrow g'(y) = -y \Rightarrow g(y) = -\frac{y^2}{2}$$

$$\boxed{\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + xy - \frac{y^2}{2} = C}$$ جواب معادله

مثال: ثابت b را طوری بیابید که معادله

$$\underbrace{(bx^2 e^{xy} + x^3 y e^{xy} + 2x)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{x^4 e^{xy}}_{q(x,y)} dy = 0$$

کامل باشد و سپس آن را حل کنید.

$$P_y = \underbrace{bx^3 e^{xy} + x^3 e^{xy}}_{(b+1)x^3 e^{xy}} + x^4 y e^{xy}$$

$$q_x = 4x^3 e^{xy} + x^4 y e^{xy}$$

$$\Longleftrightarrow P_y = q_x \Rightarrow b+1 = 4 \Rightarrow b = 3$$

حال برای حل معادله باید تابع پتانسیل φ را بیابیم:

$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 3x^2 e^{xy} + x^3 y e^{xy} + 2x} \;*** \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = x^4 e^{xy} \xrightarrow{\text{انتگرال نسبت به } y} \varphi(x,y) = x^3 e^{xy} + g(x) \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = x^3 e^{xy} + g(x) \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3x^2 e^{xy} + x^3 y\, e^{xy} + g'(x)}$$

از مقایسه با ~~*~~ می‌فهمیم که

$$g'(x) = 2x \Rightarrow g(x) = x^2$$

پس جواب به صورت $\boxed{\varphi(x,y) = x^3 e^{xy} + x^2 = c}$ است.

تمرین ۲۰- معادله $(\underbrace{\sin x + x^2 e^y - 1}_{q})\,dy + (\underbrace{y\cos x + 2x e^y - 3x^2}_{p})\,dx = 0$ را حل کنید.

تمرین ۲۱- معادله $(\cos x + \ln y)\,dx + (\frac{x}{y} + e^y)\,dy = 0$ را حل کنید.

تمرین ۲۲- معادله $3x\sqrt{x^2-y}\,dx + (4y - \frac{3}{2}\sqrt{x^2-y})\,dy = 0$ را تحت شرط $y(1)=0$ حل کنید.

تمرین ۲۳- معادله $e^y\,dx + (xe^y + 2y)\,dy = 0$ را حل کنید.

۴- عامل انتگرال ساز

معادله دیفرانسیل $p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = 0$ را در نظر بگیرید که $\frac{\partial p}{\partial y} \neq \frac{\partial q}{\partial x}$ (یعنی معادله کامل نیست) حال فرض کنید $\mu(x,y)$ تابع ناصفری باشد که اگر آن را در هر دو طرف معادله ضرب کنیم آنگاه معادله کامل شود. در این صورت $\mu(x,y)$ را یک عامل انتگرال ساز گوئیم.

مثال: معادله $(\underbrace{3xy + y^2}_{p})\,dx + (\underbrace{x^2 + xy}_{q})\,dy$ مفروض است.

$$p_y = 3x + 2y$$
$$q_x = 2x + y$$
$$\Longrightarrow p_y \neq q_x \Rightarrow$$ پس معادله کامل نیست

حال دو طرف معادله را در x ضرب می‌کنیم داریم

$$(\underbrace{3x^2y + y^2x}_{M})\,dx + (\underbrace{x^3 + x^2y}_{N})\,dy = 0$$

$$M_y = 3x^2 + 2xy$$
$$N_x = 3x^2 + 2xy$$
$$\Longrightarrow M_y = N_x \Longrightarrow$$ معادله کامل است

پس $\mu(x,y) = x$ یک عامل انتگرال سازی برای معادله بود و حال معادله جدید را می‌توانیم حل کنیم (مثل حالت قبل)

فرض کنیم $\mu(x,y)$ عامل انتگرال ساز برای معادله غیر همگن $p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = 0$ باشد.

در این صورت معادله

$$\mu(x,y)\,p(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,q(x,y)\,dy = 0$$

کامل است. پس

$$\frac{\partial\left(\mu(x,y)\,p(x,y)\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\mu(x,y)\,q(x,y)\right)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \mu_y\,p + \mu\,p_y = \mu_x\,q + \mu\,q_x \Longrightarrow \boxed{q\,\mu_x - p\,\mu_y = \mu\,(p_y - q_x)} \quad (5)$$

بنابراین μ باید در معادله مشتق جزئی فوق صدق کند که البته راه حل کلی برای آن وجود ندارد. بنابراین حالت‌های خاص را در نظر می‌گیریم.

حالت اول: μ تنها تابعی از x باشد یعنی $\mu(x,y) = \mu(x)$ پس $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ از معادله (5) داریم

$$q\,\frac{d\mu}{dx} = \mu\,(p_y - q_x) \Longrightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \underbrace{\left(\frac{p_y - q_x}{q}\right)}_{S(x)\ \text{تابعی از}\ x} dx$$

$$\ln|\mu| = \int S(x)\,dx \Rightarrow |\mu| = e^{\int S(x)\,dx} \Rightarrow \mu = e^{\int S(x)\,dx}$$ عامل انتگرال ساز

خلاصه حالت اول

$$\frac{p_y - q_x}{q} = S(x) \Longrightarrow \mu(x) = e^{\int S(x)\,dx}$$

حالت دوم: μ تنها تابعی از y باشد یعنی $\mu(x,y) = \mu(y)$ در این صورت $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ و μ در (5) نتیجه می‌دهد

$$-p\,\frac{d\mu}{dy} = \mu\,(p_y - q_x) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \underbrace{\frac{p_y - q_x}{-p}}_{S(y)\ \text{تابعی از}\ y} dy$$

$$\ln|\mu| = \int S(y)\,dy \Longrightarrow \mu(y) = e^{\int S(y)\,dy}$$

خلاصه حالت دوم:

$$\frac{p_y - q_x}{-p} = S(y) \Longrightarrow \mu(y) = e^{\int S(y)\,dy}$$

حالت سوم: μ تابعی از z است که z خود تابعی از (x,y) می‌باشد یعنی $\mu(x,y) = \mu(z(x,y))$. در این حالت

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz}\,z_x$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz}\,z_y$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در (5)}} \quad \frac{d\mu}{\mu} = \underbrace{\frac{p_y - q_x}{q z_x - p z_y}}_{S(z)\ \text{تابعی از}\ z} dz \Rightarrow \mu(z) = e^{\int S(z)\,dz}$$

خلاصه حالت سوم:

$$\frac{p_y - q_x}{q z_x - p z_y} = S(z) \Rightarrow \mu(z) = e^{\int S(z)\,dz}$$

سه حالت برای عامل انتگرال ساز در نظر گرفتیم:

1. $\mu := \mu(x)$
$$\frac{P_y - q_x}{q} = s(x) \Rightarrow \mu(x) = e^{\int s(x)\,dx}$$

2. $\mu := \mu(y)$
$$\frac{P_y - q_x}{-p} = s(y) \Rightarrow \mu(y) = e^{\int s(y)\,dy}$$

3. $\mu := \mu(z)$ و $z = z(x,y)$
$$\frac{P_y - q_x}{q z_x - p z_y} = s(z) \Rightarrow \mu(z) = e^{\int s(z)\,dz}$$

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$(\underbrace{4xy + 3y^2 - x}_{P(x,y)})dx + (\underbrace{x^2 + 2xy}_{q(x,y)})dy = 0$$

$$P_y = 4x + 6y,\quad q_x = 2x + 2y \Rightarrow \frac{P_y - q_x}{q} = \frac{2x+4y}{x^2+2xy} = \frac{2\cancel{(x+2y)}}{x\cancel{(x+2y)}} = \frac{2}{x} = s(x)$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

حال دو طرف معادله را در $\mu = x^2$ ضرب می‌کنیم

$$(\underbrace{4x^3y + 3x^2y^2 - x^3}_{P(x,y)})dx + (\underbrace{x^4 + 2x^3y}_{q(x,y)})dy = 0$$

$$P_y = 4x^3 + 6x^2y,\quad q_x = 4x^3 + 6x^2y \Rightarrow P_y = q_x \Rightarrow$$ معادله کامل است.

برای محاسبه تابع پتانسیل φ را از دستگاه زیر می‌یابیم:

انتگرال نسبت به x

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 4x^3y + 3x^2y^2 - x^3 \Rightarrow \varphi(x,y) = x^4y + x^3y^2 - \dfrac{x^4}{4} + g(y) \\[2ex] \boxed{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = x^4 + 2x^3y} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^4 + 2x^3y + g'(y)}$$

$$g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = \cancel{c_1}\ 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(x,y) = x^4y + x^3y^2 - \frac{x^4}{4} = c}$$ جواب ضمنی معادله.

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$\underbrace{(xy+y^2+y)}_{P(x,y)}\,dx+\underbrace{(x^2+3xy+2x)}_{q(x,y)}\,dy=0$$

$$P_y=x+2y+1 \qquad q_x=2x+3y+2 \;\Longrightarrow\; \frac{P_y-q_x}{-P}=\frac{-(x+y+1)}{-(xy+y^2+y)}=\frac{1}{y}=s(y)$$

$$\Rightarrow \mu(y)=e^{\int \frac{1}{y}dy}=e^{\ln y}=y$$

پس دو طرف معادله را در y ضرب می‌کنیم. داریم

$$\underbrace{(xy^2+y^3+y^2)}_{P(x,y)}\,dx+\underbrace{(x^2y+3xy^2+2xy)}_{q(y)}\,dy=0$$

$$P_y=2xy+3y^2+2y \qquad q_x=2xy+3y^2+2y \;\Longrightarrow\; P_y=q_x \Longrightarrow$$ معادله کامل شد $\Rightarrow$ تابع پتانسیل φ را می‌یابیم

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=xy^2+y^3+y^2 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=x^2y+3xy^2+2xy\end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{انتگرال نسبت به } x}$ $\varphi(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2+y^3x+y^2x+h(y)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=x^2y+3xy^2+2xy+h'(y)$$

$$h'(y)=0 \Rightarrow h(y)=c_1$$

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2+y^3x+y^2x=C$$ جواب معادله

مثال: معادله زیر را حل کنید:

$$\underbrace{(\sin y+\cos y)}_{P(x,y)}\,dx+\underbrace{2x\cos y}_{q(x,y)}\,dy=0$$

$$P_y=\cos y-\sin y \qquad q_x=2\cos y \;\Longrightarrow\; \frac{P_y-q_x}{-P}=\frac{-\cos y-\sin y}{-(\sin y+\cos y)}=1=s(y)$$

$$\Rightarrow \mu(y)=e^{\int 1\,dy}=e^y$$

حال دو طرف معادله را در e^y ضرب می‌کنیم تا معادله کامل شود

$$(\sin y+\cos y)e^y\,dx+2x\,e^y\cos y\,dy=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=(\sin y+\cos y)e^y \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=2x\,e^y\cos y\end{cases}$$

$\Longrightarrow \varphi(x,y)=(\sin y+\cos y)e^y x+h(y)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=(\cos y-\sin y)e^y x+(\sin y+\cos y)e^y x+h'(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial y}=2x\cos y\,e^y+h'(y)$$

$$h'(y)=0 \Rightarrow h(y)=c_1$$

$$\varphi(x,y)=(\sin y+\cos y)e^y x=C$$ جواب

مثال: معادله زیر را حل کنید

$$\underbrace{(x^4\ln x - 2xy^3)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{3x^2y^2}_{q(x,y)}dy = 0$$

$$P_y = -6xy^2 \qquad q_x = 6xy^2 \implies \frac{P_y - q_x}{q} = \frac{-12xy^2}{3x^2y^2} = -\frac{4}{x} = S(x)$$

$$\mu = e^{-\int \frac{4}{x}dx} = e^{-4\ln x} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$$

حال دو طرف معادله را در $\mu(x) = \frac{1}{x^4}$ ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\left(\ln x - 2\frac{y^3}{x^3}\right)dx + 3\frac{y^2}{x^2}dy = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \ln x - 2\frac{y^3}{x^3} \implies \varphi(x,y) = x\ln x - x + \frac{y^3}{x^2} + g(y)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 3\frac{y^2}{x^2}$$

$$\implies \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 3\frac{y^2}{x^2} + g'(y)$$

$$g'(y) = 0 \implies g(y) = c_1$$

$$\varphi(x,y) = x\ln x - x + \frac{y^3}{x^2} = C$$

مثال: فرض کنید معادله زیر دارای عامل انتگرال‌ساز برحسب $z = xy$ باشد. معادله را حل کنید

$$\underbrace{(1+xy)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{x^2}_{q(x,y)}dy = 0$$

$$z = xy \implies z_x = y, \quad z_y = x$$

$$P_y = x \qquad q_x = 2x \implies \frac{P_y - q_x}{qz_x - Pz_y} = \frac{-x}{x^2y - (1+xy)x} = \frac{-1}{xy - (1+xy)} = 1 = S(z)$$

$$\implies \mu(z) = e^{\int 1\,dz} = e^{z} = e^{xy}$$

پس دو طرف معادله را در $\mu(z) = e^{xy}$ ضرب می‌کنیم تا کامل شود.

$$(1+xy)e^{xy}dx + x^2e^{xy}dy = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial x} = (1+xy)e^{xy}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2e^{xy} \xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{نسبت به } y} \varphi(x,y) = xe^{xy} + h(x) \implies \boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + h'(x)} \quad (2)$$

$$(1),(2) \implies h'(x) = 0 \implies h(x) = c_1$$

جواب: $\varphi(x,y) = xe^{xy} = c$

مثال: معادله زیر را حل کنید

$$\underbrace{y}_{P(x,y)}dx + \underbrace{(x^2+y^2-x)}_{q(x,y)}dy = 0 \qquad z = x^2+y^2 \Rightarrow z_x = 2x,\ z_y = 2y$$

حل

$P_y = 1$

$q_x = 2x-1$

$$\frac{P_y - q_x}{qz_x - Pz_y} = \frac{\cancel{1}-2x+\cancel{1}}{(x^2+y^2-x)2x - 2y^2} = \frac{2(1-x)}{2x^3+2xy^2-2x^2-2y^2}$$

$$= \frac{2(1-x)}{2x(x^2+y^2)-2(x^2+y^2)} = \frac{\cancel{2(1-x)}}{2(x^2+y^2)\cancel{(x-1)}} = \frac{-1}{x^2+y^2} = \frac{-1}{z}$$

$$\mu(z) = e^{\int -\frac{1}{z}dz} = e^{-\ln z} = e^{\ln z^{-1}} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2+y^2}$$

پس کافیست در صورت معادله را در $\frac{1}{x^2+y^2}$ ضرب کنیم تا معادله کامل شود

$$\frac{y}{x^2+y^2}dx + \left(1 - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2+y^2} \Longrightarrow \varphi(x,y) = \int \dfrac{y}{x^2+y^2}dx = tg^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) + h(y) \quad (2) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 1 - \dfrac{x}{x^2+y^2} \quad (1) \Rightarrow \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{-x}{x^2+y^2} + h'(y) \end{cases}$$

$(1),(2) \Rightarrow h'(y) = 1 \Rightarrow h(y) = y$

$$\boxed{\varphi(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + y = C}$$ جواب معادله

مثال: معادله زیر را حل کنید

$$\underbrace{(y - xy^2)}_{P}dx + \underbrace{(x + x^2y^2)}_{q}dy = 0 \qquad z = xy \quad z_y = x,\ z_x = y$$

$P_y = 1-2xy$

$q_x = 1+2xy^2$

$$\Longrightarrow \frac{P_y - q_x}{qz_x - Pz_y} = \frac{\cancel{1}-2xy\cancel{-1}-2xy^2}{\cancel{xy}+x^2y^3-\cancel{xy}+x^2y^2}$$

$$= \frac{-2xy(1+y)}{x^2y^2(1+y)} = -\frac{2}{xy} = \frac{-2}{z} = S(z)$$

$$\Longrightarrow \mu(z) = e^{\int -\frac{2}{z}dz} = e^{-2\ln z} = e^{\ln z^{-2}} = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{x^2y^2}$$

پس با ضرب $\frac{1}{x^2y^2}$ در طرفین معادله در معادله کامل خواهد شد.

$$\left(\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{xy^2}+1\right)dy = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{1}{x^2y} - \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{1}{xy^2} + 1 \end{cases}$$

ادامه دهید . . . . . .

جواب: $\varphi(x,y) = -\frac{1}{xy} - \ln x + y = C$

تمرین‌ها: معادلات زیر را حل کنید

۲۴) $(xy+y^2)dx-(x^2+xy)dy=0$

۲۵) $(1+\frac{4}{3}y^3)dx+xy^2dy=0$

۲۶) $(x^2y+2xy+\frac{1}{3}y^3)dx+(x^2+y^2)dy=0$

۲۷) $(1+y\,tg\,x)dx+dy=0$

۲۸) $\sin x\,dx+(\cos x-y)dy=$

۲۹) $(y\cos 2x-x\sin 2x)dx+(y\sin 2x+x\cos 2x)dy=0$

۳۰) $-\cos x\,dx+(\sin x\tan y+e^y\sec y)dy=0$

۳۱) $(3y^2-x)dx+(2y^3-6xy)dy=0$ $\quad z=x+y^2$

۳۲) $(x^2+y^2+1)dx-2xy\,dy=0$ $\quad z=y^2-x^2$

۳۳) $(2x^2+2y^2+x)dx+(x^2+y^2+y)dy=0$ $\quad z=x^2+y^2$

۳۴) $(8y+4x^2y^3)dx+(8x+5x^3y^2)dy=0$ $\quad z=xy$

یادآوری: معادله غیرکامل $\boxed{p(x,y)\,dx+q(x,y)\,dy=0}$ (1) را در نظر می‌گیریم $(p_y\neq q_x)$

حالت اول) $\frac{p_y-q_x}{q}=s(x) \Rightarrow \mu(x)=e^{\int s(x)dx}$

حالت دوم) $\frac{p_y-q_x}{-p}=s(y) \Rightarrow \mu(y)=e^{\int s(y)dy}$

حالت سوم) $\frac{p_y-q_x}{qz_x-pz_y}=s(z) \Rightarrow \mu(z)=e^{\int s(z)dz}$ $\quad z=z(x,y)$

حالت چهارمی نیز وجود دارد که در آن معادله (1) دارای عامل انتگرال‌ساز به شکل $\mu(x,y)=x^\alpha y^\beta$ است.

در این حالت ابتدا طرفین معادله (1) را در $x^\alpha y^\beta$ ضرب می‌کنیم و با اعمال شرط کامل بودن معادله مقادیر α و β را به دست می‌آوریم سپس با جاگذاری α و β در معادله جدید به یک معادله کامل می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم.

به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال: معادله زیر عامل انتگرال سازی به شکل $\mu = x^{\alpha}y^{\beta}$ دارد. آن را حل کنید.

$$(xy - 2y^2)\,dx + (3xy - x^2)\,dy = 0$$

حل: ابتدا $\mu = x^{\alpha}y^{\beta}$ را در دو طرف معادله ضرب می کنیم.

$$\underbrace{(x^{\alpha+1}y^{\beta+1} - 2x^{\alpha}y^{\beta+2})}_{P(x,y)}\,dx + \underbrace{(3x^{\alpha+1}y^{\beta+1} - x^{\alpha+2}y^{\beta})}_{Q(x,y)}\,dy = 0 \quad *$$

چون می خواهیم معادله اخیر کامل باشد قرار می دهیم $P_y = Q_x$ و α و β را می یابیم:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta} - 2(\beta+2)x^{\alpha}y^{\beta+1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+1} - (\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta}$$

$$\xrightarrow{P_y = Q_x} \begin{cases} \beta+1 = -(\alpha+2) \\ -2(\beta+2) = 3(\alpha+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = -3 \\ -3\alpha-2\beta = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

حال در رابطه * قرار می دهیم $\alpha = -1$ و $\beta = -2$ تا به یک معادله کامل برسیم:

$$\mu = x^{-1}y^{-2} = \frac{1}{xy^2}$$

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right)dx + \left(\frac{3}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{1}{y} - \dfrac{2}{x} & ② \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{3}{y} - \dfrac{x}{y^2} & ③ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{از ② انتگرال نسبت به } x} \quad \varphi(x,y) = \int\left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right)dx = \frac{x}{y} - 2\ln x + g(y)$$

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + g'(y)} \quad ④$$

با مقایسه ③ و ④ در می یابیم که $g'(y) = \frac{3}{y}$ پس $g(y) = 3\ln y$ و بنابراین

$$\boxed{\varphi(x,y) = \frac{x}{y} - 2\ln x + 3\ln y = C}$$

مثال: برای معادله زیر عامل انتگرال سازی به صورت $\mu(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta}$ بیابید و سپس آن را حل کنید.

$$\left(3x + \frac{4}{y}\right)dx + \left(\frac{x^2}{y} + \frac{3y}{x}\right)dy = 0$$

حل: ابتدا معادله را در $x^{\alpha}y^{\beta}$ ضرب می کنیم:

$$\underbrace{(3x^{\alpha+1}y^{\beta} + 4x^{\alpha}y^{\beta-1})}_{P(x,y)}\,dx + \underbrace{(x^{\alpha+2}y^{\beta-1} + 3x^{\alpha-1}y^{\beta+1})}_{Q(x,y)}\,dy = 0 \quad *$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3\beta x^{\alpha+1}y^{\beta-1} + 4(\beta-1)x^{\alpha}y^{\beta-2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta-1} + 3(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\beta+1}$$

$$\xrightarrow{P_y = Q_x} \begin{cases} 3\beta = (\alpha+2) \;\checkmark \\ 4(\beta-1) = 0 \Rightarrow \beta = 1 \\ 3(\alpha-1) = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

پس عامل انتگرال ساز $\mu = x^1y^1$ بوده است. پس در * قرار دهیم $\alpha = 1$ و $\beta = 1$ داریم.

$$(3x^2y+6x)\,dx+(x^3+3y^2)\,dy=0$$

حال تابع پتانسیل را می یابیم:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=3x^2y+6x \Longrightarrow \varphi(x,y)=\int(3x^2y+6x)\,dx=x^3y+3x^2+g(y)\\[2mm] \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=x^3+3y^2\end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=x^3+g'(y)$$

$$g'(y)=3y^2 \Longrightarrow g(y)=y^3$$

$$\varphi(x,y)=c \Longrightarrow \boxed{x^3y+3x^2+y^3=C}$$ جواب

مثال: معادله $(2y-3xy^2)\,dx-x\,dy$ را با یافتن عامل انتگرال سازی به صورت $x^\alpha y^\beta$ حل کنید

حل: دو طرف معادله را در $x^\alpha y^\beta$ ضرب می کنیم: داریم

$$\underbrace{(2x^\alpha y^{\beta+1}-3x^{\alpha+1}y^{\beta+2})}_{P(x,y)}\,dx-\underbrace{x^{\alpha+1}y^\beta}_{q(x,y)}\,dy=0 \quad *$$

$$\left.\begin{aligned}P_y&=2(\beta+1)x^\alpha y^\beta-3(\beta+2)x^{\alpha+1}y^{\beta+1}\\ q_x&=-(\alpha+1)x^\alpha y^\beta\end{aligned}\right\} \xrightarrow{P_y=q_x} \begin{cases}2(\beta+1)=-(\alpha+1) \Longrightarrow \cancel{2(-2+1)}=-(\alpha+1) \Longrightarrow \alpha=1\\ -3(\beta+2)=0 \Longrightarrow \beta=-2\end{cases}$$

در $*$ قرار می دهیم $\alpha=1$ و $\beta=-2$. داریم:

$$\left(\frac{2x}{y}-3x^2\right)dx-\frac{x^2}{y^2}\,dy=0$$

برای یافتن تابع پتانسیل توجه کنید که

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{2x}{y}-3x^2 \Longrightarrow \varphi(x,y)=\int\left(\dfrac{2x}{y}-3x^2\right)dx=\dfrac{x^2}{y}-x^3+g(y)\\[2mm] \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=-\dfrac{x^2}{y^2}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{x^2}{y^2}+g'(y)$$

$$g'(y)=0 \Longrightarrow g(y)=c_1$$

جواب $$\varphi(x,y)=c \Longrightarrow \boxed{\frac{x^2}{y}-x^3=C}$$

تمرین: برای هر یک از معادلات زیر عامل انتگرال سازی به صورت $\mu=x^\alpha y^\beta$ بیابید و سپس معادله را حل کنید

۳۵) $y(2x^2+y^3)\,dx-x(2x^2-y^3\,dy=0$

۳۶) $(x^4y^2-y)\,dx+(x^2y^4-x)\,dy=0$

۳۷) $y(4x+5y^3)\,dx+x(2x+5y^3)\,dy=0$

۳۸) $y\,dx+(x-3x^3y^2)\,dy=0$

۳۹) $(xy+y^2)\,dx-(x^2+xy)\,dy=0$

۴۰) $y^2(1-x^2)\,dx+(x^3y+2x^2+xy)\,dy=0$

معادلات خطی مرتبه اول: این معادلات به شکل $\boxed{y'+a(x)y=b(x)}^{*}$ است که a و b توابعی پیوسته هستند

برای حل ابتدا معادله را به صورت دیفرانسیلی می نویسیم

$$\frac{dy}{dx}=b(x)-a(x)y \Longrightarrow \underbrace{(b(x)-a(x)y)}_{P(x,y)}dx\underbrace{-1dy}_{q(x,y)}=0$$

$$P_y=-a(x),\quad q_x=0 \Longrightarrow \frac{P_y-q_x}{-1}=\frac{-a(x)}{-1}=a(x) \Longrightarrow \mu(x)=e^{\int a(x)dx}$$

حال دو طرف * را در $\mu(x)$ ضرب می کنیم داریم: (از آنجا که $\mu'(x)=a(x)\mu(x)$)

$$\underbrace{\mu(x)y'+a(x)\mu(x)y}=b(x)\mu(x) \Longrightarrow \frac{d}{dx}(\mu(x)y)=b(x)\mu(x)$$

$$d(\mu(x)y)=b(x)\mu(x)dx \Longrightarrow \mu(x)y=\int b(x)\mu(x)dx+c$$

$$\Longrightarrow y=\frac{\int b(x)\mu(x)dx+c}{\mu(x)}$$

خلاصه

معادله مرتبه اول خطی $y'+a(x)y=b(x)$ عامل انتگرال‌ساز $\boxed{\mu(x)=e^{\int a(x)dx}}$

جواب معادله $\boxed{y=\dfrac{\int\mu(x)b(x)dx+c}{\mu(x)}}$

مثال: معادله $y'-2y=x^3e^{2x}$ را حل کنید.

$$\mu(x)=e^{\int -2dx}=e^{-2x} \Longrightarrow y=\frac{\int \cancel{e^{-2x}}x^3\cancel{e^{2x}}dx+c}{e^{-2x}}=\left(\frac{x^4}{4}+c\right)e^{2x}$$

مثال: جواب عمومی معادله $xy'+y=5x^2$ را بیابید.

حل: ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم

$$y'+\frac{1}{x}y=5x \Longrightarrow \mu(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x \Longrightarrow$$

$$y=\frac{\int 5x^2dx+c}{x}=\frac{\frac{5}{3}x^3+c}{x}=\frac{5}{3}x^2+\frac{c}{x}$$

مثال: معادله $y'+y=\frac{1}{1+e^{2x}}$ را حل کنید

$$\mu(x)=e^{\int 1dx}=e^{x} \Longrightarrow y=\frac{\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx+c}{e^x}=e^{-x}\left(\tan^{-1}e^{x}+c\right)$$

تذکر: برخی معادلات با تعویض نقش x و y به یک معادله مرتبه اول تبدیل می‌شوند.

مثال: معادله $y = (e^y y^3 + x)\,y'$ را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{e^y y^3 + x} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y^3 e^y + x}{y} = y^2 e^y + \frac{1}{y}x$$

$$\Rightarrow \overset{x'}{\frac{dx}{dy}} - \frac{1}{y}x = y^2 e^y \Rightarrow \mu(y) = e^{\int -\frac{1}{y}dy} = e^{-\ln y} = e^{\ln y^{-1}} = \frac{1}{y}$$

$$x = \frac{\int \cancel{\mu(y)}\frac{1}{y}\, y^2 e^y\,dy + c}{\cancel{\mu(y)}\frac{1}{y}} = y\left(\int y e^y\,dy + c\right) = y\left(ye^y - e^y + c\right)$$

y	e^y
1	e^y
0	e^y

$$\Rightarrow \boxed{x = y^2 e^y - y e^y - cy}$$

مثال: معادله $y'(x\sin y + \sin 2y) = 1$ را حل کنید.

$$y' = \frac{1}{x\sin y + \sin 2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sin y + \sin 2y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = x\sin y + \sin 2y$$

$$\Rightarrow \overset{x'}{\frac{dx}{dy}} - \underbrace{\sin y}_{a(y)}\, x = \underbrace{\sin 2y}_{b(y)}$$

$$\Rightarrow x' - (\sin y)x = \sin 2y \Rightarrow \mu(y) = e^{\int -\sin y\,dy} = e^{\cos y}$$

$$x = \frac{\int e^{\cos y}\sin 2y\,dy + c}{e^{\cos y}} = e^{-\cos y}\left(\cancel{\int e^{\cos y}\, 2\sin y\cos y\,dy + c}\right)$$

$$2e^{\cos y}(1 - \cos y) + c$$

$u = \cos y$

$du = -\sin y\,dy$

$$\Rightarrow \int e^{\cos y}\, 2\sin y\cos y\,dy = \int -e^u\, 2u\,du = -2ue^u + 2e^u$$

$$= -2\cos y\, e^{\cos y} + 2e^{\cos y}$$

$-2u$	e^u
-2	e^u
0	e^u

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

(۴۱) $x^3 y' + x^2 y = 1$

(۴۲) $y' + 2(\tan x)y = x^2 \sin^3 x\cos x$

(۴۳) $xy' - 3y = x^4\sin^2 x + x^4 - x^6$

(۴۴) $y' = \dfrac{y}{e^{-2y} - 2xy}$

(۴۵) $x^2(x^2-1)\,y' + x(x^2+1)\,y = x^2 - 1$

تذکر: برخی معادلات را می‌توان با استفاده از تغییر متغیرهای مناسب به خطی مرتبه اول تبدیل کرد.

مثال: جواب عمومی معادلهٔ زیر را بیابید.

$$y'\cos y + \underbrace{\sin y}_{} = e^{-x} \xrightarrow[u' = y'\cos y]{u = \sin y} u' + u = e^{-x}$$

$$\mu(x) = e^{\int 1\,dx} = e^{x}$$

$$u = \frac{\int e^{x} e^{-x}\,dx + c}{e^{x}} = (x+c)e^{-x}$$

$$\Rightarrow \sin y = (x+c)\,e^{-x} \Rightarrow y = \sin^{-1}\left((x+c)e^{-x}\right)$$

مثال: معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$e^{y}y' + \underbrace{e^{y}}_{} = ۴\sin x \xrightarrow[y'e^{y} = u']{e^{y} = u} u' + u = ۴\sin x$$

$$\mu(x) = e^{\int 1\,dx} = e^{x}$$

$$\Rightarrow \overset{e^{y}}{\cancel{u}} = \frac{\int ۴e^{x}\sin x\,dx + c}{e^{x}} \Rightarrow e^{y} = e^{-x}\left[\frac{e^{x}}{۲}(\sin x - \cos x) + c\right]$$

معادلات برنولی: معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' + a(x)y = f(x)y^{\alpha}$ که در آن $\alpha \neq 0, 1$ را معادله برنولی گوییم. توجه کنید که برای $\alpha = 0$ و $\alpha = 1$ معادلهٔ اخیر همان معادلهٔ خطی مرتبه اول خواهد بود.

برای حل معادلهٔ برنولی ابتدا دو طرف معادله را در $y^{-\alpha}$ ضرب می‌کنیم

$$y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = f(x)$$

حال از تغییر متغیر
$$\begin{cases} z = y^{1-\alpha} \\ z' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha} \end{cases}$$
استفاده می‌کنیم. با جاگذاری در معادله داریم

$$\frac{1}{1-\alpha}z' + a(x)z = f(x) \Longrightarrow \boxed{z' + (1-\alpha)a(x)z = (1-\alpha)f(x)}$$

که یک معادله خطی مرتبه اول است و حل آن را در بخش قبل فرا گرفتیم.

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$y' + ۳y = ۶e^{x}y^{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow y'y^{-\frac{۲}{۳}} + ۳y^{\frac{۱}{۳}} = ۶e^{x}$$

$$z = y^{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow z' = \frac{۱}{۳}y'y^{-\frac{۲}{۳}}$$

جایگذاری در معادله

$$۳z' + ۳z = ۶e^{x} \Rightarrow z' + z = ۲e^{x} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int 1\,dx} = e^{x} \Longrightarrow z = \frac{\int ۲e^{x}e^{x}\,dx + c}{e^{x}}$$

$$z=\frac{e^x+c}{e^x} \Rightarrow y^{\frac{1}{3}}=1+ce^{-x} \Rightarrow \boxed{y=(1+ce^{-x})^3}$$

مثال: معادله زیر را حل کنید

$$y'+\frac{y}{x}=\sqrt{xy} \Rightarrow y'+\frac{1}{x}y=\sqrt{x}\,y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y^{-\frac{1}{2}}y'+\frac{1}{x}y^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$$

قرار می‌دهیم $\begin{cases} z=y^{\frac{1}{2}} \\ z'=\frac{1}{2}y'y^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$ پس با جاگذاری در معادله داریم:

$$2z'+\frac{1}{x}z=\sqrt{x} \Rightarrow z'+\frac{1}{2x}z=\frac{1}{2}\sqrt{x} \Rightarrow \mu(x)=e^{\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx}=e^{\frac{1}{2}\ln x}=\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow z=\frac{\int\frac{1}{2}x\,dx+c}{\sqrt{x}} \Rightarrow z=\frac{\frac{x^2}{4}+c}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{y}=\frac{\frac{x^2}{4}+c}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{(\frac{x^2}{4}+c)^2}{x}}$$

مثال: معادله زیر را حل کنید

$$y'+\frac{2}{x}y=(x^2\ln x)\,y^{-1}$$

$$\Rightarrow yy'+\frac{2}{x}y^2=x^2\ln x \Rightarrow \begin{cases} z=y^2 \\ z'=2yy' \end{cases} \Rightarrow \frac{z'}{2}+\frac{2}{x}z=x^2\ln x$$

$$\Rightarrow z'+\frac{4}{x}z=2x^2\ln x \Rightarrow \mu(x)=e^{\int\frac{4}{x}dx}=e^{4\ln x}=x^4$$

$$z=\frac{\int 2x^6\overset{du}{\ln x}\,dx+c}{x^4}=\frac{\frac{2x^7}{7}\ln x-\int\frac{2x^7}{7}\frac{1}{x}dx+c}{x^4}=\frac{\frac{2x^7}{7}\ln x-\frac{2x^7}{49}+c}{x^4}$$

$$\Rightarrow \overset{y^2}{z}=\frac{2x^3}{7}\ln x-\frac{2x^3}{49}+\frac{c}{x^4} \Rightarrow y^2=\frac{2x^3}{7}\ln x-\frac{2x^3}{49}+\frac{c}{x^4}$$

تمرین: معادلات زیر را حل کنید

(46) $2y'+(\tan x)y=\frac{x^2e^x}{\cos x}y^3$

(47) $y'-y=y^2$

(48) $y'+\frac{2}{x}y=x^2y^2\sec^2 x$

(49) $y'+\frac{1}{x}y=4x^5y^5$

نکته: (برنولی معکوس) در برخی مواقع با تعویض نقش متغیر مستقل با متغیر وابسته معادله به یک معادله برنولی تبدیل می‌شود

مثال: معادله زیر را حل کنید

$$xy'(1-x^2e^y)=2$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x(1-x^2e^y)} \Longrightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{x-x^3e^y}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{dx}{dy}-\frac{1}{2}x=-\frac{x^3e^y}{2}$$

برنولی برحسب x - دو طرف را در x^{-3} ضرب می‌کنیم:

$$x^{-3}\frac{dx}{dy}-\frac{1}{2}x^{-2}=-\frac{e^y}{2} \qquad \begin{cases} z=x^{-2}\\ z'=-2x'x^{-3}\end{cases}$$

با جاگذاری در معادله داریم

$$\frac{z'}{-2}-\frac{1}{2}z=-\frac{e^y}{2} \Longrightarrow z'+1z=e^y \Longrightarrow \mu(y)=e^{\int 1\,dy}=e^y$$

$$\Longrightarrow z=\frac{\int e^{2y}dy+c}{e^y}=\frac{1}{2}e^y+ce^{-y} \Longrightarrow x^{-2}=\frac{1}{2}e^y+ce^{-y}$$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$dx+\left(\frac{x}{y}-x^3\right)dy=0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^3-x/y} \Longrightarrow \frac{dx}{dy}=x^3-\frac{x}{y}$$

$$\Longrightarrow \frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=x^3 \qquad \Longrightarrow x^{-3}x'+\frac{1}{y}x^{-2}=1$$

با جاگذاری داریم $\begin{cases} z=x^{-2}\\ z'=-2x'x^{-3}\end{cases}$

$$-\frac{1}{2}z'+\frac{1}{y}z=1 \Longrightarrow z'-\frac{2}{y}z=-2 \Longrightarrow \mu(y)=e^{-\int\frac{2}{y}dy}=e^{-2\ln y}=\frac{1}{y^2}$$

$$z=\frac{\int\frac{-2}{y^2}dy+c}{\frac{1}{y^2}}=y^2\left(\frac{-2}{y}+c\right)=-2y+cy^2$$

$$\Longrightarrow x^{-2}=-2y+cy^2 \Longrightarrow$$

تمرین: معادلات زیر را حل کنید

50. $dx+\left(\frac{1}{3}x-e^yx^4\right)dy=0$

51. $y'=\frac{y}{x^2y^3\sec^2y-2x}$

52. $xy'(x-1+xe^y)=1$

53. $xy'+y=2x^2yy'\ln y$

معادله ریکاتی: معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $y' = f_0(x) + f_1(x) y + f_2(x) y^2$

را که در آن f_0، f_1 و f_2 توابع پیوسته هستند را معادله ریکاتی نامیم.

فرض کنید جواب خصوصی $y_1(x)$ از معادله ریکاتی داده شده باشد. جواب عمومی معادله به صورت

$$y = y_1 + \frac{1}{v(x)}$$

است. برای یافتن $v(x)$ توجه کنید که $y' = y_1' - \frac{v'}{v^2}$، با جایگذاری در معادله ریکاتی داریم:

$$y_1' - \frac{v'}{v^2} = f_0(x) + f_1(x)\left(y_1 + \frac{1}{v(x)}\right) + f_2(x)\left(y_1 + \frac{1}{v(x)}\right)^2$$

معادله اخیر پس از ساده سازی به یک معادله خطی مرتبه اول تبدیل می شود که از آن $v(x)$ را می یابیم.

مثال: فرض کنید $y_1(x) = x$ یک جواب خصوصی معادله $y' = \underbrace{x^2+1}_{f_0} \underbrace{-2xy}_{f_1} + \underbrace{y^2}_{f_2}$ باشد. جواب عمومی معادله را بیابید.

حل: معادله فوق ریکاتی است که می توانیم آن را به صورت $y' = (x-y)^2 + 1$ بازنویسی کنیم. طبق آنچه گفته شد

$$y(x) = y_1 + \frac{1}{v(x)} = x + \frac{1}{v(x)} \Longrightarrow y'(x) = 1 - \frac{v'}{v^2}$$

حال با جایگذاری در معادله داریم

$$1 - \frac{v'}{v^2} = \left(\cancel{x} - \cancel{x} - \frac{1}{v}\right)^2 + 1 \Longrightarrow -\frac{v'}{v^2} = \frac{1}{v^2} \Rightarrow v' = -1 \Rightarrow \boxed{v = -x + c}$$

پس $y = x + \frac{1}{c - x}$ جواب عمومی معادله است.

مثال: معادله زیر را حل کنید

$$y' + \frac{1}{x} y + \frac{1}{x^2} = y^2 \qquad x > 0 \qquad y_1(x) = \frac{1}{x}$$

حل:

$$y' = \underbrace{-\frac{1}{x^2}}_{f_0} \underbrace{-\frac{1}{x}}_{f_1} y + \underbrace{1}_{f_2} y^2$$

$$\begin{cases} y = y_1 + \dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{v} \\ y' = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{v'}{v^2} \end{cases}$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$\cancel{-\frac{1}{x^2}} - \frac{v'}{v^2} = \cancel{-\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{v}\right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{v}\right)^2$$

$$\frac{v'}{v^2} = \cancel{\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{xv} - \cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{2}{xv} - \frac{1}{v^2} \Longrightarrow v' = -\frac{1}{x} v - 1 \Longrightarrow \underbrace{v' + \frac{1}{x} v = -1}_{\text{معادله خطی مرتبه اول}}$$

عامل انتگرال ساز $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$ پس

$$v = \frac{\int -x\,dx + c}{x} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + c}{x}$$

فصل سوم: معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر:

بخش اول: در این بخش دو دسته از معادلات مرتبه دوم را که قابل تبدیل به معادلات مرتبه اول (در فصل قبل مطالعه شده) هستند را بررسی می‌کنیم.

دسته اول: معادلات مرتبه دوم فاقد y: $\quad F(x, y', y'') = 0$

برای حل این دسته از معادلات از تغییر متغیر $u=y'$ استفاده می‌کنیم تا معادله به مرتبه اول تبدیل شود.

دسته دوم: معادلات مرتبه دوم فاقد x: $\quad F(y, y', y'') = 0$

توجه کنید در ظاهر این گونه معادلات x ظاهر نشده است اما توجه کنید که y تابعی از x است. با تغییر متغیر $y'=u$

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}$$

با این تغییر متغیر عملاً یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول برحسب u که متغیر مستقل آن y است به دست می‌آوریم.

مثال: جواب عمومی معادله $xy''-y'=0$ را بیابید.

معادله فاقد y است. فرض می‌دهیم $\begin{cases} u=y' \\ u'=y'' \end{cases}$ پس با جاگذاری در معادله داریم

$$xu'-u=0 \Rightarrow xu'=u \Rightarrow x\frac{du}{dx}=u \Rightarrow \int\frac{du}{u}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|u|=\ln|x|+c$$

$$|u| = e^{\ln|x|+c} = |x|e^{c} \Rightarrow u = \underbrace{\pm e^{c}}_{A}\,x \Rightarrow u=Ax$$

اما $u=y'$ پس

$$y'=Ax \Rightarrow \frac{dy}{dx}=Ax \Rightarrow \int dy=\int Ax\,dx \Rightarrow \boxed{y=\frac{A}{2}x^2+C_1}$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$x^2y''+2xy'-1=0 \qquad x>0$$

معادله فاقد y است. پس $\begin{cases} u=y' \\ u'=y'' \end{cases}$

$$x^2u'+2xu=1 \Rightarrow u'+\frac{2}{x}u=\frac{1}{x^2} \quad x>0 \Rightarrow \mu(x)=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=x^2$$

$$u=\frac{\int 1\,dx+c_1}{x^2}=\frac{x+c_1}{x^2}=\frac{1}{x}+\frac{c_1}{x^2} \Rightarrow y'=\frac{1}{x}+\frac{c_1}{x^2}$$

$$\boxed{y=\ln x-\frac{c_1}{x}+c_2}$$

تمرین

(60) $xy''+y'=x$

(61) $(1+x^2)y''+2xy'=\frac{1}{1+x^2}$

(62) $y''=\frac{y'}{x}\left(1+\ln\frac{y'}{x}\right)$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$yy'' + (y')^2 = 0$$

معادله فاقد x است. ب

$$y' = u \Rightarrow y'' = \frac{du}{dx} \underset{\text{زنجیری}}{=} \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}$$

با جایگذاری در معادله داریم

$$yu\frac{du}{dy} + u^2 = 0 \Rightarrow yu\frac{du}{dy} = -u^2 \Rightarrow \frac{du}{-u} = \frac{dy}{y}$$

$$-\ln|u| = \ln|y| + c_1 \Rightarrow \ln|u|^{-1} = \ln|y| + c_1 \Rightarrow \frac{1}{|u|} = |y|e^{c_1}$$

$$\frac{1}{u} = \pm e^{c_1} y \Rightarrow \frac{1}{u} = cy \Rightarrow u = \frac{1}{cy} \Rightarrow y' = \frac{1}{cy} \Rightarrow$$

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{c} \Rightarrow y\,dy = \frac{1}{c}dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{2} = \frac{1}{c}x + c_2}$$

A

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$yy'' + (y')^2 - (y')^3 \ln y = 0$$

معادله فاقد x است.

$$\begin{cases} y' = u \\ y'' = u\frac{du}{dy} \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} yu\frac{du}{dy} + u^2 - u^3\ln y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dy} + \frac{1}{y}u = \frac{\ln y}{y}u^2 \quad \text{برنولی مرتبه ۲}$$

$$\underbrace{u^{-2}\frac{du}{dy}}_{-z'} + \frac{1}{y}\underbrace{u^{-1}}_{z} = \frac{\ln y}{y} \qquad u^{-1} = z \Rightarrow -u'u^{-2} = z'$$

$$\Rightarrow z' - \frac{1}{y}z = -\frac{\ln y}{y} \Rightarrow \mu(y) = e^{\int -\frac{1}{y}dy} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}$$

جزء به جزء

$$z = \frac{\int -\frac{1}{y^2}\ln y\,dy + c_1}{1/y} = y\left(\frac{\ln y}{y} + \frac{1}{y}\right) + c_1 y \Rightarrow u^{-1} = (1+\ln y) + c_1 y$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{y'}}_{\frac{dx}{dy}} = (\ln y + 1) + c_1 y \Rightarrow \int dx = \int ((1+\ln y) + c_1 y)\,dy$$

جواب نهایی

$$\Rightarrow x + c_2 = \cancel{y} + y\ln y - \cancel{y} + \frac{c_1}{2}y^2 \Rightarrow \boxed{x + c_2 = y\ln y + \frac{c_1}{2}y^2}$$

مثال: مسأله مقدار اولیه $yy'' - (y')^2 = 0$ را با $y(1) = 2$, $y'(1) = 3$ حل کنید.

معادله فاقد x است.

$$\begin{cases} y' = u \\ y'' = u\dfrac{du}{dy} \end{cases} \Rightarrow yu\frac{du}{dy} - u^2 = 0 \Rightarrow u\Big(\underline{y\frac{du}{dy} - u}\Big) = 0$$

یا $u = 0$ که نتیجه می‌دهد $y' = 0$ سپس $y = c$ ⟸ در شرط اولیه ما صدق نمی‌کند

یا

$$y\frac{du}{dy} - u = 0 \Rightarrow y\frac{du}{dy} = u \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dy}{y} \Rightarrow u = c_1 y$$

$$\Rightarrow y' = c_1 y \xrightarrow[y'(1)=3]{y(1)=2} 3 = c_1 2 \Rightarrow c_1 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3}{2}y \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int\frac{3}{2}dx \Rightarrow \ln|y| = \frac{3}{2}x + C$$

$$y = \underbrace{\pm e^{C}}_{A} e^{\frac{3}{2}x}$$

$$\Rightarrow y = Ae^{\frac{3}{2}x} \xrightarrow{y(1)=2} 2 = Ae^{\frac{3}{2}} \Rightarrow A = 2e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow y = 2e^{-\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}x} = 2e^{\frac{3}{2}(x-1)}$$

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

(۶۳) $y'' = y'(y' + y)$

(۶۴) $yy'' - (y')^2 = y'$, $y(1) = 4$, $y'(1) = 1$

(۶۵) $2y'' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$

(۶۶) $y'' = 1 + (y')^2$

(۶۷) $y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$

(۶۸) $y'' = (y' - 1)^2$

(۶۹) $y'' + y(y')^3 = 0$

(۷۰) $y'' - 2yy' = 0$

معادلات خطی مرتبه دوم:

معادلات به فرم کلی $\boxed{a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)}$ ① را که در آن تابع $a_2(x)$، تابع نا صفر است را یک معادله خطی مرتبه دوم گوییم. با تقسیم دو طرف معادله فوق بر $a_2(x)$ معادله‌ای به شکل

$$\boxed{y'' + P(x)y' + q(x)y = f(x)} \quad ②$$

حاصل می‌شود که در آن $f(x) = \dfrac{g(x)}{a_2(x)}$ ، $q(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$, $P(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$. مقادیری از x که به ازای آن $a_2(x) = 0$ است را نقاط تکین معادله می‌نامیم.

اگر در معادله ② تابع $f(x)$ تابع ثابت صفر باشد آنگاه معادله به شکل $\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad ③}$ در می‌آید که ③ را معادله همگن نظیر به ② می‌نامیم. اگر $f(x)$ تابع ثابت صفر نباشد معادله ② یک معادله دیفرانسیل ناهمگن نامیده می‌شود.

قضیه ۱- (وجود و یکتایی جواب) فرض کنیم $p(x)$، $q(x)$ و $f(x)$ در یک بازه $I \subseteq \mathbb{R}$ پیوسته باشند، $x_0 \in I$ و اعداد $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ مفروض‌اند. در این صورت مسأله مقدار اولیه

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \quad , \quad y'(x_0) = z_0 \end{cases}$$

دارای یک جواب یکتا تعریف شده بر کل بازه I است.

قضیه ۲: اگر $y_g(x,c_1,c_2)$ جواب عمومی معادله همگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ و $y_p(x)$ یک جواب خصوصی معادله غیرهمگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ باشد آنگاه جواب عمومی معادله غیرهمگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ به صورت

$$y(x) = y_g(x,c_1,c_2) + y_p(x)$$

است.

قضیه ۳- اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب از معادله همگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشند آنگاه

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

نیز جواب معادله همگن است که در آن c_1 و c_2 هر عدد دلخواهی می‌توانند باشند.

تعریف: فرض کنید دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در بازه $[a,b]$ تعریف شده باشند. اگر عدد ثابتی مانند $k \in \mathbb{R}$ موجود باشد که

$$\forall x \in [a,b] \qquad f(x) = k\,g(x) \iff \frac{f(x)}{g(x)} = k \quad \forall x \in [a,b]$$

آنگاه دو تابع f و g را در بازه $[a,b]$ وابسته خطی گوییم. در غیر این صورت f و g را در $[a,b]$ مستقل خطی نامیده می‌شوند.

مثال: دو تابع $f(x) = e^x$ ، $g(x) = \frac{3}{2}e^x$ وابسته خطی هستند زیرا

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{3}$$

اما دو تابع $f(x) = e^x$ ، $g(x) = e^{2x}$ در $\mathbb{R}$ مستقل خطی‌اند زیرا

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x} \neq \text{ثابت}$$

همچنین: دو تابع $f(x) = e^{\alpha x}$ ، $g(x) = x e^{\alpha x}$ مستقل خطی‌اند زیرا $\frac{f(x)}{g(x)} = x \neq$ ثابت

تعریف: فرض کنید $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب از معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشند. رونسکین y_1 و y_2 را با $W(y_1, y_2)$ نشان می‌دهیم و به صورت

$$W(y_1, y_2)(x) \stackrel{\text{تعریف}}{=} \det\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = (y_1 y_2' - y_1' y_2)(x)$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۴: اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ توابع مشتق‌پذیر بر بازه I باشند و $x_0 \in I$ موجود باشد که $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ آنگاه $y_1(x)$ و $y_2(x)$ مستقل خطی هستند.

برهان:

$$(y_1 y_2' - y_1' y_2)(x_0) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} \neq \text{ثابت} \Rightarrow$$

y_1 و y_2 مستقل خطی اند.

مثال: نشان دهید توابع $y_1(x) = \sin x$ و $y_2(x) = \cos x$ مستقل خطی اند.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$$

پس y_1 و y_2 مستقل خطی اند.

مثال: فرض کنیم r_1 و r_2 دو عدد حقیقی متمایز باشند. نشان دهید $y_1 = e^{r_1 x}$ ، $y_2 = e^{r_2 x}$ مستقل خطی اند.

حل:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = r_2 e^{(r_1+r_2)x} - r_1 e^{(r_1+r_2)x}$$

$$= e^{(r_1+r_2)x}(r_2 - r_1) \neq 0$$

پس y_1 و y_2 مستقل خطی هستند.

مثال: فرض کنیم r یک عدد حقیقی باشد. نشان دهید دو تابع $y_1 = e^{rx}$ و $y_2 = xe^{rx}$ مستقل خطی هستند.

حل:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & e^{rx} + rxe^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx} \neq 0$$

پس y_1 و y_2 مستقل خطی اند.

قضیه ۵: معادله خطی مرتبه دوم همگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ را که p و q روی بازه $I \subseteq \mathbb{R}$ پیوسته‌اند در نظر بگیرید. اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب این معادله باشند آنگاه

$$W(y_1, y_2) = c\, e^{-\int p(x)dx}$$

که c یک عدد ثابت است.

برهان: قرار می‌دهیم

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 = u(x)$$

بنابراین:

$$u'(x) = \cancel{y_1'y_2'} + y_1y_2'' - \cancel{y_1'y_2'} - y_1''y_2 = y_1y_2'' - y_1''y_2 \quad *$$

از طرفی چون y_1 و y_2 جواب معادله هستند پس در روابط زیر صادق اند:

$$\begin{cases} y_1'' = -p(x)y_1' - q(x)y_1 \\ y_2'' = -p(x)y_2' - q(x)y_2 \end{cases}$$

با جایگذاری دو رابطه اخیر در * داریم:

$$u'(x) = y_1(-p(x)y_2' - q(x)y_2) - (-p(x)y_1' - q(x)y_1)y_2 = -p(x)(y_1y_2' - y_2y_1')$$
$$= -p(x)\,u(x)$$

$$\Rightarrow u' = -p(x)u \Rightarrow \frac{du}{dx} = -p(x)u \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -\int p(x)dx + c_1$$

$$\Rightarrow \ln|u| = -\int p(x)dx + c_1 \Rightarrow |u| = e^{c_1}\, e^{-\int p(x)dx}$$

$$\Longrightarrow u = c\, e^{-\int p(x)dx} \Longrightarrow W(y_1,y_2) = c e^{-\int p(x)dx}$$

نتیجه: فرض کنیم y_1 و y_2 جوابهای معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشند. در این صورت $W(y_1,y_2)$ یا هیچگاه صفر نیست $(c \neq 0)$ یا همواره صفر است $(c = 0)$.

قضیه ۶: اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جوابهای مستقل خطی معادله همگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشند آنگاه جواب عمومی این معادله همگن به صورت $y_g(x, c_1, c_2) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ است که c_1 و c_2 دو عدد ثابت اند.

تا اینجا فهمیدیم که چگونه جواب عمومی معادله همگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ را بیابیم. پس اگر راهی بیابیم که بتوانیم یک جواب خصوصی از $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ را نیز بیابیم آنگاه جواب عمومی معادله آخر با توجه به قضیه ۲ حاصل می‌شود.

قضیه ۷ (اصل برهم نهی جوابها): اگر $y_{p_1}(x)$ جواب خصوصی معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$ و $y_{p_2}(x)$ جواب خصوصی $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$ باشند آنگاه $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ جواب خصوصی معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ است.

روش کاهش مرتبه (فرمول آبل): استفاده از یک جواب برای یافتن جواب دیگر:

فرض کنید $y_1(x)$ جوابی از معادله خطی مرتبه دوم $\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)}$ باشد. می‌خواهیم جواب دیگری از معادله (1) مانند y_2 بیابیم به طوری که y_1 و y_2 مستقل خطی باشند ($W(y_1, y_2) \neq 0$ یا $\frac{y_2}{y_1} \neq$ ثابت)

برای اینکه $\frac{y_2}{y_1}$ تابع ثابت نباشد فرض کنیم $\frac{y_2}{y_1} = v(x)$ سپس فرض می‌کنیم $y_2 = v(x)y_1$.

برای یافتن $v(x)$، y_2 را در معادله (1) جاگذاری می‌کنیم:

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \Longrightarrow (v(x)y_1)'' + p(x)(v(x)y_1)' + q(x)(v(x)y_1) = 0$$

با ساده کردن به معادله

$$y_1 v'' + (2y_1' + p(x)y_1)v' + \underbrace{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)}_{\text{چون } y_1 \text{ جواب (1) است}} v = 0$$

می‌رسیم.

بنابراین داریم $v'' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p(x)\right)v' = 0$ که یک معادله درجه دوم فاقد v است. پس از تغییر متغیر

$w = v'$ استفاده می‌کنیم. داریم $w' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + p(x)\right)w = 0$ که معادله تفکیک‌پذیر است.

$$\frac{dw}{dx} = -\left(2\frac{y_1'}{y_1} + p(x)\right)w \Longrightarrow \int \frac{dw}{w} = \int \left(-2\frac{y_1'}{y_1} - p(x)\right)dx$$

$$\Longrightarrow \ln w = -2\ln y_1 - \int p(x)\,dx = \ln\frac{1}{y_1^2} - \int p(x)\,dx$$

$$\Longrightarrow w = e^{\ln\frac{1}{y_1^2} - \int p(x)dx} \Longrightarrow w = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}$$

از آنجا که $w = v'$

$$v' = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx} \Longrightarrow v(x) = \int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}\,dx$$

$$y_2 = y_1(x)v(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}\,dx$$

فرمول آبل

خلاصه: اگر $y_1(x)$ یک جواب ناصفر از $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ باشد آنگاه،

$$y_2(x)=y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int P(x)dx}\, dx$$

جواب دیگر معادله است که با y_1 مستقل خطی است.

مثال: می‌دانیم $y_1=x$ یک جواب معادله $x>0$ ، $x^2y''-xy'+y=0$ است. جواب عمومی معادله را بیابید.

توجه کنید که ابتدا باید معادله را به فرم استاندارد بنویسیم

$$y''\underbrace{-\frac{1}{x}}_{P(x)}y'+\frac{1}{x^2}y=0$$

$$y_2(x)=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}dx = x\int\frac{1}{x^2}\overbrace{e^{-\int -\frac{1}{x}dx}}^{e^{\ln x}}dx = x\int\frac{1}{x}dx$$

$$= x\ln x$$

جواب عمومی $\quad y_g(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=c_1x+c_2x\ln x$

مثال: جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$(\tan x)y''+(\tan^2x-2)y'+\frac{2}{\tan x}y=0 \qquad 0<x<\frac{\pi}{2}\ ,\quad y_1(x)=\sin x$$

ابتدا باید $y_2(x)$ را بیابیم. برای استفاده از روش کاهش مرتبه (فرمول آبل) ابتدا معادله را در فرم استاندارد بازنویسی می‌کنیم.

$$y''+\left(\tan x-\frac{2}{\tan x}\right)y'+\frac{2}{(\tan x)^2}=0$$

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}dx = \sin x\int\frac{1}{\cancel{\sin^2x}}\cos x\cancel{\sin^2 x}\,dx = \sin^2x$$

$$e^{-\int P(x)dx}=e^{\int(-\tan x+2\cot x)dx}=e^{\ln\cos x+2\ln\sin x}=\cos x\sin^2x$$

پس $\quad y_g=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=c_1\sin x+c_2\sin^2x.$

تذکر: $y_1=e^x$ جواب معادله $a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0$ است اگر و فقط اگر $a(x)+b(x)+c(x)=0$

مثال: جواب عمومی معادله $x>0$ ، $xy''+(1-2x)y'+(x-1)y=0$ را بیابید.

با توجه به تذکر قبل چون مجموع ضرائب معادله همگن اخیر صفر است پس $y_1(x)=e^{x}$ جواب معادله است.

حال برای یافتن y_2 از کاهش مرتبه (فرمول آبل) استفاده می‌کنیم. پس ابتدا باید معادله را در فرم استاندارد بنویسیم

$$y''+\left(\frac{1}{x}-2\right)y'+\left(1-\frac{1}{x}\right)y=0$$

$$e^{-\int p(x)dx}=e^{-\int\left(\frac{1}{x}-2\right)dx}=e^{-\ln x+2x}=\frac{1}{x}e^{2x}$$

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx=e^{x}\int\frac{1}{\cancel{e^{2x}}}\frac{1}{x}\cancel{e^{2x}}dx=e^{x}\int\frac{1}{x}dx=e^{x}\ln x$$

پس $y_g=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{x}+c_2e^{x}\ln x$

مثال: فرض کنید $y_1=x^m$ یک جواب از معادله $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$ باشد. جواب عمومی معادله را بیابید.

حل: ابتدا باید m را بیابیم. چون $y_1=x^m$ جوابی از معادله است پس با جایگذاری $y_1'=mx^{m-1}$ ، $y_1''=m(m-1)x^{m-2}$ در معادله داریم

$$(1-x^2)m(m-1)x^{m-2}-2x\,mx^{m-1}+2x^m=0\qquad\forall x$$

$$\Rightarrow m(m-1)x^{m-2}-m(m-1)x^m-2mx^m+2x^m=0\xrightarrow{\forall x}m(m-1)x^{m-2}-(\cancel{m^2-m+2m-2})^{m^2+m-2}x^m=0$$

چون رابطه اخیر برای هر x برقرار است پس باید ضرائب صفر شوند.

$$\begin{cases}m(m-1)=0\\ m^2+m-2=0\end{cases}\longrightarrow m=0 \text{ یا } \boxed{m=1}\ \text{قابل قبول}$$

پس $y_1=x$ ، حال معادله را در حالت استاندارد می‌نویسیم

$$y''+\frac{-2x}{1-x^2}y'+\frac{2}{1-x^2}y=0$$

$$e^{-\int p(x)dx}=e^{\int\frac{2x}{1-x^2}dx}=e^{-\ln(1-x^2)}=\frac{1}{1-x^2}$$

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx=x\int\frac{1}{x^2}\frac{1}{1-x^2}dx=\dots$$

تجزیه کسر:

$$\frac{1}{x^2(1-x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{1-x}+\frac{D}{1+x}$$

تمرین: ۷۱) اگر $y_1=e^{mx}$ جوابی از معادله همگن $xy''-2(x+1)y'+(x+2)y=0$ باشد جواب عمومی معادله را بیابید.

جواب عمومی معادلات زیر را پیدا کنید.

۷۲) $y''-\frac{2}{x}y'+\left(1+\frac{2}{x^2}\right)y=0$ ، $y_1=x\sec x$

۷۳) $x^2y''+2xy'-6y=0$ ، $y_1=x^2$

۷۴) $x^2y''-x(x+2)y'+(x+2)y=0$ ، y_1 را خودتان حدس بزنید.

۷۵) $x^2(x^2-1)y''-x(x^2+1)y'+(x^2+1)y=0$ ، $y_1=x$

معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت

تعریف: معادله به صورت $a y'' + b y' + c y = 0$ (1) را یک معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت نامیم که در آن $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$.

برای حل معادله (1) به این نکته توجه کنید که تنها توابعی که مشتق آن برابر با مضربی از خودش است توابع نمائی $y = e^{rx}$ است. پس فرض می‌کنیم که جوابهای معادله (1) به صورت $y = e^{rx}$ باشد. در این صورت

$$y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}$$

با جایگذاری در معادله (1) داریم

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \Rightarrow e^{rx}(ar^2+br+c) = 0$$

از آنجا که $e^{rx} \neq 0$ پس r باید در معادله $ar^2+br+c=0$ صدق کند.

تعریف: معادله $ar^2+br+c=0$ را معادله شاخص (مشخصه) نظیر (1) می‌نامیم.

حال برای ریشه‌های معادله شاخص سه حالت ممکن است رخ دهد.

حالت اول: $\Delta = b^2-4ac>0$. در این حالت معادله شاخص دارای دو ریشه حقیقی متمایز به صورت

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

است. در این صورت $y_1 = e^{r_1x}$ و $y_2 = e^{r_2x}$ دو جواب مستقل خطی از (1) هستند

(زیرا $W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x} \end{vmatrix} = (r_2-r_1)e^{(r_1+r_2)x} \neq 0$)

پس جواب عمومی معادله به صورت $y(x) = c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$ است.

حالت دوم: $\Delta = b^2-4ac=0$ در این حالت معادله مشخصه دارای یک ریشه حقیقی تکراری به صورت $r = \frac{-b}{2a}$ است. پس یک جواب $y_1 = e^{rx} = e^{\frac{-b}{2a}x}$ به دست می‌آید. جواب دیگر را از روش کاهش مرتبه (فرمول آبل) به دست می‌آوریم.

$$y_1 = e^{\frac{-b}{2a}x} \Rightarrow y_2 = vy_1 \Rightarrow v = \int \frac{1}{(y_1)^2} e^{-\int p(x)dx}dx$$

$$\Rightarrow v = \int \frac{1}{\left(e^{-\frac{b}{2a}x}\right)^2} e^{-\int \frac{b}{a}dx} dx = \int \frac{1}{\cancel{e^{-\frac{b}{a}x}}} \cancel{e^{-\frac{b}{a}x}} dx = \int 1 dx = x$$

$$\Rightarrow y_2(x) = x e^{rx}$$

توجه کنید که $y_1 = e^{rx}$ و $y_2 = xe^{rx}$ دو جواب مستقل خطی از ① هستند
$W(y_1, y_2) \neq 0$

جواب عمومی به صورت $y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$ است.

حالت سوم: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. در این حالت معادله مشخصه دارای دو ریشه مختلط

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta}\,\underbrace{\cancel{\sqrt{-1}}}_{i}}{2a} = \overbrace{\left(\frac{-b}{2a}\right)}^{\lambda} \pm \overbrace{\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)}^{\mu} i$$

$$= \lambda \pm i\mu$$

در این صورت جوابهای معادله ① به صورت

$$e^{(\lambda + i\mu)x} = e^{\lambda x} e^{i\mu x} = e^{\lambda x}(\cos\mu x + i \sin\mu x) \longrightarrow$$
$$e^{(\lambda - i\mu)x} = e^{\lambda x} e^{-i\mu x} = e^{\lambda x}(\cos\mu x - i \sin\mu x) \longrightarrow$$
دو جواب مختلط

لم: اگر $Z(x) = u(x) + i v(x)$ جواب معادله $ay'' + by' + cy = 0$ باشد آنگاه قسمت حقیقی و قسمت موهومی نیز هر دو جواب معادله هستند یعنی $u(x)$ و هم $v(x)$ جواب معادله اند.

پس با استفاده از لم قبل $y_1 = e^{\lambda x}\cos\mu x$ و $y_2 = e^{\lambda x}\sin\mu x$ جوابهای مستقل خطی معادله ① هستند پس جواب عمومی ① به صورت

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x}\cos\mu x + c_2 e^{\lambda x}\sin\mu x$$

است

خلاصه

$$ay'' + by' + cy = 0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} ar^2 + br + c = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

1) $\Delta > 0 \Rightarrow r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x},\ y_2 = e^{r_2 x}$

2) $\Delta = 0 \Rightarrow r = -\frac{b}{2a} \Rightarrow y_1 = e^{rx},\ y_2 = xe^{rx}$

3) $\Delta < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \lambda \pm i\mu \Rightarrow y_1 = e^{\lambda x}\cos\mu x,\ y_2 = e^{\lambda x}\sin\mu x$

مثال: معادله $y''-3y'+2y=0$ را حل کنید.

حل: معادله مشخصه را می‌نویسیم $r^2-3r+2=0 \Rightarrow \Delta=(-3)^2-4(1)(2)=1>0$

$$r_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2} \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=2 \Rightarrow y_1(x)=e^{x},\ y_2(x)=e^{2x}$$

پس جواب عمومی به صورت $y(x)=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$ است.

مثال: جواب عمومی معادله $y''+7y'=0$ را بیابید.

معادله مشخصه $r^2+7r=0 \Rightarrow r(r+7)=0$

$$r=0 \Rightarrow y_1=1$$
$$r=-7 \Rightarrow y_2=e^{-7x}$$

پس جواب عمومی به صورت $y(x)=c_1+c_2e^{-7x}$ است.

مثال: جواب خصوصی معادله $\begin{cases}4y''-y=0\\ y(0)=1,\ y'(0)=2\end{cases}$ را بیابید.

معادله مشخصه $4r^2-1=0 \Rightarrow r^2=\frac{1}{4} \Rightarrow r=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow y_1(x)=e^{\frac{1}{2}x},\ y_2(x)=e^{-\frac{1}{2}x}$

جواب عمومی $y(x)=c_1e^{\frac{1}{2}x}+c_2e^{-\frac{1}{2}x}$ با اعمال شرایط اولیه c_1 و c_2 را می‌یابیم

$$1=y(0)=c_1+c_2$$

$$y'(x)=\frac{1}{2}c_1e^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}c_2e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow 2=y'(0)=\frac{1}{2}c_1-\frac{1}{2}c_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases}c_1+c_2=1\\ \frac{1}{2}c_1-\frac{1}{2}c_2=2\end{cases} \Rightarrow 2c_1=5 \Rightarrow c_1=\frac{5}{2},\quad c_2=-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y(x)=\frac{5}{2}e^{\frac{1}{2}x}-\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$ جواب خصوصی

مثال: جواب عمومی معادله $y''+2y'+y=0$ را بیابید.

معادله مشخصه $r^2+2r+1=0 \Rightarrow (r+1)^2=0 \Rightarrow r=-1$ ریشه تکراری

$$\Rightarrow y_1(x)=e^{-x},\quad y_2=xe^{-x} \Rightarrow y(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$$

مثال: جواب خصوصی معادله $\begin{cases} 4y'' - 4y' + y = 0 \\ y(0)=1,\ y'(0)=1 \end{cases}$ را بیابید.

معادله مشخصه $4r^2 - 4r + 1 = 0 \Rightarrow 4(r^2 - r + \frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow 4(r - \frac{1}{2})^2 = 0$

$r = \frac{1}{2}$ ریشه مضاعف

$\Rightarrow y_1(x) = e^{\frac{1}{2}x},\ y_2(x) = xe^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow y(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 x e^{\frac{1}{2}x}$

$\Rightarrow y'(x) = \frac{1}{2}c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}c_2 x e^{\frac{1}{2}x}$

$1 = y(0) = c_1$

$1 = y'(0) = \frac{1}{2} \cdot 1 + c_2 \Rightarrow c_1 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{2}x}}$

مثال: جواب عمومی معادله $4y'' - 4y' + 5y = 0$ را بیابید.

معادله مشخصه $4r^2 - 4r + 5 = 0 \longrightarrow \Delta = 16 - 80 = -64 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}\, i}{8}$

$\Rightarrow r_{1,2} = \frac{1}{2} \pm 1 i \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1(x) = e^{\frac{1}{2}x}\cos x \\ y_2(x) = e^{\frac{1}{2}x}\sin x \end{matrix}\right\} y(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x}\cos x + c_2 e^{\frac{1}{2}x}\sin x$

(λ و μ)

مثال: جواب عمومی معادله $y'' + 4y = 0$ را بیابید.

معادله مشخصه $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r^2 = -4 \Rightarrow r = \pm 2i$ ، $\lambda = 0$ ، $\mu = 2$

پس $y_1(x) = \cos 2x$ و $y_2(x) = \sin 2x$ پس $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

مثال: جواب عمومی معادله $y'' - 2y' + 2y = 0$ را بیابید.

معادله مشخصه $r^2 - 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$

پس $y_1 = e^x \cos x$ و $y_2 = e^x \sin x$ و در نتیجه $y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$

$\Rightarrow y = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

تمرین: جواب عمومی یا خصوصی معادلات زیر را بیابید.

76) $y'' + y' - 6y = 0$

77) $y'' + 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$

78) $y'' + 6y' + 9y = 0$

79) $9y'' - 12y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

80) $y'' - 2y' + 4y = 0$

81) $2y'' - y' + 3y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$

معادلات خطی همگن مرتبه های بالاتر با ضرایب ثابت.

تعریف: یک معادله خطی همگن مرتبه n ام با ضرایب ثابت به صورت

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

است که در آن ضرایب a_i ها اعداد ثابت اند و $a_n \neq 0$.

برای حل معادله اخیر مشابه به آنچه در بخش قبل انجام دادیم را تکرار خواهیم کرد. پس ابتدا معادله مشخصه آن را که به صورت

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

است را یافته و ریشه های آن را محاسبه می کنیم. بنابر قضیه اساسی جبر این معادله مشخصه با احتساب ریشه های تکراری و مختلط دارای دقیقاً n ریشه است. ریشه ها را یافته و مانند بخش قبل جواب معادله را می یابیم.

مثال: جواب عمومی معادله $y''' - 3y' + 2y = 0$ را بیابید.

حل: ابتدا معادله مشخصه را می نویسیم

$$r^3 - 3r + 2 = 0$$

نکته: اگر مجموع ضرایب یک چندجمله‌ای برابر با صفر باشد آنگاه 1 ریشه آن چندجمله‌ای است. در چندجمله‌ای $r^3 - 3r + 2 = 0$ مجموع ضرایب برابر است با $1 + (-3) + 2 = 0$ پس یکی از ریشه ها برابر با 1 است. یعنی $r^3 - 3r + 3$ بر $r-1$

بخش پذیر است. پس $r^3 - 3r + 2$ را بر $r-1$ تقسیم می کنیم.

$$\begin{array}{l|l} r^3 - 3r + 2 & r-1 \\ \cline{2-2} -(r^3 - r^2) & r^2 + r - 2 \\ \hline r^2 - 3r + 2 & \\ -(r^2 - r) & \\ \hline -2r + 2 & \\ -(-2r + 2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow r^3 - 3r + 2 = (r-1)\cancel{(r^2 + r - 2)} = (r-1)(r-1)(r+2)$$

حال ریشه های $r^2 + r - 2 = 0$ را می یابیم که برابر است با $r = 1$ و $r = -2$.

پس ریشه های معادله مشخصه عبارتند از: $r_1 = 1$, $r_2 = 1$, $r_3 = -2$

$$y_1(x) = e^{x} \qquad y_2(x) = x e^{x} \qquad y_3(x) = e^{-2x}$$

بنابراین جواب عمومی معادله به صورت

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 e^{-2x}$$

است.

مثال: جواب عمومی معادله $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$ را بیابید.

معادله مشخصه به صورت $r^3 + r^2 + 4r + 4 = 0$ است.

نکته: اگر در یک چندجمله‌ای، مجموع ضرایب توانهای زوج برابر با مجموع ضرایب توانهای فرد باشد آنگاه -1 یک ریشه چندجمله‌ای است.

پس یکی از ریشه‌های r^3+r^2+4r+4 برابر با ۱- است و در نتیجه بر $r+1$ قابل تقسیم است

$$\begin{array}{r|l} r^3+r^2+4r+4 & r+1 \\ \cline{2-2} -(r^3+r^2) & r^2+4 \\ \hline 0+4r+4 & \\ -(4r+4) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow r^3+r^2+4r+4=(r+1)(r^2+4)=0$$

$$\Rightarrow r_1=-1,\quad r_{2,3}=\pm 2i$$

پس $y_1(x)=e^{-x}$ ، $y_2(x)=\cos 2x$ و $y_3=\sin 2x$ درنتیجه

$$y(x)=c_1e^{-x}+c_2\cos 2x+c_3\sin 2x.$$

مثال: جواب عمومی معادله $y'''+3y''+3y'+y=0$ را بیابید.

ابتدا معادله شاخص را می‌نویسیم

$$r^3+3r^2+3r+1=0 \Rightarrow (r+1)^3=0 \Rightarrow r_1=r_2=r_3=-1$$

پس $y_1(x)=e^{-x}$ ، $y_2(x)=xe^{-x}$ ، $y_3(x)=x^2e^{-x}$

بنابراین جواب عمومی به صورت $y(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+c_3x^2e^{-x}=e^{-x}(c_1+c_2x+c_3x^2)$ است.

مثال: جواب عمومی معادله $y'''+2y''-y'-2y=0$ را بیابید.

حل: ابتدا معادله شاخص را می‌نویسیم $r^3+2r^2-r-2=0$.

چون جمع ضرایب صفر است پس یک ریشه آن ۱ است

همچنین چون مجموع ضرایب توانها زوج با مجموع ضرایب توانهای فرد برابر است پس یک ریشه آن ۱- است

پس چندجمله‌ای r^3+2r^2-r-2 بر $r^2-1=(r-1)(r+1)$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{r|l} r^3+2r^2-r-2 & r^2-1 \\ \cline{2-2} -(r^3-r) & r+2 \\ \hline 2r^2-2 & \\ -(2r^2-2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow r^3+2r^2-r-2=(r-1)(r+1)(r+2)=0$$

$$\Rightarrow r_1=1,\quad r_2=-1,\quad r_3=-2$$

$$\Rightarrow y_1(x)=e^{x},\ y_2(x)=e^{-x},\ y_3(x)=e^{-2x}$$

جواب عمومی $\Leftarrow$ $y(x)=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{-2x}$

مثال: معادله $y^{(4)} - y = 0$ را حل کنید.

معادله مشخصه $r^4 - 1 = 0 \Rightarrow (r^2-1)(r^2+1) = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -1,\ r_{3,4} = \pm i$

$\Rightarrow y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = e^{-x},\ y_3(x) = \cos x,\ y_4(x) = \sin x$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

مثال: جواب عمومی معادله $\underbrace{(D^2-1)(D+3)(D^2+4)}\,y = 0$ را حل کنید. $\left(D = \frac{d}{dx}\right)$

$$(y'' - y)(y' + 3y)(y'' + 4y) = 0$$

$$(r^2-1)(r+3)(r^2+4) = 0$$

$r_1 = 1 \to y_1 = e^x$

$r_2 = -1 \to y_2 = e^{-x}$

$r_3 = -3 \to y_3 = e^{-3x}$

$r_{4,5} = \pm 2i \to y_4 = \cos 2x,\ y_5 = \sin 2x$

$$\Rightarrow y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-3x} + c_4 \cos 2x + c_5 \sin 2x.$$

مثال: جواب عمومی معادله $D^2(D^2-4)(D^2+2D+5)^2 y = 0$ را به دست آورید.

$$r^2(r^2-4)(r^2+2r+5)^2 = 0$$

$r_1 = r_2 = 0 \to 1,\ x$

$r_3 = 2 \to e^{2x}$

$r_4 = -2 \to e^{-2x}$

$r_5 = r_6 = 1+2i$

$r_7 = r_8 = 1-2i$

$\Rightarrow e^x \cos 2x,\ e^x \sin 2x$

$x e^x \cos 2x,\ x e^x \sin 2x$

بنابراین

$y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = e^{2x},\ y_4 = e^{-2x},\ y_5 = e^x \cos 2x$

$y_6 = x e^x \cos 2x$

$y_7 = e^x \sin 2x$

$y_8 = x e^x \sin 2x$

$y = c_1 y_1 + \dots + c_8 y_8$ جوابها مستقل خطی معادله اند

مثال: جواب عمومی معادله $y^{(4)} + 2y''' + 5y'' = 0$ را حل کنید.

$r^4 + 2r^3 + 5r^2 = 0 \Rightarrow r^2(r^2 + 2r + 5) = 0$

$r_1 = r_2 = 0$

$r_3, r_4 = 1 \pm 2i$

$y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x,\ y_3(x) = e^x \cos 2x,\ y_4(x) = e^x \sin 2x \Rightarrow y = c_1 y_1 + \dots + c_4 y_4$

تمرین: جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

۸۲) $y''' - 7y'' + 11y' - 5y = 0$

۸۳) $y^{(4)} - y''' + 2y' = 0$

۸۴) $y^{(5)} + 18y''' + 81y' = 0$

۸۵) $y''' - 2y'' + 2y' = 0$

۸۶) $y''' - y'' - y' + y = 0$

۸۷) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$

۸۸) $(D-1)^2(D^2-4)(D^2+D+1)\,y = 0$

۸۹) $D(D^2+1)(D^3-9D)\,y = 0$

۹۰) $(D^2+16)(D-3)^2(D^2-2D+2)(D^2-9)\,y = 0$

روش ضرائب نامعین (برای یافتن جواب خصوصی معادلات غیرهمگن با ضرائب ثابت)

معادلهٔ خطی غیرهمگن با ضرائب ثابت

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (1)$$

مفروض است که a_0 و ... و a_n اعداد حقیقی و $a_n \neq 0$ و $f(x)$ یک تابع پیوسته است. جواب عمومی معادلهٔ (1) به صورت $y(x) = y_g(x) + y_p(x)$ است که $y_g(x)$ جواب عمومی معادلهٔ همگن

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

است و y_p یک جواب خصوصی از معادلهٔ ناهمگن (1) است.

هدف ما در این بخش ارائهٔ روشی موسوم به ضرائب نامعین برای یافتن یک جواب خصوصی $y_p(x)$ برای معادلهٔ (1) است. بدین منظور سه حالت را برای $f(x)$ در نظر می‌گیریم.

حالت اول: $f(x) = P_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

در این صورت $y_p(x) = x^r (A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0)$ خواهد بود که r تعداد تکرارهای صفر به عنوان ریشهٔ معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ همگن متناظر با معادلهٔ (1) است.

حالت دوم: $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x} = e^{\alpha x}(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_1x+b_0)$

در این صورت $y_p(x)=x^r e^{\alpha x}(A_n x^n+\dots+A_1x+A_0)$ خواهد بود که r تعداد تکرارهای α به عنوان ریشه معادله مشخصه معادله همگن متناظر با معادله ① است.

حالت سوم: $f(x)=e^{\alpha x}\underbrace{P_n(x)}_{\text{چند جمله‌ای درجه } n}\cos\beta x$ یا $e^{\alpha x}P_n(x)\sin\beta x$

در این صورت

$$y_p(x)=x^r e^{\alpha x}\left[\cos\beta x(A_nx^n+\dots+A_1x+A_0)+\sin\beta x(B_nx^n+\dots+B_1x+B_0)\right]$$

خواهد بود که r تعداد تکرارهای $\alpha+i\beta$ به عنوان ریشه معادله مشخصه معادله همگن متناظر با معادله ① است.

نکته: در هر یک از سه حالت فوق y_p را در معادله ① جاگذاری می‌کنیم تا ضرائب را بدست آوریم.

مثال: جواب عمومی معادله $y''-4y=3x+1$ را بدست آورید.

$f(x)=3x+1$ یک چند جمله‌ای درجه ① ~~چند جمله‌ای~~ پس حالت اول

معادله همگن نظیر $y''-4y=0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} r^2-4=0 \Rightarrow r=\pm 2 \Rightarrow \boxed{y_g=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}}$

$y_p=x^0(A_1x+A_0)=A_1x+A_0$ چون صفر ریشه معادله مشخصه نیست

حال y_p را در معادله جاگذاری می‌کنیم تا ضرائب را بدست آوریم:

$y_p=A_1x+A_0 \Rightarrow y_p'=A_1 \,,\; y_p''=0$

$y''-4y=3x+1 \Longrightarrow 0-4(A_1x+A_0)=3x+1$

$\Rightarrow -4A_1x-4A_0=3x+1$

$$\begin{cases} -4A_1=3 \Rightarrow A_1=-\frac{3}{4} \\ -4A_0=1 \Rightarrow A_0=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow y_p=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4} \Longrightarrow y(x)=y_g+y_p=\boxed{c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}}$

مثال: جواب عمومی معادله $y''-y'=2x+3$ را بدست آورید.

$f(x)=2x+3$ چند جمله‌ای درجه ۱

معادله همگن نظیر $y''-y'=0 \xrightarrow{\text{مشخصه}} r^2-r=0 \Rightarrow r=1,\ r=0 \Longrightarrow y_g(x)=c_1e^{0x}+c_2e^{1x}=c_1+c_2e^{x}$

طبق حالت اول $y_p(x)=x^1(A_1x+A_0)$ پس $y_p(x)=A_1x^2+A_0x$ که با جاگذاری در معادله باید ضرائب آن را بیابیم.

$y_p=A_1x^2+A_0x \Rightarrow y_p'=2A_1x+A_0 \Rightarrow y_p''=2A_1$

با جاگذاری در معادله $y''-y'=2x+3$ داریم

$$2A_1-(2A_1x+A_0)=2x+3 \Rightarrow -2A_1x+2A_1-A_0=2x+3$$

$$\begin{cases}-2A_1=2 \Rightarrow A_1=-1\\ 2A_1-A_0=3 \Rightarrow A_0=-5\end{cases}$$

پس بنابراین $y_p=-x^2-5x$

$$\boxed{y(x)=y_g+y_p=c_1+c_2e^x-x^2-5x}$$

مثال: جواب عمومی معادله $y''-3y'+2y=2e^x(1-x)$ را بیابید:

$f(x)=e^{x}(2-2x) \longrightarrow$ حالت دوم (α)

معادله همگن $y''-3y'+2y=0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} r^2-3r+2=0 \Rightarrow (r-1)(r-2)=0 \Rightarrow r_1=1,\ r_2=2$

بنابراین $y_g=c_1e^x+c_2e^{2x}$

$y_p(x)=x^1e^x(A_1x+A_0)$ از طرفی طبق حالت دوم

یک ریشه معادله مشخصه است

بنابراین $y_p=e^x(A_1x^2+A_0x)$ ، $y_p'=e^x(Ax^2+Bx)+e^x(2Ax+B)$

$y_p''=e^x(Ax^2+Bx)+2e^x(2Ax+B)+2Ae^x$ که با جاگذاری در معادله داریم:

$$\cancel{e^x}\left[(Ax^2+Bx+4Ax+2B+2A)-3(2Ax^2+Bx+2Ax+B)+2(Ax^2+Bx)\right]=2\cancel{e^x}(1-x)$$

$$\Rightarrow -2Ax-B+2A=2-2x \Rightarrow \begin{cases}-2A=-2 \Rightarrow A=1\\ 2A-B=2 \quad\ B=0\end{cases}$$

پس بنابراین $y_p=x^2e^x$

$$y(x)=y_g+y_p=c_1e^x+c_2e^{2x}+x^2e^x$$

مثال: یک جواب خصوصی برای معادله $y''+y'=x^2+x\sinh x+xe^{2x}$ بیابید (محاسبه ضرائب لازم نیست)

همگن $y''+y'=0 \xrightarrow{\text{م خ}} r^2+r=0 \Rightarrow r=0,\ r=1$

$$f(x)=x^2+x\sinh x+xe^{2x}=x^2+x\,\frac{e^x-e^{-x}}{2}+xe^{2x}$$

$$=\underbrace{x^2}_{f_1}+\underbrace{\tfrac{1}{2}xe^x}_{f_2}\underbrace{-\tfrac{1}{2}xe^{-x}}_{f_3}+\underbrace{xe^{2x}}_{f_4}$$

$y_{p_1}=x^1(A_2x^2+A_1x+A_0)=A_2x^3+A_1x^2+A_0x$

$y_{p_2}=x^1e^x(B_1x+B_0)=e^x(B_1x^2+B_0x)$

$y_{p_3}=x^0e^{-x}(C_1x+C_0)=e^{-x}(C_1x+C_0)$

$y_{p_4}=x^0e^{2x}(D_1x+D_0)=e^{2x}(D_1x+D_0)$

بنابراین جواب خصوصی $y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}+y_{p_4}$

مثال: جواب عمومی معادله $y''+2y'+5y=4xe^{-x}\cos 2x$ را به دست آورید.

$f(x)=4xe^{-x}\cos 2x \longrightarrow$ حالت سوم

معادله همگن $y''+2y'+5y=0 \xRightarrow{\text{مشخصه}} r^2+2r+5=0 \Rightarrow r_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=-1\pm 2i$

$y_g=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$

طبق حالت سوم $y_p=x^1 e^{-x}\big((A_1x+A_0)\cos 2x+(B_1x+B_0)\sin 2x\big)$

بنابراین $y_p=e^{-x}\big((A_1x^2+A_0x)\cos 2x+(B_1x^2+B_0x)\sin 2x\big)$ حال با جایگذاری y_p در معادله

ضرائب را به دست می آوریم. (تمرین) $\left(\begin{matrix}A_0=\frac{1}{4}\\A_1=0\end{matrix}\quad \begin{matrix}B_1=\frac{1}{2}\\B_0=0\end{matrix}\right)$

خواهیم داشت $y_p=e^{-x}\left(\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{2}x^2\sin 2x\right)$. بنابراین

$$y(x)=y_g+y_p=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+e^{-x}\left(\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{2}x^2\sin 2x\right)$$

مثال: جواب خصوصی برای معادله $y''+2y'+2y=x^2e^{-x}\sin x+x\cos x$ بیابید (محاسبه ضرائب لازم نیست)

همگن $y''+2y'+2y=0 \Rightarrow r^2+2r+2=0 \Rightarrow r_{1,2}=-1\pm i$

$f(x)=\underbrace{x^2e^{-x}\sin x}_{f_1(x)}+\underbrace{x\cos x}_{f_2(x)}$

$\alpha=-1,\ \beta=1 \leftarrow f_1(x)$, $f_2(x)\rightarrow \alpha=0,\ \beta=1$

$y_{p_1}=xe^{-x}\big((A_2x^2+A_1x+A_0)\cos x+(B_2x^2+B_1x+B_0)\sin x\big)$ در معادله $y''+2y'+2y=f_1(x)$ صدق می کند

تعداد دفعاتی که $1+i$ ریشه معادله مشخصه است

$y_{p_2}(x)=x^0e^{0x}\big((C_1x+C_0)\cos x+(D_1x+D_0)\sin x\big)$ در معادله $y''+2y'+2y=f_2(x)$ صدق می کند

$\Rightarrow y_p=y_{p_1}+y_{p_2}$

مثال: یک جواب خصوصی برای معادله

$$D^2(D^2-4)(D^2+2D+5)^2y=x^2+x\sin 2x+e^{-x}\cos^2x+5$$

بیابید (محاسبه ضرائب لازم نیست)

معادله همگن نظیر: $D^2(D^2+4)(D^2+2D+5)^2y=0$ $\xrightarrow{\text{معادله مشخصه}}$ $r^2(r^2+4)(r^2+2r+5)^2=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}\boxed{r_1=r_2=0} & \text{دوبار}\\ r_3=2\\ r_4=-2\\ r_{5,6}=-1\pm 2i & \text{دوبار تکرار}\end{cases}$$

$$f(x)=(x^2+5)+x\sin 2x+e^{-x}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x)=\underbrace{(x^2+5)}_{f_1}+\underbrace{x\sin 2x}_{f_2}+\underbrace{\tfrac{1}{2}e^{-x}}_{f_3}+\tfrac{1}{2}\underbrace{e^{-x}\cos 2x}_{f_4}$$

f_1 ← حالت اول

f_2 ← حالت سوم $\alpha=0,\ \beta=2$

f_3 ← حالت دوم $\alpha=-1$

f_4 ← حالت سوم $\alpha=-1,\ \beta=2$

$y_{p_1}=x^2(A_2x^2+A_1x+A_0)=x^2(A_2x^2+A_1x+A_0)$

$y_{p_2}=x^0\left((B_1x+B_0)\cos 2x+(C_1x+C_0)\sin 2x\right)$

$y_{p_3}=x^0e^{-x}(D)=De^{-x}$

$y_{p_4}=x^2e^{-x}(E\cos 2x+F\sin 2x)$

$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}+y_{p_4}$

تمرین: جواب خصوصی معادلات زیر را بیابید

91) $y''-y=x\sin x$

92) $y''-5y'+6y=e^x\sin x$

93) $y''+y'-6y=7e^{2x}+3x^2$

محاسبه ضرائب لازم است

94) $y''+4y'+5y=xe^{-2x}\cos x$

95) $y^{(4)}+4y''=3x^2+xe^x+\sin^2x$

96) $D^3(D^2+1)^2(D^3-9D)y=x^2+2\sinh x+x^3e^{3x}+1+x\cos x\sin^2x$

97) $y''-4y'+3y=e^{5x}$ محاسبه ضرائب لازم است

98) $y''+9y=\sin^3x-\cos 3x$ محاسبه ضرائب لازم است

99) $y''-4y'+4y=(x^2+x^9)e^{2x}$

100) $y''+2y'+5y=x^2e^{-x}\sin 2x$

روش تغییر پارامتر: این روش برای یافتن یک جواب خصوصی برای معادله ناهمگن

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x) \quad (*)$$

به کار می‌رود. در روش ضرائب نامعین باید a_0، a_1، …، a_n اعداد ثابت باشند و همچنین $f(x)$ به یکی از سه شکل گفته شده در بخش قبل باشد. در روش تغییر پارامترها دو محدودیت روش ضرائب نامعین وجود ندارد

در عوض باید n جواب مستقل خطی از دستگاه همگن تقلیل به معادله $(*)$ یعنی $y_1, y_2, \dots, y_n$ را داشته باشیم.

اجازه دهید ابتدا این روش را برای معادلات مرتبه دوم خطی بیان کنیم:

معادله مرتبه دوم خطی $\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \quad (1)}$ را در نظر می‌گیریم (ضریب y'' 1 است). فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی از معادله همگن تقلیل یعنی $\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=0 \quad (2)}$ باشند. جواب عمومی (2) به صورت $y_g(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ است. برای یافتن $y_p(x)$ (یک جواب خصوصی برای (1)) فرض می‌کنیم y_p به صورت

$$y_p(x)=v_1(x)y_1(x)+v_2(x)y_2(x) \quad (3)$$

باشد. رابطه (3) را در معادله (1) جاگذاری می‌کنیم. داریم:

$$(v_1y_1+v_2y_2)''+p(x)(v_1y_1+v_2y_2)'+q(x)(v_1y_1+v_2y_2)=f(x)$$

$$v_1''y_1+2v_1'y_1'+v_1y_1''+v_2''y_2+2v_2'y_2'+v_2y_2''+p(x)(v_1'y_1+v_1y_1'+v_2'y_2+v_2y_2')$$
$$+v_1y_1q(x)+v_2y_2f(x)=0$$

$$v_1\underbrace{(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1)}_{\to 0}+v_2\underbrace{(y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2)}_{\to 0}+v_1''y_1+2v_1'y_1'+v_2''y_2+2v_2'y_2'$$
$$+p(x)(v_1'y_1+v_2'y_2)=f(x)$$

چون y_1 جواب معادله همگن تقلیل است

چون y_2 جواب معادله همگن تقلیل است

$$v_1''y_1+v_1'y_1'+v_1'y_1'+v_2''y_2+v_2'y_2'+v_2'y_2'+p(x)(v_1'y_1+v_2'y_2)=f(x) \quad (4)$$

حال اگر v_1 و v_2 به گونه‌ای انتخاب شوند که

$$\boxed{v_1'y_1+v_2'y_2=0 \quad (5)}$$

آنگاه با مشتق‌گیری از طرفین (5) داریم:

$$v_1''y_1+v_1'y_1'+v_2''y_2+v_2'y_2'=0 \quad (6)$$

با جایگذاری (5) و (6) در (4) داریم

$$v_1'y_1'+v_2'y_2'=f(x) \quad (7)$$

اکنون با نوشتن معادلات (5) و (7) به صورت دستگاه داریم:

$$\begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

حال با حل دستگاه اخیر به روش کرامر داریم :

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}_{\text{رونسکین}}} = \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} v_1(x) = \int \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)}\, dx$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}_{\text{رونسکین}}} = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} v_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)}\, dx$$

مثال: جواب عمومی معادله $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{3x}}{1+e^{2x}}$ را بیابید.

معادله همگن: $y'' - 3y' + 2y = 0 \xrightarrow{\text{فرض}} r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow (r-1)(r-2) = 0 \Rightarrow r_1 = 1 \Rightarrow y_1 = e^x,\ r_2 = 2 \Rightarrow y_2 = e^{2x}$

بنابراین از روش تغییر پارامترها داریم: $y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$ که $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x}$

$$v_1' = \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} = \frac{-e^{2x} \cdot \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}}{e^{3x}} = -\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} \Rightarrow v_1 = \int -\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\, dx$$

$$\Rightarrow v_1 = -\frac{1}{2} \ln(1+e^{2x})$$

$$v_2' = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} = \frac{e^x \cdot \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}}{e^{3x}} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} \Rightarrow v_2 = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx = \tan^{-1}(e^x)$$

$$\left.\begin{aligned} y_p &= v_1 y_1 + v_2 y_2 = -\frac{1}{2} e^x \ln(1+e^{2x}) + e^{2x} \tan^{-1}(e^x) \\ y_g &= c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \end{aligned}\right\} \underbrace{y = y_g + y_p}_{\text{جواب عمومی}}$$

مثال: جواب عمومی معادله $y'' - 2y' + y = \underbrace{\dfrac{e^x}{x}}_{f(x)}$ را برای $x > 0$ بیابید.

معادله همگن $y'' - 2y' + y = 0 \xrightarrow{\text{فرض}} r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 1$

$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x}$ $\qquad y_1(x) = e^x, \ y_2(x) = xe^x$

بنابر روش تغییر پارامترها، می‌دهیم $y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$ که داریم:

$$v_1' = \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1,y_2)} = \frac{-xe^x \frac{e^x}{x}}{e^{2x}} = -1 \Rightarrow v_1(x) = -x$$

$$v_2' = \frac{y_1 f(x)}{e^{2x}} = \frac{e^x \frac{e^x}{x}}{e^{2x}} = \frac{1}{x} \Rightarrow v_2(x) = \ln x$$

$$\left.\begin{cases} y_p = y_1 v_1 + y_2 v_2 = -xe^x + xe^x \ln x \\ y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 xe^x \end{cases}\right\} \Rightarrow y = y_g + y_p = \dots$$

مثال: اگر $y_1 = x$ جواب معادله $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ باشد

جواب عمومی معادله $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 6(x^2+1)^2$ را بیابید.

ابتدا معادله را در فرم استاندارد بازنویسی می‌کنیم (ضریب y'' باید ۱ باشد)

فرم استاندارد $\quad 1y'' \underbrace{- \frac{2x}{x^2+1}}_{p(x)} y' + \frac{2}{x^2+1} y = \underbrace{6(x^2+1)}_{f(x)}$

حال y_2 را از روش کاهش مرتبه (فصول اول) می‌یابیم.

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx = x \int \frac{1}{x^2} \underbrace{e^{-\int \frac{-2x}{1+x^2} dx}}_{e^{\ln|1+x^2|}} dx = x \int \frac{x^2+1}{x^2} dx$$

$$= x \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = x\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 - 1$$

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2+1$$

حال از روش تغییر پارامتر $y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$ را می‌یابیم که

$$v_1' = \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1,y_2)} = \frac{-(x^2-1)\,6(x^2+1)}{x^2+1} = -6(x^2-1) \xrightarrow{\text{انتگرال}} v_1(x) = -2x^3 + 6x$$

$$v_2' = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1,y_2)} = \frac{x\,6(x^2+1)}{x^2+1} = 6x \xrightarrow{\text{انتگرال}} v_2(x) = 3x^2$$

$$\left.\begin{cases} y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 = (-2x^3 + 6x)x + 3x^2(x^2-1). \\ y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x + c_2(x^2-1) \end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{y = y_p + y_g}$$

تمرین: جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

104) $xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = e^x \quad x > 0$

101) $y'' + y = \sec x$

102) $xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = x^3 e^{2x}$ $\quad$ یک جواب از معادله همگن $y_1 = e^x$

103) $y'' - y' + e^{2x} y = e^{2x}$ $\quad$ " " " " $y_1 = \sin(e^x)$

روش تغییر پارامتر را می‌توان برای معادلات خطی غیرهمگن از مراتب بالاتر از ۲ نیز استفاده کرد. بدین منظور

اگر $y_1, y_2, \dots, y_n$ جوابهای مستقل خطی معادله همگن

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = 0$$

باشد آنگاه یک جواب خصوصی برای معادله ناهمگن

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

به صورت

$$y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) + \dots + v_n(x)y_n(x)$$

است که در آن

$$v_1 = \int \frac{W_1}{W}dx, \quad v_2 = \int \frac{W_2}{W}dx, \quad \dots, \quad v_n = \int \frac{W_n}{W}dx$$

که در آن W رونسکین $y_1, y_2, \dots, y_n$ است و W_k $(k=1,\dots,n)$ نیز رونسکین حاصل از جانشینی بردار ستونی $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}$ به جای ستون kام W است.

مثال: جواب عمومی معادله $1y''' + y' = \underbrace{\csc x}_{f(x)}$ را به دست آورید.

معادله همگن $y''' + y' = 0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} r^3 + r = 0 \Rightarrow r(r^2+1) = 0 \Rightarrow r_1 = 0,\ r_2 = i,\ r_3 = -i$

پس $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = \cos x$, $y_3(x) = \sin x$. پس جواب خصوصی به صورت

$$y_p = v_1(x) + v_2(x)\cos x + v_3(x)\sin x$$

$$v_1 = \int \frac{W_1}{W}dx, \quad v_2 = \int \frac{W_2}{W}dx, \quad v_3 = \int \frac{W_3}{W}dx$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ f(x) & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & f(x) & y_3'' \end{vmatrix}$$

$W_3 = \dots$,

$$W = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -\sin x & \cos x \\ -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \csc x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \csc x \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \csc x & -\sin x \end{vmatrix} = -\csc x \cos x = \frac{-1}{\sin x}\cos x = -\cot x$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \csc x \end{vmatrix} = -\sin x \csc x = -1$$

$$\Rightarrow v_1 = \int \frac{W_1}{W}dx = \int \frac{1}{\sin x}dx = \int \csc x\, dx = -\ln|\csc x + \cot x|$$

$$v_2 = \int \frac{W_2}{W}dx = \int -\cot x\, dx = -\ln|\sin x|$$

$$v_3 = \int \frac{W_3}{W}dx = \int \frac{-1}{1}dx = -x$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow y_p = -\ln|\csc x + \cot x| - \cos x \ln|\sin x| - x\sin x \\ &y_g = C_1 + C_2\cos x + C_3 \sin x \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = y_p + y_g .$$

معادلات کشی - اویلر:

یک معادله کشی - اویلر از مرتبه n به صورت

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = f(x) \quad *$$

است که در آن $a_0, a_1, \ldots, a_n$ اعداد ثابت هستند

$$x^2y'' + 2xy' + y = x \longrightarrow \text{کشی اویلر مرتبه ۲}$$

$$3x^3y''' + 4x^2y'' - xy' + 2y = \ln x \qquad \text{کشی اویلر مرتبه ۳.}$$

برای حل معادله * با فرض $x>0$ از تغییر متغیر $x = e^t$ استفاده می‌کنیم.

$$dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{e^t} = \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \boxed{\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{1}{x} + \frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dt}\frac{1}{x^2} = \boxed{\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)}$$

$$y''' = \boxed{\frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)}$$

$$x=e^t \Longrightarrow \begin{cases} xy' = \bar{y}'(t) \\ x^2y'' = \bar{y}''(t) - \bar{y}'(t) \\ x^3y''' = \bar{y}'''(t) - 3\bar{y}''(t) + 2\bar{y}'(t) \end{cases}$$

حال با جایگذاری روابط اخیر در * به یک معادله خطی با ضرایب ثابت برحسب t می‌رسیم که به سادگی قابل حل است.

مثال: جواب عمومی معادله $x^2y''-2xy'-4y=0$ را بیابید.

حل: معادله کشی اویلر از مرتبه ۲ است. با تغییر متغیر $x=e^t$ داریم:

$$\begin{cases} xy' = \bar{y}'(t) \\ x^2y'' = \bar{y}''(t) - \bar{y}'(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} \bar{y}''(t) - \bar{y}'(t) - 2\bar{y}'(t) - 4\bar{y}(t) = 0$$

$$\Longrightarrow \bar{y}'' - 3\bar{y}' - 4\bar{y} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مشخصه}} r^2 - 3r - 4 = 0 \Longrightarrow \begin{matrix} r_1 = 4 \Longrightarrow \bar{y}_1(t) = e^{4t} \\ r_2 = -1 \Longrightarrow \bar{y}_2(t) = e^{-t} \end{matrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{matrix} \bar{y}_1(t) = (e^t)^4 \Longrightarrow y_1(x) = x^4 \\ \bar{y}_2(t) = (e^t)^{-1} \Longrightarrow y_2(x) = x^{-1} = \frac{1}{x} \end{matrix} \Longrightarrow \boxed{y(x) = c_1x^4 + c_2/x}$$

مثال: معادله $x^2y'''+y'-\frac{1}{x}y=0$ را حل کنید.

$$x^2y''' + y' - \frac{1}{x}y = 0 \xrightarrow{\text{ضرب در } x} x^3y''' + xy' - y = 0$$

کشی اویلر مرتبه ۳

از تغییر متغیر $x=e^t$ استفاده می‌کنیم

$$\begin{cases} xy' = \bar{y}'(t) \\ x^2y'' = \bar{y}''(t) - \bar{y}'(t) \\ x^3y''' = \bar{y}'''(t) - 3\bar{y}''(t) + 2\bar{y}'(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} \bar{y}''' - 3\bar{y}'' + 3\bar{y}' - \bar{y} = 0$$

معادله مشخصه

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow (r-1)^3 = 0 \Longrightarrow r_1 = r_2 = r_3 = 1$$

$$\bar{y}_1(t) = e^t \qquad \bar{y}_2(t) = te^t \qquad \bar{y}_3(t) = t^2e^t$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$y_1(x) = x \qquad y_2(x) = x\ln x \qquad y_3(x) = x(\ln x)^2$$

$$\Longrightarrow y_g(x) = c_1x + c_2x\ln x + c_3x(\ln x)^2$$

مثال: معادله $x^2y''+3xy'+2y=x^2+x$ را حل کنید.

$$x^2y''+3xy'+2y=x^2+x$$

کوشی-اویلر مرتبه ۲

تغییر متغیر $x=e^t$

$$\begin{cases} xy'=\bar{y}' \\ x^2y''=\bar{y}''-\bar{y}' \end{cases} \Longrightarrow \bar{y}''-\bar{y}'+3\bar{y}'+2\bar{y}=e^{2t}+e^t$$

$$\Rightarrow \bar{y}''+2\bar{y}'+2\bar{y}=e^{2t}+e^t \quad *$$

همگن متناظر

$$\bar{y}''+2\bar{y}'+2\bar{y}=0 \xRightarrow{\text{مشخصه}} r^2+2r+2=0$$

$$\Rightarrow r_{1,2}=-1\pm i$$

پس $\bar{y}_1(t)=e^{-t}\cos t \; , \; \bar{y}_2(t)=e^{-t}\sin t$

حال چون * نیز همگن است باید جواب خصوصی را بیابیم.

$$\bar{y}''+2\bar{y}'+2\bar{y}=\underbrace{e^{2t}}_{f_1(t)}+\underbrace{e^t}_{f_2(t)}$$

$$\begin{cases} y_{p_1}=A\cancel{x}e^{2t}=Ae^{2t} \\ y_{p_2}=Be^t \end{cases}$$

حال $y_{p_1}=Ae^{2t}$ را در معادله $\bar{y}''+2\bar{y}'+2\bar{y}=e^{2t}$ جایگذاری می‌کنیم

$$4Ae^{2t}+4Ae^{2t}+2Ae^{2t}=e^{2t} \Rightarrow 10A=1$$

$$\Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{10}}$$

پس $y_{p_1}=\frac{1}{10}e^{2t}$

حال $y_{p_2}=Be^t$ را در معادله $\bar{y}''+2\bar{y}'+2\bar{y}=e^t$ جایگذاری می‌کنیم

$$Be^t+2Be^t+2Be^t=e^t \Rightarrow B=\frac{1}{5}$$

پس $y_{p_2}=\frac{1}{5}e^t$ بنابراین

$$\bar{y}_g(t)=c_1e^{-t}\cos t+c_2e^{-t}\sin t+\frac{1}{10}e^{2t}+\frac{1}{5}e^t$$

$\boxed{x=e^t \text{ پس } t=\ln x}$

$$\boxed{y_g(x)=c_1x^{-1}\cos\ln x+c_2x^{-1}\sin\ln x+\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{5}x}$$

مثال: معادله $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^2+x^3}$ را حل کنید.

حل: دو طرف معادله را در x^2 ضرب می‌کنیم. داریم

$$x^2y''+xy'-y=\frac{1}{x+1}$$

کوشی-اویلر مرتبه ۲

تغییر متغیر $x=e^t$

$$\begin{cases} xy' = \bar y'(t) \\ x^2y''=\bar y''(t)-\bar y'(t)\end{cases} \xRightarrow{\text{جایگذاری}} \bar y''-\bar y'+\bar y'-\bar y = \frac{1}{1+e^t}$$

$$\Rightarrow \bar y''-\bar y = \frac{1}{1+e^t} \quad *$$

$$\xRightarrow{\text{همگن نظیر}} \bar y''-\bar y=0 \xRightarrow{\text{مشخصه}} r^2-1=0 \rightarrow r=1,\ r=-1$$

$$\Rightarrow \bar y_1(t)=e^t,\quad \bar y_2(t)=e^{-t}$$

حال برای یافتن جواب معادله ناهمگن * از تغییر پارامتر استفاده می‌کنیم $y_p = v_1\bar y_1 + v_2\bar y_2$

$$v_1=\int \frac{W_1}{W}\,dt,\qquad v_2=\int \frac{W_2}{W}\,dt$$

$$\Rightarrow W=\begin{vmatrix} \bar y_1 & \bar y_2 \\ \bar y_1' & \bar y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2$$

$$W_1=\begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ \frac{1}{1+e^t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = \frac{-e^{-t}}{1+e^t}$$

$$W_2=\begin{vmatrix} e^t & 0 \\ e^t & \frac{1}{1+e^t} \end{vmatrix} = \frac{e^t}{1+e^t}$$

$$\Rightarrow v_1=\int \frac{\frac{-e^{-t}}{1+e^t}}{-2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{e^{-t}}{1+e^t}\,dt = \frac{1}{2}\left(\ln(1+e^t) - e^{-t} - t\right)$$

$$v_2=\int \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = \ln(1+e^t)$$

$$\Rightarrow \bar y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + \frac{1}{2}\underbrace{e^t}_{\bar y_1}\underbrace{\left(\ln(1+e^t) - e^{-t} - t\right)}_{v_1} + \underbrace{e^{-t}}_{\bar y_2}\underbrace{\ln(1+e^t)}_{v_2}$$

$x=e^t \longleftrightarrow t=\ln x$

$$y(x) = c_1x + c_2x^{-1} + \frac{1}{2}x\left(\ln(1+x) - \frac{1}{x} - \ln x\right) + \frac{1}{x}\ln(1+x)$$

معادلات کشی - اویلر

شکل ساده: $a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$

برای حل شکل ساده از تغییر متغیر $x = e^t$ استفاده کردیم

$$x y' = \bar{y}'(t)$$
$$x^2 y'' = \bar{y}''(t) - \bar{y}'(t)$$
$$x^3 y''' = \bar{y}'''(t) - 3\bar{y}''(t) + 2\bar{y}'(t)$$

که معادله تبدیل به یک معادله با ضرائب ثابت می‌شود که قابل حل است.

شکل کلی: $a_n (ax+b)^n y^{(n)} + a_{n-1} (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 (ax+b) y' + a_0 y = f(x)$

برای حل شکل کلی از تغییر متغیر $ax+b = e^t$ (با فرض $ax+b>0$) استفاده می‌کنیم.

$$(ax+b)y' = a\bar{y}'(t) \quad , \quad (ax+b)^2 y'' = a^2(\bar{y}'' - \bar{y}') , \quad \dots$$

که با جاگذاری در معادله به یک معادله خطی با ضرائب ثابت می‌رسیم.

مثال: جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید.

$$\frac{1}{16}(4x+1)^2 y'' + (4x+1)y' - 4y = \frac{\ln(4x+1)}{4x+1}$$

حل: معادله کشی-اویلر در فرم کلی است. با تغییر متغیر $4x+1 = e^t$ داریم

$$(4x+1)y' = 4\bar{y}'(t) \quad , \quad (4x+1)^2 y'' = 16(\bar{y}''(t) - \bar{y}'(t))$$

با جاگذاری در معادله داریم:

$$\frac{1}{16}\left(16(\bar{y}''(t) - \bar{y}'(t))\right) + 4\bar{y}'(t) - 4\bar{y}(t) = \frac{\ln e^t}{e^t}$$

$$\Rightarrow \bar{y}''(t) + 3\bar{y}'(t) - 4\bar{y}(t) = t e^{-t} \quad \bar{f}(t)$$

معادله همگن نظیر $\bar{y}'' + 3\bar{y}' - 4\bar{y} = 0 \xRightarrow{\text{مشخصه}} r^2 + 3r - 4 = 0$, $r_1 = -4 \Rightarrow \bar{y}_1(t) = e^{-4t}$, $r_2 = 1 \Rightarrow \bar{y}_2(t) = e^t$

$$f(t) = t e^{-t} \Rightarrow \bar{y}_p = t^0 (At+B) e^{-t} = e^{-t}(At+B)$$

$$\bar{y}_p' = -e^{-t}(At+B) + Ae^{-t} = -e^{-t}(At+B-A)$$

$$\bar{y}_p'' = e^{-t}(At+B) - e^{-t}A - Ae^{-t} = e^{-t}(At+B-2A)$$

جاگذاری در معادله

$$\bar{y}''(t) + 3\bar{y}' - 4\bar{y} = te^{-t} \Rightarrow e^{-t}(At+B-2A) - 3e^{-t}(At+B-A) + e^{-t}(At+B) = te^{-t}$$

$$\Rightarrow -At + (-B+A) = t \Rightarrow \begin{cases} -A = 1 \\ -B+A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -1 \\ B = -1 \end{array}$$

$$y_p = -e^{-t}(t+1)$$

$$\Rightarrow \bar{y} = c_1 e^{t} + c_2 e^{-4t} - e^{-t}(t+1)$$

$$y(x) = c_1(4x+1) + c_2(4x+1)^{-4} - \frac{1+\ln(4x+1)}{4x+1}$$

تمرین: جواب عمومی معادلات زیر را بیابید

105) $x^2 y'' + 3xy' + 2y = 0$

106) $x^3 y''' + 6xy' - y = 0$

107) $x^2 y''' - y' + \frac{1}{x} y = 0$

108) $x^3 y''' + xy' - y = \sin(\ln x^2)$

109) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 3\ln x - \frac{1}{x^2}$

110) $(2x+1)^2 y'' + 2(2x+1)y' + 16y = 4\ln(2x+1)$

111) $(3x+2)y'' + (9x+6)y' - 36y = 3x^2 + 4x + 1$

فصل چهارم: تبدیل لاپلاس.

تعریف (تابع گاما): فرض کنید α یک عدد حقیقی مثبت باشد. در این صورت تابع گامای α به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

می‌توان نشان داد که انتگرال فوق برای $\alpha>0$ همگراست یعنی برای حد

$$\lim_{B\to\infty}\left(\int_0^B x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx\right)$$

موجود است و برای $\alpha<0$ این حد واگراست.

لم: برای هر $\alpha>0$ داریم $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$

برهان:

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty x^{\alpha}e^{-x}\,dx \underset{\text{جزء به جزء}}{=} -x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^\infty+\alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

$$=\lim_{B\to\infty}\left(\cancel{-B^{\alpha}e^{-B}}^{\,0}-0\right)+\alpha\underbrace{\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx}=\alpha\,\Gamma(\alpha)$$

لم: $\Gamma(1)=1$

برهان:

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty x^0e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big|_0^\infty=1$$

با تلفیق دو لم قبل داریم

$$\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1,\quad \Gamma(3)=2\Gamma(2)=2,\quad \Gamma(4)=3\Gamma(3)=6$$

با استقراء

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)\cdots=n(n-1)\cdots2\cdot1\,\Gamma(1)=n!$$

بنابراین

$$\Gamma(n+1)=n!$$

لم: $\Gamma(\tfrac12)=\sqrt{\pi}$.

برهان:

$$\Gamma(\tfrac12)=\int_0^\infty x^{\frac12-1}e^{-x}=\int_0^\infty x^{-\frac12}e^{-x}\,dx=\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

حال با تغییر متغیر $x=u^2$ داریم $dx=2u\,du$ ← $\frac{dx}{u}=\frac{dx}{\sqrt{x}}=2du$

$$\boxed{\Gamma(\tfrac12)=\int_0^\infty 2e^{-u^2}\,du}$$

قرارمی دهیم

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx \Rightarrow I^2=\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right)$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

با تغییر متغیر قطبی داریم: $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ و $J=r$

$$I^2=\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} re^{-r^2}\,d\theta\,dr=\frac{\pi}{4} \Rightarrow I=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \boxed{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=2I=\sqrt{\pi}}$$

مثال: مقدار انتگرال $J=\int_0^\infty x^{\frac{3}{2}}e^{-4x}\,dx$ را با استفاده از تابع گاما حساب کنید.

تغییر متغیر $4x=u \Rightarrow 4dx=du$

$$J=\int_0^\infty\left(\frac{u}{4}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-u}\frac{du}{4}=\frac{1}{32}\int_0^\infty u^{\frac{5}{2}-1}e^{-u}du$$

$$=\frac{1}{32}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{32}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{32}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{128}$$

---

(1) $\int_0^\infty (x+1)^2 e^{-x^3}dx$

(2) $\int_0^\infty x^2 e^{-2x^4}dx$

مثال: حاصل انتگرال $I=\int_0^\infty \sqrt{x}\,e^{-x^3}dx$ را حساب کنید.

$$x^3=u \Rightarrow 3x^2dx=du \Rightarrow \frac{du}{3x^2}=dx$$

$$I=\int_0^\infty u^{\frac{1}{6}}e^{-u}\frac{du}{3u^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3}\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du=\frac{1}{3}\int_0^\infty u^{\frac{1}{2}-1}e^{-u}du$$

$$=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

مثال: حاصل انتگرال $I=\int_0^1 x^2(\ln x)^3dx$ را حساب کنید.

$\begin{cases} u=\ln x \\ x=e^u \\ dx=e^u du \end{cases}$

$$I=\int_{-\infty}^0 e^{2u}u^3e^u du=\int_{-\infty}^0 u^3e^{3u}du$$

حال قرار می دهیم $\begin{cases} 3u=-z \\ 3du=-dz \end{cases}$ با جایگذاری داریم

$$I=\int_{+\infty}^0\left(-\frac{z}{3}\right)^3e^{-z}\left(-\frac{dz}{3}\right)=\int_{+\infty}^0+\frac{1}{81}t^3e^{-t}dt=-\frac{1}{81}\int_0^\infty t^3e^{-t}dt$$

$$=-\frac{1}{81}\Gamma(4)=\frac{3!}{-81}=\frac{-2}{27}$$

تعریف: فرض کنید $f(t)$ در بازه $[0,\infty)$ تعریف شده باشد. تبدیل لاپلاس تابع f را با نماد $\mathcal{L}[f]$ یا $F(s)$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$F(s)=\mathcal{L}[f(x)]=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx$$

مثال: تبدیل لاپلاس $f(x)=e^{ax}$ را بیابید:

حل:

$$\mathcal{L}[e^{ax}]=\int_0^\infty e^{-sx}e^{ax}\,dx=\int_0^\infty e^{(a-s)x}\,dx=\frac{1}{a-s}e^{(a-s)x}\Big|_0^\infty$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{a-s}\left(e^{(a-s)b}\right)-\frac{1}{a-s}$$

$$=0-\frac{1}{a-s}\qquad \text{if } a<s$$

$$=\frac{1}{s-a}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{ax}]=\frac{1}{s-a}\quad s>a}$$

مثال: تبدیل لاپلاس $f(x)=1$ را بیابید:

حل:

$$\mathcal{L}[1]=\int_0^\infty e^{-sx}\,dx=-\frac{1}{s}e^{-sx}\Big|_0^\infty=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-sb}\right)-\left(-\frac{1}{s}\right)$$

$$=\frac{1}{s}\qquad s>0$$

$$\boxed{\mathcal{L}[1]=\frac{1}{s}\quad s>0}$$

مثال: تبدیل لاپلاس $f(x)=x^a$ که $a>-1$ را بیابید:

حل:

$$\mathcal{L}[x^a]=\int_0^\infty e^{-sx}x^a\,dx\qquad sx=u\Rightarrow s\,dx=du$$

$$\overset{s>0}{=}\int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^a\frac{du}{s}=\frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty u^a e^{-u}\,du=\frac{1}{s^{a+1}}\Gamma(a+1)$$

$$\boxed{\mathcal{L}[x^a]=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}\quad s>0}$$

به خصوص $\forall n\in\mathbb{N}$ عدد طبیعی

$$\boxed{\mathcal{L}[x^n]=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}=\frac{n!}{s^{n+1}}}$$

مثال: تبدیل لاپلاس $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ را بیابید:

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]=\mathcal{L}\left[x^{-\frac{1}{2}}\right]=\frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{s^{-\frac{1}{2}+1}}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}=\frac{\sqrt{\pi}}{s}\qquad s>0$$

قضیه (خاصیت خطی): اگر $\mathcal{L}[f(x)]$ برای $s>a$ و $\mathcal{L}[g(x)]$ برای $s>b$ وجود داشته باشد و c_1 و c_2 دو عدد حقیقی باشند آنگاه $\mathcal{L}[c_1 f(x)+c_2 g(x)]$ نیز برای $s>\max\{a,b\}$ موجود است و داریم

$$\mathcal{L}[c_1 f(x)+c_2 g(x)] = c_1 \mathcal{L}[f(x)] + c_2 \mathcal{L}[g(x)]$$

برهان:

$$\mathcal{L}[c_1 f(x)+c_2 g(x)] = \int_0^\infty e^{-sx}\left(c_1 f(x)+c_2 g(x)\right)dx$$

$$= c_1\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx + c_2\int_0^\infty e^{-sx} g(x)\,dx$$

$$= c_1 \mathcal{L}[f(x)] + c_2 \mathcal{L}[g(x)]$$

مثال: مطلوب است $\mathcal{L}[1+x-2x^3]$

$$\mathcal{L}[1+x-2x^3] = \mathcal{L}[1]+\mathcal{L}[x]-2\mathcal{L}[x^3] = \frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}-2\cdot\frac{3!}{s^4} = \frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}-\frac{12}{s^4}$$

مثال: تبدیل لاپلاس $\sin ax$ و $\cos ax$ را بیابید ($a>0$)

حل: از آنجا که $e^{iax} = \cos ax + i\sin ax$ پس

$$\mathcal{L}[\cos ax]+i\,\mathcal{L}[\sin ax] \underset{\text{خطی بودن } \mathcal{L}}{=} \mathcal{L}[\cos ax + i\sin ax] = \mathcal{L}[e^{iax}]$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx} e^{iax}\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{(ia-s)x}\,dx = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{ia-s}e^{(ia-s)x}\Big|_0^A$$

$$= \lim_{A\to\infty}\frac{1}{s-ia}\left[1-e^{-(s-ia)A}\right] \qquad e^{-sA}e^{iaA}$$

$$\overset{s>0}{=} \frac{1}{s-ia} = \frac{s+ia}{(s-ia)(s+ia)} = \frac{s+ia}{s^2+a^2}$$

$$= \frac{s}{s^2+a^2} + i\,\frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos ax] = \frac{s}{s^2+a^2} \qquad s>0$$

$$\mathcal{L}[\sin ax] = \frac{a}{s^2+a^2} \qquad s>0$$

مثال: مطلوب است $\mathcal{L}[\sinh ax]$ و $\mathcal{L}[\cosh ax]$.

حل:

$$\mathcal{L}[\sinh ax]=\mathcal{L}\left[\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\right]=\frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{ax}]-\frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-ax}]$$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{s-a}}_{s>a}-\frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{s+a}}_{s>-a}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{s+a-(s-a)}{(s-a)(s+a)}=\frac{a}{s^2-a^2}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\sinh ax]=\frac{a}{s^2-a^2}\qquad s>|a|}$$

$$\mathcal{L}[\cosh ax]=\mathcal{L}\left[\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right]=\frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{ax}]+\frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-ax}]$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{s-a}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{s+a}\qquad s>a,\ s>-a$$

$$=\frac{s}{s^2-a^2}\qquad s>|a|$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\cosh ax]=\frac{s}{s^2-a^2}\qquad s>|a|}$$

مثال: مطلوب است $\mathcal{L}[\cos^2 ax]$ و $\mathcal{L}[\sin^2 ax]$.

$$\mathcal{L}[\cos^2 ax]=\mathcal{L}\left[\frac{1+\cos 2ax}{2}\right]=\frac{1}{2}\mathcal{L}[1]+\frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos 2ax]$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\,\frac{s}{1+4a^2}$$

$$\mathcal{L}[\sin^2 ax]=\mathcal{L}\left[\frac{1-\cos 2ax}{2}\right]=\frac{1}{2}\mathcal{L}[1]-\frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos 2ax]$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\,\frac{s}{1+4a^2}$$

مثال: مطلوب است $\mathcal{L}[\sqrt{x}]$

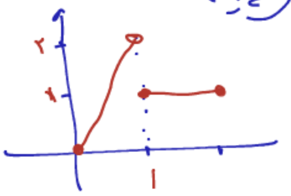
$$\mathcal{L}[\sqrt{x}]=\mathcal{L}[x^{\frac{1}{2}}]=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$$

مثال: مطلوب است $\mathcal{L}[2\sin x\cos x]$

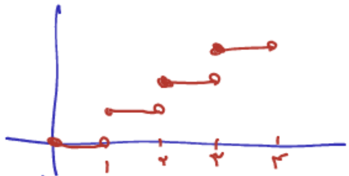
$$\mathcal{L}[2\sin x\cos x]=\mathcal{L}[\sin 2x]=\frac{2}{s^2+4}$$

تعریف: تابع $f(x)$ را روی بازه $[a,+\infty)$ پیوسته قطعه‌ای گوئیم هرگاه برای هر عدد حقیقی $b>a$ تابع $f(x)$ روی بازه $[a,b]$ بجز احتمالاً در تعداد متناهی نقطه بقیه جاها پیوسته باشد و در نقاط ناپیوستگی حد چپ و راست موجود باشند.

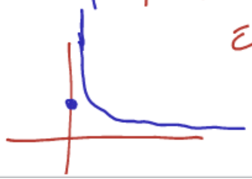
مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} 2x & 0\leq x<1 \\ 1 & 1\leq x\leq 2 \end{cases}$ بر بازه $[1,2]$ قطعه‌ای پیوسته است



مثال: تابع $f(x)=[x]$ بر $[0,\infty)$ قطعه‌ای پیوسته است



مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} 1 & x=0 \\ \frac{1}{x} & x>0 \end{cases}$ قطعه‌ای پیوسته نیست زیرا در $x=0$ حد موجود نیست



تعریف: گوئیم تابع f بر $[0,\infty)$ از مرتبهٔ نمائی است هرگاه عدد حقیقی $M>0$ و عدد a چنان موجود باشند که

$$\forall x\in[0,\infty) \qquad |f(x)|\leq Me^{ax}$$

قضیه (وجود لاپلاس) فرض کنید $f(x)$ بر $[0,\infty)$ قطعه‌ای پیوسته و از مرتبهٔ نمائی باشد. در این صورت عدد حقیقی a موجود است که برای هر $s>a$ تبدیل لاپلاس $f(x)$ وجود دارد.

تعریف: فرض کنید $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ باشد. در این صورت $f(x)$ را تبدیل معکوس لاپلاس (لاپلاس معکوس) تابع $F(s)$ گوئیم و آن را با نماد $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ نشان می‌دهیم.

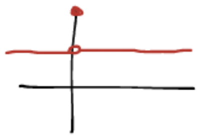
$$\mathcal{L}[f(x)]=F(s) \underset{\text{پیوستگی } f}{\Longleftrightarrow} \mathcal{L}^{-1}[F(s)]=f(x)$$

نکته: اگر f و g توابع پیوسته‌ای در $[0,\infty)$ باشند که $\mathcal{L}[f(x)]=\mathcal{L}[g(x)]$ آنگاه برای هر x داریم $f(x)=g(x)$.

بنابراین لاپلاس معکوس یکتاست اما شرط پیوستگی لازم است. مثلاً

$f(x)=1$, $g(x)=\begin{cases} 1 & x\neq 0 \\ 2 & x=0 \end{cases}$

نمودار f



نمودار g

$$\mathcal{L}[f(x)] = \mathcal{L}[g(x)]$$

اما $f \neq g$

مثال:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1 \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{ax}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] = \sin ax \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos ax$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2-a^2}\right] = \sinh ax \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-a^2}\right] = \cosh ax$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{a+1}}\right] = \frac{1}{\Gamma(a+1)} x^a$$

بخصوص اگر $n \in \mathbb{N}$ آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{n+1}}\right] = \frac{1}{n!} x^n.$$

مثال: مطلوب است $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]$.

از آنجا که

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

$$\frac{1}{s+1} = A + \frac{B}{(s+1)}s \xrightarrow{s=0} A = 1$$

$$\frac{1}{s} = \frac{A}{s}(s+1) + B \xrightarrow{s=-1} B = -1$$

بنابراین

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = 1 - e^{-x}$$

مثال: مطلوب است $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2-1)(s^2+3)}\right]$.

$$\frac{s}{(s^2-1)(s^2+3)} = \frac{s}{(s-1)(s+1)(s^2+3)} = \frac{\overset{\frac{1}{8}}{\cancel{A}}}{s-1} + \frac{\overset{\frac{1}{8}}{\cancel{B}}}{s+1} + \frac{\overset{-\frac{1}{4}}{\cancel{C}}s + \overset{0}{\cancel{D}}}{s^2+3}$$

$$s = 0 \Rightarrow 0 = \frac{-1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{D}{3} \Rightarrow \frac{D}{3} = 0 \Rightarrow D = 0$$

ضرب در s و $s \to \infty \Rightarrow 0 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + C \Rightarrow \boxed{C = -\frac{1}{4}}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2-1)(s^2+3)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{8}}{s-1} + \frac{\frac{1}{8}}{s+1} + \frac{\frac{1}{4}s}{s^2+3}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+3}\right]$$

$$= \frac{1}{8}e^{x} + \frac{1}{8}e^{-x} + \frac{1}{4}\cos\sqrt{3}x$$

مثال: مطلوب است $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)(s^2+2)}\right]$.

$$\frac{s}{(s^2+1)(s^2+2)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+2} = \frac{As^3+2As+Bs^2+2B+Cs^3+Cs+Ds^2+D}{(s^2+1)(s^2+2)}$$

$$(A+C)s^3 + (D+B)s^2 + (2A+C)s + 2B+D = s \Rightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ 2A+C=1 \\ 2B+D=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B=0,\ D=0 \Rightarrow A=1,\ C=-1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)(s^2+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2}\right] = \cos x - \cos\sqrt{2}x$$

مثال: مطلوب است $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+s-12}\right]$

$$\frac{s}{s^2+s-12} = \frac{s}{(s+4)(s-3)} = \frac{\cancel{A}^{\,4/7}}{s+4} + \frac{\cancel{B}^{\,3/7}}{s-3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+s-12}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{4}{7}}{s+4} + \frac{\frac{3}{7}}{s-3}\right] = \frac{4}{7}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right] + \frac{3}{7}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]$$

$$= \frac{4}{7}e^{-4x} + \frac{3}{7}e^{3x}$$

تمرین:

۵) $\mathcal{L}^{-1}\left[s^{-\frac{5}{2}}\right]$, ۶) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5s^2+s+4}{(s+4)(s^2+4)}\right]$

قضیه: فرض کنید $\mathcal{L}[f(x)]=F(s)$ و $\mathcal{L}[g(x)]=G(s)$. در این صورت

$$\mathcal{L}^{-1}\left[c_1F(s)+c_2G(s)\right] = c_1\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + c_2\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = c_1 f(x) + c_2 g(x)$$

قضیه: اگر $\mathcal{L}[f(x)]=F(s)$ آنگاه برای $b>0$ داریم:

۱) $\mathcal{L}[f(bx)] = \frac{1}{b}F\left(\frac{s}{b}\right)$

۲) $\mathcal{L}^{-1}[F(bs)] = \frac{1}{b}f\left(\frac{x}{b}\right)$

برهان الف)

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx$$

$$F\left(\tfrac{s}{b}\right)=\int_0^\infty e^{-\frac{s}{b}x}f(x)\,dx \underset{\frac{x}{b}=u}{=} \int_0^\infty b\,e^{-su}f(bu)\,du = b\,L[f(bx)]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b}F\left(\tfrac{s}{b}\right)=L[f(bx)]$$

ب) در الف b را با $\frac{1}{b}$ عوض کنید تا برهان مطلب (ب) بدست آید.

قضیه (قضیه اول انتقال): اگر $\mathcal{L}[f(x)]=F(s)$ آنگاه $\mathcal{L}[e^{ax}f(x)]=F(s-a)$.

برهان:

$$L[e^{ax}f(x)]=\int_0^\infty e^{-sx}e^{ax}f(x)\,dx=\int_0^\infty e^{-(s-a)x}f(x)\,dx=F(s-a)$$

مثال: مطلوب است $\mathcal{L}[e^{-t}\cos 2t]$.

$$L[\cos 2t]=\frac{s}{s^2+4} \Rightarrow L[e^{-t}\cos 2t]=\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

مثال: مطلوب است $\mathcal{L}[e^{2t}t^2]$.

$$\mathcal{L}[t^2]=\frac{\Gamma(3)}{s^3}=\frac{2}{s^3} \Rightarrow \mathcal{L}[e^{2t}t^2]=\frac{2}{(s-2)^3}$$

مثال: مطلوب است $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-4s+5}\right]$.

$$\frac{1}{s^2-4s+5}=\frac{1}{s^2-4s+4+1}=\frac{1}{(s-2)^2+1}$$

از آنجا که $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]=\sin x$، $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2+1}\right]=e^{2x}\sin x$.

مثال: مطلوب است $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^5}\right]$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^5}\right]=\frac{1}{\Gamma(5)}x^4=\frac{1}{4!}x^4 \Rightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^5}\right]=\frac{1}{4!}e^{2x}x^4=\frac{1}{24}e^{2x}x^4$$

مثال: مطلوب است $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-2s+3}\right]$.

$$\frac{s}{s^2-2s+3}=\frac{s}{s^2-2s+1+2}=\frac{s-1+1}{(s-1)^2+2}=\frac{s-1}{(s-1)^2+2}+\frac{1}{(s-1)^2+2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2}+\frac{1}{s^2+2}\right]=\cos\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x \Rightarrow$$

$$L^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+2}+\frac{1}{(s-1)^2+2}\right]=e^{x}\left(\cos\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x\right).$$

مثال: مطلوب است $L\left(\frac{2\cosh x}{\sqrt{x}}\right)$.

$$\frac{2\cosh x}{\sqrt{x}} = \frac{2\,\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}}{\sqrt{x}} = (e^{x}+e^{-x})\,x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow L\left[\frac{2\cosh x}{\sqrt{x}}\right] = L\left[e^{x}x^{-\frac{1}{2}}\right] + L\left[e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}\right]$$

حال از آنجا که $L\left[x^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$ پس

$$L\left[\frac{2\cosh x}{\sqrt{x}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{s-1}} + \sqrt{\frac{\pi}{s+1}}$$

تمرین مطلوب است

(7) $L\left[\frac{\sinh 2x}{\sqrt{x}}\right]$

(10) $L^{-1}\left[\frac{3s+1}{4s^2+4s+5}\right]$

(8) $L\left[\cosh 2x \cdot x^{3}\right]$

(11) $L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}\right]$

(9) $L^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)^5}\right] \rightarrow \frac{s}{(s+1)^5} = \frac{s+1-1}{(s+1)^5} = \frac{1}{(s+1)^4} - \frac{1}{(s+1)^5}$

قضیه: فرض کنید f در $[0,\infty)$ پیوسته و از مرتبه نمائی $(|f(x)| \le Me^{ax})$ و f' پیوسته قطعه‌ای باشد. آنگاه تبدیل لاپلاس f' برای $s>a$ وجود دارد و داریم:

$$L[f'(x)] = sL[f(x)] - f(0)$$

برهان:

$$L[f'(x)] = \int_0^\infty \underbrace{e^{-sx}}_{v}\,\underbrace{f'(x)dx}_{du} = e^{-sx}f(x)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx$$

$$= -f(0) + sL[f(x)]$$

نتیجه:

1) $L[f'(x)] = sL[f(x)] - f(0)$

2) $L[f''(x)] = s^2L[f(x)] - sf(0) - f'(0)$

و در حالت کلی

$$L[f^{(n)}(x)] = s^{n}L[f(x)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

مثال: با استفاده از تبدیل لاپلاس مسأله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = -1,\ y'(0) = 0$

حل: از دو طرف معادله لاپلاس می‌گیریم. داریم

$L[y'' - y' - 2y] = L[0] = 0$

$$\Rightarrow L[y''] - L[y'] - 2L[y] = 0$$

$$s^2 L[y] - s\,\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} - sL[y] + \cancel{y(0)} - 2L[y] = 0$$

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = -1$$

$$(s^2 - s - 2)\,L[y] + s - 1 = 0 \Longrightarrow L[y] = \frac{-s+1}{s^2 - s - 2} = \frac{1-s}{(s-2)(s+1)}$$

$$\Rightarrow y = L^{-1}\left[\frac{1-s}{(s-2)(s+1)}\right] = L^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{3}}{s-2} + \frac{-\frac{2}{3}}{s+1}\right]$$

$$\frac{1-s}{(s-2)(s+1)} = \frac{\overset{-\frac{1}{3}}{\cancel{A}}}{s-2} + \frac{\overset{-\frac{2}{3}}{\cancel{B}}}{s+1} \qquad = -\frac{1}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{-x}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y = -\frac{1}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{-x}}$$

تمرین ۱۲- مسأله مقدار اولیه زیر را حل کنید: $y'' + y = \sin 2x \quad y(0) = 0 \;,\; y'(0) = 1$

خواص تبدیل لاپلاس:

لم: فرض کنید $L[f(x)] = F(s)$

الف) $L\left[\int_0^x f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s}F(s)$

ب) $L\left[\int_0^x \int_0^t f(u)\,du\,dt\right] = \frac{1}{s^2}F(s)$

ج) $L\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s}F(s) - \frac{1}{s}\int_0^a f(t)\,dt$

برهان الف)

$$L\left[\int_0^x f(t)\,dt\right] = \int_0^\infty e^{-sx}\Big(\underbrace{\int_0^x f(t)\,dt}_{v}\Big)\,dx = -\frac{1}{s}e^{-sx}\int_0^x f(t)\,dt\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int e^{-sx} f(x)\,dx$$

$$= 0 + \frac{1}{s}L[f(x)] = \frac{1}{s}F(s)$$

ب) با دو بار استفاده از الف به دست می‌آید.

ج) $L\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = L\left[\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^a f(t)\,dt\right] =$ صفحه بعد

$$= L\left[\int_0^x f(t)\,dt\right] - \int_0^a f(t)\,dt\, L[1] = \frac{1}{s}F(s) - \frac{1}{s}\int_0^a f(t)\,dt.$$

قضیه: اگر $L[f(x)] = F(s)$ آنگاه $L[x f(x)] = -\frac{d}{ds}F(s) = -F'(s)$

برهان:

$$-F'(s) = -\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = \int_0^\infty x e^{-sx} f(x)\,dx = L[x f(x)]$$

نتیجه: با استقرا می‌توان ثابت کرد که اگر $L[f(x)] = F(s)$ آنگاه

$$L[x^n f(x)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

مثال: مطلوب است $L[x \sin x]$.

$$L[\sin x] = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow L[x\sin x] = (-1)^1 \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{1+s^2}\right) = \frac{+2s}{(1+s^2)^2}$$

مثال: مطلوب است $L[x \cosh x]$.

$$L[\cosh x] = \frac{s}{s^2-1} \Rightarrow L[x\cosh x] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2-1}\right) = -\frac{s^2-1-2s^2}{(s^2-1)^2} = \frac{1+s^2}{(s^2-1)^2}$$

مثال: مطلوب است $L^{-1}\left[\tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)\right]$.

$$L^{-1}\left[\tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)\right] = f(x) \Rightarrow L[f(x)] = \tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)$$

$$(\tan^{-1}u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$\Rightarrow L[x f(x)] = -\frac{d}{ds}\left(\tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)\right)$$

$$= -\frac{\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s}\right)}{1+\left(\frac{a}{s}\right)^2} = \frac{\frac{a}{s^2}}{1+\frac{a^2}{s^2}} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\Rightarrow L[x f(x)] = \frac{a}{s^2+a^2} \Rightarrow x f(x) = L^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] = \sin ax$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{\sin ax}{x}}$$

مثال: مطلوب است $L\left[\int_0^x t\cos 2t\,dt\right]$.

$$L[\cos 2x] = \frac{s}{s^2+4} \Rightarrow L[x\cos 2x] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) = -\frac{s^2+4-2s^2}{(s^2+4)^2}$$

$$\Rightarrow L[x\cos 2x] = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2} \Rightarrow L\left[\int_0^x t\cos 2t\,dt\right] = \frac{1}{s}\,\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

قضیه: فرض کنید $s>a$ ، $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$. اگر $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ موجود باشد آنگاه

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_s^\infty F(u)\,du} \qquad s>a$$

برهان:

$$F(u) = \int_0^\infty e^{-ux} f(x)\,dx, \qquad u>a$$

$$\Rightarrow \int_s^\infty F(u)\,du = \int_s^\infty \int_0^\infty e^{-ux} f(x)\,dx\,du = \int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-ux} f(x)\,du\right) dx$$

$$= \int_0^\infty f(x) \left(-\frac{1}{x} e^{-ux}\Big|_s^\infty\right) dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{x} f(x)\, e^{-sx}\,dx = \mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right]$$

مثال: مطلوب است $\mathcal{L}\left[\frac{\sin ax}{x}\right]$.

حل: توجه کنید که $\mathcal{L}[\sin ax] = \frac{a}{s^2+a^2}$ ، $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin ax}{x} = a$ بنابراین

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin ax}{x}\right] = \int_s^\infty \frac{a}{u^2+a^2}\,du = \tan^{-1}\frac{u}{a}\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{s}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)$$

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx$.

حل: با توجه به مثال قبل

$$\int_0^\infty e^{-sx} \frac{\sin ax}{x}\,dx = \mathcal{L}\left[\frac{\sin ax}{x}\right] = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{\sin ax}{x}\,dx \Bigg|_{s=0} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{s}{a}\right)\Bigg|_{s=0} = \frac{\pi}{2}$$

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی $\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

حل:

$$\int_0^\infty e^{-sx} \frac{\sin x}{x}\,dx = \mathcal{L}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin x}{x}\,dx = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)\Bigg|_{s=1} = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

مثال: مطلوب است $L^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+4)^2}\right]$.

حل:

$$\boxed{L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+4)^2}\right] = f(x)} \Rightarrow L[f(x)] = \frac{s}{(s^2+4)^2} \Longrightarrow L\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_s^\infty \frac{u}{(u^2+4)^2}\,du$$

$$\Longrightarrow L\left[\frac{f(x)}{x}\right] = -\frac{1}{2(u^2+4)}\Bigg|_s^\infty = \frac{1}{2(s^2+4)}$$

$$\int \frac{u}{(u^2+4)^2}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{2}\int z^{-2}\,dz = -\frac{1}{2}z^{-1} = -\frac{1}{2z} = \frac{-1}{2(u^2+4)}$$

$$u^2+4=z$$
$$2u\,du = dz$$

$$\Longrightarrow L\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{1}{s^2+4} \Longrightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{4}L^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] = \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\Longrightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{4}x\sin 2x}$$

مثال: مطلوب است $L^{-1}\left[\ln\left(\dfrac{s+a}{s-a}\right)\right]$.

حل:

$$L^{-1}\left[\ln\left(\frac{s+a}{s-a}\right)\right] = f(x) \Longrightarrow L[f(x)] = \ln\left(\frac{s+a}{s-a}\right) = \ln(s+a) - \ln(s-a)$$

$$\Longrightarrow L[xf(x)] = -\frac{d}{ds}\Big(\ln(s+a) - \ln(s-a)\Big) = \frac{-1}{s+a} + \frac{1}{s-a}$$

$$\Longrightarrow xf(x) = L^{-1}\left[\frac{-1}{s+a} + \frac{1}{s-a}\right] = -e^{-ax} + e^{ax}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{x}\times\frac{2}{2} = 2\,\frac{\sinh ax}{x}$$

تمرین ۱۳- مطلوب است $L^{-1}\left[\ln\left(1+\dfrac{3}{s}\right)\right]$.

تمرین ۱۴- مطلوب است محاسبه $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}\,dx$.

تمرین ۱۵- مطلوب است محاسبه $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$.

تمرین ۱۶- مطلوب است محاسبه $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}(1-\cos x)}{x}\,dx$.

تمرین ۱۷: مطلوب است

$$L\left[e^{2x}\int_0^x \frac{1-\cos x}{x}\,dx\right]$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید:

$$y'' - 6y' + 9y = 6x^2 e^{3x} \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

حل: از دو طرف معادله لاپلاس می‌گیریم:

$$L[y''] - 6L[y'] + 9L[y] = 6L[x^2 e^{3x}]$$

$$\Rightarrow s^2 L[y] - s\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} - 6(sL[y] - \cancel{y(0)}) + 9L[y] = 6\frac{\cancel{2!}\,2}{(s-3)^3}$$

$$\underbrace{(s^2 - 6s + 9)}_{(s-3)^2} L[y] = \frac{36}{(s-3)^3} \Longrightarrow L[y] = \frac{36}{(s-3)^5}$$

حل از آنجا که $L^{-1}\left[\frac{1}{s^5}\right] = \frac{x^4}{4!}$ است

$$y = L^{-1}\left[\frac{36}{(s-3)^5}\right] = \frac{36}{4!} x^4 e^{3x} = \frac{36}{24} x^4 e^{3x} \Longrightarrow \boxed{y = \frac{3}{2} x^4 e^{3x}}$$

تمرین: مطلوب است حل معادلات زیر با استفاده از لاپلاس

(18) $y'' - 3y' + 2y = e^{4x}$ $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 5$

(19) $y'' + y = x$ $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

مثال: مطلوب است حل معادلهٔ زیر با استفاده از تبدیل لاپلاس:

$$xy'' + (1-x)y' + y = 0 \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$$

حل: قرار می‌دهیم $L[y] = Y(s)$. حال از دو طرف معادلهٔ اخیر لاپلاس می‌گیریم:

$$L[xy''] + L[(1-x)y'] + L[y] = 0$$

$$L[xy''] + L[y'] - L[xy'] + L[y] = 0$$

$$-\frac{d}{ds}(L[y'']) + L[y'] - \frac{d}{ds}(L[y']) + L[y] = 0$$

$$-\frac{d}{ds}(s^2 L[y] - sy(0) - y'(0)) + sL[y] - y(0) - \frac{d}{ds}(sL[y] - y(0)) + L[y] = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{ds}(s^2 Y(s) - s + 1) + sY(s) - 1 - \frac{d}{ds}(sY(s) - 1) + Y(s) = 0$$

با مشتق‌گیری داریم:

$$-2sY(s) - s^2 Y'(s) + 1 + sY(s) - 1 - Y(s) - sY'(s) + Y(s) = 0$$

$$\Longrightarrow (s - s^2) Y'(s) + (2 - s) Y(s) = 0$$

$$\Rightarrow (s-s^2)\,Y' = (s-2)\,Y \Rightarrow \int \frac{dY}{Y} = \int \frac{s-2}{s(1-s)}$$

$$Y' = \frac{dY}{ds}$$

$$\frac{s-2}{s(1-s)} = \frac{\cancel{A}^{\,-2}}{s} + \frac{\cancel{B}^{\,1}}{s-1}$$

c ثابت است

$$\ln Y = \int \left(\frac{-2}{s} + \frac{1}{s-1}\right) ds \Rightarrow \ln Y = -2\ln s + \ln(s-1) + \ln c_1$$

$$\Rightarrow \ln Y = \ln s^{-2} + \ln(s-1) + \ln(c_1) = \ln\left(\frac{s-1}{s^2}c_1\right)$$

$$\Rightarrow Y = \frac{s-1}{s^2}c_1 \Rightarrow L[y] = \frac{s-1}{s^2}c_1$$

$$\Rightarrow y = L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2}c_1\right] = c_1\, L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\right]$$

$$= c_1(1-x)$$

$$y(x) = c_1(1-x) \Rightarrow \boxed{y(0)=1} \Rightarrow c_1 = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1-x}$$

تمرین معادلات زیر را با استفاده از لاپلاس حل کنید

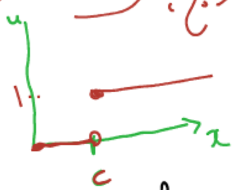
20) $xy'' + y' + xy = 0 \qquad y(0) = 1$

21) $xy'' + (x-1)y' - y = 0 \qquad y(0) = 1$

معادلات دیفرانسیل با طرف راست ناپیوسته:

در این جلسه به بررسی معادلات دیفرانسیل ناهمگن $ay'' + by' + cy = f(x)$ می‌پردازیم که $f(x)$ در چند نقطه ناپیوستگی جهش دارد (حد چپ و راست در نقاط ناپیوستگی موجود است)

تعریف (تابع پله‌ای واحد یا تابع پله‌ای کلید): تابع $u_c(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$ را تابع پله‌ای واحد می‌نامیم.



نمودار تابع پله‌ای واحد

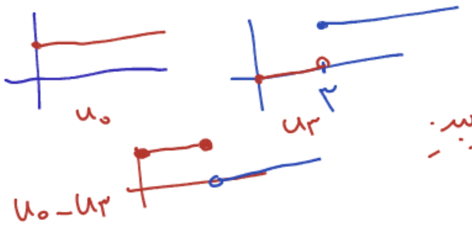
$$\mathcal{L}[u_c(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} u_c(x)\,dx = \int_c^\infty e^{-sx}\,dx = -\frac{1}{s}e^{-sx}\Big|_c^\infty$$

توجه کنید که

$$= \frac{1}{s}e^{-sc} \qquad s>0$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[u_c(x)] = \frac{e^{-sc}}{s} \qquad s>0$$

قرارداد: $u_0(x)=1$



مثال: تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 3 \\ 0 & x\geq 3\end{cases}$ را بیابید.

توجه کنید که

$$f(x) = x(u_0(x)-u_3(x)) + 0\,u_3(x) = x(1-u_3(x))$$

$$\mathcal{L}[f(x)] = \mathcal{L}[x - x u_3(x)] = L[x] - L[x u_3(x)]$$

$$= \frac{1}{s^2} - \left(-\frac{d}{ds}\right) L[u_3(x)]$$

$$= \frac{1}{s^2} + \frac{d}{ds}\left(\frac{e^{-3s}}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{s^2} + \frac{-3e^{-3s}s - e^{-3s}}{s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2}\left(1 - 3se^{-3s} - e^{-3s}\right)$$

مثال: لاپلاس تابع $f(x)=\begin{cases}3 & 0\le x<1\\ 2 & 1\le x<3 \\ 5 & 3\le x<4 \\ -3 & x\ge 4\end{cases}$ را حساب کنید.

$$f(x) = 3(\overset{1}{\cancel{u_0}} - u_1) + 2(u_1-u_3) + 5(u_3-u_4) - 3u_4$$

$$\Rightarrow f(x) = 3 - u_1(x) + 3u_3(x) - 8u_4(x)$$

$$L[f(x)] = 3L[1] - L[u_1] + 3L[u_3] - 8L[u_4]$$

$$= \frac{3}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + 3\frac{e^{-3s}}{s} - 8\frac{e^{-4s}}{s}$$

مثال: اگر $f(x)=[x]$ آنگاه مطلوبست $L[f(x)]$.

$$[x] = \begin{cases} 0 & 0\le x<1 \\ 1 & 1\le x<2 \\ 2 & 2\le x<3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow [x] = 0(u_0-u_1) + 1(u_1-u_2) + 2(u_2-u_3) + \dots$$

$$\Rightarrow [x] = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

$$L[[x]] = L[u_1]+L[u_2]+\dots+L[u_n]+\dots = \frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-3s}}{s}+\dots$$

$$= \frac{1}{s}\left(e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s}+\dots\right) = \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-s}\right)^n = \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^s}\right)^n$$

مجموع سری هندسی $\;= \frac{1}{s}\,\frac{\frac{1}{e^s}}{1-\frac{1}{e^s}} = \frac{1}{s(e^s-1)}$

بنابراین

$$L\big[[x]\big] = \frac{1}{s(e^s-1)}$$

حال فرض کنید f تابعی باشد که بر $(0,\infty)$ تعریف شده است و g تابعی باشد که از انتقال نمودار f به اندازه c واحد به طرف راست به دست آمده باشد یعنی

$$g(x)=\begin{cases}0 & 0\leq x<c\\ f(x-c) & x\geq c\end{cases}$$

حال g را می‌توان به صورت تابع پله‌ای واحد به شکل $g(x)=f(x-c)U_c(x)$ نوشت. در این صورت قضیه زیر را داریم:

قضیه: اگر $L[f(x)]=F(s)$ آنگاه $L[f(x-c)U_c(x)] = e^{-cs}F(s)$.

برهان:

$$L[f(x-c)U_c(x)] = \int_0^\infty e^{-sx}U_c(x)f(x-c)\,dx$$

$$= \int_c^\infty e^{-sx}f(x-c)\,dx \underset{\substack{u=x-c\\ dx=du}}{=} \int_0^\infty e^{-s(u+c)}f(u)\,du$$

$$= \int_0^\infty e^{-su}e^{-sc}f(u)\,du$$

$$= e^{-sc}\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du = e^{-sc}L[f(x)]$$

$$= e^{-sc}F(s)$$

مثال: مطلوب است $L[\sin x\, U_{\frac{\pi}{2}}(x)]$.

$$\sin x = \sin\left(x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$L[\sin x\, U_{\frac{\pi}{2}}(x)] = L\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)U_{\frac{\pi}{2}}(x)\right] = e^{-\frac{\pi}{2}s}L[\cos x] = e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{s^2+1} = \frac{s\,e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}$$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

مثال: مطلوب است تبدیل لاپلاس تابع

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\leq x\leq \frac{\pi}{4}\\ \sin x & x\geq\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

$$f(x)=\sin x\, U_{\frac{\pi}{4}}(x)$$

از طرفی

$$\sin x=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}$$

$\cos\frac{\pi}{4}\to\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4}\to\frac{1}{2}$

$$\mathcal{L}[f(x)]=\mathcal{L}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)U_{\frac{\pi}{4}}(x)+\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)U_{\frac{\pi}{4}}(x)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}s}\mathcal{L}[\sin x]+\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{4}s}\mathcal{L}[\cos x]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}s}\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{4}s}\frac{s}{s^2+1}=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{4}s}\left(\frac{\sqrt{3}+s}{s^2+1}\right)$$

مثال: مطلوب است تبدیل لاپلاس

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\\ \sin x+\cos x & x\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$f(x)=\sin x\left(\cancelto{1}{U_0}-U_{\frac{\pi}{2}}\right)+(\sin x+\cos x)\,U_{\frac{\pi}{2}}=\sin x+U_{\frac{\pi}{2}}(x)\cos x=$$
$$=\sin x-U_{\frac{\pi}{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\mathcal{L}[f(x)]=\mathcal{L}\left[\sin x-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)U_{\frac{\pi}{2}}(x)\right]$$

$$=\frac{1}{s^2+1}-e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{s^2+1}=\frac{1}{s^2+1}\left(1-s\,e^{-\frac{\pi}{2}s}\right)$$

مثال: مطلوب است $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1-e^{-2s}}{s^2}\right]$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1-e^{-2s}}{s^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2}\right]=x-(x-2)U_2(x)$$

مثال: مطلوب است $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s^2-s-2}\right]$

حل:

$$\frac{1}{s^2-s-2}=\frac{1}{(s-2)(s+1)}=\frac{\overset{\frac{1}{3}}{A}}{s-2}+\frac{\overset{-\frac{1}{3}}{B}}{s+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s^2-s-2}\right]=\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s-2}\right]-\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s+1}\right]=\frac{1}{3}e^{2(x-4)}U_4(x)-\frac{1}{3}e^{-(x-4)}U_4(x)$$

$$\Rightarrow\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s^2-s-2}\right]=\frac{1}{3}U_4(x)\left(e^{2(x-4)}-e^{-(x-4)}\right)}$$

تمرین مطلوب است

(۲۲) $L^{-1}\left[\dfrac{e^{-s}}{s^2(s^2+1)}\right]$

(۲۳) $L^{-1}\left[\dfrac{e^{-3s}}{(s-3)(s^2+16)}\right]$

(۲۴) $L^{-1}\left[\dfrac{e^{-2s}}{(s-1)(s^2-4)}\right]$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y''+y=f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<4 \\ 3 & x\ge 4\end{cases} \qquad y(0)=y'(0)=0$$

$$f(x)=x(\cancel{U_0}^{\,1}-U_4)+3U_4 = x - xU_4(x)+3U_4(x)$$
$$= x-(x-4)U_4(x)-U_4(x).$$

$$\Rightarrow L[f(x)] = L[x]-L[(x-4)U_4(x)]-L[U_4(x)]$$
$$= \frac{1}{s^2}-\frac{e^{-4s}}{s^2}-\frac{e^{-4s}}{s}$$

حال از دو طرف معادله لاپلاس می گیریم:

$$L[y'']+L[y]=L[f(x)] \Rightarrow s^2L[y]-s\cancel{y(0)}^{\,0}-\cancel{y'(0)}^{\,0}+L[y]=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-4s}}{s^2}-\frac{e^{-4s}}{s}$$

$$(s^2+1)L[y]=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-4s}}{s^2}-\frac{e^{-4s}}{s}$$

$$\Rightarrow L[y]=\frac{1}{s^2(s^2+1)}-\frac{e^{-4s}}{s^2(s^2+1)}-\frac{e^{-4s}}{s(s^2+1)}$$

از طرفی

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)}=\frac{\cancel{A}^{\,0}}{s}+\frac{\cancel{B}^{\,1}}{s^2}+\frac{\cancel{C}^{\,0}s+\cancel{D}^{\,-1}}{s^2+1}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}$$

$$\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{\cancel{A'}^{\,1}}{s}+\frac{\cancel{B'}^{\,-1}s+\cancel{C'}^{\,0}}{s^2+1}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}$$

$$L[y]=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}-\frac{e^{-4s}}{s^2}+\frac{e^{-4s}}{s^2+1}-\frac{e^{-4s}}{s}+\frac{e^{-4s}}{s^2+1}$$

$$y=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]-L^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s^2}\right]+L^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s^2+1}\right]-L^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s}\right]+L^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s^2+1}\right]$$

$$\Rightarrow y = x-\sin x-(x-4)U_4(x)+\underline{\sin(x-4)U_4(x)}-U_4(x)+\underline{\sin(x-4)U_4(x)}$$

مثال: مسأله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' - 3y' - 4y = \underbrace{\boxed{\begin{cases} e^x & 0 \leqslant x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}}}_{f(x)} \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

$$f(x) = e^x(\overset{1}{\cancel{u_0}} - u_2) = e^x - e^x u_2(x) = \underbrace{e^x - e^2 e^{x-2} u_2(x)}$$

$$\Rightarrow L[y''] - 3L[y'] - 4L[y] = L[f(x)]$$

$$s^2 L[y] - s\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} - 3sL[y] + 3\cancel{y(0)} - 4L[y] = \frac{1}{s-1} - e^2 \frac{e^{-2s}}{s-1}$$

$$(\underbrace{s^2 - 3s - 4}_{(s-4)(s+1)})L[y] = \frac{1}{s-1} - e^2 \frac{e^{-2s}}{s-1} \Rightarrow L[y] = \frac{1}{(s-1)(s-4)(s+1)} - e^2 \frac{e^{-2s}}{(s-1)(s-4)(s+1)}$$

$$\frac{1}{(s-1)(s-4)(s+1)} = \frac{\overset{-1/6}{\cancel{A}}}{s-1} + \frac{\overset{1/15}{\cancel{B}}}{s-4} + \frac{\overset{1/10}{\cancel{C}}}{s+1} \qquad \text{از طرفی}$$

$$\Rightarrow L[y] = \frac{-\frac{1}{6}}{s-1} + \frac{\frac{1}{15}}{s-4} + \frac{\frac{1}{10}}{s+1} + \frac{\frac{e^2}{6} e^{-2s}}{s-1} - \frac{\frac{e^2}{15} e^{-2s}}{s-4} - \frac{\frac{e^2}{10} e^{-2s}}{s+1}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{6} e^x + \frac{1}{15} e^{4x} + \frac{1}{10} e^{-x} + \frac{e^2}{6} e^{x-2} u_2(x) - \frac{e^2}{15} e^{4(x-2)} u_2(x) - \frac{e^2}{10} e^{-(x-2)} u_2$$

تمرین: معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

25) $y'' + y = x(1 - u_\pi(x)) \qquad y(0) = 5 \;,\; y'(0) = 0$

26) $y' + y = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x < \pi \\ 3\sin x & x \geqslant \pi \end{cases} \qquad y(0) = 5$

27) $y'' + 4y = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & x \geqslant 1 \end{cases} \qquad y(0) = y'(0) = 0$

انتگرال پیچشی (تلفیقی)

تعریف: گیریم f و g دو تابع تعریف شده بر $[0,\infty)$ باشند. انتگرال پیچشی آنها به صورت

$$(f*g)(x)=\int_0^x f(x-t)g(t)\,dt$$

قضیه: $(f*g)(x)=(g*f)(x)$.

برهان:

$$(f*g)(x)=\int_0^x f(x-t)g(t)\,dt \underset{\substack{u=x-t\\ du=-dt}}{=} \int_x^0 f(u)g(x-u)(-du)$$

$$=\int_0^x f(x-u)g(u)\,du$$

$$=(g*f)(x)$$

خواص انتگرال پیچشی:

1) $(f*g)*h=f*(g*h)$

2) $f*(g+h)=f*g+f*h$

3) $f*0=0$

4) $(\lambda f)*g=\lambda(f*g)$

مثال: مطلوب است e^x*1؟

$$e^x*1=\int_0^x e^t\,dt=e^t\Big|_0^x=e^x-1 \implies e^x*1\neq e^x$$

مثال: مطلوب است $1*1$؟

$$1*1=\int_0^x 1\,dt=x \implies 1*1\neq 1.$$

مثال: اگر $f(x)=\cos x$ مطلوب است $f*f$.

$$(f*f)(x)=\int_0^x f(x-t)f(t)\,dt=\int_0^x \cos(x-t)\cos t\,dt \overset{①}{=} \frac{1}{2}\int_0^x \left(\cos x+\cos(2t-x)\right)dt$$

$$=\frac{x\cos x-\sin x}{2}$$

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right] \quad ①$$

$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right] \quad ②$$

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right] \quad ③$$

قضیه: اگر f و g دو تابع باشند آنگاه

$$L[(f*g)] = L[f]\cdot L[g]$$

همچنین اگر $L[f]=F(s)$ و $L[g]=G(s)$ آنگاه

$$L^{-1}[F(s)\cdot G(s)] = L^{-1}[F(s)] * L^{-1}[G(s)] = f*g$$

مثال: از آنجا که $f*1=\int_0^x f(t)\,dt$ پس

$$L\left[\int_0^x f(t)\,dt\right] = L[f*1] = L[f]\cdot L[1] = \frac{1}{s}L[f]$$

مثال: مطلوب است $L\left[\int_0^x e^{-u}\sin u\,du\right]$.

$$L\left[\int_0^x e^{-u}\sin u\,du\right] = \frac{1}{s}L[e^{-u}\sin u] = \frac{1}{s}\,\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

چون $L[\sin u]=\frac{1}{s^2+1}$

مثال: مطلوب است $L^{-1}\left[\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}\right]$.

حل: از آنجا که $L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]=x$ و $L^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right]=\sin ax$ پس

$$L^{-1}\left[\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] * L^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right]$$

$$= x * \sin ax$$

$$= \int_0^x (x-t)\sin at\,dt$$

$$= \frac{ax-\sin ax}{a^2}$$

مثال: مطلوب است $L\left[e^x\int_0^x e^{-2u}\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)du\right]$.

حل:

$$L\left[\int_0^x e^{x-u}\,e^{-u}\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)du\right] = L\left[e^x * e^{-x}\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)\right]$$

$$= L[e^x]\,L\left[\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\right] = \frac{1}{s-1}\int_s^\infty\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u+2}\right)du$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{-e^{-x}+2e^{-2x}}{1} = 1$$

$$= \frac{1}{s-1}\left[\ln u+1 - \ln u+2\right]$$

$$= \frac{1}{s-1}\ln\left(\frac{u+1}{u+2}\right)$$

مثال: مطلوب است $I = L\left[\int_0^x \frac{\cos(x-t)}{t}\sinh t\,dt\right]$.

$$I = L\left[\cos x * \frac{e^x - e^{-x}}{x}\right] = L[\cos x]\cdot L\left[\frac{e^x - e^{-x}}{x}\right]$$

$$= \frac{1}{s^2+1}\int_s^\infty \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right)du = \frac{1}{s^2+1}\,\mathrm{Ln}\left|\frac{u+1}{u-1}\right|_s^\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x - e^{-x}}{x} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x + e^{-x}}{1} = 2$$

$$= \frac{-1}{s^2+1}\,\mathrm{Ln}\left|\frac{s+1}{s-1}\right|$$

$$= \frac{1}{s^2+1}\,\mathrm{Ln}\left|\frac{s-1}{s+1}\right|$$

مثال: مطلوب است $L^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+1)^2}\right]$.

$$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+1}\right] = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] * L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = \cos x * \cos x = \frac{x\cos x - \sin x}{2}$$

تمرین: مطلوب است (۳۰) $L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right]$ (۲۹) $L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right]$ (۲۸) $L\left[e^x\int_0^x e^{-t}\sin t\,dt\right]$

معادلات انتگرال:

تعریف: معادله‌ای که شامل یک انتگرال معین باشد را یک معادله انتگرال گوئیم.

مثال: معادله انتگرال زیر را حل کنید.

$$y' = x + \int_0^x y(x-t)\cos t\,dt \qquad y(0)=0$$

حل: از دو طرف معادله لاپلاس می‌گیریم:

$$L[y'] = L[x] + L\left[\int_0^x y(x-t)\cos t\,dt\right]$$

$$sL[y] - \cancel{y(0)} = \frac{1}{s^2} + L[y * \cos] \Rightarrow sL[y] = \frac{1}{s^2} + L[y]\,\underbrace{L[\cos x]}_{\frac{s}{s^2+1}}$$

$$\Rightarrow \left(s - \frac{s}{s^2+1}\right)L[y] = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \left(\frac{s^3+s-s}{s^2+1}\right)L[y] = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow L[y] = \frac{s^2+1}{s^5} = \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^5}$$

$$y = L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s^5}\right] = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

مثال: معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$y(x) = x + e^x\int_0^x y(t)\, e^{-t}\, dt$$

حل:

$$y(x) = x + \int_0^x y(t)\, e^{x-t}\, dt \Longrightarrow L[y] = L[x] + L[y * e^x]$$

$$\Longrightarrow L[y] = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1}L[y]$$

$$\Longrightarrow \left(1-\frac{1}{s-1}\right)L[y] = \frac{1}{s^2} \Longrightarrow L[y] = \frac{s-1}{s^2(s-2)} = \frac{\overset{-\frac14}{\cancel{A}}}{s} + \frac{\overset{\frac12}{B}}{s^2} + \frac{\overset{\frac14}{\cancel{C}}}{s-2}$$

$$y = L^{-1}\left[\frac{-\frac14}{s} + \frac{\frac12}{s^2} + \frac{\frac14}{s-2}\right] = -\frac14 + \frac12 x + \frac14 e^{2x}$$

مثال: از معادلهٔ زیر تابع f را بیابید.

$$\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt = 1+\sqrt{x} \Longrightarrow f(x) * \frac{1}{\sqrt{x}} = 1+\sqrt{x}$$

پس با گرفتن لاپلاس از دو طرف معادله اثر داریم $L[f * \frac{1}{\sqrt{x}}] = L[1+\sqrt{x}]$ و در نتیجه

چون $L[\frac{1}{\sqrt{x}}] = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$ و $L[\sqrt{x}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$ لذا با برابر:

$$L[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{\pi s}} + \frac{1}{2s} \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right] + \frac12 L^{-1}(s)$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x}} + \frac12$$

تمرین: مطلوب است حل معادلات زیر

(۴۱) $y(x) = \sin x + \int_0^x 4\sin(2x-2t)\, y(t)\, dt$

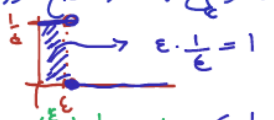
(۴۲) $y'(x) = x + \int_0^x y(x-t)\cos t\, dt \qquad y(0)=0$

(۴۳) $y(x) = 4x^2 - e^{-x} - \int_0^x e^{x-t}\, y(t)\, dt$

تابع دلتای دیراک (تابع واحد ضربه)

فرض کنید $\epsilon > 0$ عدد کوچکی باشد. تابع دیراک $\delta_\epsilon(x)$ روی بازهٔ $[0,\infty)$ به صورت:

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases}\frac{1}{\epsilon} & 0<x<\epsilon\\ 0 & x\geq\epsilon\end{cases}$$



تعریف می‌شود و داریم: $\int_0^\infty \delta_\epsilon(x)\,dx = \int_0^\epsilon \frac{1}{\epsilon}\,dx = 1$

برای هم $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \delta_\varepsilon(x) = \delta(x)$ و تابع $\delta(x)$ را تابع دلتای دیراک می‌نامیم. پس

$$\delta(x)=\begin{cases} 0 & x\neq 0 \\ \infty & x=0 \end{cases}, \quad \int_0^\infty \delta(x)\,dx=1 \qquad \delta(x-x_0)=\begin{cases} 0 & x\neq x_0 \\ \infty & x=x_0 \end{cases}$$

توجه کنید که

$$\int_0^\infty f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = \int_0^\infty f(x)\lim_{\varepsilon\to 0^+}\delta_\varepsilon(x-x_0)\,dx$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^\infty f(x)\,\delta_\varepsilon(x-x_0)\,dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}f(x)\,dx$$

قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرال $\longleftarrow$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(c_x)}{\cancel{\varepsilon}}(\cancel{x_0}+\cancel{\varepsilon}-\cancel{x_0}) \qquad x_0\le c_x\le x_0+\varepsilon$$

$$=f(x_0)$$

قضیه: $\boxed{L[\delta(x-x_0)]=\int_0^\infty e^{-sx}\delta(x-x_0)\,dx=e^{-sx_0}}$

مثال: معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$y''-4y'+4y=3\delta(x-1) \qquad y(0)=y'(0)=1$$

حل: از دو طرف معادله لاپلاس می‌گیریم. داریم:

$$L[y'']-4L[y']+4L[y]=3L[\delta(x-1)]$$

$$s^2L[y]-s\underbrace{y(0)}_{1}-\underbrace{y'(0)}_{1}-4sL[y]+4\underbrace{y(0)}_{1}+4L[y]=3e^{-s}$$

$$(\underbrace{s^2-4s+4}_{(s-2)^2})L[y]=s-3+3e^{-s}$$

$$L[y]=\frac{\overset{s-2-1}{\cancel{s-3}}}{(s-2)^2}+\frac{3e^{-s}}{(s-2)^2}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{3e^{-s}}{(s-2)^2}$$

$$y=L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right]+3L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{(s-2)^2}\right]=e^{2x}-xe^{2x}+3u_1(x)(x-1)e^{2(x-1)}$$

تمرین: معادلات زیر را حل کنید

(۳۴) $y'' + y = 4\delta(x-2\pi) \qquad y(0)=1 \,,\, y'(0)=0$

(۳۵) $y'(x) + \int_0^x y(t)\,dt + y(x) = x^{10}\delta_1(x)$

$\delta_1(x) = \delta(x-1)$

اینگونه نیز نوشته می‌شود

فصل پنجم: حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری‌ها:

تعریف: یک سری نامتناهی به شکل

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

را یک سری توانی حول نقطهٔ x_0 می‌نامیم. اعداد a_0، a_1، a_2، ... را ضرائب سری و x_0 را مرکز سری می‌نامیم.

تعریف: تابع $f(x)$ را در نقطهٔ x_0 تحلیلی می‌نامیم هرگاه در یک همسایگی x_0 بسط تیلور $f(x)$ در x_0 موجود باشد و به f همگرا باشد. یعنی عددی مانند $r>0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\forall x \in (x_0 - r \,,\, x_0 + r) \qquad f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{سری تیلور یک سری توانی است}}$$

$f^{(n)}$ مشتق مرتبهٔ nام f

$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

اگر $x_0=0$ آنگاه سری اخیر (سری تیلور حول $x_0=0$) سری مک لورن نامیده می‌شود.

مثال: تابع $f(x)=e^x$ در نقطهٔ $x_0=0$ تحلیلی است و $f^{(n)}(x)=e^x \,,\, \forall n\in\mathbb{N}$ پس $f^{(n)}(0)=1$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

مثال: سری مک لورن $f(x)=\sin x$ را بیابید.

$f(x)=\sin x \Rightarrow f(0)=0 \longleftarrow 0$

$f'(x)=\cos x \Rightarrow f'(0)=1 \longleftarrow 1$

$f''(x)=-\sin x \Rightarrow f''(0)=0 \longleftarrow 2$

$f^{(3)}(x)=-\cos x \Rightarrow f^{(3)}(0)=-1 \longleftarrow 3$

$f^{(4)}=\sin x=f(x)$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

مثال: بسط مک‌لورن تابع $f(x)=\cos x$ را بیابید.

$$\underset{\text{طبق مثال قبل}}{\sin x=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\xrightarrow{\text{مشتق}}\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\Rightarrow \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}, |x|<1$
سری هندسی

مثال: سری مک‌لورن تابع $f(x)=\frac{1}{1+x}$ ، $g(x)=\ln(1+x)$ را بیابید.

$$f(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad |x|<1$$

$$g(x)=\int\frac{1}{1+x}dx=\int f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

مثال:

$$\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} \qquad |x|<1$$

مثال: مطلوب است سری مک‌لورن تابع $f(x)=tg^{-1}x$.

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \Rightarrow tg^{-1}x=\int\frac{1}{1+x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

تعریف: معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0} \qquad (1)$$

را در نظر می‌گیریم. نقطه x_0 را یک نقطه عادی معادله (1) می‌نامیم هرگاه، هر دو تابع $p(x)$ و $q(x)$ در x_0 تحلیلی باشند. در غیر این صورت (اگر حداقل یکی از توابع $p(x)$ و $q(x)$ در x_0 تحلیلی نباشد) آنگاه x_0 را یک نقطه تکین معادله می‌نامیم.

نکته: اگر $p(x)$ و $q(x)$ توابع گویا باشند (تابع گویا = $\frac{\text{چندجمله‌ای}}{\text{چندجمله‌ای}}$ ، مثال: $\frac{x^2-1}{x-1}$ ، $\frac{x^3}{x^2+2x-1}$) آنگاه این توابع در هر نقطه به جز ریشه‌های مخرج تحلیلی هستند. پس همه نقاط، به جز ریشه‌های مخرج نقاط عادی برای معادله (1) اند و ریشه‌های مخرج نقاط تکین معادله (1) هستند.

تعریف: نقطه تکین x_0 را یک نقطه تکین منظم معادله (1) می‌نامیم هرگاه هر دو تابع $(x-x_0)p(x)$ و $(x-x_0)^2q(x)$ در x_0 تحلیلی باشند. در غیر این صورت (یعنی حداقل یکی از توابع فوق تحلیلی نباشد) آنگاه x_0 نقطه تکین نامنظم است.

مثال: نقاط عادی، تکین منظم و نامنظم هر یک از معادلات زیر را مشخص کنید.

الف) $x^2(x-1)y'' + (2x+1)y' + x^2(x+1)y = 0$

$$\Rightarrow y'' + \frac{2x+1}{x^2(x-1)}y' + \frac{x^2(x+1)}{x^2(x-1)}y = 0$$

$$\Rightarrow y'' + \frac{2x+1}{x^2(x-1)}y' + \frac{x+1}{x-1}y = 0$$

$p(x) = \frac{2x+1}{x^2(x-1)} \longrightarrow$ p در $x=0$ و $x=1$ تحلیلی نیست

$q(x) = \frac{x+1}{x-1} \Longrightarrow$ q در $x=1$ تحلیلی نیست

$\Rightarrow$ $x_0=0$ و $x_0=1$ نقاط تکین (غیرعادی) معادله‌اند و بقیه نقاط یعنی $\mathbb{R}-\{0,1\}$ نقاط عادی معادله‌اند.

$x_0=0 \Rightarrow \begin{cases} (x-x_0)p(x) = x\,\dfrac{2x+1}{x^2(x-1)} = \dfrac{2x+1}{x(x-1)} \\ (x-x_0)^2q(x) = \dfrac{x^2(x+1)}{x-1} \end{cases}$ در $x=0$ تحلیلی نیست $\Rightarrow$ $x_0=0$ نقطه تکین نامنظم معادله است.

$x_0=1 \Rightarrow \begin{cases} (x-x_0)p(x) = \dfrac{2x+1}{x^2} \\ (x-x_0)^2q(x) = (x^2-1) \end{cases} \longrightarrow$ هر دو در $x_0=1$ تحلیلی اند $\Rightarrow$ $x_0=1$ نقطه تکین منظم معادله است.

ب) $(x^2-1)y'' + 2xy' - 12y = 0$

$$y'' + \frac{2x}{(x-1)(x+1)}y' - \frac{12}{(x-1)(x+1)} = 0$$

$$P(x) = \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$$

$$q(x) = \frac{-12}{(x-1)(x+1)}$$

$\Longrightarrow$ $x=\pm1$ در P و q غیرتحلیلی هستند $\Rightarrow$ $x_0=\pm1$ نقاط تکین معادله اند.

$$x_0=1 \Rightarrow \begin{cases} (x-1)P(x) = \dfrac{2x}{x+1} \\ (x-1)^2 q(x) = -12\dfrac{(x-1)}{x+1} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ هر دو در $x=1$ تحلیلی اند $\Rightarrow$ $x=1$ نقطهٔ تکین منظم معادله است.

$$x_0=-1 \Rightarrow \begin{cases} (x+1)P(x) = \dfrac{2x}{x-1} \\ (x+1)^2 q(x) = -12\dfrac{(x+1)}{x-1} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ هر دو در $x=-1$ تحلیلی اند $\Rightarrow$ $x_0=-1$ نقطهٔ تکین منظم معادله است.

جواب معادله به صورت سری حول (در مجاورت) یک نقطهٔ عادی:

قضیه: فرض کنید توابع $P(x)$ و $q(x)$ در نقطهٔ x_0 تحلیلی باشند در این صورت هر جواب $y(x)$ از معادلهٔ $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ در نقطهٔ x_0 تحلیلی است و می توان آن را به صورت

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad *$$

نوشت. به خصوص اگر $P(x)$ و $q(x)$ چندجمله ای هایی از x باشند آنگاه سری $*$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ همگراست.

برای یافتن ضرائب a_n کافیست سری $*$ را در معادله جایگذاری کنیم و a_n ها را بیابیم.

مثال: جواب عمومی معادلهٔ $y''+xy'+y=0$ را حول نقطهٔ $x=0$ به صورت یک سری توانی بیابید.

حل: $P(x)=x$ و $q(x)=1$ و هر دو در نقطهٔ $x_0=0$ تحلیلی اند. بنابراین نقطهٔ $x_0=0$ یک نقطهٔ عادی معادله است. قرار می دهیم

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

برای یافتن a_n ها باید y را در معادله جایگذاری کنیم. پس مشتقات آن را حساب می کنیم. داریم:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Longrightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad , \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$y''+xy'+y=0$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \underbrace{x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}}_{\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{n+2=0 \\ n=-2}}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n = 0$$

$$0 + 0 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \big((n+2)a_{n+2} + a_n\big)(n+1)x^n = 0 \Rightarrow (n+1)\big((n+2)a_{n+2} + a_n\big) = 0$$

برای $n=0,1,\dots$

$$\Rightarrow (n+2)a_{n+2} + a_n = 0 \Rightarrow \boxed{a_{n+2} = \frac{-a_n}{n+2}}$$

$$\boxed{a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}} \qquad n=0,1,2,\dots$$

$$\begin{cases} n=0 \Rightarrow a_2 = -\dfrac{a_0}{2} \leftarrow \\ n=1 \Rightarrow a_3 = \dfrac{-a_1}{3} \\ n=2 \Rightarrow a_4 = \dfrac{-a_2}{4} = +\dfrac{a_0}{8} \\ n=3 \Rightarrow a_5 = \dfrac{-a_3}{5} = -\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{-a_1}{3}\right) = \dfrac{a_1}{15} \\ \vdots \end{cases}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(0) &= a_0 \\ y'(0) &= a_1 \end{aligned}}$$

$$= a_0 + a_1 x + \left(-\frac{a_0}{2}\right)x^2 + \left(\frac{-a_1}{3}\right)x^3 + \frac{a_0}{8}x^4 + \frac{a_1}{15}x^5 + \dots$$

$$= a_0 \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \dots\right)}_{y_1(x)} + a_1 \underbrace{\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15}x^5 + \dots\right)}_{y_2(x)}$$

$$= a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

مستقل ۱   مستقل ۲

تمرین (۳۵) جواب معادله $y''+(x-1)y'+y=0$ را حول $x=0$ به صورت سری بدست آورید

مثال: جواب معادله $y''-2xy'-2y=e^x$ را حول $x=0$ به صورت سری بدست آورید.

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

حل: $P(x)=-2x$ و $q(x)=-2$ هر دو در نقطه $x=0$ تحلیلی هستند پس $x=0$ یک نقطه عادی معادله است. قرار می‌دهیم

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \Rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

با جایگذاری در معادله داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

$$\sum_{n+2=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

$$\sum_{n=-2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

$$0+0+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(n+2)(n+1)a_{n+2}-2(n+1)a_n\Big]x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}-2(n+1)a_n=\frac{1}{n!}\qquad \forall n=0,1,\dots$$

$$a_{n+2}=\frac{\frac{1}{n!}+2(n+1)a_n}{(n+2)(n+1)}=\frac{1}{(n+2)!}+\frac{2a_n}{n+2}$$

$n=0 \Rightarrow a_2=\frac{1}{2}+a_0$

$n=1 \Rightarrow a_3=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}a_1$

$n=2 \Rightarrow a_4=\frac{1}{24}+\frac{2a_2}{4}=\frac{1}{24}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+a_0)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}a_0$

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\dots=a_0+a_1x+(\tfrac{1}{2}+a_0)x^2+(\tfrac{1}{6}+\tfrac{2}{3}a_1)x^3+(\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{2}a_0)x^4+\dots$$

$$\Rightarrow y(x) = a_0\underbrace{\left(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \dots\right)}_{y_1(x)} + a_1\underbrace{\left(x + \frac{2}{3}x^3 + \dots\right)}_{y_2(x)}$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \dots\right)}_{y_p(x)}$$

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) + y_p(x).$$

نکته: اگر $x=x_0\neq 0$ یک نقطه عادی معادله باشد و بخواهیم جواب معادله را به صورت سری حول نقطه x_0 به دست آوریم ابتدا بسط تیلور تمام ضرائب معادله را حول x_0 می نویسیم و سپس از تغییر متغیر $t=x-x_0$ استفاده می کنیم. در این صورت $t=0$ نقطه عادی معادله جدید خواهد بود و از اینجا به بعد مثل قبل عمل می کنیم.

مثال: جواب معادله $(x^2-2x)y''-5(x-1)y'-7y=0$ را با شرط $y(1)=1$ و $y'(1)=2$ به صورت سری بنویسید.

حل: چون شرایط اولیه در نقطه $x=1$ داده شده است پس جواب حول $x=1$ باید نوشته شود.

معادله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم

$$(x^2-2x+1-1)y''-5(x-1)y'-7y=0 \qquad y(1)=1,\quad y'(1)=2$$

$$\Rightarrow \left[(x-1)^2-1\right]y''-5(x-1)y'-7y=0$$

$$t=x-1 \Rightarrow dt=dx \qquad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt} \Rightarrow y''=\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\boxed{(t^2-1)y''-5ty'-7y=0 \quad *} \qquad y(0)=1=a_0,\quad y'(0)=2=a_1$$

فرض کنیم

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n \Rightarrow y'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nt^{n-1},\quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}$$

حال در معادله * جایگذاری می کنیم:

$$(t^2-1)\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}-5t\sum_{n=0}^{\infty}na_nt^{n-1}-7\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=0$$

$$\underline{\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^n} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - \underline{5\sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^n} - \underline{7\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n} = 0$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n + \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\underbrace{n(n-1)-5n-7}_{n^2-6n-7}\Big)a_n t^n = 0$$

$$0+0-\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n-7)(n+1)a_n t^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-7)(n+1)a_n\Big)t^n = 0$$

$$\Rightarrow \forall n=0,1,\dots \quad a_{n+2} = \frac{(n-7)\cancel{(n+1)}a_n}{(n+2)\cancel{(n+1)}} = \frac{n-7}{n+2}a_n$$

$n=0 \quad a_2 = -\frac{7}{2}\cancel{a_0} = -\frac{7}{2}$ ($a_0 = 1$)

$n=1 \quad a_3 = -2\cancel{a_1} = -4$ ($a_1 = 2$)

$n=2 \quad a_4 = \frac{-5}{4}a_2 = \frac{35}{8} \quad \dots$

$$y(t) = 1 + 2t - \frac{7}{2}t^2 - 4t^3 + \frac{35}{8}t^4 + \dots$$

$$y(x) = 1 + 2(x-1) - \frac{7}{2}(x-1)^2 - 4(x-1)^3 + \frac{35}{8}(x-1)^4 + \dots$$

تمرین: جواب عمومی معادلات زیر را به صورت سری حول نقطهٔ $x=0$ به دست آورید

36) $y'' + xy = 0$

37) $y'' + (x+1)y' + 4y = 0$

38) $(1+x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0$

تمرین: جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیر را با استفاده از سری بیابید

39) $x^2y'' + 2y' + (x-1)y = x^2+2 \qquad y(1)=0,\ y'(1)=0$

40) $(x^2-2x)y'' + 5(x-1)y' + 3y = 0 \qquad y(1)=6,\ y'(1)=3$

جواب به صورت سری در مجاورت یک نقطهٔ تکین منظم (روش فروبنیوس):

در این قسمت می‌خواهیم جواب معادلهٔ خطی مرتبه دوم

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0 \qquad (1)$$

را حول یک نقطهٔ تکین منظم به صورت سری به دست آوریم. برای سادگی فرض می‌کنیم $x=0$ نقطهٔ تکین منظم معادلهٔ (1) باشد.

$xp(x)$ و $x^2q(x)$ در $x=0$ تحلیلی اند. قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} p_0 = \lim\limits_{x\to 0} x\,p(x) \\ q_0 = \lim\limits_{x\to 0} x^2 q(x) \end{cases}$$

حال معادلهٔ $r^2+(p_0-1)r+q_0=0$ را که به معادلهٔ مشخصهٔ متناظر با معادلهٔ (1) معروف است را در نظر می‌گیریم.

با توجه به ریشه‌های این معادلهٔ مشخصه قضیهٔ زیر را در مورد جوابهای معادلهٔ (1) داریم:

قضیه: فرض کنید معادلهٔ مشخصهٔ $r^2+(p_0-1)r+q_0=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی r_1 و r_2 باشد که $r_1 \geq r_2$.

در این صورت یکی از جوابهای معادلهٔ (1) به شکل

با جاگذاری در معادله ضرایب را می‌یابیم ← $$y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}$$

$a_0 \neq 0$

است. به علاوه برای جواب $y_2(x)$ (مستقل خطی با $y_1(x)$) داریم:

الف) اگر $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$ (یعنی r_1-r_2 عدد صحیح نباشد) آنگاه

با جاگذاری در معادله ضرایب را می‌یابیم. ← $$y_2(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} \qquad b_0 \neq 0$$

ب) اگر $r_1 - r_2 = 0$ (یعنی $r = r_1 = r_2$) آنگاه

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^{r}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

از فرمول آبل به دست می‌آید ←

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,dx}\, dx$$

ج) اگر $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$ (یعنی r_1-r_2 یک عدد طبیعی است) آنگاه

$$y_2(x) = C\,y_1(x)\ln x + x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad b_0 \neq 0$$

C: یک عدد ثابت است که به $y_1(x)$ و $p(x)$ بستگی دارد.

نکته: سری‌هایی که برای y_1 و y_2 در قضیهٔ بالا ارائه شدند سری‌های فروبنیوس و روش تشریح شده در قضیه روش فروبنیوس نامیده می‌شود.

مثال: جواب عمومی معادله $2x^2y''+xy'-(x+1)y=0$ را به صورت سری حول $x=0$ بیابید.

حل:

$$p(x)=\frac{x}{2x^2}=\frac{1}{2x}, \qquad q(x)=\frac{-(x+1)}{2x^2}$$

$\Rightarrow$ در $x=0$ مخرج صفر است پس p و q در $x=0$ تحلیلی نیستند $\Rightarrow$ مبدأ نقطهٔ تکین معادله است

$$xp(x)=\frac{1}{2}, \qquad x^2q(x)=-\frac{(x+1)}{2}$$

$\Rightarrow$ هر دو در $x=0$ تحلیلی‌اند پس $x=0$ نقطهٔ تکین منظم معادله است.

$$p_0=\lim_{x\to 0} xp(x)=\frac{1}{2}, \qquad q_0=\lim_{x\to 0} x^2q(x)=-\frac{1}{2}$$

معادله شاخص

$$r^2+(p_0-1)r+q_0=0 \Rightarrow r^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)r-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0$$

$$\Rightarrow 2r^2-r-1=0 \Rightarrow r=\frac{1\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}$$

$r_1=1 \longrightarrow$ ریشه بزرگتر

$r_2=-\frac{1}{2} \longrightarrow$ ریشه کوچکتر

توجه کنید که $r_1-r_2=1-(-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}\notin\mathbb{Z}$ پس طبق قسمت (الف) از قضیهٔ اخیر داریم

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} \quad a_0\neq 0, \qquad y_2=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}$$

که برای یافتن a_nها و b_nها باید $y_1(x)$ و $y_2(x)$ را در معادله جاگذاری کنیم. حال چون قیافهٔ y_1 و y_2 هر دو به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ هستند پس برای پرهیز از دوباره‌کاری که بخواهیم یک بار y_1 و بار دیگر y_2 را جاگذاری کنیم از شکل کلی y استفاده کرده و فرمولی برای c_nها می‌یابیم. در این فرمول یک بار قرار می‌دهیم $r=r_1$ تا a_nها به دست آید و یک بار قرار می‌دهیم $r=r_2$ تا b_nها حاصل شوند.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \Longrightarrow y'=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)x^{n+r-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

با جاگذاری در معادله داریم:

$$2x^2y''+xy'-(x+1)y=0$$

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}+x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}-(x+1)\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r+1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

$$x^r\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\big[\underbrace{2(n+r)(n+r-1)+(n+r)-1}_{(n+r-1)(2n+2r+1)}\big]c_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}=0$$

با تقسیم دوطرف بر x^r داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(2n+2r+1)c_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}=0$$

در سری اول n را با $n+1$ جایگذاری میکنیم

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r)(2n+2r+3)c_{n+1}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}=0$$

$$(r-1)(2r+1)c_0\cancel{x^0}+\sum_{n=0}^{\infty}\big[(n+r)(2n+2r+3)c_{n+1}-c_n\big]x^{n+1}=0$$

معادله شاخص

$$\Rightarrow\begin{cases}(r-1)(2r+1)c_0=0 \xrightarrow{c_0\neq 0} \underbrace{r=1}_{r_1} \text{ یا } \underbrace{r=-\frac{1}{2}}_{r_2}\\ \boxed{(n+r)(2n+2r+3)c_{n+1}=c_n}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\text{if } r=r_1=1 \Rightarrow a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(n+\cancel{r})(2n+\cancel{2r}+3)}=\dfrac{a_n}{(n+1)(2n+5)} & n=0,1,2,\dots\\[2ex] \text{if } r=r_2=-\frac{1}{2} \Rightarrow b_{n+1}=\dfrac{b_n}{(n+\cancel{r})(2n+\cancel{2r}+3)}=\dfrac{b_n}{(n-\frac{1}{2})(2n+2)} & n=0,1,2,\dots\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1=\frac{1}{5}a_0,\ a_2=\frac{1}{70}a_0,\ \dots \Rightarrow y_1=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=x(a_0+\frac{1}{5}a_0x+\dots)\\ b_1=-b_0,\ b_2=-\frac{1}{2}b_0,\ \dots \Rightarrow y_2=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=x^{-\frac{1}{2}}(b_0-b_0x-\frac{1}{2}b_0x^2+\dots)\end{cases}$$

$$\text{if } a_0=1 \Rightarrow y_1=x(1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{70}x^2+\dots)$$

$$\text{if } b_0=1 \Rightarrow y_2=\frac{1}{\sqrt{x}}(1-x-\frac{1}{2}x^2+\dots)$$

$$\Rightarrow \boxed{y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)}$$

تمرین: جواب معادلات زیر را بصورت سری حول $x=0$ بیابید:

(41) $4xy''+2y'+y=0$

(42) $2xy''+(1+x)y+y=0$

مثال: جواب معادله $xy''+y'-4y=0$ را در مجاورت نقطه $x=0$ بیابید:

حل:

$p(x)=\frac{1}{x}$, $q(x)=-\frac{4}{x}$ $\Big\}$ p و q هیچ کدام در $x=0$ تحلیلی نیستند $\Rightarrow$ $x=0$ نقطه تکین معادله است

$xp(x)=1$, $x^2q(x)=-4x$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ هر دو در $x=0$ تحلیلی هستند $\Rightarrow$ $x=0$ نقطه تکین منظم معادلات است.

$p_0=\lim_{x\to 0} xp(x)=1$ $\quad$ $q_0=\lim_{x\to 0} x^2q(x)=0$ $\Rightarrow r^2+(p_0-1)r+q_0=0$

$r^2=0 \Rightarrow \boxed{r_1=r_2=0}$

از آنجا که $r_1-r_2=0$ پس حالت ب از قضیه روش فروبنیوس رخ می‌دهد.

$y_1(x)=x^{r}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad a_0\neq 0$

a_nها با جایگذاری y_1 در معادله بدست می‌آیند

$y_2(x)=y_1(x)\ln x+x^{r}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n \quad b_0\neq 0$

با استفاده از فرمول آبل و y_1 به دست می‌آید.

از آنجا که $r_1=0$ پس

$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \Rightarrow y_1'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$ و $y_1''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$

برای یافتن a_nها با جایگذاری در معادله $xy''+y'-4y=0$ داریم:

$$x\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}-4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-1+1)na_nx^{n-1}-4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^2a_nx^{n-1}-4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0 \Rightarrow \sum_{n=-1}^{\infty}(n+1)^2a_{n+1}x^n-4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$0+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2a_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}-4a_nx^n=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)^2a_{n+1}-4a_n\right]x^n=0$$

$$\Rightarrow (n+1)^2a_{n+1}-4a_n=0 \Rightarrow a_{n+1}=\frac{4}{(n+1)^2}a_n \qquad n=0,1,2,\dots$$

$n=0 \Rightarrow a_1=4a_0$

$n=1 \Rightarrow a_2=\frac{4}{(1+1)^2}a_1=4a_0$

$n=2 \Rightarrow a_3=\frac{16}{9}a_0 \;,\ \dots$

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots$$

$$=a_0+4a_0x+4a_0x^2+\frac{16}{9}a_0x^3+\dots$$

چون می‌دانیم $a_0 \neq 0$ ← $a_0=1$

$$=1+4x+4x^2+\frac{16}{9}x^3+\dots$$

$$\upsilon(x)=\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int P(x)dx}dx$$

حال که $y_1(x)$ به دست آمد باید $y_2(x)$ را از روی آن با استفاده از فرمول آبل $y_2(x)=y(x)\,\upsilon(x)$ محاسبه کنیم

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int P(x)dx}dx$$

اول از همه y_1^2 را حساب کنیم

$$y_1^2(x)=y_1\cdot y_1=(1+4x+4x^2+\dots)(1+4x+4x^2+\dots)$$

$$=1+(4x+4x)+(4x^2+16x^2+4x^2)+\dots$$

$$=1+8x+24x^2+\dots$$

$$\frac{1}{y_1^2}=\frac{1}{1+8x+24x^2+\dots}=K_0+K_1x+K_2x^2+\dots$$

در $x=0$ تحلیلی است
پس می‌توان آن را به صورت
سری در نظر گرفت.

$$\Rightarrow 1=(1+8x+24x^2+\dots)(K_0+K_1x+K_2x^2+\dots)$$

$$=K_0+(K_1+8K_0)x+(K_2+8K_1+24K_0)x^2+\dots$$

$$\Rightarrow K_0=1 \qquad K_1+8K_0=0 \Rightarrow K_1=-8$$

$$K_2+8K_1+24K_0=0 \Rightarrow K_2=40$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{y_1^2(x)} = 1-8x+40x^2+\dots$$

$$e^{-\ln x} \to e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}$$

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int P(x)\,dx} = y_1(x)\int \left(1-8x+40x^2+\dots\right) e^{-\int \frac{1}{x}dx}\, dx$$

$$= y_1(x)\int \frac{1}{x} - 8 + 40x + \dots \; dx$$

$$= y_1(x)\left(\ln x - 8x + 20x^2 + \dots\right)$$

$$\Longrightarrow y_2(x) = y_1(x)\ln x + \underbrace{y_1(x)\left(-8x+20x^2+\dots\right)}$$

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

تمرین: جواب معادله‌های زیر را در مجاورت نقطهٔ $x=0$ بیابید.

(43) $xy''+y'+xy=0$

مثال: جواب معادلهٔ $xy''+3y'-y=0$ را حول $x=0$ بیابید.

$P(x)=\frac{3}{x}$

$q(x)=-\frac{1}{x}$

$P(x), q(x)$ در $x=0$ تحلیلی نیستند و بنابراین $\Longrightarrow$ $x=0$ یک نقطهٔ تکین معادله است.

$xP(x)=3$

$x^2q(x)=-x$

$\Longrightarrow$ هر دو در $x=0$ تحلیلی‌اند $\Longrightarrow$ $x=0$ نقطهٔ تکین منظم معادله است.

$$P_0=\lim_{x\to 0} xP(x)=3 \quad , \quad q_0=\lim_{x\to 0} x^2q(x)=0$$

پس معادلهٔ شاخص به صورت $r^2+(P_0-1)r+q_0 = r^2+2r=0$ است پس

$r_1=0 \; , \; r_2=-2 \quad , \quad r_1-r_2 = 0-(-2)=2\in \mathbb{N}$

پس حالت چ) قضیهٔ روش فروبنیوس رخ می‌دهد.

$$y_1(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad a_0\neq 0 \longrightarrow$$ با جاگذاری y_1 در معادله a_n ها به دست می‌آیند.

$$y_2(x)=c\,y_1(x)\ln x + x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \longrightarrow$$ y_2 را با استفاده از فرمول آبل و از روی y_1 به دست می‌آوریم.

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \Rightarrow y_1'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}, \quad y_1''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

با جایگذاری در معادله $xy''+3y'-y=0$ داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}+3\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-1+3)na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+3)(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$0+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+3)(n+1)a_{n+1}-a_n\right]x^n=0 \Rightarrow a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+1)(n+3)} \quad n\geq 0$$

$n=0 \Rightarrow a_1=\frac{a_0}{3}$

$n=1 \Rightarrow a_2=\frac{a_1}{8}=\frac{a_0}{24}$

$n=2 \Rightarrow a_3=\frac{1}{360}a_0$

$$\Rightarrow y_1(x)=a_0+\frac{a_0}{3}x+\frac{a_0}{24}x^2+\frac{a_0}{360}x^3+\dots$$

$$\xRightarrow{a_0=1} y_1(x)=1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{24}x^2+\frac{1}{360}x^3+\dots$$

حال از روی $y_1(x)$ و با استفاده از فرمول آبل $y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}dx$ تابع y_2 را حساب می‌کنیم.

$$y_1^2=y_1\cdot y_1=\left(1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{24}x^2+\dots\right)\left(1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{24}x^2+\dots\right)$$

$$=1+\frac{2}{3}x+\frac{7}{36}x^2+\dots$$

$$\frac{1}{y_1^2}=\frac{1}{1+\frac{2}{3}x+\frac{7}{36}x^2+\dots}=K_0+K_1x+K_2x^2+\dots$$

در $x=0$ تحلیلی است

پس می‌توان آن را به صورت سری در نظر گرفت

$$\Rightarrow 1=\left(1+\frac{2}{3}x+\frac{7}{36}x^2+\dots\right)\left(K_0+K_1x+K_2x^2+\dots\right)$$

$$=K_0+\left(K_1+\frac{2}{3}K_0\right)x+\left(K_2+\frac{2}{3}K_1+\frac{7}{36}K_0\right)x^2+\dots$$

$$\begin{cases} K_0=1 \\ K_1+\frac{2}{3}K_0=0 \Rightarrow K_1=-\frac{2}{3} \\ K_2+\frac{2}{3}K_1+\frac{7}{36}K_0=0 \Rightarrow K_2=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\frac{1}{y_1^2} = 1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2 + \dots$$

با جایگذاری در فرمول آبل داریم

$$e^{-3\ln x} = e^{\ln x^{-3}} = \frac{1}{x^3}$$

$$y_2(x) = y_1(x)\int \left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2 + \dots\right) e^{-\int \frac{3}{x}dx}\, dx$$

$$= y_1(x)\int \left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2 + \dots\right)\frac{1}{x^3}\, dx$$

$$= y_1(x)\int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{3}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{x} + \dots\right) dx$$

$$= y_1(x)\left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{x} + \frac{1}{4}\ln x + \dots\right.$$

$$= \frac{1}{4}y_1(x)\ln x + y_1(x)\,x^{-2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}x + \dots\right)$$

$$\Rightarrow y_2(x) = \overset{c}{\frac{1}{4}}\, y_1(x)\ln x + \underset{x^{r_2}}{x^{-2}}\, y_1(x)\left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}x + \dots\right)$$

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

تذکر: اگر در یک حالت پس از یافتن y_1 به اینجا رسیدیم

$$\frac{1}{y_1^2} = \underbrace{\frac{1}{x + \frac{1}{2}x^2 - 5x^3 + \dots}}_{\text{در } x=0 \text{ تحلیلی نیست}} = \underbrace{\frac{1}{x\left(1 + \frac{1}{2}x - 5x^2 + \dots\right)}}_{\text{تحلیلی است}} = \frac{1}{x}\left(K_0 + K_1 x + \dots\right)$$

و حال ادامه می دهیم

تمرین: جواب معادلات زیر را حول $x=0$ بیابید.

44) $x^2 y'' + x(x-4)y' + 2y = 0$

45) $x^2 y'' - (x+2)y = 0$

معادله بسل:

تعریف: معادله $\boxed{x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0}$ را که در آن $p\geq 0$ (p یک عدد ثابت است) را معادله بسل مرتبه p می نامیم.

$$p(x)=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$$

$$q(x)=\frac{x^2-p^2}{x^2}$$

$\Longrightarrow$ $x=0$ یک نقطه تکین معادله است.

$$xp(x)=1$$

$$x^2q(x)=x^2-p^2$$

$\Longrightarrow$ $x=0$ یک نقطه تکین منظم معادله بسل است.

$$\lim_{x\to 0} xp(x)=1$$

$$\lim_{x\to 0} x^2q(x)=-p^2$$

پس معادله شاخص بصورت $r^2+(p_0-1)r+q_0=0 \Rightarrow r^2-p^2=0 \Rightarrow r=\pm p$ است

پس $r_1=p$ و $r_2=-p$ و بنابراین $r_1-r_2=2p$ پس بر حسب مقادیر مختلف p و روش فروبنیوس حالات زیر را خواهیم داشت:

حالت اول: اگر $p\notin\mathbb{Z}$ (یعنی p عدد صحیح نباشد) آنگاه

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}=J_p(x)$$

$J_p(x)$ تابع بسل نوع اول از مرتبه p نامیده می شود

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}=J_{-p}(x)$$

حالت دوم: اگر $p=0$، آنگاه $y_1(x)=J_0(x)$ که $J_0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$ و

$$y_2(x)=y_1(x)\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

که $y_2(x)$ با استفاده از فرمول آبل و از روی $y_1(x)$ به دست می آید.

حالت سوم: اگر $p\in\mathbb{N}$ (p عدد طبیعی باشد) آنگاه

$$y_1(x)=J_p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

و

$$y_2(x)=c\,y_1(x)\ln x+x^{-p}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

که اینجا نیز $y_2(x)$ با استفاده از فرمول آبل و از روی $y_1(x)$ به دست می آید.

تعریف: (تابع بسل نوع اول مرتبهٔ p): برای $x>0$ و $p\geq 0$ تابع

$$J_p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

را تابع بسل نوع اول از مرتبهٔ p می‌نامیم.

نکات:

1) $\Gamma(n+1)=n! \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) $J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\frac{x^{2n}}{4^n}=1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}-\cdots$

$J_0(x)$ تابعی زوج است و رفتاری شبیه به $\cos x$ دارد.

3) $J_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$

$=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{16}+\frac{x^5}{384}-\cdots$

$J_1(x)$ تابعی فرد است و رفتاری شبیه به $\sin x$ دارد.

تعریف (تابع بسل نوع دوم از مرتبهٔ p): به هر جواب از معادلهٔ بسل که با جواب $y_1(x)=J_p(x)$ مستقل خطی باشد را تابع بسل نوع دوم از مرتبهٔ p می‌نامند و آن را با $Y_p(x)$ نمایش می‌دهیم.

بنابراین برای هر $p\geq 0$ جواب عمومی معادلهٔ بسل ① به صورت

$$y(x)=c_1J_p(x)+c_2Y_p(x)$$

در می‌آید که $Y_p(x)$ همان $y_2(x)$ معرفی شده در سه حالت قبل است.

مثال: جواب عمومی معادلهٔ $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0$ را به دست آورید.

حل: در می‌یابیم که $p^2=\frac{1}{4}$ بنابراین $p=\pm\frac{1}{2}$ چون $p\geq 0$ پس $p=\frac{1}{2}$

حال چون $p=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$ پس حالت اول رخ می‌دهد بنابراین

$y_1(x)=J_p(x)$

$y_2(x)=J_{-p}(x)\quad\Longrightarrow\quad y(x)=c_1J_{\frac{1}{2}}(x)+c_2J_{-\frac{1}{2}}(x)$

بس

$$y(x)=c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}}+c_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\frac{1}{2}}$$

مثال: مطلوب است جواب عمومی معادله $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{25}{9})y=0$ $(x>0)$

حل: معادله بسل از مرتبه $p=\frac{5}{3}\notin\mathbb{Z}$. پس بنابر حالت اول

$$y_1(x)=J_{\frac{5}{3}}(x)$$
$$y_2(x)=J_{-\frac{5}{3}}(x)$$
$$\Rightarrow y(x)=C_1y_1+C_2y_2=\cdots$$

مثال: جواب عمومی معادله $xy''+y'+xy=0$ را برای $x>0$ حل کنید.

با اندکی تأمل در می‌یابیم که با ضرب دو طرف معادله در x به یک معادله بسل مرتبه $p=0$ می‌رسیم.

$$x^2y''+xy'+x^2y=0$$

بنابراین طبق حالت دوم داریم: $y_1(x)=J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}+\cdots$

و $y_2(x)=y_1(x)\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ که برای یافتن آن از فرمول آبل

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx$$

استفاده می‌کنیم

$$y_1^2(x)=y_1(x)\cdot y_1(x)=\left(1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}+\cdots\right)\left(1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}+\cdots\right)$$
$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{32}x^4-\cdots$$

$$\frac{1}{y_1^2}=\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{32}x^4-\cdots}=k_0+k_1x+k_2x^2+\cdots$$

در $x=0$ تحلیلی است

$$\Rightarrow 1=\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{32}x^4-\cdots\right)\left(k_0+k_1x+k_2x^2+\cdots\right)$$
$$=k_0+k_1x+\left(k_2-\frac{1}{2}\right)x^2+\cdots$$
$$\Rightarrow k_0=1,\ k_1=0,\ k_2=\frac{1}{2},\ k_3=0,\ k_4=\frac{5}{32}$$

$$\frac{1}{y_1^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{32}x^4 \qquad e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y_2(x) = y_1(x)\int \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{32}x^4 + \dots\right) e^{-\int \frac{1}{x}dx}\, dx$$

$$= y_1(x)\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{32}x^3 + \dots\right) dx$$

$$= y_1(x)\ln x + y_1(x)\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{128}x^4 + \dots\right)$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

معادله بسل پارامتری: معادله $x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - p^2)y = 0$ را معادله بسل پارامتری گوئیم

زیر با تغییر متغیر $t = \lambda x$ به معادله

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - p^2)y = 0$$

تبدیل می‌شود که یک معادله بسل مرتبه p با متغیر مستقل t و تابع مجهول $y(t)$ است که می‌توان آن را بررسی کرد

مثال: جواب عمومی معادله $9x^2y'' + 9xy' + 4(9x^2 - 1)y = 0$ را بیابید.

حل: با تقسیم دو طرف معادله بر 9 معادله به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$x^2y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{4}{9}\right)y = 0$$

در می‌یابیم که معادله یک معادله بسل پارامتری با $\lambda^2 = 4$, $p^2 = \frac{4}{9}$ است

$\lambda = 2$ $\quad$ $p = \frac{2}{3}$

با تغییر متغیر $t = \lambda x = 2x$ به معادله بسل زیر می‌رسیم

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + \left(t^2 - \frac{4}{9}\right)y = 0 \Rightarrow p = \frac{2}{3}$$ معادله بسل مرتبه $\frac{2}{3}$ و $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$

پس نیاز به حالت اول داریم:

$$y(t) = c_1 J_{\frac{2}{3}}(t) + c_2 J_{-\frac{2}{3}}(t)$$

اما از آنجا که $t = 2x$ پس

$$y(x) = c_1 J_{\frac{2}{3}}(2x) + c_2 J_{-\frac{2}{3}}(2x) = \dots$$

مثال: جواب عمومی معادله $4x^2y''+4xy'+(8x^2-1)y=0$ را بیابید.

حل: دو طرف معادله را بر ۴ تقسیم می‌کنیم:

$$x^2y''+xy'+(\underbrace{2}_{\lambda^2}x^2-\underbrace{\tfrac{1}{4}}_{p^2})y=0 \Rightarrow \begin{array}{l} p=\frac{1}{2} \\ \lambda=\sqrt{2} \end{array}$$ بسل پارامتری

با تغییر متغیر $t=\sqrt{2}x$ داریم

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+(t^2-\tfrac{1}{4})y=0 \Rightarrow \tfrac{1}{2}\text{ بسل مرتبه} \Rightarrow \text{حالت اول}$$

$$y(t)=c_1J_{\frac{1}{2}}(t)+c_2J_{-\frac{1}{2}}(t) \xrightarrow{t=\sqrt{2}x} y(x)=c_1J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}x)+c_2J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{2}x)$$

نکته: ~~در~~ برخی موارد با یک تغییر متغیر مناسب می‌توان یک معادله را به معادله بسل تبدیل کرد. به مثال های زیر توجه کنید:

مثال: با استفاده از تغییر متغیر $z=\sqrt{x}$، معادله زیر را به یک معادله بسل تبدیل کرده و سپس آن را حل کنید:

$$4x^2y''+4xy'+(x-\tfrac{9}{4})y=0$$

حل: در y' و y'' مشتقات نسبت به x محاسبه شده اند، پس باید آن‌ها را برحسب $z=\sqrt{x}$ محاسبه کنیم.

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2z}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{1}{2z} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{1}{2z}\frac{dy}{dz}}$$

$$y''=\frac{d}{dx}(y')=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2z}\frac{dy}{dz}\right)=\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2z}\frac{dy}{dz}\right)\cdot\cancel{\frac{dz}{dx}}\ \frac{1}{2z}$$

$$=\left(-\frac{1}{2z^2}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{2z}\frac{d^2y}{dz^2}\right)\frac{1}{2z}$$

$$=\boxed{-\frac{1}{4z^3}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{4z^2}\frac{d^2y}{dz^2}}$$

حال با جاگذاری y' و y'' در معادله داریم:

$$4z^4\left(-\frac{1}{4z^3}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{4z^2}\frac{d^2y}{dz^2}\right)+4z^2\left(\frac{1}{2z}\frac{dy}{dz}\right)+\left(z^2-\frac{9}{4}\right)y=0$$

$$\Rightarrow z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+\left(z^2-\frac{9}{4}\right)y=0 \Longrightarrow$$ بسل مرتبهٔ $\frac{3}{2}$

بنابراین

$$y(z)=c_1J_{\frac{3}{2}}(z)+c_2J_{-\frac{3}{2}}(z)$$

اما از آنجا که $z=\sqrt{x}$ است

$$y(x)=c_1J_{\frac{3}{2}}(\sqrt{x})+c_2J_{-\frac{3}{2}}(\sqrt{x})$$

مثال: با استفاده از تغییر متغیر $x=t^3$، جواب عمومی معادلهٔ $9x^2y''+9xy'+(x^{\frac{2}{3}}-4)y=0$ را بدست آورید.

حل:

$$x=t^3 \Rightarrow dx=3t^2dt \Rightarrow \boxed{\frac{dt}{dx}=\frac{1}{3t^2}}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{3t^2}$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{3t^2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{3t^2}\right)\cdot\cancel{\frac{dt}{dx}}^{\frac{1}{3t^2}}$$

$$=\left[\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{3t^2}+\frac{dy}{dt}\left(-\frac{2}{3t^3}\right)\right]\frac{1}{3t^2}$$

$$=\frac{1}{9t^4}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{2}{9}\frac{1}{t^5}\frac{dy}{dt}$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$9t^6\left(\frac{1}{9t^4}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{2}{9}\frac{1}{t^5}\frac{dy}{dt}\right)+9t^3\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{3t^2}\right)+(t^2-4)y=0$$

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+(t^2-2)y=0 \Rightarrow p=\sqrt{2}\notin\mathbb{Z}$$

معادله بسل از مرتبه $\sqrt{2}$.

پس حالت اول رخ می‌دهد. بنابراین

$$y(t)=c_1J_{\sqrt{2}}(t)+c_2J_{-\sqrt{2}}(t) \xRightarrow{t=\sqrt[3]{x}} y(x)=c_1J_{\sqrt{2}}(\sqrt[3]{x})+c_2J_{-\sqrt{2}}(\sqrt[3]{x})$$

مثال: با استفاده از تغییر متغیر $t=e^x$ معادله $y''+(e^{2x}-\frac{1}{4})y=0$ را حل کنید.

$$t=e^x \Rightarrow dt=e^x dx \Rightarrow \frac{dt}{dx}=e^x=t \Rightarrow \frac{dt}{dx}=t$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=t\frac{dy}{dt}$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(t\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(t\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\left(\frac{dy}{dt}+t\frac{d^2y}{dt^2}\right)t=t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}$$

حال با جاگذاری در معادله داریم:

$$t^2\frac{d^2y}{dt}+\frac{t\,dy}{dt}+(t^2-\frac{1}{4})y=0 \Longrightarrow p=\frac{1}{2}\in\mathbb{Z}$$

بسل مرتبه $\frac{1}{2}$

$$y(t)=c_1J_{-\frac{1}{2}}(t)+c_2J_{\frac{1}{2}}(t) \xRightarrow{t=e^x}$$

$$\Rightarrow y(x)=c_1J_{-\frac{1}{2}}(e^x)+c_2J_{\frac{1}{2}}(e^x).$$

تمرین ۴۶ با استفاده از تغییر متغیر $t=4\sqrt{x}$ معادله $x^2y''+4xy'+(4x-\frac{9}{64})y=0$ را حل کنید.

فصل ۶: دستگاههای معادلات دیفرانسیل:

در این فصل به دو روش لاپلاس و حذفی به حل دستگاههای معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم. این روشها را با مثال توضیح می‌دهیم.

مثال: دستگاه زیر را با روش لاپلاس حل کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y + e^t \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 3y \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 0$$

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y + e^t \\ y' = 5x - 3y \end{cases} \xrightarrow[\text{دو معادله لاپلاس می‌گیریم}]{\text{از دو طرف}} \begin{cases} L[x'] = 3L[x] - 2L[y] + L[e^t] \\ L[y'] = 5L[x] - 3L[y] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sL[x] - x(0) - 3L[x] + 2L[y] = \dfrac{1}{s-1} \\ sL[y] - y(0) - 5L[x] + 3L[y] = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (s-3)L[x] + 2L[y] = \dfrac{1}{s-1} \\ (s+3)L[y] - 5L[x] = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

با استفاده از روش کرامر $L[x]$ و $L[y]$ را بدست می‌آوریم

$$L[x] = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s-1} & 2 \\ 0 & s+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-3 & 2 \\ -5 & s+3 \end{vmatrix}} = \frac{(s+3)}{(s-1)(s^2+1)} \Rightarrow x(t) = L^{-1}\left[\frac{s+3}{(s-1)(s^2+1)}\right]$$

$$L[y] = \frac{\begin{vmatrix} s-3 & \frac{1}{s-1} \\ -5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-3 & 2 \\ -5 & s+3 \end{vmatrix}} = \frac{5}{(s-1)(s^2+1)} \Rightarrow y(t) = L^{-1}\left[\frac{5}{(s-1)(s^2+1)}\right]$$

$$\frac{s+3}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{\overset{2}{A}}{s-1} + \frac{\overset{-2}{B}s + \overset{-1}{C}}{s^2+1} \xrightarrow{s=0} -3 = -2 + C \Rightarrow C = -1$$

حال دو طرف را در s ضرب کرده و $s \to \infty$ $\quad (0 = 2 + B \Rightarrow B = -2)$

$$x(t) = L^{-1}\left[\frac{2}{s-1} - \frac{2s+1}{s^2+1}\right] = 2L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - 2L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = 2e^t - 2\cos t - \sin t$$

$$\frac{5}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{\overset{5/2}{A}}{s-1} + \frac{\overset{-5/2}{B}s + \overset{-5/2}{C}}{s^2+1} \xrightarrow{s=0} \frac{5}{-1} = -\frac{5}{2} + C \Rightarrow \boxed{C = -\frac{5}{2}}$$

$$y(t) = \frac{5}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{s+1}{s^2+1}\right] = \frac{5}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \frac{5}{2}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] - \frac{5}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$= \frac{5}{2}e^t - \frac{5}{2}\cos t - \frac{5}{2}\sin t$$

مثال: دستگاه زیر را به روش لاپلاس حل کنید.

$$\begin{cases} x'(t)+2x(t)+6\int_0^t y(\tau)\,d\tau = -2u_0(t) \\ x'(t)+y'(t)+y(t)=0 \end{cases}$$

$x(0)=-5 \quad , y(0)=6$

حل: از دو طرف هر دو معادله لاپلاس می‌گیریم.

$$\begin{cases} L[x']+2L[x]+6L\left[\int_0^t y(\tau)\,d\tau\right] = -2L[u_0(t)] \\ L[x']+L[y']+L[y]=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sL[x]-x(0)+2L[x]+\frac{6}{s}L[y] = -\frac{2}{s} \\ sL[x]-x(0)+sL[y]-y(0)+L[y]=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s+2)L[x]+\frac{6}{s}L[y] = -\frac{2}{s}-5 \\ sL[x]+(s+1)L[y]=1 \end{cases}$$

معادلهٔ اول را در s ضرب می‌کنیم

$$\Rightarrow \begin{cases} s(s+2)L[x]+6L[y]=-2-5s \\ sL[x]+(s+1)L[y]=0 \end{cases}$$

از روش کرامر $L[x]$ و $L[y]$ را می‌یابیم

$$L[x]=\frac{\begin{vmatrix} -2-5s & 6 \\ 1 & s+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s(s+2) & 6 \\ s & s+1 \end{vmatrix}} = \frac{-5s^2-7s-8}{s^3+3s^2-4s} = \frac{-5s^2-7s-8}{s(s+4)(s-1)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x(t)=L^{-1}\left[\frac{-5s^2-7s-8}{s(s+4)(s-1)}\right] = 2L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-3L^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right]-4L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]$$

$$= 2-3e^{-4t}-4e^{t} = x(t)$$

$$\frac{-5s^2-7s-8}{s(s+4)(s-1)} = \frac{\overset{2}{A}}{s}+\frac{\overset{-3}{B}}{s+4}+\frac{\overset{-4}{C}}{s-1}$$

$$L[y]=\frac{\begin{vmatrix} s(s+2) & -2-5s \\ s & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s(s+2) & 6 \\ s & s+1 \end{vmatrix}} = \frac{6s^2+4s}{s^3+3s^2-4s} = \frac{2s(3s+2)}{s(s+4)(s-1)} \Rightarrow$$

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{2(3s+2)}{(s+4)(s-1)}\right] = 4L^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right]+2L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] = 4e^{-4t}+2e^{t}=y(t)$$

$$\frac{2(3s+2)}{(s+4)(s-1)} = \frac{\overset{4}{A}}{s+4}+\frac{\overset{2}{B}}{s-1}$$

تمرین: دستگاه‌های زیر را با استفاده از لاپلاس حل کنید.

(۴۷)
$$\begin{cases} x'(t)+x(t)-y(t)=1 \\ x(t)-y(t)+2\int_0^t y(\tau)\,d\tau=0 \end{cases}$$
$x(0)=y(0)=0$

(۴۸)
$$\begin{cases} y''(t)-4x(t)=-4e^{t} \\ x''(t)-x(t)=3y(t) \end{cases}$$
$x(0)=2 \,,\, x'(0)=3 \quad y(0)=1 \,,\, y'(0)=2$

مثال: دستگاه زیر را به روش حذفی حل کنید.

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = 5x(t) - 3y(t) \end{cases}$$

حل: دستگاه را به شکل عملگری می نویسیم یعنی قرار می دهیم $D=\frac{d}{dt}$ ، $D^2=\frac{d^2}{dt^2}$ و ... سپس

$$\begin{cases} Dx = 3x - 2y \\ Dy = 5x - 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Dx - 3x + 2y = 0 \\ Dy + 3y - 5x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (D-3)x + 2y = 0 \\ -5x + (D+3)y = 0 \end{cases}$$

برای اینکه y را از دستگاه حذف کنیم معادلهٔ اول را در $(D+3)$ و معادلهٔ دوم را در -2 ضرب می کنیم داریم

$$\begin{cases} (D+3)(D-3)x + 2(D+3)y = 0 \\ 10x - 2(D+3)y = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{می کنیم}]{\text{دو معادله را جمع}} (D+3)(D-3)x + 10x = 0$$

$$\Rightarrow (D^2-9)x + 10x = 0$$

$$D^2x - 9x + 10x = 0$$

$$x''(t) + x(t) = 0 \rightarrow$$ حال این معادله را حل می کنیم.

معادلهٔ $x''(t) + x(t) = 0$ یک معادله مرتبه ۲ با ضرایب ثابت است. برای حل آن معادلهٔ مشخصه را می نویسیم

$$r^2+1=0 \Rightarrow r=\pm i \Rightarrow x_1(t) = \cos t, \; x_2(t) = \sin t$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t}$$

حال معادلهٔ اول دستگاه را در نظر می گیریم

$$x' = 3x - 2y \Rightarrow y(t) = \frac{3x(t) - x'(t)}{2} =$$

$$= \frac{3(c_1\cos t + c_2\sin t) - (-c_1\sin t + c_2\cos t)}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{(3c_1 - c_2)\cos t + (c_1 + 3c_2)\sin t}{2}}$$

مثال: دستگاه زیر را به روش حذفی حل کنید

$$\begin{cases} x' + y' + 5x + 3y = e^{-t} \\ 2x' + y' + x + y = 3 \end{cases}$$

ابتدا دستگاه را به صورت عملگری می نویسیم یعنی قرار می دهیم

$$\frac{d}{dt} = D, \; \frac{d^2}{dt^2} = D^2, \; \dots$$

$$\begin{cases} Dx + Dy + 5x + 3y = e^{-t} \\ 2Dx + Dy + x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (D+5)x + (D+3)y = e^{-t} \\ (2D+1)x + (D+1)y = 3 \end{cases}$$

برای اینکه بتوانیم y را از دستگاه اخیر حذف کنیم معادله اول را در $-(D+1)$ و معادله دوم را در $(D+3)$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{cases} -(D+1)(D+5)x - (D+1)(D+3)y = -(D+1)e^{-t} \\ (D+3)(2D+1)x + (D+1)(D+3)y = (D+3)3 \end{cases}$$

حال دو معادله را با هم جمع می‌کنیم:

$$-(D+1)(D+5)x + (D+3)(2D+1)x = -(D+1)e^{-t} + (D+3)3$$

$$\Rightarrow (-D^2-6D-5)x + (2D^2+7D+3)x = -\underset{\frac{d}{dt}}{D}e^{-t} - e^{-t} + \underset{\frac{d}{dt}}{D}3 + 9$$

$$\Rightarrow D^2x + Dx - 2x = \cancel{-(-e^{-t}) - e^{-t}} + 0 + 9 \Rightarrow \boxed{x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 9}$$

ابتدا معادله همگن را در نظر می‌گیریم: $x'' + x' - 2x = 0 \Rightarrow$ معادله مشخصه $r^2 + r - 2 = 0$

$$\Rightarrow (r+2)(r-1) = 0 \Rightarrow r_1 = -2,\ r_2 = 1 \Rightarrow x_g(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t}$$

حال برای یافتن یک جواب خصوصی از $x'' + x' - 2x = 9$ از روش ضرائب نامعین استفاده می‌کنیم

$$x_p(t) = A t^{(r)}$$

r: تعداد تکرارهای صفر به عنوان ریشه مشخصه

$x_p = A \qquad x_p' = 0 \ , \ x_p'' = 0$

جاگذاری در معادله

$$0 + 0 - 2A = 9 \Rightarrow A = -\frac{9}{2}$$

یعنی $x_p(t) = -\frac{9}{2}$ بنابراین

$$x(t) = \underbrace{c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t}}_{x_g} \underbrace{- \frac{9}{2}}_{x_p}$$

حال به دستگاه باز می‌گردیم

$$\begin{cases} x' + y' + 5x + 3y = e^{-t} \\ 2x' + y' + x + y = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله اول} - \text{معادله دوم}} -x' + 4x + 2y = e^{-t} - 3$$

$$\Rightarrow y = \frac{x' - 4x + e^{-t} - 3}{2} = \frac{-2c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t} - 4\left(c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t} - \frac{9}{2}\right) + e^{-t} - 3}{2}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}\left(-6c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{t} + e^{-t} + 15\right)$$

تمرین: دستگاه‌های زیر را با روش حذفی حل کنید.

(49) $\begin{cases} 3x' + y' - 4x - y = e^{t} \\ x' + 2x + y = 0 \end{cases}$

(50) $\begin{cases} x' = 3x - 2y + e^{t} \\ y' = 5x - 3y \end{cases}$

پایان درس معادلات