جزوه درسی
نظریه معادلات دیفرانسیل عادی

دکتر رسول کاظمی (هیئت علمی دانشگاه کاشان)

دکتر رسول عاشقی (هیئت علمی دانشگاه صنعتی اصفهان)

نسخه مهرماه سال ۱۴۰۲

فهرست مطالب

فصل ۱
مروری بر مفاهیم جبرخطی

بسیاری از معادلات حاکم بر پدیده‌های فیزیکی، منجر به دستگاهی از معادلات جبری خطی با تعداد مجهولات بسیار زیاد می‌شوند که حل آنها معمولاً به روش‌های ماتریسی نیازمند است. در این درس هم با چنین دستگاه‌هایی زیاد برخورد خواهیم داشت که یکی از مباحث مورد نیاز برای حل آنها، مبحث مقدار ویژه و بردار ویژه است. در این فصل، این مبحث و مباحث دیگری از جبرخطی که به آن‌ها نیاز خواهیم داشت را مرور می‌کنیم.

۱.۱ مقدار ویژه و بردار ویژه

تعریف ۱.۱. فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد. بردار ناصفر $X \in \mathbb{R}^n$ را یک بردار ویژه برای ماتریس A می‌نامیم، هرگاه اسکالر λ چنان یافت شود که $AX = \lambda X$. در این صورت، λ را یک مقدار ویژه و X را یک بردار ویژه نظیر λ (یا متناظر با λ) برای A می‌نامیم.

برای یافتن مقادیر ویژه ماتریس A از تعریف آن، یعنی $AX = \lambda X$ استفاده می‌کنیم. به این صورت که

$$AX = \lambda X \Longrightarrow AX = \lambda IX \Longrightarrow AX - \lambda IX = \circ \Longrightarrow (A - \lambda I)X = \circ.$$

برای اینکه این معادله جواب غیربدیهی (یعنی جواب ناصفر) داشته باشد، ماتریس ضرایب

یعنی $A-\lambda I$ نباید وارون‌پذیر باشد، پس باید $\det(A-\lambda I) = ۰$. بنابراین، مقادیر ویژه ماتریس A از حل این معادلهٔ جبری به‌دست می‌آیند.

تعریف ۲.۱. برای یک ماتریس حقیقی $n \times n$ نظیر A، عبارت $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n است که آن را چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس A می‌نامیم. ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

تعریف ۳.۱. مجموعه‌ی تمام جواب‌های دستگاه $(A - \lambda I)X = ۰$، یعنی فضای پوچ ماتریس $A - \lambda I$ که یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$ است، را فضای ویژه نظیر λ می‌نامیم. هر بردار ناصفر در فضای ویژهٔ λ در واقع یک بردار ویژه نظیر λ برای ماتریس A است.

مثال ۴.۱. مقادیر ویژه و فضاهای ویژه نظیر به آنها را برای ماتریس‌های داده شده بیابید.

۱. $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$

حل. مقادیر ویژه‌ی A عبارت‌اند از:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} ۱ - \lambda & ۲ \\ ۲ & ۱ - \lambda \end{vmatrix} = (۱ - \lambda)^۲ - ۴ = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_۱ = ۳ \\ \lambda_۲ = -۱ \end{cases}$$

برای محاسبه بردار ویژه نظیر $\lambda_۱ = ۳$ دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$(A - ۳I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۲ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} -۲x + ۲y = ۰ \\ ۲x - ۲y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow x = y \Longrightarrow X^{(۱)} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}.$$

بنابراین، فضای ویژه نظیر $\lambda_۱$ برابر با $\left\langle \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \right\rangle$ است.

به همین صورت برای $\lambda_۲ = -۱$ خواهیم داشت:

$$(A + I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} ۲x + ۲y = ۰ \\ ۲x + ۲y = ۰ \end{cases} \Longrightarrow y = -x \Longrightarrow X^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}.$$

پس فضای ویژه نظیر $\lambda_۲$ برابر است با $\left\langle \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \right\rangle$. ■

۲. $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$

حل. مقادیر ویژه‌ی A عبارت‌اند از:

$$det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} ۲-\lambda & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۳-\lambda & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۳-\lambda \end{vmatrix}=(۲-\lambda)\big((۳-\lambda)^۲-۱\big)=۰\Longrightarrow\begin{cases}\lambda_{۱,۲}=۲\\ \lambda_۳=۴\end{cases}$$

برای محاسبه‌ی بردار ویژه نظیر $\lambda_{۱,۲}=۲$ داریم:

$$(A-۲I)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=۰\Longrightarrow\begin{cases}-x+y+z=۰\\ -x+y+z=۰\end{cases}\Longrightarrow z=x-y.$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\x-y\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}۱\\۰\\۱\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}۰\\۱\\-۱\end{bmatrix}.$$

بنابراین، بردارهای ویژه نظیر $\lambda_{۱,۲}$ برابر با $X^{(۱)}=[۱,۰,۱]^T$ و $X^{(۲)}=[۰,۱,-۱]^T$ خواهند بود. در نتیجه، فضای ویژه متناظر با این مقدار، برابر $\langle[۱,۰,۱]^T,[۰,۱,-۱]^T\rangle$ می‌باشد.

به نحو مشابه، برای $\lambda_۳=۴$ داریم:

$$(A-۴I)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ -۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=۰\Longrightarrow\begin{cases}x=۰\\ y=z\end{cases}\Longrightarrow X^{(۳)}=\begin{bmatrix}۰\\۱\\۱\end{bmatrix}.$$

در نتیجه، فضای ویژه نظیر $\lambda_۳$ برابر با $\langle[۰,۱,۱]^T\rangle$ می‌باشد. ■

ملاحظه ۵.۱. *در مثال اخیر اتفاق جالبی رخ داد. $\lambda=۲$ ریشهٔ تکراری چندجمله‌ای مشخصه با مرتبه تکرار دو بود و نظیر آن دو بردار ویژه مستقل خطی یافتیم.*

سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا همیشه این چنین است؟ یعنی اگر λ یک مقدار ویژه تکراری با تکرار جبری k برای ماتریس A باشد، آنگاه نظیر λ، k بردار ویژه مستقل خطی وجود دارد؟ پاسخ منفی است. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۶.۱. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه نظیر را برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ بیابید.

حل.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda & 0\\ 1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)^2=0 \Longrightarrow \lambda_{1,2}=4.$$

بردار ویژه نظیر به این مقادیر از حل دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$(A-4I)\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=0 \Longrightarrow x=0 \Longrightarrow X^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}.$$

مشاهده می‌شود که تنها یک بردار ویژه مستقل خطی وجود دارد علیرغم اینکه تکرار جبری برابر ۲ است. ■

تعریف ۷.۱. (تکرار جبری و هندسی) فرض کنید λ یک مقدار ویژهٔ ماتریس A باشد. در این صورت، تعداد دفعات تکرار λ به‌عنوان ریشهٔ چندجمله‌ای مشخصه را **تکرار جبری** λ می‌نامیم. همچنین، بعد فضای ویژه نظیر λ، یعنی تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی نظیر λ را **تکرار هندسی** λ می‌نامیم.

تعریف ۸.۱. (ماتریس‌های متشابه) دو ماتریس A و B را متشابه گوئیم، هرگاه ماتریس معکوس‌پذیر P موجود باشد به‌طوریکه $P^{-1}AP=B$.

لم ۹.۱. *ماتریس‌های متشابه دارای مقادیر ویژه یکسان هستند.*

اثبات. گیریم A و B دو ماتریس متشابه باشند. پس ماتریس معکوس‌پذیر P موجود است به‌طوریکه $P^{-1}AP=B$. حال نشان می‌دهیم چندجمله‌ای مشخصه‌ی A و B یکسان هستند. چون $A=PBP^{-1}$، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}p_A(\lambda)&=\det(A-\lambda I)=\det(PBP^{-1}-\lambda PIP^{-1})\\&=\det(P(B-\lambda I)P^{-1})=\det(P)\det(B-\lambda I)\det(P^{-1})\\&=\det(B-\lambda I)=p_B(\lambda).\end{aligned}$$

□

لم ۱۰.۱. *اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه مقادیر ویژه A و A^T یکسان هستند.*

لم ۱۱.۱. *فرض کنید $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه حقیقی و متمایز ماتریس A و $V_1, \dots, V_n$ بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه باشند. در این صورت، مجموعه بردارهای $\{V_1, \dots, V_n\}$ مستقل خطی است.*

اثبات. **(برهان خلف)** فرض کنیم $\{V_1, \dots, V_n\}$ مستقل خطی نباشد. در این صورت، اندیس $2 \leq k \leq n$ وجود دارد به طوری که $\{V_1, \dots, V_{k-1}\}$ مستقل خطی است و بردار V_k را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از بردارهای قبلی نوشت، یعنی

$$V_k = c_1V_1 + \ldots + c_{k-1}V_{k-1}. \tag{۱.۱}$$

با ضرب A در دو طرف تساوی اخیر، داریم

$$AV_k = c_1AV_1 + \ldots + c_{k-1}AV_{k-1}.$$

در نتیجه،

$$\lambda_kV_k = c_1\lambda_1V_1 + \ldots + c_{k-1}\lambda_{k-1}V_{k-1}. \tag{۲.۱}$$

حال λ_k برابر (۱.۱) را از (۲.۱) کم می‌کنیم و بدست می‌آوریم که

$$0 = c_1(\lambda_k - \lambda_1)V_1 + \ldots + c_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})V_{k-1}.$$

با توجه به اینکه $\{V_1, \dots, V_{k-1}\}$ مستقل خطی است و برای هر $1 \leqslant i \leqslant k-1$ داریم $\lambda_i \neq \lambda_k$، از تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که $c_1 = \ldots = c_{k-1} = 0$. اکنون از رابطهٔ (۱.۱) نتیجه می‌شود که $V_k = 0$ که یک تناقض آشکار است چون V_k یک بردار ویژه است. بنابراین، فرض خلف باطل و حکم برقرار است. □

۲.۱ فرآیند قطری‌سازی

تعریف ۱۲.۱. ماتریس مربعی A را قطری‌شدنی گوئیم، هرگاه با یک ماتریس قطری متشابه باشد، یعنی ماتریس معکوس‌پذیر P و ماتریس قطری D چنان یافت شوند که $P^{-1}AP = D$.

قضیه ۱۳.۱. *ماتریس $A_{n\times n}$ قطری‌شدنی است اگر و تنها اگر دارای n بردار ویژهٔ مستقل خطی باشد.*

اثبات. ($\Longleftarrow$) فرض کنید A قطری‌شدنی باشد. در این صورت، ماتریس معکوس‌پذیر P چنان موجود است که $P^{-1}AP = D$ یک ماتریس قطری است. این یعنی $AP = PD$. اگر ماتریس P را به صورت $P = [V_1|V_2|\ldots|V_n]$ و ماتریس قطری D را به صورت $D = diag[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ در نظر بگیریم، آنگاه تساوی $AP = PD$ نتیجه می‌دهد که

$$[AV_1|AV_2|\ldots|AV_n] = [\lambda_1 V_1|\lambda_2 V_2|\ldots|\lambda_n V_n]$$

$$\Longrightarrow AV_1 = \lambda_1 V_1,\ AV_2 = \lambda_2 V_2,\ \ \ldots,\ AV_n = \lambda_n V_n.$$

بنابراین، $V_1, V_2, \ldots, V_n$ بردارهای ویژه مستقل خطی A هستند.

($\Longrightarrow$) حال فرض کنید ماتریس A دارای n بردار ویژه مستقل خطی $V_1, V_2, \ldots, V_n$ نظیر به مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ است. قرار می‌دهیم $P = [V_1|V_2|\ldots|V_n]$ و $D = diag[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$.

در این صورت، P معکوس‌پذیر است و داریم که

$$AP = [AV_1|AV_2\ldots|AV_n] = [\lambda_1 V_1|\lambda_2 V_2|\ldots|\lambda_n V_n] = [V_1|V_2|\ldots|V_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix} = PD.$$

پس $P^{-1}AP = D$ و بنابراین ماتریس A با ماتریس قطری D متشابه است. □

مثال ۱۴.۱. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 7\\ 1 & -4\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

آ) ماتریس A با چه ماتریس قطری متشابه می‌باشد؟

ب) برای هر $k \in \mathbb{N}$ فرمولی برای A^k ارائه دهید.

ج) اگر تعریف کنیم $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ ، آنگاه e^A را بیابید.

حل. **(آ)** مقادیر ویژه‌ی A را بدست می‌آوریم:

$$det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(1-\lambda)+8 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$$

چون A دو مقدار ویژه‌ی متمایز دارد، پس دارای دو بردار ویژه‌ی مستقل خطی است و در نتیجه، قطری شدنی است. اکنون بردارهای ویژه را بدست می‌آوریم:

$$\lambda_1 = 3: \ (A-3I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 4x+2y=0 \\ -4x-2y=0 \end{cases} \quad \Longrightarrow y=-2x.$$

پس بردار ویژه نظیر λ_1 برابر با $V_1 = [1,-2]^T$ است. برای λ_2 داریم:

$$\lambda_2 = 5: \ (A-5I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2x+2y=0 \\ -4x-4y=0 \end{cases} \quad \Longrightarrow y=-x.$$

پس بردار ویژه نظیر λ_2 برابر $V_2 = [1,-1]^T$ است. در نتیجه:

$$P = [V_1|V_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \ P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \ P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = D \Longrightarrow A = PDP^{-1}.$$

(ب) با استفاده از قسمت (آ) داریم:

$$A^2 = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PDIDP^{-1} = PD^2P^{-1} \implies A^k = PD^kP^{-1}.$$

$$\implies A^k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 5^k - 3^k & 5^k - 3^k \\ 2\times(3^k-5^k) & 2\times 3^k - 5^k \end{bmatrix}.$$

(ج) فرمول بدست آمده در قسمت (ب) را در رابطه‌ی داده شده جایگذاری می‌کنیم:

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\begin{bmatrix} 2\times\frac{5^n}{n!}-\frac{3^n}{n!} & \frac{5^n}{n!}-\frac{3^n}{n!} \\ 2\times(\frac{3^n}{n!}-\frac{5^n}{n!}) & 2\times\frac{3^n}{n!}-\frac{5^n}{n!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^5-e^3 & e^5-e^3 \\ 2(e^3-e^5) & 2e^3-e^5 \end{bmatrix}.$$

■

مثال ۱.۱۵. ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۳ \\ -۳ & -۵ & -۳ \\ ۳ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

آ) آیا ماتریس فوق قطری‌شدنی است؟

ب) برای هر $k \in \mathbb{N}$ فرمولی برای A^k ارائه دهید.

ج) اگر تعریف کنیم $e^A = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$، مطلوب است محاسبهٔ e^A.

حل. **(آ)** می‌دانیم A قطری‌شدنی است اگر و تنها اگر به اندازه کافی بردار ویژه مستقل خطی داشته باشیم. اول مقادیر ویژه ماتریس A را می‌یابیم:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} ۱-\lambda & ۳ & ۳ \\ -۳ & -۵-\lambda & -۳ \\ ۳ & ۳ & ۱-\lambda \end{vmatrix} = (۱-\lambda)(\lambda+۲)^۲ = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_۱ = ۱ \\ \lambda_{۲,۳} = -۲ \end{cases}$$

محاسبه‌ی بردار ویژه نظیر $\lambda_۱ = ۱$:

$$(A-I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۳ \\ -۳ & -۶ & -۳ \\ ۳ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} ۳y+۳z=۰ \\ -۳x-۶y-۳z=۰ \\ ۳x+۳y=۰ \end{cases}$$

از دستگاه فوق خواهیم داشت $z = x = -y$. در نتیجه، بردار ویژه نظیر $\lambda_۱$ برابر است با

$$V_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}.$$

برای $\lambda_{۲,۳} = -۲$ داریم:

$$(A+۲I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۳ \\ -۳ & -۳ & -۳ \\ ۳ & ۳ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = ۰ \Longrightarrow x+y+z=۰ \Longrightarrow z=-x-y.$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}.$$

در نتیجه، بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر با $\lambda_{۲,۳}$ عبارتند از:

$$V_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{bmatrix}, \quad V_۳ = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}.$$

بنابراین، ماتریس A قطری شدنی است و داریم:

$$P=[V_1|V_2|V_3]=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\1&-1&-1\end{bmatrix},\ P^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\-1&-1&0\end{bmatrix},\ P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}=D.$$

(ب) از نتیجه بدست آمده در قسمت قبل، یعنی $A=PDP^{-1}$، استفاده می‌کنیم و بدست می‌آوریم که

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad A^k=PD^kP^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^k&0&0\\0&(-2)^k&0\\0&0&(-2)^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\-1&-1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+(-2)^k&1+2\times(-2)^k&1+(-2)^k\\-1-(-2)^k&-1-(-2)^k&-1\\1&1-(-2)^k&1-(-2)^k\end{bmatrix}.$$

(ج) با استفاده از نتیجه بدست آمده در قسمت (ب) می‌توان نوشت:

$$e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}\frac{1}{k!}+\frac{(-2)^k}{k!}&\frac{1}{k!}+2\times\frac{(-2)^k}{k!}&\frac{1}{k!}+\frac{(-2)^k}{k!}\\-\frac{1}{k!}-\frac{(-2)^k}{k!}&-\frac{1}{k!}-\frac{(-2)^k}{k!}&-\frac{1}{k!}\\\frac{1}{k!}&\frac{1}{k!}-\frac{(-2)^k}{k!}&\frac{1}{k!}-\frac{(-2)^k}{k!}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}e^1+e^{-2}&e^1+2e^{-2}&e^1+e^{-2}\\-e^1-e^{-2}&-e^1-e^{-2}&-e^1\\e^1&e^1-e^{-2}&e^1-e^{-2}\end{bmatrix}.$$

■

۳.۱ فرم جردن

در بخش قبل دیدیم چنانچه ماتریس $A_{n\times n}$ دارای n بردار ویژه‌ی مستقل خطی باشد، آنگاه قطری شدنی است اما اگر کمتر از n بردار ویژهٔ مستقل خطی داشته باشد، آنگاه قطری‌شدنی نیست. در این حالت، ماتریس A حداقل یک مقدار ویژهٔ تکراری دارد که تکرار هندسی آن از تکرار جبری آن کمتر است. در این بخش، پیرامون چنین حالتی صحبت می‌کنیم و ماتریس

معکوس‌پذیر P را چنان تعریف می‌کنیم که ماتریس A را در فرم ساده‌تری موسوم به فرم جردن (فرم گویا) قرار می‌دهد. نوع فرم جردن یک ماتریس، به تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی ماتریس وابسته است که در این بخش به تفکیک، انواع مختلف آن را برای ماتریس‌های ۲×۲ و ۳×۳ شرح خواهیم داد.

۱.۳.۱ فرم جردن ماتریس‌های ۲×۲

فرم جردن یک ماتریس ۲×۲ بسته به نوع مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی آن، یکی از سه حالت زیر می‌باشد:

(۱) ماتریس $A_{۲\times۲}$ دارای دو مقدار ویژه‌ی حقیقی و نه لزوماً متمایز λ و μ و دو بردار ویژه مستقل خطی است. در این حالت، ماتریس A قطری‌شدنی است و فرم جردن آن به صورت

$$J=\begin{bmatrix}\lambda & ۰\\ ۰ & \mu\end{bmatrix}$$

می‌باشد؛ یعنی ماتریس معکوس‌پذیر P چنان موجود است که $P^{-۱}AP=J$ که در اینجا P ماتریسی است که ستون‌هایش، بردارهای ویژه‌ی A هستند.

(۲) ماتریس $A_{۲\times۲}$ دارای یک مقدار ویژه تکراری $\lambda\in\mathbb{R}$ و یک بردار ویژه مستقل خطی است. بنابراین، تکرار هندسی مقدار ویژه λ برابر یک و تکرار جبری آن برابر دو است. فرض کنید $V_۱$ بردار ویژه نظیر λ باشد. بردار $V_۲$ را چنان می‌یابیم که

$$(A-\lambda I)V_۲=V_۱.$$

توجه کنید که $V_۲$ یک بردار ویژه تعمیم یافته از رتبه ۲ نامیده می‌شود، یعنی

$$(A-\lambda I)^۲V_۲=(A-\lambda I)V_۱=۰,\quad (A-\lambda I)^۱V_۲=V_۱\neq ۰.$$

به راحتی می‌توان دید که $\{V_1, V_2\}$ مستقل خطی است. حال اگر قرار دهیم $P=[V_1\ V_2]$، آنگاه خواهیم داشت

$$AP=[AV_1\ AV_2]=[\lambda V_1\ \lambda V_2+V_1]=[V_1\ V_2]\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}.$$
$$\Longrightarrow\ P^{-1}AP=J=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix},$$

که J فرم جردن A نامیده می‌شود.

(۳) ماتریس $A_{2\times 2}$ دارای یک جفت مقدار ویژه مختلط $\lambda=a+ib$ و $\bar{\lambda}=a-ib$ است. بردارهای ویژه متناظر با λ و $\bar{\lambda}$ را با $V_1\pm iV_2$ نمایش می‌دهیم. از آنجاییکه V_1 و V_2 مستقل خطی‌اند، قرار می‌دهیم $P=[V_2\ V_1]$. در این صورت، خواهیم داشت:

$$AP=[AV_2\ AV_1]=[aV_2+bV_1\ aV_1-bV_2]=[V_2\ V_1]\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}.$$
$$\Longrightarrow\ P^{-1}AP=J=\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix},$$

که J فرم جردن A نامیده می‌شود.

مثال ۱۶.۱. فرم جردن ماتریس $A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -5 & 4\end{bmatrix}$ را بیابید.

حل. ابتدا مقادیر ویژه‌ی A را بدست می‌آوریم.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ -5 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-3=0\Longrightarrow\begin{cases}\lambda_1=3\\ \lambda_2=-1\end{cases}$$

چون دو مقدار ویژه حقیقی و متمایز بدست آوردیم، ماتریس A دو بردار ویژه مستقل خطی دارد و لذا فرم جردن آن به صورت $J=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ می‌باشد. ■

مثال ۱۷.۱. فرم جردن ماتریس $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & 4\end{bmatrix}$ را بیابید.

حل. مقادیر ویژه‌ی A عبارت‌اند از:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -4 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2=0\Longrightarrow\lambda_1=\lambda_2=2.$$

بردار ویژه نظیر این مقدار ویژه تکراری را بدست می‌آوریم:

$$(A-۲I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -۲x+y=۰ \\ -۴x+۲y=۰ \end{cases} \Longrightarrow y=۲x \Longrightarrow V_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}.$$

حال بردار $V_۲$ را چنان می‌یابیم که $(A-۲I)V_۲ = V_۱$.

$$\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -۲x+y=۱ \\ -۴x+۲y=۲ \end{cases} \Longrightarrow y=۲x+۱ \Longrightarrow V_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $P=[V_۱\ V_۲]$ و در نتیجه داریم:

$$P^{-۱}AP = J = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}.$$

■

مثال ۱.۱۸. فرم جردن ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

حل. ابتدا مقادیر ویژه‌ی A را بدست می‌آوریم:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} ۱-\lambda & ۴ \\ -۱ & ۱-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-۱)^۲+۴=۰ \Longrightarrow \lambda,\bar{\lambda} = ۱\pm ۲i.$$

برای محاسبه بردارهای ویژه نظیر به این مقادیر ویژه مختلط، کافی است دستگاه جبری زیر را حل کنیم:

$$(A-(۱+۲i)I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲i & ۴ \\ -۱ & -۲i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} -۲ix+۴y=۰ \\ -x-۲iy=۰ \end{cases} \Longrightarrow y = \frac{ix}{۲}.$$

بنابراین، بردارهای ویژه مختلط متناظر با مقادیر ویژه مختلط λ و $\bar{\lambda}$ عبارتند از:

$$V_۱ \pm iV_۲ = \begin{bmatrix} ۲ \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} \pm i\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}.$$

اگر قرار دهیم $P=[V_۲\ V_۱]$، آنگاه خواهیم داشت:

$$P^{-۱}AP = J = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}.$$

■

مثال ۱.۱۹. فرم جردن ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۴ & ۰ \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

حل. مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & ۱ \\ -۴ & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^۲ + ۴) = ۰ \implies \lambda, \bar{\lambda} = \pm ۲i.$$

محاسبه بردار ویژه نظیر $\lambda = ۲i$:

$$(A - ۲iI)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲i & ۱ \\ -۴ & -۲i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \implies \begin{cases} -۲ix + y = ۰ \\ -۴x - ۲iy = ۰ \end{cases} \implies y = ۲ix.$$

در نتیجه، بردار ویژه نظیر λ برابر است با:

$$V = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}}_{V_۱} + i \underbrace{\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}}_{V_۲}.$$

حال اگر قرار دهیم $P = [V_۲ \; V_۱]$، آنگاه خواهیم داشت:

$$P^{-۱}AP = J = \begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}.$$

■

۲.۳.۱ فرم جردن ماتریس‌های ۳ × ۳

فرم جردن یک ماتریس ۳ × ۳ بسته به نوع مقادیر و بردارهای ویژه‌ی آن، یکی از چهار حالت زیر می‌باشد:

(۱) ماتریس $A_{۳\times۳}$ دارای سه مقدار ویژه حقیقی و متمایز λ، μ و ξ باشد. در این حالت، سه بردار ویژه مستقل خطی خواهیم داشت که آنها را به ترتیب با $V_۱$، $V_۲$ و $V_۳$ نمایش می‌دهیم. قرار می‌دهیم $P = [V_۱ \; V_۲ \; V_۳]$. در نتیجه، فرم جردن ماتریس A به شکل زیر خواهد بود:

$$J = P^{-۱}AP = diag[\lambda_۱, \lambda_۲, \lambda_۳] = diag[\lambda, \mu, \xi] = \begin{bmatrix} \lambda & ۰ & ۰ \\ ۰ & \mu & ۰ \\ ۰ & ۰ & \xi \end{bmatrix}.$$

(۲) ماتریس $A_{3\times 3}$ دارای مقدار ویژه تکراری λ با تکرار جبری دو و مقدار ویژه دیگر آن μ باشد که قطعا $\lambda \neq \mu$. اگر تکرار هندسی λ نیز دو باشد، آنگاه همان حالت (۱) رخ می‌دهد. اما اگر تکرار هندسی λ برابر با یک باشد، آنگاه برای λ یک بردار ویژه داریم که آنرا V_1 می‌نامیم. حال بردار V_2 را چنان می‌یابیم که $(A-\lambda I)V_2 = V_1$. گیریم V_3 نیز بردار ویژه نظیر μ باشد. قرار می‌دهیم $P = [V_1\ V_2\ V_3]$ و در این حالت فرم جردن A برابر است با

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

(۳) ماتریس $A_{3\times 3}$ یک مقدار ویژه تکراری λ با تکرار جبری ۳ داشته باشد. در اینجا سه حالت ممکن است رخ دهد:

آ) اگر نظیر λ سه بردار ویژه مستقل خطی داشته باشیم، آنگاه حالت (۱) رخ می‌دهد.

ب) اگر نظیر λ دو بردار ویژه مستقل خطی V_1 و V_2 داشته باشیم، آنگاه بردار V_3 را به گونه‌ای می‌یابیم که $(A-\lambda I)V_3 = c_1V_1 + c_2V_2$.

حال اگر $c_1 = 0$ و $c_2 = 1$ باشد، قرار می‌دهیم $P = [V_1\ V_2\ V_3]$ و فرم جردن A برابر با

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

خواهد بود. اگر $c_1 = 1$ و $c_2 = 0$ باشد، آنگاه قرار می‌دهیم $P = [V_2\ V_1\ V_3]$ و فرم جردن A برابر با

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

خواهد بود. و بالاخره اگر هیچ یک از c_iها صفر نباشند، آنگاه $(A-\lambda I)V_3 = U_2$ که در آن $U_2 = c_1V_1 + c_2V_2$. حال بردار U_1 را طوری انتخاب می‌کنیم که ماتریس $P = [U_1\ U_2\ V_3]$ وارون پذیر باشد. در این حالت نیز فرم جردن ماتریس A برابر

است با

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

ج) اگر متناظر با λ تنها یک بردار ویژه مستقل خطی به نام V_1 داشته باشیم، آنگاه بردار V_2 را چنان می‌یابیم که $(A-\lambda I)V_2 = V_1$ و سپس بردار V_3 را چنان می‌یابیم که $(A-\lambda I)V_3 = V_2$. در این صورت، قرار می‌دهیم $P = [V_1\ V_2\ V_3]$ و فرم جردن ماتریس A برابر است با

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

(۴) ماتریس A دارای یک مقدار ویژه حقیقی λ و یک جفت مقدار ویژه مختلط $a \pm ib$ باشد و V_1 بردار ویژه نظیر λ و $V_3 + iV_2$ بردار ویژه نظیر $a+ib$ باشد. در این صورت، قرار می‌دهیم $P = [V_1\ V_2\ V_3]$ و فرم جردن A در این حالت برابر خواهد بود با

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{bmatrix}.$$

مثال ۱.۲۰. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ را در فرم جردن قرار دهید.

حل. در مرحله اول، مقادیر ویژه‌ی A را بدست می‌آوریم.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda - \lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

چون A سه مقدار ویژه‌ی متمایز دارد، پس سه بردار ویژه‌ی مستقل خطی خواهد داشت که آنها را بدست می‌آوریم.

$$(A-I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2y - z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = z = 0.$$

پس بردار ویژه‌ی نظیر $\lambda_۱$ برابر با $V_۱ = [۱, ۰, ۰]^T$ می‌باشد.

$$(A+I)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۲ & ۲ & -۱\\ ۰ & ۴ & -۲\\ ۰ & ۲ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = ۰ \Longrightarrow \begin{cases}۲x+۲y-z=۰\\ ۴y-۲z=۰\\ ۲y-z=۰\end{cases} \Longrightarrow\ x=۰,\ z=۲y.$$

بنابراین بردار ویژه‌ی نظیر $\lambda_۲$ برابر با $V_۲ = [۰, ۱, ۲]^T$ می‌باشد.

$$(A-۲I)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۱ & ۲ & -۱\\ ۰ & ۱ & -۲\\ ۰ & ۲ & -۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = ۰ \Longrightarrow \begin{cases}-x+۲y-z=۰\\ y-۲z=۰\\ ۲y-۴z=۰\end{cases} \Longrightarrow\ x=۳z,\ y=۲z.$$

در نتیجه بردار ویژه‌ی نظیر $\lambda_۳$ هم برابر با $V_۳ = [۳, ۲, ۱]^T$ خواهد بود. حال قرار می‌دهیم $P = [V_۱\ V_۲\ V_۳]$ و در نهایت فرم جردن A عبارت است از:

$$J = P^{-۱}AP = \begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}.$$

■

مثال ۲۱.۱. فرم جردن ماتریس $A = \begin{bmatrix}۰ & -۱ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ را بیابید.

حل. ابتدا مقادیر ویژه‌ی A را بدست می‌آوریم.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}-\lambda & -۱ & ۰\\ -۱ & -\lambda & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱-\lambda\end{vmatrix} = (\lambda^۲-۱)(۱-\lambda) = ۰ \Longrightarrow \begin{cases}\lambda_{۱,۲} = ۱\\ \lambda_۳ = -۱\end{cases}$$

بردار ویژه نظیر هر یک از مقادیر ویژه را بررسی می‌کنیم:

$$(A-I)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۱ & -۱ & ۰\\ -۱ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = ۰ \Longrightarrow \begin{cases}-x-y=۰\\ -x-y=۰\end{cases} \Longrightarrow\ y=-x.$$

بنابراین، بردارهای ویژه نظیر $\lambda_{۱,۲}$ عبارتند از

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\-x\\z\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}۱\\-۱\\۰\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}۰\\۰\\۱\end{bmatrix} \Longrightarrow\ V_۱ = \begin{bmatrix}۱\\-۱\\۰\end{bmatrix},\ \ V_۲ = \begin{bmatrix}۰\\۰\\۱\end{bmatrix}.$$

همچنین، برای λ_3 داریم:

$$(A+I)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0\Longrightarrow\begin{cases}x-y=0\\-x+y=0\\2z=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=y\\z=0\end{cases}$$

پس بردار ویژه‌ی نظیر λ_3 برابر است با

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\y\\0\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\Longrightarrow V_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $P=[V_1\ V_2\ V_3]$ و در نتیجه فرم جردن A به شکل زیر خواهد بود:

$$J=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$

■

مثال ۲۲.۱. ماتریس $A=\begin{bmatrix}4&0&0\\-2&1&0\\5&3&4\end{bmatrix}$ را در فرم جردن قرار دهید.

حل. اول، مقادیر ویژه‌ی A را بدست می‌آوریم:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda&0&0\\-2&1-\lambda&0\\5&3&4-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)^2(1-\lambda)=0\Longrightarrow\lambda_{1,2}=4,\quad\lambda_3=1.$$

برای بردار ویژه‌ی نظیر $\lambda_{1,2}$ داریم:

$$(A-4I)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\-2&-3&0\\5&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0\Longrightarrow\begin{cases}-2x-3y=0\\5x+3y=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=y=0\\z\in\mathbb{R}\end{cases}$$

پس بردار ویژه نظیر $\lambda_{1,2}$ برابر با $V_1=[0,0,1]^T$ می‌باشد. حال بردار V_2 را چنان می‌یابیم که $(A-4I)V_2=V_1$.

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\-2&-3&0\\5&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}0=0\\-2x-3y=0\\5x+3y=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\y=-\frac{2}{9}\end{cases}\Longrightarrow V_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{9}\\0\end{bmatrix}.$$

همچنین، برای بردار ویژه‌ی نظیر $\lambda_۳$ داریم:

$$(A-I)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۰&۰\\-۲&۰&۰\\۵&۳&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=۰\Longrightarrow\begin{cases}۳x=۰\\-۲x=۰\\۵x+۳y+۳z=۰\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=۰\\z=-y\end{cases}$$

بنابراین، بردار ویژه‌ی نظیر $\lambda_۳$ برابر با $V_۳=[۰,۱,-۱]^T$ است. حال قرار می‌دهیم $P=[V_۱\,V_۲\,V_۳]$ و در نتیجه فرم جردن A به شکل زیر خواهد بود:

$$J=P^{-۱}AP=\begin{bmatrix}۴&۱&۰\\۰&۴&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}.$$

■

مثال ۲۳.۱. ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&۱&۰\\-۱&۳&۰\\-۱&۱&۲\end{bmatrix}$ را در فرم جردن بنویسید.

حل. ابتدا مقادیر ویژه‌ی A را بدست می‌آوریم:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}۱-\lambda&۱&۰\\-۱&۳-\lambda&۰\\-۱&۱&۲-\lambda\end{vmatrix}=(۲-\lambda)^۳=۰\Longrightarrow\lambda_۱=\lambda_۲=\lambda_۳=۲.$$

بردارهای ویژه نظیر این مقدار ویژه تکراری را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$(A-۲I)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۱&۰\\-۱&۱&۰\\-۱&۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=۰\implies y=x.$$

در نتیجه،

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\x\\z\end{bmatrix}=x\underbrace{\begin{bmatrix}۱\\۱\\۰\end{bmatrix}}_{V_۱}+z\underbrace{\begin{bmatrix}۰\\۰\\۱\end{bmatrix}}_{V_۲}.$$

حال بردار $V_۳$ را چنان می‌یابیم که $(A-۲I)V_۳=c_۱V_۱+c_۲V_۲$.

$$\begin{bmatrix}-۱&۱&۰\\-۱&۱&۰\\-۱&۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_۱\\c_۱\\c_۲\end{bmatrix}\implies\begin{cases}-x+y=c_۱\\-x+y=c_۱\\-x+y=c_۲\end{cases}\implies c_۱=c_۲=۱,\ y=۱+x.$$

در نتیجه، $U_2 = V_1 + V_2 = [1, 1, 1]^T$ و $V_3 = [0, 1, 0]^T$. حال بردار U_1 را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که ماتریس $P = [U_1\ U_2\ V_3]$ وارون پذیر باشد. مثلا قرار می‌دهیم $U_1 = [1, 1, 0]^T$. در این صورت،

$$P = [U_1\ U_2\ V_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

در نتیجه، فرم جردن ماتریس A به صورت زیر خواهد بود:

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

■

مثال ۲۴.۱. مطلوبست محاسبهٔ فرم جردن ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

حل. مقادیر ویژه‌ی A عبارت‌اند از

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

برای بردارهای ویژه نظیر این مقدار ویژه تکراری، داریم:

$$(A-I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \implies y+z = 0 \implies \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -y \end{bmatrix} = x\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{V_1} + y\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{V_2}.$$

حال بردار V_3 را چنان می‌یابیم که $(A-I)V_3 = c_1V_1 + c_2V_2$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_2 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} y + z = c_1 \\ 0 = c_2 \end{cases} \implies c_2 = 0,\ c_1 = 1,\ z = 1-y \implies V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

بنابراین، قرار می‌دهیم $P = [V_2\ V_1\ V_3]$ و فرم جردن ماتریس A به شکل زیر خواهد بود:

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

مثال ۲۵.۱. فرم جردن ماتریس $A=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-2\\0&0&-1\end{bmatrix}$ را بیابید.

حل. مقادیر ویژه‌ی A را بدست می‌آوریم:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda&-1&0\\0&-1-\lambda&-2\\0&0&-1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3=0\Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1.$$

بردار ویژه‌ی نظیر این مقدار ویژه تکراری برابر است با:

$$(A+I)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0\Longrightarrow y=z=0\Longrightarrow V_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

حال بردار V_2 را چنان می‌یابیم که $(A+I)V_2=V_1$.

$$\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\ \Longrightarrow\ y=-1,\ z=0\ \Longrightarrow\ V_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}.$$

حال بردار V_3 را طوری می‌یابیم که $(A+I)V_3=V_2$.

$$\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}\ \Longrightarrow\ y=0,\ z=\frac{1}{2}\ \Longrightarrow\ V_3=\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

حال قرار می‌دهیم $P=[V_1\ V_2\ V_3]$ و در نتیجه فرم جردن A به شکل زیر خواهد بود:

$$J=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$

■

مثال ۲۶.۱. ماتریس $A=\begin{bmatrix}4&0&-1\\3&0&3\\2&-2&5\end{bmatrix}$ را در فرم جردن بنویسید.

حل. مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda&0&-1\\3&-\lambda&3\\2&-2&5-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-9\lambda^2+28\lambda-30=0\ \Longrightarrow\ \begin{cases}\lambda_1=3\\\lambda_{2,3}=3\pm i\end{cases}$$

محاسبه‌ی بردار ویژه نظیر $\lambda_1 = 3$:

$$(A-3I)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\3 & -3 & 3\\2 & -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases}x-z=0\\x-y+z=0\end{cases} \Longrightarrow x=z,\ y=2z.$$

پس بردار ویژه نظیر λ_1 برابر با $V_1 = [1,2,1]^T$ می‌باشد. همچنین، برای λ_2 داریم:

$$\big(A-(3+i)I\big)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-i & 0 & -1\\3 & -3-i & 3\\2 & -2 & 2-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases}z=(1-i)x\\y=\frac{3}{2}(1-i)x\end{cases}$$

پس بردار ویژه نظیر λ_2 برابر است با:

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\\frac{3}{2}x(1-i)\\x(1-i)\end{bmatrix} = x\underbrace{\begin{bmatrix}1\\\frac{3}{2}\\1\end{bmatrix}}_{V_3} + ix\underbrace{\begin{bmatrix}0\\-\frac{3}{2}\\-1\end{bmatrix}}_{V_2}.$$

حال قرار می‌دهیم $P = [V_1\ V_2\ V_3]$ و در نتیجه فرم جردن ماتریس A به صورت زیر خواهد بود:

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & -1\\0 & 1 & 3\end{bmatrix}.$$

■

۴.۱ نمای یک عملگر

تعریف ۲۷.۱. فرض کنید $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی در $\mathbb{R}^n$ باشد. در این صورت، تعریف می‌کنیم

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^k}{k!} = I + T + \frac{T^2}{2!} + \frac{T^3}{3!} + \ldots,\quad ||T|| = \max_{|x|\le 1}|Tx|,\quad |x| = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}.$$

از تعریف فوق نتیجه می‌شود که

$$(i)\ |Tx| \le ||T||\,|x|,\ \forall x\in\mathbb{R}^n \quad (ii)\ ||TS|| \le ||T||\,||S|| \quad (iii)\ ||T^k|| \le ||T||^k,\ k\in\mathbb{N}.$$

گزاره ۲۸.۱. *اگر P و T تبدیل‌های خطی در $\mathbb{R}^n$ باشند و $S = PTP^{-1}$، آنگاه $e^S = Pe^TP^{-1}$.*

گزاره ۲۹.۱. *اگر T و S تبدیل‌های خطی در $\mathbb{R}^n$ باشند که با یکدیگر جابجا شوند، یعنی $TS = ST$، آنگاه $e^{T+S} = e^T e^S$.*

نتیجه ۳۰.۱. *اگر T یک تبدیل خطی در $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه e^T وارون پذیر است و $(e^T)^{-1} = e^{-T}$.*

اثبات. چون $TS = ST$، با استفاده از بسط دوجمله‌ای نیوتن می‌توان نوشت:

$$\frac{(T+S)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{T^k S^{n-k}}{k!(n-k)!}.$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} e^{T+S} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T+S)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{T^k S^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} f(k, n-k) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f(k,n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^k S^n}{k!n!} = e^T e^S. \end{aligned}$$

برای اثبات تساوی

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} f(k, n-k) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f(k,n),$$

کافی است سمت چپ تساوی فوق را به صورت سطری بنویسیم و به صورت ستونی جمع بزنیم:

$$\begin{aligned} & f(0,0) + \\ & f(0,1) + f(1,0) + \\ & f(0,2) + f(1,1) + f(2,0) + \\ & f(0,3) + f(1,2) + f(2,1) + f(3,0) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(0,n) + \sum_{n=0}^{\infty} f(1,n) + \sum_{n=0}^{\infty} f(2,n) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f(k,n). \end{aligned}$$

■

گزاره ۳۱.۱. *اگر* $A=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$*، آنگاه* $e^A=e^a\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

اثبات. می‌توان نوشت:

$$A=a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=aI+bN.$$
$$\Longrightarrow\ e^A=e^{aI+bN}=e^{aI}e^{bN}=e^aI(I+bN)=e^a\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

گزاره ۳۲.۱. *اگر* $A=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$*، آنگاه* $e^A=e^a\begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}$.

اثبات. اگر قرار دهیم $\lambda=a+ib$، آنگاه خواهیم داشت $a=Re(\lambda)$ و $b=Im(\lambda)$. حال با استفاده از روابط

$$Re(z_1z_2)=Re(z_1)Re(z_2)-Im(z_1)Im(z_2),\qquad Im(z_1z_2)=Re(z_1)Im(z_2)+Re(z_2)Im(z_1),$$

و با استقرای ریاضی روی $n\geq 1$، اثبات می‌شود که

$$A^n=\begin{bmatrix} Re(\lambda^n) & -Im(\lambda^n) \\ Im(\lambda^n) & Re(\lambda^n) \end{bmatrix}.$$

در نتیجه،

$$e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}=\begin{bmatrix} Re(e^\lambda) & -Im(e^\lambda) \\ Im(e^\lambda) & Re(e^\lambda) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^a\cos b & -e^a\sin b \\ e^a\sin b & e^a\cos b \end{bmatrix}.$$

■

قضیه ۳۳.۱. (*قضیه اساسی برای دستگاه‌های خطی*) *فرض کنید* A *یک ماتریس* $n\times n$ *باشد. در این صورت، برای هر* $x_0\in\mathbb{R}^n$*، مسئله مقدار اولیه*

$$\dot{x}=Ax,\quad x(0)=x_0, \tag{۳.۱}$$

دارای جواب یکتای $x(t)=e^{At}x_0$ *است.*

اثبات. واضح است که $e^{At}x_\circ$ جوابی از این مسئله است. برای اثبات یکتایی جواب، فرض می‌کنیم $x(t)$ یک جواب دلخواه باشد و قرار می‌دهیم $y(t) = e^{-At}x(t)$. در این صورت،

$$y'(t) = -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}x'(t) = -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) = \circ.$$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = y(\circ) \quad \Longrightarrow \quad e^{-At}x(t) = x(\circ) \implies x(t) = e^{At}x_\circ.$$

■

لم ۳۴.۱. *اگر $\varphi(t, x_\circ) = e^{At}x_\circ$، آنگاه $\lim_{y\to x_\circ} \varphi(t,y) = \varphi(t,x_\circ)$ برای هر $t \in \mathbb{R}$.*

اثبات.

$$\circ \leq |\varphi(t,y) - \varphi(t,x_\circ)| = |e^{At}y - e^{At}x_\circ| = |e^{At}(y - x_\circ)| \leq ||e^{At}||\, |y - x_\circ|.$$

حال از قضیه فشردگی نتیجه حاصل می‌شود. ■

تعریف ۳۵.۱. **(بردار ویژه تعمیم یافته).** فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. در این صورت، بردار ناصفر V وابسته به مقدار ویژه λ را یک بردار ویژه تعمیم یافته از رتبه k گوییم هرگاه

$$(A - \lambda I)^k V = \circ, \quad (A - \lambda I)^{k-1} V \neq \circ.$$

توجه کنید که برای $k = 1$ این همان تعریف بردار ویژه است.

تعریف ۳۶.۱. فرض کنیم V یک بردار ویژه تعمیم یافته از رتبه k برای λ باشد. قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
V_k &= V,\\
V_{k-1} &= (A - \lambda I)V = (A - \lambda I)V_k,\\
V_{k-2} &= (A - \lambda I)^2 V = (A - \lambda I)V_{k-1},\\
&\vdots\\
V_1 &= (A - \lambda I)^{k-1}V = (A - \lambda I)V_2.
\end{aligned}$$

در این صورت، مجموعه بردارهای $\{V_1, \ldots, V_k\}$ را یک زنجیر بطول k از بردارهای ویژه تعمیم یافته می‌نامیم. این مجموعه مستقل خطی است زیرا اگر

$$c_1V_1 + \ldots + c_{k-1}V_{k-1} + c_kV_k = 0,$$

آنگاه با ضرب دو طرف در $(A-\lambda I)^{k-1}$ داریم

$$\begin{aligned} & c_1(A-\lambda I)^{k-1}V_1 + \ldots + c_{k-1}(A-\lambda I)^{k-1}V_{k-1} + c_k(A-\lambda I)^{k-1}V_k = 0 \\ \Longrightarrow\ & c_1\underbrace{(A-\lambda I)^k V_2}_{=0} + \ldots + c_{k-1}\underbrace{(A-\lambda I)^k V_k}_{=0} + c_k\underbrace{(A-\lambda I)^{k-1} V_k}_{\neq 0} = 0 \\ \Longrightarrow\ & c_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1V_1 + \ldots + c_{k-1}V_{k-1} = 0. \end{aligned}$$

با ادامه دادن روند فوق، بدست می‌آوریم که $c_k = \ldots = c_1 = 0$. بنابراین، بردارهای $V_1, \ldots, V_k$ مستقل خطی هستند.

قضیه ۳۷.۱. ***(قضیه هرچ و اسمیل).*** *فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ با مقادیر ویژه حقیقی $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ باشد. در این صورت، پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ متشکل از بردارهای ویژه تعمیم یافته $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ وجود دارد به طوری که ماتریس $P = [v_1 \mid v_2 \mid \ \ldots \ \mid v_n]$ وارون پذیر است و $A = S + N$ که در آن $S = P\,\mathbf{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]\,P^{-1}$ و $N = A - S$ یک ماتریس پوچ توان از مرتبه‌ی $k \leq n$ است که با S جابجا می‌شود، یعنی $NS = SN$.*

نتیجه ۳۸.۱. *تحت فرض‌های قضیه قبل، جواب دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$ با شرط اولیه $x(0) = x_0$، به شکل زیر است:*

$$x(t) = P\,\mathbf{diag}\left[e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right]\ P^{-1}\left[I + tN + \ldots + \frac{t^{k-1}N^{k-1}}{(k-1)!}\right] x_0.$$

مثال ۳۹.۱. ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ را به صورت $A = S + N$ تجزیه کنید و سپس e^{At} را بیابید.

حل. ابتدا چندجمله‌ای مشخصه A را تعیین می‌کنیم.

$$p_A(t)=\det(tI-A)=\begin{vmatrix} t+1 & -1 & 2\\ 0 & t+1 & -4\\ 0 & 0 & t-1\end{vmatrix}=(t-1)(t+1)^2=(t-\lambda_1)^{n_1}(t-\lambda_2)^{n_2},$$

که در آن

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=-1,\quad n_1=1,\quad n_2=2,\quad k=\max\{n_1,n_2\}=2.$$

بنابراین،

$$(A-\lambda_1 I)^{n_1}v_1=(A-I)v_1=0 \implies v_1=(0,2,1)^T,$$

$$(A-\lambda_2 I)^{n_2}v_2=(A+I)^2v_2=0 \implies v_2=(1,0,0)^T \quad v_3=(0,1,0)^T.$$

حال قرار می‌دهیم:

$$P=[v_1\ v_2\ v_3]=\begin{bmatrix}0&1&0\\2&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&-2\end{bmatrix},$$

$$S=\begin{bmatrix}0&1&0\\2&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&4\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$N=A-S=\begin{bmatrix}0&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

در نتیجه،

$$N^2=0,\quad e^{At}=P\,\mathbf{diag}\left[e^t,e^{-t},e^{-t}\right]\ P^{-1}\left[I+tN\right]=\begin{bmatrix}e^{-t}&te^{-t}&-2te^{-t}\\0&e^{-t}&4\sinh t\\0&0&e^t\end{bmatrix}.$$

■

۵.۱ قضیه فرم متعارف جردن

قضیه ۱.۴۰. *فرض کنید A یک ماتریس حقیقی با مقادیر ویژه حقیقی $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ و مقادیر ویژه مختلط $\lambda_j=a_j+ib_j$ و $\bar\lambda_j=a_j-ib_j$ برای $j=k+1,\dots,n$ باشد. در این صورت،*

بردارهای ویژه تعمیم یافته

$$v_1, \dots v_k, \quad w_j = u_j + iv_j, \quad j = k+1, \dots, n$$

وجود دارند به طوری که $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \dots, u_n, v_n\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^{2n-k}$ است و ماتریس $P = [v_1 \, \dots \, v_k \, v_{k+1} \, u_{k+1} \, \dots \, v_n \, u_n]$ وارون پذیر است و داریم

$$P^{-1}AP = diag[B_1, \dots, B_r] = \left[\begin{array}{cccc} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & B_r \end{array} \right],$$

که در آن B_j برای $1 \leq j \leq r$ یک بلوک جردن مقدماتی است که یا به شکل

$$\left[\begin{array}{ccccc} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array} \right]$$

است که λ یکی از مقادیر ویژه حقیقی ماتریس A است و یا به شکل

$$\left[\begin{array}{ccccc} R & I_2 & O & O & O \\ O & R & I_2 & O & O \\ O & O & R & I_2 & O \\ O & O & O & R & I_2 \\ O & O & O & O & R \end{array} \right]$$

است که در آن

$$R = \left[\begin{array}{cc} a & -b \\ b & a \end{array} \right], \quad I_2 = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right], \quad O = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right],$$

و $a \pm ib$ یکی از مقادیر ویژه مختلط ماتریس A است.

نتیجه ۴۱.۱. تحت شرایط قضیه قبل، داریم که

$$e^{At} = P \, \mathbf{diag} \, [e^{B_j t}] \, P^{-1}.$$

ملاحظه ۴۲.۱. اگر $B_j = \lambda I + N$ یک بلوک جردن مقدماتی $m \times m$ باشد که در آن

$$N = \begin{bmatrix} \circ & ۱ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & ۱ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & ۱ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & ۱ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

یک ماتریس پوچ توان از مرتبه m است، آنگاه

$$e^{B_j t} = e^{\lambda t} e^{Nt} = e^{\lambda t}\,[I + tN + \ldots + \frac{t^{m-۱}}{(m-۱)!} N^{m-۱}] = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} ۱ & t & \frac{t^۲}{۲!} & \cdots & \frac{t^{m-۱}}{(m-۱)!} \\ \circ & ۱ & t & \cdots & \frac{t^{m-۲}}{(m-۲)!} \\ \circ & \circ & ۱ & \cdots & \frac{t^{m-۳}}{(m-۳)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & ۱ & t \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & ۱ \end{bmatrix}.$$

به نحو مشابه، اگر B_j یک بلوک جردن مقدماتی $۲m \times ۲m$ به صورت

$$B_j = \mathit{diag}[R] + N \otimes I_۲$$

باشد که در آن $R = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ و N همان ماتریس پوچ توان تعریف شده در بالا است، آنگاه

$$\begin{aligned} e^{B_j t} &= \mathit{diag}\,[e^{Rt}]\, e^{(N \otimes I_۲)t} = \mathit{diag}\left(e^{at} \begin{bmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix} \right) e^{Nt} \otimes I_۲ \\ &= e^{at} e^{Nt} \otimes \begin{bmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

نتیجه ۴۳.۱. هر مولفه از جواب $x(t) = e^{At} x_\circ$ به صورت یک ترکیب خطی از توابعی به شکل

$$t^k e^{at} \cos(bt) \quad \text{یا} \quad t^k e^{at} \sin(bt)$$

است که $\circ \le k \le n-۱$ و $a \pm ib$ یکی از مقادیر ویژه ماتریس A است.

بنابراین، اگر تمامی مقادیر ویژه ماتریس A دارای قسمت‌های حقیقی منفی باشند، آنگاه برای هر $x_\circ \in \mathbb{R}^n$ داریم که

$$\lim_{t \to \infty} e^{At} x_\circ = \circ$$

زیرا

$$a < \circ \implies \lim_{t\to\infty} t^k e^{at}\cos(bt) = \lim_{t\to\infty} t^k e^{at}\sin(bt) = \circ.$$

نتیجه ۴۴.۱. *اگر بلوک‌های جردن مقدماتی B_j در فرم جردن ماتریس A دارای بلوک‌های $I_۲$ یا اعداد ۱ در بالای قطر اصلی نباشند و قسمت‌های حقیقی مقادیر ویژه A مثبت نباشند، آنگاه برای هر $x_\circ \in \mathbb{R}^n$، عدد مثبت M وجود دارد به طوری که*

$$|e^{At}x_\circ| \leq M, \quad \forall\, t \geq \circ.$$

زیرا

$$k = \circ,\ \ a \leq \circ \implies \text{هر مولفه از جواب تابعی کراندار است.}$$

۱.۵.۱ اندیس‌های کمبود

تعریف ۴۵.۱. فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد و λ یک مقدار ویژه تکراری با تکرار جبری n باشد. در این صورت، **اندیس‌های کمبود** به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\delta_k = \dim\ker(A-\lambda I)^k, \quad k = ۱, ۲, \ldots, n.$$

در واقع، δ_k برابر است با تعداد سطرهای صفر در فرم کاهش یافته سطری ماتریس $(A-\lambda I)^k$. با توجه به اینکه

$$\ker(A-\lambda I)^k \subseteq \ker(A-\lambda I)^{k+۱},$$

داریم که

$$\delta_۱ \leq \delta_۲ \leq \cdots \leq \delta_n = n.$$

فرض کنید υ_k تعداد بلوک‌های جردن مقدماتی $k \times k$ در فرم جردن A باشد. در این

صورت، از قضیه فرم متعارف جردن و تعریف δ_k نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= v_1 + v_2 + \ldots + v_n,\\
\delta_2 &= v_1 + 2v_2 + \ldots + 2v_n,\\
\delta_3 &= v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \ldots + 3v_n,\\
&\vdots\\
\delta_{n-1} &= v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \ldots + (n-1)v_{n-1} + (n-1)v_n,\\
\delta_n &= v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \ldots + (n-1)v_{n-1} + nv_n.
\end{aligned}$$

دلیل آن این است که اگر B یک بلوک جردن مقدماتی $k \times k$ باشد، آنگاه $(B-\lambda I)^j$ برای $1 \leq j \leq k$ دارای j سطر صفر است و برای $j \geq k$ دارای k سطر صفر می‌باشد. از روابط بالا نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
v_1 &= 2\delta_1 - \delta_2,\\
v_k &= 2\delta_k - \delta_{k+1} - \delta_{k-1}, \quad 2 \leq k \leq n-1,\\
v_n &= \delta_n - \delta_{n-1}.
\end{aligned}$$

مثال ۴۶.۱. فرم جردن ماتریس‌های داده شده را می‌یابیم.

$$(i)\ \ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (ii)\ \ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

حل. (i) چون A یک ماتریس پایین مثلثی است، پس مقادیر ویژه روی قطر اصلی قرار دارند. مشاهده می‌شود که $\lambda = 1$ یک مقدار ویژه تکراری با تکرار جبری $n = 3$ است. همچنین،

$$(A-I)^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (A-I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (A-I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

در نتیجه،

$$\delta_1 = dim \ker(A-I)^1 = 1, \quad \delta_2 = dim \ker(A-I)^2 = 2, \quad \delta_3 = dim \ker(A-I)^3 = 3.$$

بنابراین،

$$\upsilon_1 = 2\delta_1 - \delta_2 = 0, \quad \upsilon_2 = 2\delta_2 - \delta_3 - \delta_1 = 0, \quad \upsilon_3 = \delta_3 - \delta_2 = 1.$$

پس

$$A \text{ فرم جردن } = J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

با توجه به قضیه فرم متعارف جردن، ماتریس وارون پذیر $P = [V_1\ V_2\ V_3]$ وجود دارد به طوری که $P^{-1}AP = J$. حال از رابطه $AP = PJ$ نتیجه می‌شود که

$$(A-I)V_1 = 0 \implies V_1 = (0,0,1)^T.$$

$$(A-I)V_2 = V_1 \implies V_2 = (0,1,0)^T.$$

$$(A-I)V_3 = V_2 \implies V_3 = (-\frac{1}{2},0,0)^T.$$

بنابراین،

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

دقت کنید که $\{V_1, V_2, V_3\}$ یک زنجیر بطول ۳ از بردارهای ویژه تعمیم یافته است که مستقل خطی است و یک پایه برای فضای $\mathbb{R}^3$ تشکیل می‌دهد.

(ii). چون A یک ماتریس بالا مثلثی است، پس مقادیر ویژه روی قطر اصلی قرار دارند. مشاهده می‌شود که $\lambda = 2$ یک مقدار ویژه تکراری با تکرار جبری $n = 4$ از ماتریس A است.

همچنین،

$$(A-۲I)^۱=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۴ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix},\quad (A-۲I)^۲=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۳\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix},$$

$$(A-۲I)^۳=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix},\quad (A-۲I)^۴=۰.$$

در نتیجه،

$$\delta_۱=dim\ker(A-I)^۱=۱,\ \ \delta_۲=dim\ker(A-I)^۲=۲,\ \ \delta_۳=dim\ker(A-I)^۳=۳,\ \ \delta_۴=۴.$$

بنابراین،

$$\upsilon_۱=۲\delta_۱-\delta_۲=۰,\quad \upsilon_۲=۲\delta_۲-\delta_۳-\delta_۱=۰,\quad \upsilon_۳=۲\delta_۳-\delta_۴-\delta_۲=۰,\quad \upsilon_۴=\delta_۴-\delta_۳=۱.$$

پس

$$A\ \text{فرم جردن}=J=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}.$$

با توجه به قضیه فرم متعارف جردن، ماتریس وارون پذیر $P=[V_۱\ V_۲\ V_۳\ V_۴]$ وجود دارد به طوری که $P^{-۱}AP=J$. حال از رابطه $AP=PJ$ نتیجه می‌شود که

$$(A-۲I)V_۱=۰\implies V_۱=(۱,۰,۰,۰)^T.$$

$$(A-۲I)V_۲=V_۱\implies V_۲=(۰,۱,۰,۰)^T.$$

$$(A-۲I)V_۳=V_۲\implies V_۳=(۰,-۴,۱,۰)^T.$$

$$(A-۲I)V_۴=V_۳\implies V_۴=(۰,۱۲,-۳,۱)^T.$$

بنابراین،

$$P=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & -۴ & ۱۲\\ ۰ & ۰ & ۱ & -۳\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix},\quad P^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۴ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}.$$

دقت کنید که $\{V_۱, V_۲, V_۳, V_۴\}$ یک زنجیر بطول ۴ از بردارهای ویژه تعمیم یافته است که مستقل خطی است و یک پایه برای فضای $\mathbb{R}^۴$ تشکیل می‌دهد. ■

۶.۱ تمرینات

۱. اگر $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی در $\mathbb{R}^n$ با خاصیت $\| T - I \| < ۱$ باشد، نشان دهید T وارون پذیر است و سری $\sum_{k=۰}^{\infty}(I-T)^k$ به $T^{-۱}$ همگرا است.

۲. فرض کنید $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی در $\mathbb{R}^n$ باشد. نشان دهید که

$$||T|| = \max_{|x|=۱} |T(x)| = \sup_{x\neq ۰} \frac{|T(x)|}{|x|}.$$

۳. نرم عملگر خطی $T : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ با ضابطه‌ی $T(x,y) = (x+۲y, ۳y)$ را محاسبه کنید.

۴. نشان دهید که اگر $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی وارون پذیر باشد، آنگاه $||T|| > ۰$ و

$$||T^{-۱}|| \geq \frac{۱}{||T||}.$$

۵. نشان دهید که اگر v یک بردار ویژه از عملگر خطی $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ متناظر با مقدار ویژه λ باشد، آنگاه v یک بردار ویژه از e^T است.

۶. فرض کنید ماتریس مربعی A دارای یک مقدار ویژه منفی باشد. نشان دهید که دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$ دارای حداقل یک جواب غیربدیهی $x(t)$ است به طوری که $\lim_{t\to+\infty} x(t) = ۰$.

۷. ماتریس‌های $A, B \in M_{۲\times۲}(\mathbb{R})$ را طوری بیابید که $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

فصل ۲

مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل

در درس معادلات دیفرانسیل دوره‌ی کارشناسی، با معادلات دیفرانسیل آشنا شدیم. انواع آن را شناختیم و روش حل هر یک از آن‌ها را آموختیم. در این فصل، به فراخور نیاز، این مطالب را یادآوری نموده و خواصی از آن‌ها را بازگو خواهیم کرد.

۱.۲ معادلات دیفرانسیل

هر رابطه بین متغیرهای مستقل، تابع مجهول وابسته به این متغیرها و مشتقات تابع مجهول را یک **معادله دیفرانسیل** می‌نامیم. روابط زیر، مثال‌هایی از معادلات دیفرانسیل هستند.

$$x'' + ۲tx' + \sin(t)x - ۱ = ۰, \qquad x = x(t),$$
$$\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} + ۲ = ۰, \qquad u = u(t, y).$$

اگر تابع مجهول در یک معادله دیفرانسیل تنها به یک متغیر مستقل وابسته باشد، معادله را یک **معادله دیفرانسیل عادی** (ODE) و اگر به بیش از یک متغیر مستقل وابسته باشد، معادله را یک **معادله دیفرانسیل جزئی** (PDE) می‌نامیم.

در این درس با معادلات دیفرانسیل عادی سروکار داریم.

تعریف ۱.۲. (مرتبه‌ی معادلات دیفرانسیل) بالاترین مرتبهٔ مشتق که در معادله ظاهر می‌شود

را مرتبهٔ معادله گوئیم. به عنوان مثال، معادلات زیر، به ترتیب، از مرتبه دو و چهار هستند.

$$t^{۲}y'' + ۳ty' + y = ۱,$$

$$y^{(۴)} - e^{t}y'' + \sin(y) = \ln(۱ + t^{۲}).$$

در حالت کلی، یک معادله دیفرانسیل از مرتبه n را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = ۰.$$

حال فرض کنید $y^{(n)}$ را می‌توان بطور صریح از حل این معادله بدست آورد و آنرا به شکل $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-۱)})$ نوشت. در این صورت، با معرفی متغیرهای

$$x_{۱} = y, \quad x_{۲} = y', \quad x_{n} = y^{(n-۱)},$$

این معادله، به دستگاه زیر تبدیل می‌شود که شامل n معادله دیفرانسیل مرتبهٔ اول است.

$$\begin{cases} x'_{۱} = x_{۲} \\ x'_{۲} = x_{۳} \\ \quad \vdots \\ x'_{n} = y^{(n)} = f(t, x_{۱}, x_{۲}, \dots, x_{n}) \end{cases}$$

در حالت کلی‌تر، یک **دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول** در $\mathbb{R}^{n}$ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x'_{۱} = f_{۱}(t, x_{۱}, \dots, x_{n}) \\ x'_{۲} = f_{۲}(t, x_{۱}, \dots, x_{n}) \\ \quad \vdots \\ x'_{n} = f_{n}(t, x_{۱}, \dots, x_{n}) \end{cases} \tag{۱.۲}$$

اگر بردارهای X و $f(t, X)$ را به صورت

$$X = \begin{bmatrix} x_{۱}(t) \\ \vdots \\ x_{n}(t) \end{bmatrix}, \quad f(t, X) = \begin{bmatrix} f_{۱}(t, X) \\ \vdots \\ f_{n}(t, X) \end{bmatrix},$$

تعریف کنیم، آنگاه دستگاه (۱.۲) را می‌توان به شکل $\dot{X} = X' = f(t, X)$ نوشت، که در آن $X : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n}$ تابع مجهول، t متغیر مستقل، که معمولاً متغیر زمان در نظر گرفته می‌شود، و $f(t, X) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n}$ یک میدان برداری است.

تعریف ۲.۲. (دستگاه خودگردان) دستگاه $\dot{X} = f(t, X)$ را خودگردان گوییم اگر میدان برداری f به طور صریح به زمان t وابسته نباشد، یعنی $\dot{X} = f(X)$ باشد. در غیر این صورت، آن را غیرخودگردان می‌نامیم. به عنوان مثال، دستگاه‌های زیر، به ترتیب، خودگردان و غیرخودگردان هستند.

$$\begin{cases} \dot{x}_۱ = x_۲ + \sin(x_۱) \\ \dot{x}_۲ = x_۱^۲ - x_۱x_۲ \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_۱ = x_۱ - x_۲ + t \\ \dot{x}_۲ = x_۱^۲ + x_۲ - e^t \end{cases}$$

تذکر ۳.۲. *دستگاه غیرخودگردان $\dot{X} = f(t, X)$ را می‌توان با معرفی متغیر $t = x_{n+۱}$، به دستگاه خودگردان*

$$\begin{cases} \dot{X} = f(x_{n+۱}, X) \\ \dot{x}_{n+۱} = ۱ \end{cases}$$

تبدیل کرد. بنابراین، هر دستگاه غیرخودگردان در $\mathbb{R}^n$ قابل تبدیل به یک دستگاه خودگردان در $\mathbb{R}^{n+۱}$ است. لذا از این به بعد، با دستگاه خودگردان $\dot{X} = f(X)$ کار می‌کنیم.

تعریف ۴.۲. (جواب دستگاه) دستگاه $\dot{X} = f(X)$ را در $\mathbb{R}^n$ در نظر می‌گیریم. منظور از یک جواب از این دستگاه، تابع برداری $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ است که در معادلهٔ $\dot{X} = f(X)$ صدق می‌کند.

مثال ۵.۲. تابع اسکالر $x = e^t$ یک جواب از معادله‌ی اسکالر $\dot{x} = x$ است. همچنین، $x = ۳e^t$ نیز یک جواب است. در واقع، $x = ke^t$ جواب عمومی این معادله می‌باشد که k یک ثابت دلخواه است.

تعریف ۶.۲. (جواب عمومی دستگاه) کلی‌ترین شکل جواب دستگاه، بدون در نظر گرفتن هیچ شرطی برای معادلات را جواب عمومی دستگاه گوییم. به عبارت دقیق‌تر، جواب عمومی دستگاه $\dot{X} = f(X)$ در $\mathbb{R}^n$ به n ثابت دلخواه وابسته است.

تعریف ۷.۲. (مساله مقدار اولیه) دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X) \\ X(t_۰) = C \end{cases} \qquad (۲.۲)$$

که در آن $X(t_\circ) = C$ شرط اولیه‌ای است که بر روی جواب عمومی اعمال شده و جواب خصوصی را بدست می‌دهد، یک مساله‌ی مقدار اولیه می‌نامند.

در مورد دستگاه (۲.۲) سؤالات زیر مطرح می‌شود:

۱. آیا معادلهٔ اخیر همیشه دارای جواب است؟ قطعا، پاسخ خیر است.

۲. اگر معادله دارای جواب باشد، آیا این جواب یکتاست؟ تحت شرایط خاصی جواب یکتاست.

۳. چگونه جواب را بیابیم؟

۴. اگر نتوانستیم معادله را حل کنیم، آیا می‌توانیم رفتار کیفی (رفتار هندسی یا مجانبی) جواب را بدون دانستن آن بررسی کنیم؟

۲.۲ قضیهٔ وجود و یکتایی جواب

در این بخش، به بیان قضیهٔ وجود و یکتایی جواب معادلهٔ $\dot{X} = f(t, X)$ می‌پردازیم. این قضیه را برای $X \in \mathbb{R}$ بیان می‌کنیم. در حالت کلی‌تر نیز همین شرایط برای وجود یکتایی کافیست.

تعریف ۸.۲. (شرط لیپ‌شیتز) تابع پیوسته $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ را لیپ‌شیتز گویند هرگاه $\lambda_f > \circ$ موجود باشد که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda_f |x - y|.$$

عدد مثبت λ_f را ثابت لیپ‌شیتز f در $\mathbb{R}^n$ می‌نامند.

قضیه ۹.۲. (وجود و یکتایی جواب) *مسئله‌ی مقدار اولیه زیر مفروض است.*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R} \\ x(t_\circ) = x_\circ \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{۳.۲}$$

اگر $a > 0$ موجود باشد که تابع f روی مستطیل $D_a = [t_0-a, t_0+a] \times [x_0-a, x_0+a]$ پیوسته و نسبت به x پیوسته لیپ‌شیتز باشد، آنگاه $b < a$ موجود است به طوری که مسئله‌ی مقدار اولیه (۳.۲) روی بازه $[t_0-b, t_0+b]$ دارای جوابی یکتاست؛ یعنی تابع یکتای $x : [t_0-b, t_0+b] \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد که در (۳.۲) صدق می‌کند. به علاوه می‌توان شرط لیپ شیتز بودن نسبت به x را با این شرط که $\frac{\partial f}{\partial x}$ پیوسته باشد، جایگزین کرد.

تعریف ۱۰.۲. فرض کنید E یک زیرمجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^n$ باشد. گفته می‌شود که تابع $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ در شرط لیپ شیتز روی E صدق می‌کند اگر ثابت مثبت K وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x, y \in E$،

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

تابع f در E موضعا لیپ شیتز نامیده می‌شود اگر برای هر نقطه $x_0 \in E$ یک εـ همسایگی از x_0، $N_\varepsilon(x_0) \subset E$ و یک ثابت $K_0 > 0$ وجود داشته باشند به طوری که برای هر $x, y \in N_\varepsilon(x_0)$،

$$|f(x) - f(y)| \leq K_0|x - y|.$$

منظور از یک εـ همسایگی از نقطه $x_0 \in \mathbb{R}^n$، یک گوی باز در $\mathbb{R}^n$ به مرکز x_0 و شعاع ε است، یعنی

$$N_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

لم ۱۱.۲. *فرض کنید E یک زیرمجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^n$ باشد و فرض کنید $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$. در این صورت اگر $f \in C^1(E)$، آنگاه f در E موضعا لیپ شیتز است.*

اثبات. چون E یک زیرمجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^n$ است، پس برای $x_0 \in E$، یک $\varepsilon > 0$ وجود دارد به طوری که $N_\varepsilon(x_0) \subset E$. فرض کنید K ماگزیمم تابع پیوسته $Df(x)$ روی مجموعه فشرده $|x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ باشد، یعنی

$$K = \max_{|x-x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}} ||Df(x)||.$$

تعریف کنید $N_\circ = N_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_\circ)$ و برای $x, y \in N_\circ$ قرار دهید $u = y - x$. این نتیجه می‌دهد که $x + su \in N_\circ$ برای $0 \le s \le 1$ چون $N_\circ$ یک مجموعه محدب است. حال تابع $F : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را با ضابطه $F(s) = f(x + su)$ تعریف کنید. در این صورت، طبق قاعده زنجیره‌ای،

$$F'(s) = Df(x + su)\, u.$$

بنابراین،

$$f(y) - f(x) = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(s) ds = \int_0^1 Df(x + su) u\, ds.$$

در نتیجه،

$$|f(y) - f(x)| \le \int_0^1 |Df(x + su)u|\, ds \le \int_0^1 ||Df(x + su)||\, |u|\, ds \le K|u| = K|y - x|.$$

پس f در E پیوسته لیپ شیتز با ثابت لیپ شیتز K می‌باشد. ■

قضیه ۱۲.۲. **(قضیه اساسی وجود و یکتایی)** *فرض کنید E یک زیرمجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^n$ حاوی $x_\circ$ باشد و فرض کنید $f \in C^1(E)$. در این صورت، یک $a > 0$ وجود دارد به طوری که مسئله مقدار اولیه*

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_\circ$$

دارای جوابی یکتا روی بازه $[-a, a]$ است.

اثبات. چون $f \in C^1(E)$، از لم قبل نتیجه می‌شود که همسایگی $N_\varepsilon(x_\circ) \subset E$ و ثابت $K > 0$ چنان وجود دارند که برای هر $x, y \in N_\varepsilon(x_\circ)$، داریم

$$|f(x) - f(y)| \le K|x - y|.$$

قرار می‌دهیم $b = \frac{\varepsilon}{2}$. در این صورت تابع پیوسته $f(x)$ روی مجموعه فشرده

$$N_\circ = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x - x_\circ| \le b\}$$

کراندار است. قرار می‌دهیم $M = \max_{x\in N_{\circ}} |f(x)|$. بقیه اثبات طولانی است که از بیان آن خودداری می‌شود. اما مقدار a به صورت زیر بدست می‌آید

$$\circ < a < \min\{\frac{b}{M}, \frac{۱}{K}\}.$$

■

اگر از طرفین معادلهٔ $\dot{x} = f(t,x)$ نسبت به متغیر t انتگرال بگیریم، آنگاه خواهیم داشت:

$$x(t) - x(t_{\circ}) = \int_{t_{\circ}}^{t} f(s, x(s))ds \implies x(t) = x_{\circ} + \int_{t_{\circ}}^{t} f(s, x(s))ds. \qquad (۴.۲)$$

بنابراین، جواب معادله دیفرانسیل (۳.۲) و جواب معادله انتگرالی (۴.۲) یکسان هستند. با استفاده از این معادله، دنبالهٔ بازگشتی زیر که به **دنباله‌ی تکرار پیکارد** معروف است، را می‌سازیم:

$$\begin{aligned}
x_{\circ}(t) &= x_{\circ} \\
x_{۱}(t) &= x_{\circ} + \int_{t_{\circ}}^{t} f(s, x_{\circ}(s))ds \\
x_{۲}(t) &= x_{\circ} + \int_{t_{\circ}}^{t} f(s, x_{۱}(s))ds \\
&\vdots \\
x_{n+۱}(t) &= x_{\circ} + \int_{t_{\circ}}^{t} f(s, x_{n}(s))ds
\end{aligned}$$

دنباله‌ی فوق، دنباله‌ای از توابع است که به جواب مساله مقدار اولیه (۳.۲) میل می‌کند. پس با استفاده از این دنباله می‌توان به جواب مساله مقدار اولیه (۳.۲) رسید.

مثال ۱۳.۲. با استفاده از دنباله تکرار پیکارد، مسائل مقدار اولیه داده شده در زیر را حل کنید.

۱. $\begin{cases} \dot{x} = ۲x \\ x(\circ) = ۱ \end{cases}$

حل. ابتدا معادله را به صورت انتگرالی می‌نویسیم:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t 2x(s)ds = 1 + 2\int_0^t x(s)ds.$$

حال دنبالهٔ تکرار پیکارد را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= 1\\
x_1(t) &= 1 + 2\int_0^t x_0(s)ds = 1 + 2\int_0^t ds = 1 + 2t\\
x_2(t) &= 1 + 2\int_0^t x_1(s)ds = 1 + 2\int_0^t (1+2s)ds = 1 + 2t + \frac{(2t)^2}{2!}\\
x_3(t) &= 1 + 2\int_0^t x_2(s)ds = 1 + 2\int_0^t (1+2s+\frac{(2t)^2}{2})ds = 1 + 2t + \frac{(2t)^2}{2!} + \frac{(2t)^3}{3!}\\
&\vdots\\
x_n(t) &= 1 + 2t + \frac{(2t)^2}{2!} + \frac{(2t)^3}{3!} + \ldots + \frac{(2t)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}
\end{aligned}$$

در نتیجه، جواب مساله مقدار اولیه برابر است با:

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2t)^k}{k!} = e^{2t}.$$

■

۲. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$

حل. معادله را به صورت معادلهٔ انتگرالی می‌نویسیم:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t (x(s)+2)ds = 1 + 2t + \int_0^t x(s)ds.$$

حال دنبالهٔ تکرار پیکارد را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= 1\\
x_1(t) &= 1 + 2t + \int_0^t ds = 1 + 3t\\
x_2(t) &= 1 + 2t + \int_0^t (1+3s)ds = 1 + 3t + \frac{3}{2}t^2\\
x_3(t) &= 1 + 2t + \int_0^t (1+3s+\frac{3}{2}s^2)ds = 1 + 3t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3\\
&\vdots\\
x_n(t) &= 1 + 3\left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!}\right) = 1 + 3\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!}
\end{aligned}$$

در نتیجه، جواب مساله مقدار اولیه برابر است با:

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = 1 + 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = 1 + 3(e^t - 1).$$

■

۳. $\begin{cases} \dot{x} = 2tx\\ x(0) = 1 \end{cases}$

حل. معادلهٔ انتگرالی متناظر با معادله فوق به صورت زیر است:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t 2sx(s)ds = 1 + 2\int_0^t sx(s)ds.$$

دنبالهٔ تکرار پیکارد مربوطه را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
x_۰(t) &= ۱\\
x_۱(t) &= ۱ + ۲\int_۰^t s ds = ۱ + t^۲\\
x_۲(t) &= ۱ + ۲\int_۰^t s(۱ + s^۲) ds = ۱ + t^۲ + \frac{t^۴}{۲}\\
x_۳(t) &= ۱ + ۲\int_۰^t s(۱ + s^۲ + \frac{s^۴}{۲}) ds = ۱ + t^۲ + \frac{t^۴}{۲} + \frac{t^۶}{۳!}\\
&\vdots\\
x_n(t) &= ۱ + t^۲ + \frac{t^۴}{۲} + \frac{t^۶}{۳!} + \ldots + \frac{t^{۲n}}{n!} = \sum_{k=۰}^{n} \frac{(t^۲)^k}{k!}
\end{aligned}$$

در نتیجه، جواب مساله مقدار اولیه برابر است با:

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{(t^۲)^k}{k!} = e^{t^۲}.$$

■

۴. $\begin{cases} \dot{x} = ۲t(۱ - x)\\ x(۰) = ۲ \end{cases}$

حل. معادلهٔ انتگرالی متناظر با معادله فوق به صورت زیر است:

$$x(t) = ۲ + ۲\int_۰^t s(۱ - x(s)) ds.$$

حال دنبالهٔ تکرار پیکارد مربوطه را تشکیل می‌دهیم:

$$
\begin{aligned}
x_۰(t) &= ۲ \\
x_۱(t) &= ۲ + ۲\int_۰^t (-s)ds = ۲ - t^۲ \\
x_۲(t) &= ۲ + ۲\int_۰^t (-s + s^۳)ds = ۲ - t^۲ + \frac{t^۴}{۲} \\
x_۳(t) &= ۲ + ۲\int_۰^t s(-۱ + s^۲ - \frac{s^۴}{۲})ds = ۲ - t^۲ + \frac{t^۴}{۲} - \frac{t^۶}{۶} \\
&\vdots \\
x_n(t) &= ۲ - t^{۲\times۱} + \frac{t^{۲\times۲}}{۲!} - \frac{t^{۲\times۳}}{۳!} + \ldots + (-۱)^n\frac{t^{۲n}}{n!} = ۱ + \sum_{k=۰}^{n}\frac{(-۱)^k t^{۲k}}{k!}
\end{aligned}
$$

پس جواب مساله مقدار اولیه برابر است با:

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = ۱ + \sum_{k=۰}^{\infty}\frac{(-t^۲)^k}{k!} = ۱ + e^{-t^۲}.$$

■

۳.۲ روش حل معادلات دیفرانسیل

در بخش قبل دیدیم که هر معادله دیفرانسیل از مرتبه بیشتر از یک را می‌توان به صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول نوشت. بنابراین لازم است تا روش حل معادلات مرتبه اول را بررسی کنیم. برای این کار در این بخش، معادلات مرتبه اول را دسته‌بندی کرده و روش حل هرکدام را به تفصیل بیان خواهیم کرد.

۱.۳.۲ معادلات تفکیک‌پذیر (جداشدنی)

معادله دیفرانسیل $\dot{x} = f(t,x)$ را تفکیک‌پذیر یا جداشدنی گوئیم هرگاه بتوان تابع $f(t,x)$ را به صورت $f(t,x) = p(t)q(x)$ نوشت. در این صورت خواهیم داشت:

$$\dot{x} = p(t)q(x) \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = p(t)q(x) \Longrightarrow \frac{dx}{q(x)} = p(t)dt. \qquad (۵.۲)$$

توجه کنید که مخرج کسر نباید صفر باشد. اما اگر $x_\circ$ چنان باشد که $q(x_\circ) = \circ$، آنگاه $x(t) = x_\circ$ خود جواب معادله است که آن را یک جواب تعادلی یا **نقطه تعادل** می‌نامیم.

حال با انتگرال‌گیری از دو طرف رابطهٔ ۵.۲ جواب معادله به دست می‌آید،

$$\int \frac{dx}{q(x)} = \int p(t)dt + c.$$

مثال ۱۴.۲. معادله دیفرانسیل $\dot{x} = ۲tx$ را حل کنید.

حل. این معادله یک معادله‌ی تفکیک‌پذیر یا جدا شدنی است، چرا که

$$\dot{x} = ۲tx \implies \frac{dx}{dt} = ۲tx \implies \frac{dx}{x} = ۲t\,dt.$$

با فرض $x \neq \circ$ و با انتگرال‌گیری از دو طرف معادله اخیر داریم:

$$\int \frac{dx}{x} = \int ۲t\,dt + c_۱ \implies \ln|x| = t^۲ + c_۱ \implies |x| = e^{t^۲+c_۱} \implies x = c_۲e^{t^۲} = x(t).$$

توجه کنید که $x(t) = \circ$ نیز جواب تعادلی معادله می‌باشد. ■

مثال ۱۵.۲. جواب مسئله مقدار اولیه زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} (\ln x)\,\dot{x}\,\sec t = x, \quad x > \circ \\ x(\frac{\pi}{۲}) = e > ۱ \end{cases}$$

حل. به وضوح، این معادله، تفکیک‌پذیر است زیرا

$$(\ln x)\frac{dx}{dt}\sec t = x \implies \frac{\ln x}{x}dx = \cos t\,dt.$$

با انتگرال‌گیری از دو طرف معادله داریم:

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \cos t\,dt + c_۱ \implies \frac{۱}{۲}\ln^۲ x = \sin t + c_۱, \quad x(\frac{\pi}{۲}) = e \implies \frac{۱}{۲}\ln^۲ x = \sin t - \frac{۱}{۲}$$

$$\implies \ln^۲ x = ۲\sin t - ۱ \implies \ln x = +\sqrt{۲\sin t - ۱} \implies x = e^{\sqrt{۲\sin t - ۱}} = x(t), \quad t \in (\frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}).$$

■

نکته ۱۶.۲. *معادلات دیفرانسیل به شکل $\dot{x} = f(ax + bt + c)$ با استفاده از تغییر متغیر $u = ax + bt + c$ به یک معادلهٔ تفکیک‌پذیر تبدیل می‌شوند.*

۲.۳.۲ معادلات خطی مرتبهٔ اول و عامل انتگرال ساز

تعریف ۱۷.۲. معادله دیفرانسیل غیرخودگردان $\dot{x} = f(t,x)$ خطی مرتبه اول نامیده می‌شود هرگاه f نسبت به x خطی باشد، یعنی $f(t,x) = a(t)x + b(t)$. بنابراین، هر معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول را می‌توان همیشه به صورت $\dot{x} + a(t)x = b(t)$ نوشت که در آن $a(t)$ و $b(t)$ بر یک بازه I پیوسته هستند.

برای حل این معادلات از عامل انتگرال‌ساز استفاده می‌کنیم. اول معادله را در تابع $\mu(t)$ (که فعلا نامشخص است و به عامل انتگرال ساز معروف است) ضرب می‌کنیم و سپس از دو طرف معادله نسبت به متغیر t انتگرال می‌گیریم و از روش جزء به جزء برای محاسبه انتگرال اول استفاده می‌کنیم. پس داریم

$$\mu(t)\dot{x}(t) + \mu(t)a(t)x(t) = \mu(t)b(t) \implies \int \mu(t)\dot{x}(t)\,dt + \int \mu(t)a(t)x(t)\,dt = \int \mu(t)b(t)\,dt$$
$$\implies \mu(t)x(t) - \int x(t)\,d\mu(t) + \int \mu(t)a(t)x(t)\,dt = \int \mu(t)b(t)\,dt$$
$$\implies \mu(t)x(t) + \int \left[\mu(t)a(t) - \mu'(t)\right] x(t)\,dt = \int \mu(t)b(t)\,dt.$$

اکنون تابع $\mu(t)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که در معادله اخیر انتگرال وجود نداشته باشد، یعنی جواب انتگرال صفر باشد و یا به عبارتی $\mu(t)a(t) - \mu'(t) = ۰$. در نتیجه،

$$\mu'(t) = \mu(t)a(t) \implies \frac{d\mu}{dt} = \mu\, a(t) \implies \frac{d\mu}{\mu} = a(t)\,dt$$
$$\implies \int \frac{d\mu}{\mu} = \int a(t)\,dt \implies \ln\mu = \int a(t)\,dt \implies \mu = e^{\int a(t)dt} = \mu(t).$$

بنابراین، با این انتخاب، معادله قبلی به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\mu(t)x(t) = \int \mu(t)b(t)dt \implies x(t) = \frac{\int \mu(t)b(t)dt}{\mu(t)}.$$

نتیجه ۱۸.۲.

$$\dot{x} + a(t)x = b(t) \implies \mu(t) = e^{\int a(t)dt}, \quad x(t) = \frac{\int \mu(t)b(t)dt}{\mu(t)}.$$

حال به کمک این فرمول، چند مثال حل می‌کنیم.

مثال ۱۹.۲. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول $\dot{x} - 2x = t^3 e^{2t}$ را حل کنید.

حل. عامل انتگرال ساز این معادله به صورت $\mu(t) = e^{\int a(t)dt} = e^{-2t}$ می‌باشد. لذا جواب معادله عبارت است از:

$$x(t) = \frac{\int \mu(t)b(t)dt}{\mu(t)} = \frac{\int t^3 dt}{e^{-2t}} = e^{2t}\left(\frac{t^4}{4} + c\right).$$

■

مثال ۲۰.۲. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول $\dot{x} + 2x\tan t = t^2 \cos t \sin(2t)$ را حل کنید.

حل. عامل انتگرال ساز این معادله به صورت زیر است:

$$\mu(t) = e^{\int a(t)dt} = e^{\int 2\tan t\, dt} = e^{2\int \frac{\sin t}{\cos t}dt} = e^{-2\ln\cos t} = (e^{\ln\cos t})^{-2} = (\cos t)^{-2} = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

لذا جواب معادله عبارت است از:

$$x(t) = \frac{\int \mu(t)b(t)dt}{\mu(t)} = \cos^2 t \int 2t^2 \sin t\, dt = 2\cos^2 t\left(2\cos t - t^2\cos t + 2t\sin t + c\right).$$

■

مثال ۲۱.۲. معادله دیفرانسیل $t\dot{x} - 3x = t^4 \sin^2 t + t^4 - t^6$ را حل کنید.

حل. اول معادله را بر t تقسیم می‌کنیم تا به شکل زیر نوشته شود:

$$\dot{x} - \frac{3}{t}x = t^3\sin^2 t + t^3 - t^5 \implies a(t) = -\frac{3}{t}, \quad b(t) = t^3\sin^2 t + t^3 - t^5.$$

حال عامل انتگرال ساز معادله به صورت $\mu(t) = e^{\int -\frac{3}{t}dt} = e^{-3\ln t} = t^{-3}$ می‌باشد. لذا جواب معادله عبارت است از:

$$x(t) = \frac{\int \mu(t)b(t)dt}{\mu(t)} = t^3\int(\sin^2 t + 1 - t^2)dt = t^3\left(\frac{3t}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{1}{4}\sin(2t) + c\right).$$

■

فصل ۳

معادلات اسکالر خودگردان

هدف اصلی در نظریه کیفی یا مقدماتی معادلات دیفرانسیل، بررسی کیفی جواب‌های یک معادله دیفرانسیل است. در کاربردها، مطالعه هندسه جواب‌ها و رفتار مجانبی آنها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. هدف ما در این فصل، تعیین هندسه منحنی‌های جواب یک معادله دیفرانسیل خودگردان در $\mathbb{R}$ می‌باشد. گیریم $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد. معادله اسکالر خودگردان $\dot{x} = f(x)$، که $x \in \mathbb{R}$، را همراه با شرط اولیهٔ $x(\circ) = x_\circ \in \mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت، با یک معادلهٔ تفکیک‌پذیر (جدا شدنی) سروکار داریم، زیرا برای هر x که $f(x) \neq \circ$، داریم

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \implies \frac{dx}{f(x)} = dt \implies \int_{x_\circ}^{x} \frac{du}{f(u)} = \int_{\circ}^{t} d\tau = t. \qquad (۱.۳)$$

محاسبه‌ی انتگرال فوق، همیشه ساده نیست و حتی گاهی غیرممکن است. مثلا، معادله‌ی $\dot{x} = e^{x^۲}$ مثالی از این نوع است. حتی اگر محاسبه‌ی انتگرال هم امکان‌پذیر باشد، ممکن است نتوان جواب معادله را به بطور صریح نوشت که برای این مورد می‌توان معادله‌ی $\dot{x} = \cos x$ را مثال زد که جواب آن پس از حل انتگرال به صورت $\ln \dfrac{\sec x + \tan x}{\sec x_\circ + \tan x_\circ} = t$ درمی‌آید که می‌بینیم یک جواب ضمنی است و نمی‌توانیم x را بطور صریح برحسب t بیان کنیم. پس عملاً ، حل صریح معادله‌ی اسکالر خودگردان همیشه امکان‌پذیر نیست. از طرف دیگر، فرم بسته جواب از لحاظ کاربردی اهمیتی ندارد و آنچه که مهم است هندسه جواب است که در

کاربردها اهمیت پیدا می‌کند. در این فصل، می‌خواهیم راهکارهایی ارائه دهیم تا بدون حل معادله و یافتن جواب آن، رفتار هندسی جواب معادله را بررسی کنیم و اطلاعات مفیدی از آن بدست آوریم. اطلاعاتی مانند رفتار مجانبی جواب در بی‌نهایت، پایداری جواب، و غیره.

تعریف ۱.۳. (نقطه تعادل) نقطهٔ $x^\star$ را یک نقطهٔ تعادل از معادله $\dot{x} = f(x)$ می‌نامیم هرگاه $f(x^\star) = 0$. به‌علاوه، $x^\star$ را یک نقطه تعادل منزوی یا ایزوله گوییم اگر هیچ نقطه تعادل دیگری در نزدیکی آن نباشد. یعنی $\delta > 0$ موجود باشد بطوریکه برای هر $x \in (x^\star - \delta, x^\star + \delta) \setminus \{x^\star\}$ داشته باشیم $f(x) \neq 0$. اگر $x^\star$ یک نقطه تعادل باشد، آنگاه روشن است که تابع ثابت $x(t) = x^\star$ یک جواب بدیهی از معادله است که یک **جواب تعادلی** نامیده می‌شود. بنابراین، نقاط تعادل متناظر با جواب‌های ثابت معادله هستند.

تعریف ۲.۳. (پایداری لیاپانوف) جواب $x(t)$ **پایدار لیاپانوف** نامیده می‌شود، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta(\varepsilon) = \delta > 0$ به طوری که برای هر جواب دیگر مثل $y(t)$ با خاصیت $|x(0) - y(0)| < \delta$ داشته باشیم $|x(t) - y(t)| < \varepsilon$ برای هر $t \geq 0$. جواب $x(t)$ **ناپایدار** است هرگاه پایدار نباشد. جواب $x(t)$ **پایدار مجانبی** نامیده می‌شود هرگاه اولا پایدار لیاپانوف باشد و ثانیا وجود داشته باشد $b > 0$ به طوری که برای هر جواب دیگر مثل $y(t)$ با خاصیت $|x(0) - y(0)| < b$ داشته باشیم

$$\lim_{t\to\infty} |x(t) - y(t)| = 0.$$

به زبان ساده، اگر جواب‌هایی که از نزدیکی یک نقطه تعادل $x^\star$ شروع می‌شوند برای همیشه در نزدیکی نقطه تعادل $x^\star$ باقی بمانند، آنگاه $x^\star$ پایدار لیاپانوف است. قوی‌تر، اگر $x^\star$ پایدار لیاپانوف باشد و همه جواب‌هایی که از نزدیکی $x^\star$ شروع می‌شوند به $x^\star$ همگرا شوند، آنگاه $x^\star$ پایدار مجانبی است.

تعریف ۳.۳. (بازه ماگزیمال وجود جواب) بازه‌ی $I_{x_0} \subseteq \mathbb{R}$ شامل $t = 0$ برای معادله‌ی

$\dot{x} = f(x)$ با شرط اولیه $x(\circ) = x_\circ$، بازه ماگزیمال وجود جواب نامیده می‌شود هرگاه بزرگترین بازه‌ای باشد که جواب در آن تعریف شده است.

تعریف ۴.۳. (منحنی انتگرال و مدار نقطه $x_\circ$) فرض کنید $x = \varphi(t, x_\circ)$ جواب معادلهٔ $\dot{x} = f(x)$ با شرط اولیهٔ $x(\circ) = x_\circ$ باشد که در بازه ماگزیمال $I_{x_\circ}$ شامل $t = \circ$ تعریف شده است. توجه کنید که $\varphi(\circ, x_\circ) = x_\circ$. در این صورت، مجموعه‌های

$$\Gamma^+(x_\circ) = \{\varphi(t, x_\circ) \mid t \in I_{x_\circ} \cap [\circ, +\infty)\} \subset \mathbb{R}$$

$$\Gamma^-(x_\circ) = \{\varphi(t, x_\circ) \mid t \in I_{x_\circ} \cap (-\infty, \circ]\} \subset \mathbb{R}$$

$$\Gamma(x_\circ) = \{\varphi(t, x_\circ) \mid t \in I_{x_\circ}\} \subset \mathbb{R}$$

را به ترتیب، مدار مثبت، مدار منفی، و مدار نقطهٔ $x_\circ$ می‌نامیم. همچنین، نمودار جواب $\varphi(t, x_\circ)$ برحسب t یک **منحنی انتگرال** از معادله نامیده می‌شود که در زمان $t = \circ$ از نقطه $x_\circ$ عبور می‌کند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{(t, \varphi(t, x_\circ) \mid t \in I_{x_\circ}\} \subset \mathbb{R}^۲.$$

با توجه به تعریف فوق، مدار نقطه $x_\circ$، در واقع، تصویر منحنی انتگرال گذرا از نقطه $(\circ, x_\circ)$ بر محور x است.

تعاریف دیگر را در ذیل مثال ارائه می‌دهیم.

مثال ۵.۳. معادله اسکالر زیر را در نظر بگیرید:

$$x' = \frac{dx}{dt} = ax, \quad x(\circ) = x_\circ \in \mathbb{R}. \qquad (۲.۳)$$

ثابت a در معادله بالا را می‌توان به عنوان یک پارامتر در نظر گرفت. با تغییر a، معادله و همچنین جواب‌ها تغییر می‌کنند. اگر $a > \circ$ تمامی جواب‌های ناصفر معادله با افزایش زمان از

نقطه تعادل $x = 0$ دور می‌شوند. در این حالت، می‌گوییم که نقطه تعادل در مبدا یک **منبع** است. اگر $a < 0$ تمامی جواب‌های ناصفر معادله با افزایش زمان به نقطه تعادل مبدا میل می‌کنند، که در این حالت، مبدا یک **چاه** نامیده می‌شود. رفتار مجانبی جواب‌ها را با رسم آنها روی خط فاز $\mathbb{R}^1$ نمایش می‌دهیم. چون جواب $x(t)$ تابعی از زمان است، می‌توان $x(t)$ را به عنوان ذره‌ای متحرک در نظر گرفت که در طول محور حقیقی حرکت می‌کند. در نقطه تعادل، این ذره بدون حرکت باقی می‌ماند، که با یک نقطه توپر نمایش داده می‌شود.

اگر $a \neq 0$، معادله $x' = ax$ از منظر خاصی **پایدار** است؛ یعنی اگر a با یک ثابت دیگر که همعلامت با a است جایگزین شود، آنگاه رفتار کیفی جواب‌ها تغییر نمی‌کند. اما اگر $a = 0$، آنگاه کوچکترین تغییر در a منجر به تغییر جدی در رفتار جواب‌ها می‌شود. بنابراین، می‌گوییم که در نقطه $a = 0$، یک **انشعاب** در خانواده تک پارامتری معادلات $x' = ax$ رخ می‌دهد.

جواب معادله (۲.۳) با شرط اولیه $x(0) = x_0$ توسط $\varphi(t, x_0) = e^{at}x_0$ داده می‌شود.

تابع $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $\varphi(t, x_0) = e^{at}x_0$ را **جریان معادله دیفرانسیل** می‌نامیم که دارای دو خاصیت زیر است:

$$\varphi(t, x_0)(i) \quad \varphi(0, x_0) = x_0 \qquad\qquad (ii) \quad \varphi(t+s, x_0) = \varphi(t, \varphi(s, x_0)).$$

خانواده تک پارامتری (وابسته به پارامتر $t \in \mathbb{R}$) از نگاشت‌های اسکالر $\{\phi_t(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ تعریف شده با ضابطه $\phi_t(x_0) = \varphi(t, x_0) = e^{at}x_0$ که در شرایط

$$(i) \quad \phi_0 = i.d. \qquad\qquad (ii) \quad \phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$$

صدق می‌کنند، یک **دستگاه دینامیکی** در $\mathbb{R}$ نامیده می‌شود. از خاصیت (i) و (ii)، خاصیت (iii) نتیجه می‌شود:

$$(iii) \quad \phi_t^{-1} = \phi_{-t}.$$

مثال ۶.۳. معادله اسکالر زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = 2x(1-x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{۳.۳}$$

در این مثال، می‌خواهیم بازه ماگزیمال وجود جواب را تعیین کنیم. جواب‌های ثابت این معادله عبارتند از $x(t) = 0$ و $x(t) = 1$. این جواب‌ها برای هر $t \in \mathbb{R}$ تعریف می‌شوند. بنابراین، $I_0 = I_1 = \mathbb{R}$. حال فرض کنیم $x_0 \neq 0, 1$. در این صورت، جواب معادله (۳.۳) با شرط اولیه $x(0) = x_0$ توسط $x = \varphi(t, x_0) = \frac{x_0 e^{2t}}{1 - x_0 + x_0 e^{2t}}$ داده می‌شود که در آن $t \in I_{x_0}$. روشن است که اگر $0 \leq x_0 \leq 1$، آنگاه $I_{x_0} = \mathbb{R}$. در غیر این صورت،

$$I_{x_0} = \begin{cases} (\frac{1}{2} \ln \frac{x_0 - 1}{x_0}, +\infty) & x_0 > 1 \text{ اگر} \\ \\ (-\infty, \frac{1}{2} \ln \frac{x_0 - 1}{x_0}) & x_0 < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

منحنی‌های انتگرال و نمای فاز معادله را می‌توانید در شکل زیر مشاهده کنید.

۱.۳ نمای فاز

معادله‌ی $\dot{x} = f(x)$ را در نظر بگیرید. اگر t را به عنوان زمان و $x(t)$ را به عنوان مکان یک ذرهٔ متحرک در لحظهٔ t روی خط حقیقی در نظر بگیریم، آنگاه $\dot{x}$ نشان‌دهندهٔ سرعت حرکت ذره است و در نتیجه $\dot{x} = f(x)$ نشان‌دهندهٔ یک میدان برداری روی خط حقیقی است. برای رسم این میدان برداری، نمودار تابع $f(x)$ را برحسب x رسم می‌کنیم و برای نمایش سرعت ذره در هر نقطه مانند x، از پیکان‌های جهت‌دار روی خط حقیقی استفاده می‌کنیم. جهت این پیکان‌ها به راست است اگر $\dot{x} > 0$ (یعنی $f(x) > 0$) که نشان می‌دهد x در حال افزایش است، و به سمت چپ است اگر $\dot{x} < 0$ (یعنی $f(x) < 0$) که نشان می‌دهد x در حال کاهش است. البته اگر $f(x^\star) = 0$، آنگاه نقطهٔ $x^\star$ ثابت یا ساکن است، یعنی نه به راست و نه به چپ حرکت می‌کند. بنابراین، از روی نمودار تابع $f(x)$ می‌توان مدارهای معادلهٔ $\dot{x} = f(x)$ را به دست آورد. بدین ترتیب که اگر $f(x_0) > 0$، آنگاه جواب $\varphi(t, x_0)$ نسبت به t صعودی است و

اگر کراندار باشد، آنگاه به یک نقطه تعادل همگرا است. به طور مشابه، اگر $f(x_0) < 0$، آنگاه جواب $\varphi(t, x_0)$ نسبت به t نزولی است و اگر کراندار باشد، آنگاه به یک نقطه تعادل همگرا است. نقاط تعادل از حل معادله $f(x) = 0$ بدست می‌آیند.

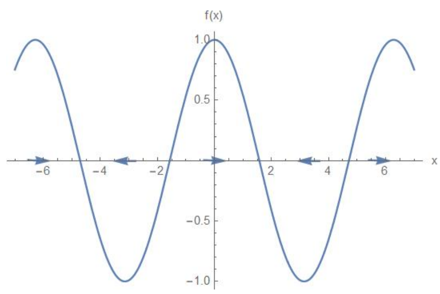
تعریف ۷.۳. (نمای فاز) اگر جریان معادله $\dot{x} = f(x)$ را به صورت خانواده‌ای از مدارها به همراه جهت آنها ترسیم کنیم، آنگاه شکل حاصل را نمای فاز گویند.

مثال ۸.۳. نمای فاز معادله $\dot{x} = \cos x$ را یافته و مدارهای آن را مشخص کنید.

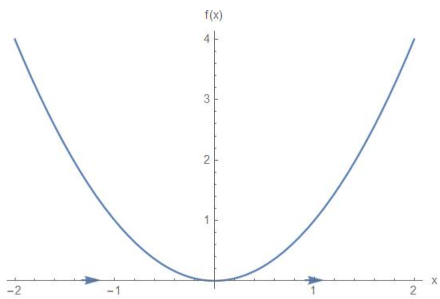
حل. نمای فاز این معادله به شکل ۱.۳آ می‌باشد و مدارهای آن عبارت‌اند از:

$$\Gamma(x_0) = \begin{cases} (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) & -\frac{\pi}{2} < x_0 < \frac{\pi}{2} \\ \{-\frac{\pi}{2}\} & x_0 = -\frac{\pi}{2} \\ \{\frac{\pi}{2}\} & x_0 = \frac{\pi}{2} \\ (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) & \frac{\pi}{2} < x_0 < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

■



(آ) نمودار مثال ۸.۳



(ب) نمودار مثال ۹.۳

مثال ۹.۳. معادله $\dot{x} = x^2$ مفروض است.

آ) نمای فاز آن را رسم کرده و مدارهای آنرا مشخص کنید.

ب) بازه ماگزیمال وجود جواب را برای هر $x_0 \in \mathbb{R}$ بیابید و جواب را برای $x_0 \in \mathbb{R}$ رسم کنید.

حل. نمای فاز این معادله به شکل ۱.۳ب می‌باشد و مدارهای آن عبارت‌اند از:

$$\Gamma(x_۰)=\begin{cases}(-\infty,۰) & x_۰<۰\\ \{۰\} & x_۰=۰\\ (۰,+\infty) & x_۰>۰\end{cases}$$

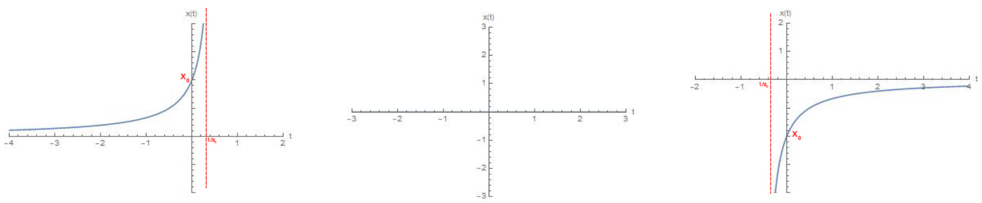
برای یافتن بزرگترین بازه زمانی که جواب در آن تعریف شده، معادله را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\dot{x}=x^۲ \implies \frac{dx}{dt}=x^۲ \implies \frac{dx}{x^۲}=dt \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \int_{x_۰}^{x}\frac{du}{u^۲}=\int_۰^t d\tau$$
$$\implies \frac{۱}{x_۰}-\frac{۱}{x}=t \implies \frac{۱}{x}=\frac{۱-tx_۰}{x_۰} \implies x=\frac{x_۰}{۱-tx_۰}=\varphi(t,x_۰).$$

اگر $x_۰=۰$، آنگاه $\varphi(t,x_۰)=۰$ و در نتیجه $I_{x_۰}=\mathbb{R}$. حال فرض کنیم $x_۰\neq ۰$. در این صورت، جواب $\varphi(t,x_۰)$ در $t=\frac{۱}{x_۰}$ تعریف نشده چون مخرج کسر صفر می‌شود. چون $۰\in I_{x_۰}$، پس

$$I_{x_۰}=\begin{cases}(\frac{۱}{x_۰},+\infty) & x_۰<۰\\ (-\infty,+\infty) & x_۰=۰\\ (-\infty,\frac{۱}{x_۰}) & x_۰>۰\end{cases}$$

نمودار جواب این معادله در بازه‌های $I_{x_۰}$ به شکل ۲.۳ می‌باشد. ■



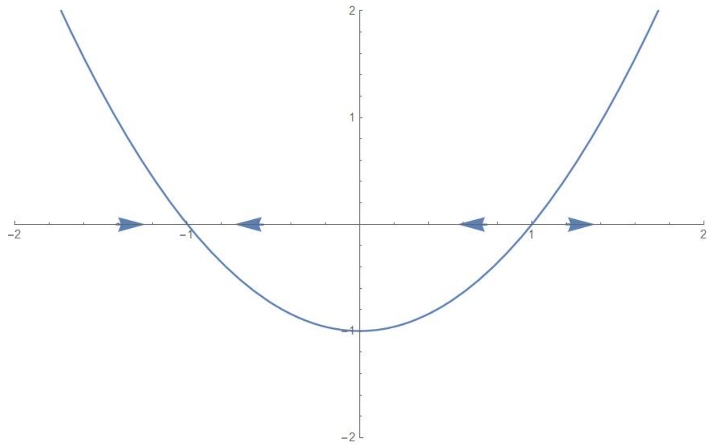
(آ) $x_۰<۰$ (ب) $x_۰=۰$ (ج) $x_۰>۰$

شکل ۲.۳: نمودار جواب معادله‌ی مثال ۹.۳

مثال ۱۰.۳. معادله $\dot{x}=x^۲-۱$ را در نظر بگیرید.

آ) نقاط تعادل را یافته و نمای فاز آن‌را رسم کنید.

ب) مدارهای معادله را مشخص کنید.



شکل ۳.۳: نمای فاز دستگاه مثال ۱۰.۳

ج) با حل معادله، جریان $\varphi(t,x_{\circ})$ و بازهٔ ماکسیمال وجود جواب را بیابید.

د) نشان دهید $\varphi(t,x_{\circ})$ در شرایط یک دستگاه دینامیکی صدق می‌کند.

ه) اگر $x(t)$ جواب معادله با شرط $x(\circ)=۲$ باشد، آنگاه $\lim_{t\longrightarrow\pm\infty}x(t)$ را بیابید.

حل. (آ) همانگونه که در تعریف دیدیم، نقاط تعادل، ریشه‌های $f(x)=x^{۲}-۱$ هستند. لذا نقاط تعادل در $x=\pm۱$ قرار دارند. نمای فاز معادله به شکل ۳.۳ می‌باشد.

(ب) با توجه به نقاط تعادلی که در قسمت (آ) بدست آوردیم،

$$\Gamma(x_{\circ})=\begin{cases}(-\infty,-۱) & x_{\circ}<-۱\\ \{-۱\} & x_{\circ}=-۱\\ (-۱,۱) & -۱<x_{\circ}<۱\\ \{۱\} & x_{\circ}=۱\\ (۱,+\infty) & x_{\circ}>۱\end{cases}$$

(ج) معادله داده شده تفکیک‌پذیر است و حل آن به صورت زیر است:

$$\frac{dx}{dt}=x^{۲}-۱\implies\frac{dx}{(x-۱)(x+۱)}=dt\implies\int_{x_{\circ}}^{x}\frac{du}{(u-۱)(u+۱)}=\int_{\circ}^{t}d\tau=t.$$

انتگرال سمت چپ را با روش تجزیه کسر حل می‌کنیم. برای این منظور، قرار می‌دهیم

$$\frac{۱}{(u-۱)(u+۱)}=\frac{A}{u-۱}+\frac{B}{u+۱}\implies A=\frac{۱}{۲},\quad B=-\frac{۱}{۲}.$$

بنابراین، انتگرال قبل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\Big(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\Big)du &= \frac{1}{2}\left(\ln|u-1|-\ln|u+1|\right)\Big|_{x_0}^{x}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\Big|_{x_0}^{x}\\ &=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x_0-1}{x_0+1}\right|=\frac{1}{2}\ln\frac{(x_0+1)(x-1)}{(x_0-1)(x+1)}.\end{aligned}$$

اکنون می‌توانیم جواب معادله را به طریق زیر بدست آوریم:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{(x_0+1)(x-1)}{(x_0-1)(x+1)}=t \implies \frac{(x_0+1)(x-1)}{(x_0-1)(x+1)}=e^{2t} \implies x=\frac{1+x_0+e^{2t}(x_0-1)}{1+x_0-e^{2t}(x_0-1)}=\varphi(t,x_0).$$

برای تعیین بازه ماگزیمال وجود جواب، یعنی I_{x_0}، ریشه مخرج کسر را می‌یابیم. بنابراین، مخرج کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم و زمان $t^\star$ را بدست می‌آوریم:

$$1+x_0-e^{2t}(x_0-1)=0 \implies e^{2t}=\frac{x_0+1}{x_0-1} \implies t=\frac{1}{2}\ln\frac{x_0+1}{x_0-1}=t^\star.$$

حال اگر $t^\star>0$، آنگاه $I_{x_0}=(-\infty,t^\star)$ و اگر $t^\star<0$، آنگاه $I_{x_0}=(t^\star,+\infty)$. توجه کنید که اگر $|x_0|\leq 1$، آنگاه مخرج مثبت است و در نتیجه $I_{x_0}=\mathbb{R}$.

(د) حال دو شرط دستگاه دینامیکی را برای جریان بدست آمده در قسمت قبل، بررسی می‌کنیم. برای شرط اول داریم:

$$\varphi(0,x_0)=\frac{x_0+1+x_0-1}{1+x_0-(x_0-1)}=\frac{2x_0}{2}=x_0,$$

و برای شرط دوم داریم:

$$\begin{aligned}\varphi(t,\varphi(s,x_0))&=\frac{1+\varphi(s,x_0)+e^{2t}(\varphi(s,x_0)-1)}{1+\varphi(s,x_0)-e^{2t}(\varphi(s,x_0)-1)}=\frac{\frac{2(1+x_0)}{1+x_0-e^{2s}(x_0-1)}+e^{2t}\frac{2(x_0-1)e^{2s}}{1+x_0-e^{2s}(x_0-1)}}{\frac{2(1+x_0)}{1+x_0-e^{2s}(x_0-1)}-e^{2t}\frac{2(x_0-1)e^{2s}}{1+x_0-e^{2s}(x_0-1)}}\\ &=\frac{2(1+x_0)+2(x_0-1)e^{2t}e^{2s}}{2(1+x_0)-2(x_0-1)e^{2t}e^{2s}}=\frac{x_0+1+(x_0-1)e^{2(t+s)}}{x_0+1-(x_0-1)e^{2(t+s)}}=\varphi(t+s,x_0).\end{aligned}$$

(ه) برای محاسبه حد مذکور، می‌توان نوشت $x(t)=\varphi(t,2)=\dfrac{3+e^{2t}}{3-e^{2t}}$. در نتیجه،

$$\lim_{t\to-\infty}x(t)=1,\qquad \lim_{t\to+\infty}x(t)=-1.$$

■

مثال ۱۱.۳. برای معادلات زیر ابتدا نقاط تعادل را یافته و سپس مدارها و نمای فاز آنها را مشخص کنید.

۱. $\dot{x} = -x$

حل. برای این معادله، $x = 0$ یک نقطه تعادل است. بنابراین، مدارهای آن عبارتند از

$$\Gamma(x_0) = \begin{cases} (-\infty, 0) & x_0 < 0 \\ \{0\} & x_0 = 0 \\ (0, +\infty) & x_0 > 0 \end{cases}$$

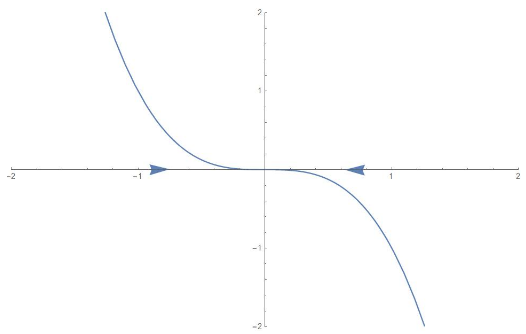
و نمای فاز آنها به شکل ۴.۳ب خواهد بود. ■

۲. $\dot{x} = -x^3$

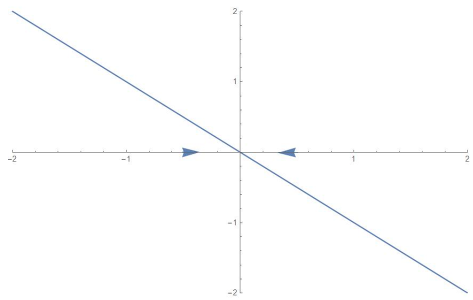
حل. روشن است که $x = 0$ تنها نقطه تعادل است. بنابراین، مدارهای آن عبارتند از

$$\Gamma(x_0) = \begin{cases} (-\infty, 0) & x_0 < 0 \\ \{0\} & x_0 = 0 \\ (0, +\infty) & x_0 > 0 \end{cases}$$

و نمای فاز آنها به شکل ۴.۳ب خواهد بود. ■



(ب)



(آ)

شکل ۴.۳: نمای فاز مثال ۱۱.۳

در مثال ۱۱.۳ اتفاق جالبی رخ داد و آن این بود که نمای فاز هر دو معادله یکسان بود. سؤالی که ممکن است برایتان پیش بیاید، این است که آیا جواب‌های آنها نیز یکسان هستند؟

پاسخ خیر است. برای بررسی این موضوع، اجازه دهید جواب‌های هر دو معادله را بیابیم. برای قسمت (آ) داریم $x(t) = x_\circ e^{-t}$، که $t \in \mathbb{R}$، و برای قسمت (ب) داریم:

$$\frac{dx}{dt} = -x^۳ \implies -\frac{dx}{x^۳} = dt \implies \int_{x_\circ}^{x} \frac{-du}{u^۳} = \int_\circ^t d\tau \implies \frac{۱}{۲u^۲}\bigg|_{x_\circ}^{x} = t$$
$$\implies \frac{۱}{۲x^۲} - \frac{۱}{۲x_\circ^۲} = t \implies \frac{۱}{x^۲} = ۲t + \frac{۱}{x_\circ^۲} = \frac{۲tx_\circ^۲ + ۱}{x_\circ^۲} \implies x^۲ = \frac{x_\circ^۲}{۲tx_\circ^۲ + ۱}$$
$$\implies x = \sqrt{\frac{x_\circ^۲}{۲tx_\circ^۲ + ۱}} = \frac{|x_\circ|}{\sqrt{۲tx_\circ^۲ + ۱}} = \varphi(t, x_\circ).$$

چون

$$۱ + ۲tx_\circ^۲ = \circ \implies t = -\frac{۱}{۲x_\circ^۲} = t^\star < \circ,$$

پس بازه ماکسیمال وجود جواب به شرح زیر است:

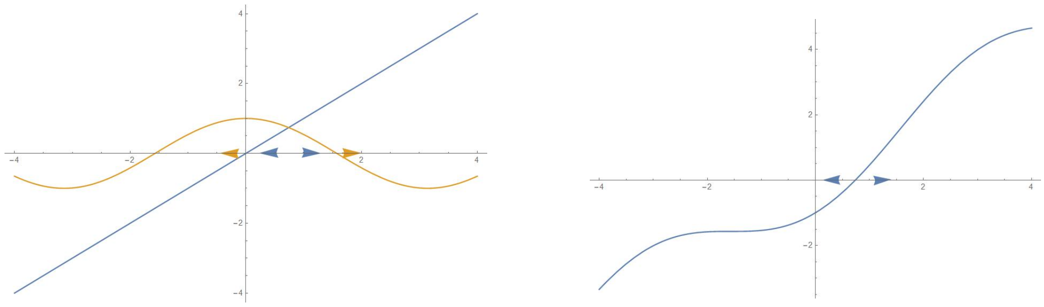
$$\begin{cases} I_{x_\circ} = (t^\star, +\infty) = (-\frac{۱}{۲x_\circ^۲}, +\infty) & x_\circ \neq \circ \\ I_{x_\circ} = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) & x_\circ = \circ \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که در قسمت (آ) و (ب) جواب‌ها و حتی بازهٔ ماکسیمال وجود جواب یکسان نیستند و فقط رفتار کیفی جواب‌ها یکسانند. نکتهٔ قابل توجه این است که جواب‌ها در قسمت (آ) با سرعت بیشتری (با سرعت نمائی) به مبدأ میل می‌کنند، در حالی که جواب‌ها در قسمت (ب) با سرعت کمتری (با سرعت چندجمله‌ای) به مبدأ میل می‌کنند، هرگاه $t \longrightarrow +\infty$.

مثال ۱۲.۳. نمای فاز معادله $\dot{x} = x - \cos x$ را رسم کرده و از روی آن پایداری نقاط تعادل را مشخص کنید.

حل. یک راه حل این است که نمودار تابع $f(x) = x - \cos x$ را رسم کنیم و از روی آن نمای فاز را رسم کنیم که به شکل ۵.۳آ می‌باشد. اما این مستلزم آن است که بتوانیم نمودار تابع $f(x) = x - \cos x$ را رسم کنیم که ممکن است کمی مشکل به نظر آید. روش ساده‌تر این است که نمودارهای $y = x$ و $y = \cos x$ را جداگانه رسم کنیم؛ هرجا که نمودار $y = x$ بالای نمودار $y = \cos x$ است، درمی‌یابیم که $\dot{x} = f(x) = x - \cos x > \circ$. یعنی

x افزایشی است و هر کجا که نمودار $y = x$ پائین نمودار $y = \cos x$ است درمی‌یابیم که $\dot{x} = f(x) = x - \cos x < 0$، یعنی x کاهشی است. بعلاوه، هر جا که نمودار $y = x$ و $y = \cos x$ همدیگر را قطع کنند، نقطهٔ تعادل داریم. شکل ۵.۳آ نشان می‌دهد که معادله مورد نظر تنها یک نقطهٔ تعادل بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ دارد که ناپایدار است که به شکل ۵.۳ب می‌باشد. ■



(ب) (آ)

شکل ۵.۳: نمای فاز مثال ۱۲.۳

۲.۳ پایداری خطی

تاکنون از طریق رسم نمودار تابع $f(x)$ در معادله $\dot{x} = f(x)$ به تعیین پایداری نقاط تعادل آن پرداختیم. اما در برخی موارد ممکن است رسم نمودار تابع $f(x)$ بدون استفاده از نرم‌افزارهای کامپیوتری دشوار باشد. از طرف دیگر، به محکی نیاز داریم تا بتوانیم با آن، سرعت نزدیک شدن یا دور شدن مدارها از نقطه تعادل را مقایسه کنیم. در این بخش، در مورد این موارد بیشتر سخن خواهیم گفت.

تعریف ۱۳.۳. (نقطه تعادل هذلولوی) فرض کنید $x^\star$ یک نقطه تعادل از معادله $\dot{x} = f(x)$ باشد. در این صورت، $x^\star$ را هذلولوی گوییم هرگاه $f'(x^\star) \neq 0$. در غیر در این صورت، آن را غیرهذلولوی می‌نامیم.

فرض کنید $x^\star$ یک نقطه تعادل هذلولوی از معادله $\dot{x} = f(x)$ باشد. قرار می‌دهیم

$\eta = x - x^\star$. در این صورت،

$$\dot{\eta} = \dot{x} = f(x) = f(\eta + x^\star).$$

اکنون بسط تیلور تابع $f(\eta + x^\star)$ را حول $\eta = 0$ می‌نویسیم که به شکل زیر است:

$$\dot{\eta} = f(x^\star) + \eta\, f'(x^\star) + O(\eta^2),$$

که در آن $O(\eta^2)$ نشان دهنده‌ی جملات از مرتبه ۲ به بالاتر است. چون $x^\star$ یک نقطه تعادل هذلولوی است، پس $f(x^\star) = 0$ و $f'(x^\star) \neq 0$. لذا داریم:

$$\dot{\eta} = f'(x^\star)\eta + O(\eta^2).$$

تعریف ۱۴.۳. (معادله خطی شده) معادله $\dot{\eta} = f'(x^\star)\eta$ را خطی شده‌ی معادله $\dot{x} = f(x)$ حول $x^\star$ می‌نامیم.

قضیه ۱۵.۳. ***(تحلیل پایداری خطی)*** *فرض کنید $x^\star$ یک نقطه تعادل هذلولوی از معادله اسکالر $\dot{x} = f(x)$ باشد. در این صورت،*

آ) اگر $f'(x^\star) < 0$، آنگاه $x^\star$ پایدار مجانبی است.

ب) اگر $f'(x^\star) > 0$، آنگاه $x^\star$ ناپایدار است.

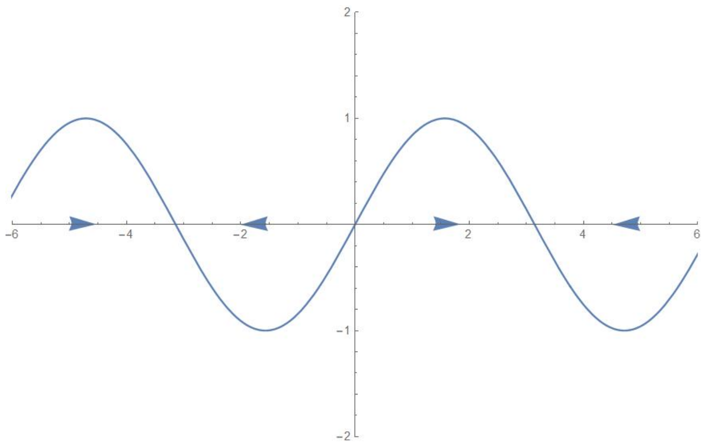
نکته ۱۶.۳. *قضیه تحلیل پایداری خطی صرفاً برای نقاط تعادل هذلولوی بیان شد. در مورد نقاط تعادل غیرهذلولوی، مشتقات مرتبه بالاتر f نوع پایداری را مشخص می‌کنند. برای نمونه، نمودار توابع $f(x) = \pm x^2$ و $f(x) = \pm x^3$ را رسم کنید و یک حکم کلی برای پایداری نقطه تعادل در مبدا ارائه دهید.*

مثال ۱۷.۳. پایداری نقاط تعادل معادله $\dot{x} = \sin x$ را مشخص کرده و نمای فاز آن را رسم کنید.

حل. نقاط تعادل این معادله ریشه‌های تابع $f(x) = \sin x$ هستند که عبارت‌اند از $x = n\pi$ که $n \in \mathbb{Z}$. حال مشتق تابع f را در این نقاط محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = \cos x \implies f'(n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n = 2k \\ -1 & n = 2k+1 \end{cases}$$

بنابر قضیه تحلیل پایداری خطی، نقاط $x^\star = n\pi$ به ازای nهای زوج، ناپایدار و به ازای nهای فرد، پایدار مجانبی هستند. نمای فاز معادله به شکل ۶.۳ می‌باشد. ■



شکل ۶.۳: نمای فاز مثال ۱۷.۳

مثال ۱۸.۳. نمای فاز معادلات زیر را رسم کنید.

۱. $\dot{x} = x^3$

حل. واضح است که $x = 0$ تنها نقطه تعادل این معادله است و از آنجاییکه $f'(0) = 0$، این نقطه تعادل، غیرهذلولوی است. با توجه به نمودار تابع $f(x) = x^3$، نمای فاز معادله به شکل ۷.۳آ می‌باشد. ■

۲. $\dot{x} = -x^3$

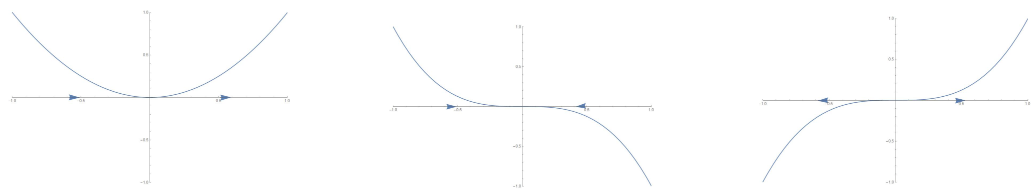
حل. نقطه $x = 0$، تنها نقطه تعادل این معادله است و از آنجاییکه $f'(0) = 0$، این نقطه تعادل، غیرهذلولوی است. با توجه به نمودار تابع $f(x) = -x^3$، نمای فاز معادله به شکل ۷.۳ب می‌باشد. ■

۳. $\dot{x} = x^2$

حل. واضح است که $x = 0$ نقطه تعادل این معادله است و از آنجاییکه $f'(0) = 0$، این نقطه تعادل، غیرهذلولوی است. با توجه به نمودار تابع $f(x) = -x^2$، نمای فاز معادله به شکل ۷.۳ج می‌باشد. ■

۴. $\dot{x} = 0$

حل. واضح است که تمام نقاط روی محور x، نقاط تعادل هستند که پایدار لیاپانوف هستند ولی پایدار مجانبی نیستند. ■



(ج) (ب) (آ)

شکل ۷.۳: نمای فاز معادلات مثال ۱۸.۳

۳.۳ نگاشت پوانکاره برای معادلات اسکالر تناوبی

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$x' = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{۴.۳}$$

که در آن

$$f(x,t) = f(x, t+T), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

یک جواب $x(t)$ از این معادله باید به ازای هر t در معادله صدق کند. با استفاده از روش‌های متداول در حساب دیفرانسیل و انتگرال نمی‌توانیم برای آن جوابی تحلیلی بیابیم. جوابی که

در شرط اولیه $x(\circ) = x_\circ$ صدق می‌کند، توسط $t \to \varphi(t, x_\circ)$ داده می‌شود. در حالی که فرمولی برای این عبارت نداریم، می‌دانیم که این جواب در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\varphi(t, x_\circ) = x_\circ + \int_\circ^t f(\varphi(s, x_\circ), s)ds. \tag{۵.۳}$$

تعریف ۱۹.۳. (نگاشت پوانکاره) تابع $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $P(x_\circ) = \varphi(T, x_\circ)$، نگاشت پوانکاره معادله دیفرانسیل (۴.۳) نامیده می‌شود.

گزاره ۲۰.۳. *جواب $\varphi(t, x_\circ)$ یک جواب Tـ تناوبی است اگر و تنها اگر $P(x_\circ) = x_\circ$. یعنی، نقاط ثابت نگاشت پوانکاره متناظر با جواب‌های تناوبی معادله دیفرانسیل هستند.*

اثبات. اگر $\varphi(t, x_\circ)$ یک جواب Tـ تناوبی باشد، آنگاه $P(x_\circ) = \varphi(T, x_\circ) = \varphi(\circ, x_\circ) = x_\circ$. حال فرض کنیم $P(x_\circ) = x_\circ$. نشان می‌دهیم $\varphi(t, x_\circ)$ یک جواب Tـ تناوبی است. قرار می‌دهیم $y(t) = \varphi(t + T, x_\circ)$. در این صورت، با توجه به اینکه $f(x, t) = f(x, t + T)$، $y(t)$ نیز جوابی از معادله است که در شرط اولیه $y(\circ) = \varphi(T, x_\circ) = P(x_\circ) = x_\circ$ صدق می‌کند. بنابراین، از قضیه وجود و یکتایی جواب، نتیجه می‌شود که این دو جواب بر هم منطبق هستند، یعنی $y(t) = \varphi(t, x_\circ)$ برای هر $t \in \mathbb{R}$. ■

در ادامه، مشتقات نگاشت پوانکاره را در نقطه $x_\circ$ تعیین می‌کنیم. اگر از معادله (۵.۳) نسبت به $x_\circ$ مشتق بگیریم، آنگاه با استفاده از قاعده زنجیره‌ای داریم

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_\circ}(t, x_\circ) = ۱ + \int_\circ^t \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(s, x_\circ), s) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_\circ}(s, x_\circ)ds.$$

حال فرض کنید

$$z(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\circ}(t, x_\circ).$$

در این صورت،

$$z(\circ) = ۱, \qquad z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t, x_\circ), t)\, z(t).$$

در نتیجه،

$$z(t) = \exp \int_{\circ}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(s, x_{\circ}), s)ds.$$

بنابراین،

$$P'(x_{\circ}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\circ}}(T, x_{\circ}) = z(T) = \exp \int_{\circ}^{T} \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(s, x_{\circ}), s)ds.$$

چون $P'(x_{\circ}) > \circ$، پس P یک تابع صعودی است. دوباره با مشتق‌گیری بدست می‌آوریم که

$$P''(x_{\circ}) = P'(x_{\circ}) \int_{\circ}^{T} \frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}}(\varphi(t, x_{\circ}), t) \cdot \exp\left(\int_{\circ}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(s, x_{\circ}), s)ds\right) dt.$$

۴.۳ تمرینات

۱. جریان معادله دیفرانسیل $x' = ax + ۳$ را بدست آورید که در آن a یک پارامتر است. نقاط تعادل این معادله را یافته و نوع آنها را مشخص کنید.

۲. برای هر یک از معادلات دیفرانسیل اسکالر زیر، تمامی نقاط تعادل را پیدا کنید و مشخص کنید که آیا آنها چاه هستند یا منبع و یا هیچکدام. همچنین، نمای فاز معادله را روی خط فاز رسم کنید.

$$۱)\ x' = x^{۳} - ۳x \quad ۲)\ x' = x^{۴} - x^{۲} \quad ۳)\ x' = ۱ + \cos x$$

$$۴)\ x' = \sin^{۲}(x) \quad ۵)\ x' = |۱ - x^{۲}|.$$

۳. نمودار نقاط تعادل و نوع پایداری آنها را برای معادلات دیفرانسیل زیر مشخص کنید که به پارامتر a بستگی دارند.

$$۱)\ x' = x^{۲} - ax \quad ۲)\ x' = x^{۳} - ax \quad ۳)\ x' = x^{۳} - x - a.$$

۴. معادله دیفرانسیل $x' = x + \cos t$ را در نظر بگیرید.

(الف) جواب عمومی این معادله را بدست آورید.

(ب) نشان دهید یک جواب تناوبی برای این معادله موجود است.

(ج) نگاشت پوانکاره $p : \{t = ۰\} \to \{t = ۲\pi\}$ را برای این معادله محاسبه کنید و با استفاده از آن مجددا نشان دهید یک جواب تناوبی یکتا موجود است.

۵. ثابت کنید تعداد نامتناهی جواب برای معادله دیفرانسیل $x' = x^{\frac{۱}{۲}}$ موجود است که در شرط اولیه $x(۰) = ۰$ صدق می‌کند. چرا این مطلب با قضیه وجود و یکتایی جواب منافاتی ندارد؟

۶. فرض کنید $x' = f(x)$ یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خودگردان با یک نقطه تعادل در $x^{\star}$ باشد. فرض کنید $f'(x^{\star}) = ۰$. در این صورت درباره رفتار جواب‌ها در نزدیکی $x^{\star}$ چه می‌توان گفت؟

۷. معادله دیفرانسیل $x' = x^{۲} - ۱ - \cos t$ را در نظر بگیرید. درباره وجود جواب تناوبی برای این معادله چه می‌توان گفت؟

۸. معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیرخودگردان $x' = p(t)x$ را در نظر بگیرید که در آن $p(t)$ تابعی مشتق‌پذیر و تناوبی با دوره تناوب T است. ثابت کنید تمامی جواب‌های این معادله Tــ تناوبی هستند اگر و تنها اگر $\int_{۰}^{T} p(s)ds = ۰$.

۹. در دستگاه‌های حاصلضرب زیر، نماهای فاز را رسم کنید و درباره مجموعه‌های αــ حدی و ωــ حدی آن بحث کنید.

$$(i)\ \dot{x}_{۱} = -x_{۱},\quad \dot{x}_{۲} = x_{۲}^{۲}. \qquad (ii)\ \dot{x}_{۱} = x_{۱} - x_{۱}^{۲},\quad \dot{x}_{۲} = x_{۲} - x_{۲}^{۲}.$$

۱۰. نمای فاز دستگاه معادلات زیر را رسم کنید:

$$(i)\quad \dot{x}_{۱} = x_{۲}(x_{۱}^{۲} - x_{۲}^{۲}),\quad \dot{x}_{۲} = -x_{۱}(x_{۱}^{۲} - x_{۲}^{۲}).$$

$$(ii)\quad \dot{x}_{۱} = x_{۲}(۱ - x_{۱}^{۲} - x_{۲}^{۲}),\quad \dot{x}_{۲} = -x_{۱}(۱ - x_{۱}^{۲} - x_{۲}^{۲}).$$

فصل ۴

دستگاه‌های خطی در $\mathbb{R}^n$

در فصل قبل، پیرامون دستگاه $\dot{x} = f(x)$ صحبت کردیم و گفتیم منظور از کلمه‌ی دستگاه، یک دستگاه دینامیکی است نه یک دستگاه معادلات. اما در این فصل، نظر به اهمیت موضوع، قصد داریم تا مشخصاً در مورد دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل صحبت کرده و خواص عمومی و روش‌های حل آن‌ها را به تفصیل بیان کنیم. در نهایت جوابی از دستگاه معادلات را به عنوان یک دستگاه دینامیکی معرفی خواهیم کرد.

در حالت کلی، یک دستگاه n معادله‌ای مرتبه اول به صورت

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \qquad \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

است. حال اگر دستگاه معادلات دیفرانسیل فوق به صورت

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n(t) + b_2(t), \\ \qquad \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

باشد، آنگاه با در نظر گرفتن تابع برداری $b(t) = [b_1(t), b_2(t), \ldots, b_n(t)]^T$، تابع ماتریسی $A(t) = [a_{ij}(t)]_{n\times n}$ و تابع برداری مجهول $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^T$، می‌توان دستگاه

فوق را به شکل

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \tag{۱.۴}$$

نوشت. این دستگاه را یک **دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی** می‌نامیم. چنانچه $b(t) = 0$، دستگاه معادلات (۱.۴) را همگن و در غیر این صورت آن را ناهمگن گویند. همچنین دستگاه معادلات

$$\dot{x} = A(t)x \tag{۲.۴}$$

را دستگاه همگن نظیر (۱.۴) می‌گویند. به زودی خواهیم دید که برای بررسی یک دستگاه معادلات ناهمگن، لازم است ابتدا جواب دستگاه همگن نظیر آن را بدست آوریم. منظور از جواب (۱.۴)، تابع برداری $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^T$ است که در (۱.۴) صدق کند.

مثال ۱.۴. برای دستگاه

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + t \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 1 \end{cases}$$

توابع برداری و ماتریسی بیان شده به صورت

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

است. پس دستگاه بالا را می‌توانیم به صورت $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ بنویسیم. می‌توان نشان داد که $x = [2 + \sin t, -t + \cos t]^T$ یک جواب برای این دستگاه است زیرا

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \cos t \\ -1 - \sin t \end{bmatrix},$$
$$A(t)x + b(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 + \sin t \\ -t + \cos t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ -1 - \sin t \end{bmatrix}.$$

تعریف ۲.۴. فرض کنید $A : I \implies M_{n\times n}(\mathbb{R})$ یک تابع ماتریسی و $b : I \implies \mathbb{R}^n$ یک تابع برداری باشد. گوییم A و b بر I پیوسته هستند اگر و تنها اگر تک‌تک درایه‌های A و b بر I پیوسته باشند.

مثال ۳.۴. تابع ماتریسی و تابع برداری زیر هر دو پیوسته‌اند چرا که هرکدام از درایه‌های آنها پیوسته است.

$$A(t) = \begin{bmatrix} ۱ & \cos t \\ e^t & -\sin t \end{bmatrix}, \qquad b(t) = \begin{bmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{bmatrix}.$$

قضیه ۴.۴. *فرض کنید تابع ماتریسی A و تابع برداری b بر بازه $I \subseteq \mathbb{R}$ پیوسته باشند. در این صورت، دستگاه خطی ناهمگن*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + b(t), \\ x(t_\circ) = x_\circ \; ; \; t_\circ \in I \end{cases}$$

دارای جوابی یکتا تعریف شده بر I است.

قضیه ۵.۴. *فرض کنید توابع برداری $\varphi_۱(t), \varphi_۲(t), \dots, \varphi_k(t)$ جواب‌های دستگاه خطی همگن $\dot{x} = A(t)x$ باشند. در این صورت، برای ثابت‌های دلخواه $c_۱, c_۲, \dots, c_k$، تابع برداری*

$$\varphi(t) = c_۱\varphi_۱(t) + c_۲\varphi_۲(t) + \dots + c_k\varphi_k(t)$$

نیز جواب دستگاه است.

اثبات.

$$\dot{\varphi} = c_۱\dot{\varphi}_۱ + c_۲\dot{\varphi}_۲ + \dots + c_k\dot{\varphi}_k = c_۱A(t)\varphi_۱ + c_۲A(t)\varphi_۲ + \dots + c_kA(t)\varphi_k$$

$$= A(t)\big(c_۱\varphi_۱ + c_۲\varphi_۲ + \dots + c_k\varphi_k\big) = A(t)\varphi.$$

پس $\varphi(t)$ نیز یک جواب است. ■

تعریف ۶.۴. گوییم توابع برداری $\varphi_۱, \varphi_۲, \dots, \varphi_k : I \subseteq \mathbb{R} \implies \mathbb{R}^n$ بر بازه I مستقل خطی هستند هرگاه از رابطه

$$c_۱\varphi_۱(t) + c_۲\varphi_۲(t) + \dots + c_k\varphi_k(t) = \circ, \quad t \in I,$$

نتیجه شود که $c_۱ = c_۲ = \dots = c_k = \circ$. اگر $\varphi_۱, \varphi_۲, \dots, \varphi_k$ مستقل خطی نباشند، آن‌ها را وابسته خطی می‌نامیم.

تذکر ۷.۴. *توابع برداری* $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k : I \subseteq \mathbb{R} \implies \mathbb{R}^n$ *بر بازه* I *وابسته خطی هستند هرگاه ثابت‌های* $c_1, c_2, \dots, c_k$ *، که همگی با هم صفر نیستند، چنان یافت شوند که*

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \ldots + c_k\varphi_k(t) = 0, \quad \forall t \in I.$$

مثال ۸.۴. نشان دهید توابع برداری

$$\varphi_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}, \qquad \varphi_2(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix}, \qquad \varphi_3(t) = \begin{bmatrix} t^3 \\ t \end{bmatrix},$$

بر $\mathbb{R}$ مستقل خطی هستند.

حل. فرض کنیم ثابت‌های c_1, c_2, c_3 چنان باشند که برای هر $t \in \mathbb{R}$، داشته باشیم

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\varphi_3(t) = c_1 \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} t^3 \\ t \end{bmatrix} = 0.$$

در نتیجه،

$$\begin{cases} c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 = 0, \\ c_1 t + c_2 t + c_3 t = 0 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

حال به دو طریق می‌توان نشان داد که ضرایب همگی با هم صفرند.

(روش اول): از آنجایی که $c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$ یک چندجمله‌ای از درجه ۳ برحسب t است، پس حداکثر سه ریشه حقیقی دارد. اما در اینجا هر t ریشه‌ی آن است (یعنی بی‌نهایت ریشه دارد). پس باید ضرایب آن همگی صفر باشند و لذا داریم $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. بنابراین، $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ مستقل خطی‌اند.

(روش دوم): از دو طرف رابطه‌ی $c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 = 0$ سه بار نسبت به t مشتق می‌گیریم و بدست می‌آوریم که:

$$c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 = 0, \quad 2c_2 + 6c_3 t = 0, \quad 6c_3 = 0.$$

در نتیجه، $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. ■

تذکر ۹.۴. هر سه بردار در $\mathbb{R}^۲$ وابسته خطی‌اند زیرا بُعد فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ برابر ۲ است، اما در مورد توابع برداری این‌گونه نیست. همانطور که در مثال قبل مشاهده شد، سه تابع برداری $\varphi_۱, \varphi_۲, \varphi_۳$ در $\mathbb{R}^۲$ مستقل خطی بودند و دلیل آن این است که بُعد فضای توابع برداری در $\mathbb{R}^۲$ برابر ∞ است.

قضیه ۱۰.۴. فرض کنید $A : I \subseteq \mathbb{R} \implies M_{n\times n}(\mathbb{R})$ یک تابع ماتریسی $n \times n$ پیوسته باشد. در این صورت، دستگاه $\dot{x} = A(t)x$ دارای n جواب مستقل خطی است. همچنین اگر $\varphi_۱, \varphi_۲, \ldots, \varphi_n$، n جواب مستقل خطی این دستگاه روی I باشند، آنگاه جواب عمومی دستگاه به صورت $x = c_۱\varphi_۱ + c_۲\varphi_۲ + \ldots + c_n\varphi_n$ خواهد بود که در آن $c_۱, c_۲, \ldots, c_n$ ثابت‌های دلخواه هستند.

اثبات. فرض کنید $\{e_۱, e_۲, \ldots, e_n\}$ پایه استاندارد فضای $\mathbb{R}^n$ باشد. همچنین، فرض کنید برای $۱ \leqslant i \leqslant n$، φ_i جواب مسئله مقدار اولیه

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x, \\ x(t_۰) = e_i \end{cases}$$

باشد. ادعا می‌کنیم که $\varphi_۱, \varphi_۲, \ldots, \varphi_n$ جواب‌های مستقل خطی دستگاه هستند. برای اثبات این ادعا، فرض کنید $c_۱, c_۲, \ldots, c_n$ چنان موجود باشند که برای هر $t \in I$، داشته باشیم

$$c_۱\varphi_۱(t) + c_۲\varphi_۲(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t) = ۰.$$

پس برای $t = t_۰$ نیز این تساوی برقرار است، یعنی

$$c_۱\varphi_۱(t_۰) + c_۲\varphi_۲(t_۰) + \ldots + c_n\varphi_n(t_۰) = ۰ \implies c_۱e_۱ + c_۲e_۲ + \ldots + c_ne_n = ۰.$$

اما بردارهای $e_۱, e_۲, \ldots, e_n$ مستقل خطی بودند، بنابراین $c_۱ = c_۲ = \ldots = c_n = ۰$ و لذا $\varphi_۱, \varphi_۲, \ldots, \varphi_n$ جواب‌های مستقل خطی‌اند.

حال فرض کنیم $x(t)$ یک جواب دلخواه باشد. در این صورت، $x(t_۰)$ برداری در $\mathbb{R}^n$ است و

می‌توان آن را به صورت یک ترکیب خطی از n بردار مستقل خطی $e_1, e_2, \ldots, e_n$ نوشت. پس

$$x(t_0) = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_n e_n = c_1\varphi_1(t_0) + c_2\varphi_2(t_0) \ldots + c_n\varphi_n(t_0).$$

حال، بنابر قضیه وجود و یکتایی جواب، داریم $x(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t)$. توجه کنید که این دو تابع هر دو جواب معادله هستند که در شرایط اولیه یکسان صدق می‌کنند. ■

تا کنون با تعریف کلی و خواص عمومی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی آشنا شدیم. هدف از طرح این مباحث حل این دستگاه‌هاست. اما همانگونه که قبلاً بیان شد برای بررسی دستگاه $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ لازم است ابتدا دستگاه همگن نظیر آن یعنی $\dot{x} = A(t)x$ را بررسی کنیم. پس در ادامه، هدف، حل دستگاه $\dot{x} = A(t)x$ خواهد بود و به تفصیل به این موضوع می‌پردازیم.

۱.۴ حل دستگاه خطی همگن با استفاده از مقدار ویژه

تعریف ۱۱.۴. دستگاه معادلات $\dot{x} = A(t)x$ را یک دستگاه با ضرایب ثابت گویند هرگاه $A(t) = A$ یک ماتریس با درایه‌های ثابت باشد.

قضیه ۱۲.۴. *فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ و λ_0 یک مقدار ویژه آن و X_0 بردار ویژه نظیر λ_0 باشد. در این صورت، $x(t) = e^{\lambda_0 t}X_0$ یک جواب از دستگاه $\dot{x} = Ax$ است.*

اثبات.

$$x(t) = e^{\lambda_0 t}X_0 \implies \dot{x}(t) = \lambda_0 e^{\lambda_0 t}X_0 = e^{\lambda_0 t}\lambda_0 X_0 = e^{\lambda_0 t}AX_0 = Ae^{\lambda_0 t}X_0 = Ax(t).$$

پس $x(t)$ جواب دستگاه است. ■

مثال ۱۳.۴. دستگاه زیر را حل کنید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x.$$

حل. ابتدا مقادیر ویژه A را بدست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \Longrightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda(\lambda+3)+2 = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = -1\,,\ \lambda_2 = -2.$$

حال بردارهای ویژه نظیر هر کدام از مقادیر ویژه را بدست می‌آوریم:

$$\lambda_1 = -1:\ \ (A+I)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \ \Longrightarrow\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \ \Longrightarrow\ x_2 = -x_1.$$

در نتیجه، بردار ویژه نظیر $\lambda_1 = -1$ برابر خواهد بود با:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \ \Longrightarrow\ X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

پس یکی از جواب‌های دستگاه معادلات مورد سوال عبارت است از:

$$\varphi_1(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

حال برای مقدار ویژه‌ی دیگر ماتریس A داریم:

$$\lambda_2 = -2:\ \ (A+2I)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \ \Longrightarrow\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \ \Longrightarrow\ x_2 = -2x_1.$$

در نتیجه، بردار ویژه نظیر $\lambda = -2$ برابر خواهد بود با:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \ \Longrightarrow\ X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

پس جواب دیگر دستگاه معادلات عبارت است از:

$$\varphi_2(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

دو جواب بدست آمده مستقل خطی هستند. در نهایت، جواب عمومی دستگاه به صورت یک ترکیب خطی از دو جواب بدست آمده است، یعنی

$$x(t) = c_۱\varphi_۱(t) + c_۲\varphi_۲(t) = c_۱ \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} + c_۲ \begin{bmatrix} e^{-۲t} \\ -۲e^{-۲t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-۲t} \\ -e^{-t} & -۲e^{-۲t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_۱ \\ c_۲ \end{bmatrix}.$$

■

ملاحظه ۱۴.۴. *چنانچه به ماتریس بدست آمده در جواب عمومی مثال قبل دقت کنید، خواهید دید که هر کدام از ستون‌های آن، یکی از جواب‌های مستقل خطی دستگاه است. در این مورد و ماهیت چنین ماتریسی در آینده بیشتر سخن خواهیم گفت.*

قضیه ۱۵.۴. *اگر $x(t) = U(t) + iV(t)$ یک جواب مختلط از دستگاه $\dot{x} = A(t)x$ باشد که در آن $U(t)$ و $V(t)$ توابع برداری حقیقی هستند، آنگاه هرکدام از توابع $U(t)$ و $V(t)$ نیز، خود جواب‌های دستگاه $\dot{x} = A(t)x$ می‌باشند.*

اثبات. چون $x(t) = U(t) + iV(t)$ جواب دستگاه است، پس داریم:

$$\dot{U} + i\dot{V} = A(t)\big(U + iV\big) = A(t)U + iA(t)V \implies \begin{cases} \dot{U} = A(t)U \\ \dot{V} = A(t)V \end{cases}$$

پس $U(t)$ و $V(t)$ جواب‌هایی حقیقی از دستگاه $\dot{x} = A(t)x$ هستند. ■

مثال ۱۶.۴. دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \dot{x}_۱ = ۳x_۱ + x_۲ \\ \dot{x}_۲ = -۱۳x_۱ - ۳x_۲ \end{cases}$$

حل. ابتدا دستگاه را به فرم ماتریسی بازنویسی می‌کنیم:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ -۱۳ & ۳ \end{bmatrix} x.$$

سپس مقادیر ویژه ماتریس ضرایب را بدست می‌آوریم:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} ۳ - \lambda & ۱ \\ -۱۳ & -۳ - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - ۳)(\lambda + ۳) + ۱۳ = ۰ \implies \lambda^۲ + ۴ = ۰ \implies \lambda = \pm ۲i.$$

مشاهده می‌کنید که مقادیر ویژه‌ی این ماتریس، مختلط و مزدوج یکدیگر هستند. پس بردارهای ویژه‌ی نظیر آنها نیز مزدوج یکدیگر خواهند بود.

$$(A - ۲iI)\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ - ۲i & ۱ \\ -۱۳ & -۳ - ۲i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = ۰ \implies \begin{cases} (۳ - ۲i)x_۱ + x_۲ = ۰ \\ -۱۳x_۱ + (-۳ - ۲i)x_۲ = ۰ \end{cases}$$

از دستگاه فوق نتیجه می‌شود $x_۲ = (-۳ + ۲i)x_۱$. بنابراین، با فرض $x_۱ = ۱$ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۳ + ۲i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۳ \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}.$$

در نتیجه، یک جواب برای دستگاه معادلات داده شده عبارت است از:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= e^{۲it}\left(\begin{bmatrix} ۱ \\ -۳ \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}\right) = \Big(\cos ۲t + i\sin ۲t\Big)\left(\begin{bmatrix} ۱ \\ -۳ \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}\right) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \cos ۲t \\ -۳\cos ۲t - ۲\sin ۲t \end{bmatrix}}_{\varphi_۱(t)} + i\underbrace{\begin{bmatrix} \sin ۲t \\ ۲\cos ۲t - ۳\sin ۲t \end{bmatrix}}_{\varphi_۲(t)}. \end{aligned}$$

طبق قضیه قبل، $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ نیز جواب‌های معادله هستند.

در نهایت، جواب عمومی دستگاه معادلات داده شده عبارت است از:

$$\begin{aligned} x(t) = c_۱\varphi_۱(t) + c_۲\varphi_۲(t) &= c_۱\begin{bmatrix} \cos ۲t \\ -۳\cos ۲t - ۲\sin ۲t \end{bmatrix} + c_۲\begin{bmatrix} \sin ۲t \\ ۲\cos ۲t - ۳\sin ۲t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos ۲t & \sin ۲t \\ -۳\cos ۲t - ۲\sin ۲t & ۲\cos ۲t - ۳\sin ۲t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_۱ \\ c_۲ \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

مثال ۱۷.۴. جواب عمومی دستگاه خطی $\dot{x} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} x$ را بدست آورید.

حل. داریم

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} ۱ - \lambda & ۱ \\ -۱ & ۳ - \lambda \end{vmatrix} = ۰ \implies (\lambda - ۱)(\lambda - ۳) + ۱ = ۰ \implies \lambda_۱ = \lambda_۲ = ۲.$$

$$(A - ۲I)\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = ۰ \implies x_۱ = x_۲.$$

پس $X^{(۱)} = [۱,۱]^T$ تنها بردار ویژه‌ی ماتریس ضرایب است و تنها یک جواب به صورت $\varphi_۱(t) = e^{۲t}[۱,۱]^T$ برای دستگاه حاصل می‌شود. اما برای حل دستگاه، نیاز به دو جواب مستقل خطی داریم. پس قضایای قبل در حل این سوال ناکارآمد است. ■

قضیه ۱۸.۴. *فرض کنید $A : I \implies M_{n\times n}(\mathbb{R})$ یک تابع ماتریسی و*

$$\varphi(t) = [\varphi_۱(t), \varphi_۲(t), \dots, \varphi_n(t)]$$

نیز یک ماتریس با ستون‌های $\varphi_۱(t), \varphi_۲(t), \dots, \varphi_n(t)$ باشد. در این صورت، $\varphi(t)$ جواب معادله ماتریسی (؟؟) است اگر و تنها اگر هر کدام از ستون‌های آن یعنی $\varphi_i(t)$ها جواب معادله برداری (؟؟) باشند. به‌علاوه اگر $\varphi(t) = [\varphi_۱(t), \varphi_۲(t), \dots, \varphi_n(t)]$ جواب معادله ماتریسی (؟؟) باشد، آنگاه برای بردار $C = [c_۱, c_۲, \dots, c_n]^T$، تابع برداری $x(t) = \varphi(t)C$ نیز جواب معادله برداری (؟؟) می‌باشد.

اثبات. *ابتدا فرض کنیم $\varphi_(t)$ جواب‌های معادله برداری (؟؟) باشند. پس داریم:*

$$\forall\ i = ۱, \dots, n \qquad \dot{\varphi}_i(t) = A(t)\varphi_i(t).$$

حال قرار می‌دهیم $\varphi(t) = [\varphi_۱(t), \varphi_۲(t), \dots, \varphi_n(t)]$. در این صورت داریم:

$$\dot{\varphi}(t) = [\dot{\varphi}_۱, \dots, \dot{\varphi}_n] = [A(t)\varphi_۱, \dots, A(t)\varphi_n] = A(t)\,[\varphi_۱, \dots, \varphi_n] = A(t)\varphi(t).$$

پس $\varphi(t)$ جواب معادله ماتریسی (؟؟) است.

برعکس: فرض کنیم $\varphi(t) = [\varphi_۱(t), \varphi_۲(t), \dots, \varphi_n(t)]$ جواب معادله ماتریسی (؟؟) باشد. پس داریم:

$$\dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t) = A(t)\,[\varphi_۱(t), \dots, \varphi_n(t)] = [A(t)\varphi_۱(t), \dots, A(t)\varphi_n(t)]$$
$$\implies \quad [\dot{\varphi}_۱, \dots, \dot{\varphi}_n] = [A(t)\varphi_۱, \dots, A(t)\varphi_n] \quad \implies \quad \begin{cases} \dot{\varphi}_۱ = A(t)\varphi_۱ \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_n = A(t)\varphi_n \end{cases}$$

پس برای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، $\varphi_i(t)$ جواب معادله برداری (؟؟) است.

برای قسمت دوم قضیه فرض کنیم $\varphi(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)]$ جواب دستگاه ماتریسی (؟؟) و $C = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$ یک بردار ثابت و دلخواه باشد. قرار می‌دهیم $x(t) = \varphi(t)C$. در این صورت داریم:

$$\dot{x}(t) = \dot{\varphi}(t)C = A(t)\varphi(t)C = A(t)x(t).$$

پس $x(t)$ یک جواب معادله برداری (؟؟) است. ■

قضیه ۱۹.۴. **(وجود و یکتایی جواب برای دستگاه ماتریسی)** *فرض کنید $A : I \implies M_{n\times n}(\mathbb{R})$ یک تابع ماتریسی پیوسته و $t_0 \in I$. در این صورت دستگاه ماتریسی*

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)X \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

روی I دارای جوابی یکتاست.

تعریف ۲۰.۴. **(اثر ماتریس)** برای ماتریس $A(t) = [a_{ij}(t)]_{n\times n}$، عبارت (تابع اسکالر)

$$tr\big(A(t)\big) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \dots + a_{nn}(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)$$

را اثر ماتریس $A(t)$ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۲۱.۴. **(لیوویل)** *فرض کنید $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$، جواب‌های معادله برداری $\dot{x} = A(t)x$ روی بازه‌ی I باشند. در این صورت، برای هر $t \in I$، رابطه یا فرمول زیر برقرار است:*

$$\det\varphi(t) = \det\varphi(t_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds\right]. \qquad (۳.۴)$$

رابطه بالا را فرمول لیوویل می‌نامیم.

اثبات. برای اثبات فرمول لیوویل می‌توان دو اثبات ارائه داد، یکی بر اساس بسط تیلور و دیگری بر اساس فرم ماتریسی و استفاده از خواص دترمینان. در اینجا، هر دو اثبات ارائه می‌شوند.

اثبات اول. قرار می‌دهیم

$$y(t) = \det(\varphi(t)),$$

و نشان می‌دهیم که

$$y'(t) = tr(A(t))y(t), \quad \forall\ t \in I.$$

نکته. با استفاده از تعریف بسط دترمینان، به راحتی می‌توان دید که

$$\det(I + \varepsilon A + O(\varepsilon^۲)) = ۱ + tr(A)\varepsilon + O(\varepsilon^۲).$$

حال فرض کنیم $t_\circ \in I$ دلخواه باشد. با استفاده از بسط تیلور حول $t_\circ$، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \varphi(t_\circ) + \varphi'(t_\circ)(t - t_\circ) + \ldots = \varphi(t_\circ) + A(t_\circ)\varphi(t_\circ)(t - t_\circ) + \ldots \\
&= (I + A(t_\circ)(t - t_\circ) + \ldots)\varphi(t_\circ) \\
\Longrightarrow \quad & \det(\varphi(t)) = \det(I + A(t_\circ)(t - t_\circ) + \ldots)\det(\varphi(t_\circ)) \\
\Longrightarrow \quad & y(t) = (۱ + tr(A(t_\circ))(t - t_\circ) + \ldots)y(t_\circ) = y(t_\circ) + tr(A(t_\circ))y(t_\circ)(t - t_\circ) + \ldots \\
\Longrightarrow \quad & y'(t_\circ) = tr(A(t_\circ))y(t_\circ). \qquad \square
\end{aligned}$$

اثبات دوم. فرض کنیم $R_۱, R_۲, \ldots, R_n$ به ترتیب سطرهای اول تا n ام ماتریس $\varphi(t)$ باشند

و فرض کنیم $A(t)=[a_{ij}]$، که در آن $1\leq i,j\leq n$. در این صورت،

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}=A\varphi \implies \dot{R}_1 &= a_{11}R_1+a_{12}R_2+\ldots+a_{1n}R_n,\\
\dot{R}_2 &= a_{21}R_1+a_{22}R_2+\ldots+a_{2n}R_n,\\
&\vdots\\
\dot{R}_n &= a_{n1}R_1+a_{n2}R_2+\ldots+a_{nn}R_n.
\end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\det(\varphi)=\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} R_1\\ R_2\\ \vdots\\ R_n\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \dot{R}_1\\ R_2\\ \vdots\\ R_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} R_1\\ \dot{R}_2\\ \vdots\\ R_n\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix} R_1\\ R_2\\ \vdots\\ \dot{R}_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}R_1+a_{12}R_2+\ldots+a_{1n}R_n\\ R_2\\ \vdots\\ R_n\end{vmatrix}\\
&+\begin{vmatrix} R_1\\ a_{21}R_1+a_{22}R_2+\ldots+a_{2n}R_n\\ \vdots\\ R_n\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix} R_1\\ R_2\\ \vdots\\ a_{n1}R_1+a_{n2}R_2+\ldots+a_{nn}R_n\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix} a_{11}R_1\\ R_2\\ \vdots\\ R_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} R_1\\ a_{22}R_2\\ \vdots\\ R_n\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix} R_1\\ R_2\\ \vdots\\ a_{nn}R_n\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} R_1\\ R_2\\ \vdots\\ R_n\end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} R_1\\ R_2\\ \vdots\\ R_n\end{vmatrix}+\ldots+a_{nn}\begin{vmatrix} R_1\\ R_2\\ \vdots\\ R_n\end{vmatrix}\\
&=(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})\begin{vmatrix} R_1\\ R_2\\ \vdots\\ R_n\end{vmatrix}=tr(A)\det(\varphi).
\end{aligned}$$

■

۱.۱.۴ نتایج حاصل از قضیه لیوویل

در این بخش، نتایج منتج از قضیه لیوویل را بیان می‌کنیم.

۱. چون $\varphi(t)=e^{At}$ یک جواب ماتریسی از معادله‌ی $\dot{x}=Ax$ است که در شرط اولیه

$I = \varphi(\circ)$ صدق می‌کند، لذا از قضیه لیوویل داریم

$$\det(e^{At}) = e^{\int_\circ^t tr(A)d\tau} = e^{tr(A)t} \implies \det(e^A) = e^{tr(A)}.$$

۲. فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ناحیه‌ای کراندار در $\mathbb{R}^n$ و $\Omega_t = \phi_t(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ انتقال یافته Ω تحت جریان $\phi_t(x_\circ) = e^{At}x_\circ$ از میدان برداری خطی $\dot{x} = Ax$ بعد از زمان t باشد. اگر نقاط داخل Ω_t را با $y = (y_1, \ldots, y_n)$ و نقاط داخل Ω را با $x = (x_1, \ldots, x_n)$ نمایش دهیم، آنگاه خواهیم داشت $y = e^{At}x$ و در نتیجه $\frac{\partial y}{\partial x} = e^{At}$. حال از قضیه تعویض متغیر در انتگرال چندمتغیره نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} V_t = \mathbf{vol}(\Omega_t) &= \int_{\Omega_t} dy = \int_\Omega \left|\det\left[\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right]\right| dx = \int_\Omega \det(e^{At})\, dx \\ &= \det(e^{At}) \int_\Omega dx = e^{tr(A)t} \int_\Omega dx = e^{tr(A)t}\mathbf{vol}(\Omega) \\ &= e^{tr(A)t}\, V_\circ. \end{aligned}$$

اگر $tr(A) = \circ$، یا بطور معادل، دیورژانس میدان برداری $\dot{x} = Ax$ متحد با صفر باشد، آنگاه $V_t = V_\circ$ به ازای هر $t \in \mathbb{R}$. از اینرو، چنین میدان برداری را **حافظ حجم** می‌نامند.

تعریف ۲۲.۴. میدان برداری $\dot{x} = f(x)$، که $x \in \mathbb{R}^n$، را حافظ حجم می‌نامیم، هرگاه دیورژانس آن متحد با صفر باشد، که این شرط معادل با صفر بودن اثر ماتریس یاکوبی (ژاکوبی) $Df(x)$ است. دلیل آن این است که اگر $\phi(t, x_\circ)$ جریان تولید شده توسط این میدان برداری باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} &\phi(\circ, x_\circ) = x_\circ \implies \frac{\partial\phi(\circ, x_\circ)}{\partial x_\circ} = I \implies \det\left[\frac{\partial\phi(\circ, x_\circ)}{\partial x_\circ}\right] = \det(I) = 1. \\ &\dot{\phi}(t, x_\circ) = f(\phi(t, x_\circ)) \implies \frac{\partial}{\partial x_\circ}\dot{\phi}(t, x_\circ) = Df(\phi(t, x_\circ)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_\circ}\phi(t, x_\circ) \\ &\implies \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial x_\circ}\phi(t, x_\circ)\right] = Df(\phi(t, x_\circ)) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_\circ}\phi(t, x_\circ)\right] \\ &\implies \det\left[\frac{\partial\phi(t, x_\circ)}{\partial x_\circ}\right] = \exp\left(\int_\circ^t tr\left[Df(\phi(\tau, x_\circ))\right] d\tau\right) = \exp(\circ) = e^\circ = 1. \end{aligned}$$

۳. فرض کنید $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$، جواب‌های معادله برداری $\dot{x} = A(t)x$ روی بازه I باشند. در این صورت، برای ماتریس $\varphi(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)]$ فقط یکی از دو حالت زیر رخ خواهد داد:

- برای هر $t \in I$، $\det \varphi(t) \neq 0$. این حالت زمانی رخ می‌دهد که $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ مستقل خطی باشند.

- برای هر $t \in I$، $\det \varphi(t) = 0$. این حالت زمانی رخ می‌دهد که $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ وابسته خطی باشند.

توجه داشته باشید که فرض نتیجه‌ی فوق بسیار مهم است، یعنی چنانچه توابع برداری $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ جواب دستگاه نباشند، نتیجه‌ی فوق در حالت کلی برقرار نخواهد بود. مثال زیر در همین رابطه است.

مثال ۲۳.۴. نشان دهید توابع برداری

$$\varphi_1(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \varphi_2(t) = \begin{bmatrix} t|t| \\ 1 \end{bmatrix}$$

مستقل خطی‌اند و برای ماتریس $\varphi(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t)]$ نشان دهید که $\det \varphi(0) = 0$. از این اتفاق چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

حل. فرض کنیم c_1 و c_2 ثابت‌هایی باشند که:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = 0 \implies c_1 \begin{bmatrix} t^2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} t|t| \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 t^2 + c_2 t|t| \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} = 0.$$

پس برای $t = -1$ نیز خواهیم داشت:

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \implies c_1 = c_2 = 0.$$

پس $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ مستقل خطی‌اند. همچنین،

$$\varphi(t)=\begin{bmatrix} t^۲ & t|t| \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \implies \varphi(\circ)=\begin{bmatrix} \circ & \circ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \implies \det\varphi(\circ)=\circ.$$

از این اتفاق نتیجه می‌گیریم که $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ نمی‌توانند جواب‌های دستگاه $\dot{x}=A(t)x$ باشند. ■

تعریف ۲۴.۴. (ماتریس اساسی جواب) تابع ماتریسی $\varphi_{n\times n}(t)$ را یک ماتریس اساسی جواب برای دستگاه برداری $\dot{x}=A(t)x$ گوییم هرگاه:

- $\varphi_{n\times n}(t)$ جواب دستگاه ماتریسی $\dot{X}=A(t)X$ باشد.
- $\forall t\in I:\det\varphi(t)\neq\circ$

قضیه ۲۵.۴. *تابع ماتریسی $\varphi_{n\times n}(t)$ یک ماتریس اساسی جواب برای دستگاه $\dot{x}=A(t)x$ است اگر و تنها اگر ستون‌های $\varphi(t)$، n جواب مستقل خطی از دستگاه برداری باشند. به‌علاوه اگر $\varphi(t)$ ماتریس اساسی جواب برای $\dot{x}=A(t)x$ باشد، آنگاه جواب عمومی دستگاه به صورت $x(t)=\varphi(t)C$ خواهد بود که در آن $C=[c_۱,c_۲,\dots,c_n]^T$ یک بردار ثابت است.*

نتیجه ۲۶.۴. *تابع ماتریسی $\varphi_{n\times n}(t)$ یک ماتریس اساسی جواب برای دستگاه $\dot{x}=A(t)x$ است اگر و تنها اگر $t_\circ\in I$ موجود باشد که $\det\varphi(t_\circ)\neq\circ$.*

مثال ۲۷.۴. یک ماتریس اساسی جواب برای دستگاه زیر بدست آورده و با استفاده از آن جواب عمومی دستگاه را معرفی کنید.

$$\begin{cases}\dot{x}_۱=-۲x_۱+۳x_۲\\ \dot{x}_۲=۲x_۱+۳x_۲\end{cases}$$

حل. ابتدا دستگاه فوق را به صورت یک دستگاه برداری بازنویسی می‌کنیم:

$$\dot{x}=Ax=\underbrace{\begin{bmatrix}-۲ & ۳\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}}_{A}x,$$

و سپس مقادیر ویژه و بردارهای ویژه نظیر آنها را برای ماتریس ضرایب A بدست می‌آوریم:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-۲-\lambda & ۳\\ ۲ & ۳-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-۳)(\lambda+۲)-۶=۰ \implies \begin{cases}\lambda_۱=۴\\ \lambda_۲=-۳\end{cases}$$

بردار ویژه نظیر $\lambda_۱=۴$ برابر است با:

$$(A-۴I)\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۶ & ۳\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\end{bmatrix}=۰ \implies \begin{cases}-۶x_۱+۳x_۲ &=۰\\ ۲x_۱-x_۲ &=۰\end{cases} \implies x_۲=۲x_۱.$$

$$\implies \begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_۱\\۲x_۱\end{bmatrix}=x_۱\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix} \implies X^{(۱)}=\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}.$$

پس یکی از جواب‌های دستگاه برابر است با:

$$\varphi_۱(t)=e^{۴t}\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}.$$

حال بردار ویژه نظیر $\lambda_۲=-۳$ را بدست می‌آوریم:

$$(A+۳I)\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ ۲ & ۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\end{bmatrix}=۰ \implies \begin{cases}x_۱+۳x_۲=۰\\ ۲x_۱+۶x_۲=۰\end{cases} \implies x_۱=-۳x_۲.$$

$$\implies \begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳x_۲\\x_۲\end{bmatrix}=x_۲\begin{bmatrix}-۳\\۱\end{bmatrix} \implies X^{(۲)}=\begin{bmatrix}-۳\\۱\end{bmatrix}.$$

پس جواب دوم دستگاه نیز برابر است با:

$$\varphi_۲(t)=e^{-۳t}\begin{bmatrix}-۳\\۱\end{bmatrix}.$$

توجه کنید که چون $X^{(۱)}$ و $X^{(۲)}$ مستقل خطی‌اند، پس $\varphi_۱(t)$ و $\varphi_۲(t)$ نیز مستقل خطی هستند. حال قرار می‌دهیم:

$$\varphi(t)=[\varphi_۱(t),\varphi_۲(t)]=\begin{bmatrix}e^{۴t} & -۳e^{-۳t}\\ ۲e^{۴t} & e^{-۳t}\end{bmatrix}.$$

از آنجایی که ستون‌های ماتریس $\varphi(t)$ جواب‌های دستگاه برداری هستند، برای اینکه $\varphi(t)$ یک ماتریس اساسی جواب باشد، کافی است نشان دهیم برای هر t دترمینان این ماتریس غیرصفر است. در واقع،

$$\det\varphi(t)=e^{۴t}e^{-۳t}+۶e^{۴t}e^{-۳t}=۷e^{t}>۰.$$

پس $\varphi(t)$ یک ماتریس اساسی جواب برای دستگاه برداری مذکور است و لذا جواب عمومی دستگاه عبارت است از:

$$x(t) = \varphi(t)C = \begin{bmatrix} e^{4t} & -3e^{-3t} \\ 2e^{4t} & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t).$$

■

قضیه ۲۸.۴. *اگر $\varphi(t)$ یک ماتریس اساسی جواب از دستگاه برداری $\dot{x} = A(t)x$ و B یک ماتریس ثابت وارون‌پذیر باشد، آنگاه $\psi(t) = \varphi(t)B$ جواب عمومی دستگاه ماتریسی $\dot{X} = A(t)X$ خواهد بود. علاوه بر این، $\psi(t)$ یک ماتریس اساسی جواب برای دستگاه برداری نیز هست.*

اثبات. *اولاً واضح است که $\psi(t)$ جواب دستگاه ماتریسی است چرا که*

$$\dot{\psi}(t) = \dot{\varphi}(t)B = A\varphi(t)B = A\psi(t).$$

از آنجایی که $\psi(t)$ جواب دستگاه ماتریسی است، برای اینکه ماتریس جواب دستگاه برداری نیز باشد، کافی است نشان دهیم $\det\psi(t) \neq 0$. داریم

$$\det\psi(t) = \det\left(\varphi(t)B\right) = \det\varphi(t)\det(B) \neq 0.$$

پس $\psi(t)$ ماتریس جواب دستگاه برداری است. ■

۲.۴ روش تابع ماتریس نمایی

در بخش قبل با روش مقدار ویژه برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی آشنا شدیم. اما دیدیم در مواقعی که ماتریس ضرایب دارای مقدار ویژه تکراری باشد و یا تکرار هندسی از تکرار جبری کمتر باشد، این روش برای حل دستگاه، ناکارآمد خواهد بود. برای حل این مشکل، در این بخش به بیان روش دیگری تحت عنوان تابع ماتریس نمایی می‌پردازیم.

تعریف ۲۹.۴. (تابع ماتریس نمایی) فرض کنیم A یک ماتریس $n\times n$ باشد. در این صورت، e^{At} را تابع ماتریس نمایی می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k=I+tA+\frac{t^2}{2!}A^2+\dots.$$

قضیه ۳۰.۴. *فرض کنیم A یک ماتریس $n\times n$ باشد. در این صورت، تابع ماتریس نمایی e^{At} جواب دستگاه ماتریسی زیر است:*

$$\begin{cases}\dot{X}=AX,\\ X(0)=I_{n\times n}\end{cases}$$

اثبات. *قرار می‌دهیم $\varphi(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k$. نشان می‌دهیم که $\varphi(t)$ جواب مساله مقدار اولیه داده شده است. می‌توان نشان داد که سری اخیر، همگرای یکنواخت است و بنابراین مجازیم که از سری جمله به جمله مشتق بگیریم. پس داریم:*

$$\dot{\varphi}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{t^{k-1}}{k!}A^k=A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1}=A\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}A^j=A\varphi(t).$$

از طرفی $\varphi(0)=I+0+\dots=I$. پس e^{At} جواب مسئله مقدار اولیه است. ■

ملاحظه ۳۱.۴. *اگر چه ماتریس e^{At} به صورت $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k$ تعریف شد و محاسبه‌ی آن در حالات خاص برای ماتریس‌های قطری یا مثلثی امکان‌پذیر است، اما تعیین مقدار این سری در حالت کلی کاری دشوار و گاهی غیر ممکن است. در ادامه، برای حل این مشکل، قضایا و روش‌هایی را بیان خواهیم کرد که کار را تا حد زیادی آسان می‌کند.*

قضیه ۳۲.۴. *فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی ثابت باشند. در این صورت،*

آ) $\forall t\in\mathbb{R},\quad \frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}$

ب) $\forall t\in\mathbb{R},\quad \det e^{At}>0$ *(بنابراین، e^{At} یک ماتریس اساسی جواب برای معادله $\dot{x}=Ax$ است.)*

ج) $\forall s,t \in \mathbb{R}, \quad e^{A(s+t)} = e^{As}e^{At}$

د) برای هر $t \in \mathbb{R}$ داریم $\left(e^{At}\right)^{-۱} = e^{-At}$. به ویژه، $\left(e^{A}\right)^{-۱} = e^{-A}$.

ه) اگر $AB = BA$، آنگاه برای هر $t \in \mathbb{R}$ داریم $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$. به ویژه، $e^{A+B} = e^{A}e^{B}$.

و) برای هر ماتریس معکوس‌پذیر P داریم $e^{P^{-۱}AP} = P^{-۱}e^{A}P$ یا $e^{PAP^{-۱}} = Pe^{A}P^{-۱}$.

ز) اگر $A = diag[\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_n]$، آنگاه $e^{At} = diag[e^{\lambda_۱ t}, e^{\lambda_۲ t}, \ldots, e^{\lambda_n t}]$.

مثال ۳۳.۴. ماتریس e^{At} را محاسبه کنید هرگاه

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}.$$

حل. ماتریس A پایین مثلثی است، پس مقادیر ویژه‌ی آن روی قطر اصلی قرار دارند. پس $\lambda_۱ = ۱$، $\lambda_۲ = ۲$، $\lambda_۳ = ۳$، و A یک ماتریس قطری شدنی است.

بردار ویژه‌ی نظیر هر یک از مقادیر ویژه فوق را بدست می‌آوریم:

$$(A-\lambda_۱ I)\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = ۰ \implies \begin{cases} x_۲ = ۰ \\ x_۱ + ۲x_۳ = ۰ \\ x_۳ = -\frac{۱}{۲}x_۱ \end{cases} \implies X^{(۱)} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}.$$

$$(A-\lambda_۲ I)\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = ۰ \implies \begin{cases} x_۱ = ۰ \\ x_۲ + x_۳ = ۰ \end{cases} \implies X^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}.$$

$$(A-\lambda_۳ I)\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = ۰ \implies \begin{cases} x_۱ = ۰ \\ x_۲ = ۰ \\ x_۱ + x_۲ = ۰ \end{cases} \implies X^{(۳)} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}.$$

بنابراین، ماتریس وارون‌پذیر P عبارت است از

$$P = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}.$$

در نتیجه،

$$P^{-۱}AP = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}.$$

حال طبق قضیه قبل داریم

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & ۰ & ۰ \\ ۰ & e^{۲t} & ۰ \\ ۰ & ۰ & e^{۳t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & ۰ & ۰ \\ ۰ & e^{۲t} & ۰ \\ \frac{۱}{۲}e^t(e^{۲t}-۱) & e^{۲t}(e^t-۱) & e^{۳t} \end{bmatrix}.$$

■

تذکر ۳۴.۴. *اگر A یک ماتریس ثابت $n \times n$ باشد که قطری شدنی نیست، آنگاه ماتریس معکوس‌پذیر P وجود دارد که ستون‌های آن از بردارهای ویژه تعمیم‌یافته A تشکیل شده و $P^{-۱}AP = J$ که J در فرم جردن قرار دارد. از طرفی، از جبر خطی می‌دانیم که J را می‌توان به صورت $J = \Lambda + N$ نوشت که در آن Λ یک ماتریس قطری و N یک ماتریس پوچ‌توان است و $\Lambda N = N\Lambda$. در این حالت، محاسبه‌ی ماتریس e^{At} ساده شده و داریم:*

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-۱} = Pe^{(\Lambda+N)t}P^{-۱} = Pe^{\Lambda t}e^{Nt}P^{-۱}.$$

مثال ۳۵.۴. با استفاده از سری توانی، e^{At} را برای ماتریس زیر حساب کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}.$$

حل. می‌بینیم که A در فرم جردن است و می‌توانیم بنویسیم:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}}_{\Lambda} + \underbrace{\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}}_{N},$$

که در آن $\Lambda = ۲I$ و

$$N = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \quad N^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \quad N^۳ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$$

پس

$$e^{At}=e^{(\Lambda+N)t}=e^{\Lambda t}e^{Nt}=e^{۲t}\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\left(I+tN+\frac{t^۲}{۲!}N^۲+۰+۰+\dots\right)$$

$$=e^{۲t}\left(\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰&t&۰\\۰&۰&t\\۰&۰&۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰&۰&\frac{t^۲}{۲}\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\right)=e^{۲t}\begin{bmatrix}۱&t&\frac{t^۲}{۲}\\۰&۱&t\\۰&۰&۱\end{bmatrix}.$$

■

مثال ۳۶.۴. برای ماتریس زیر، e^{At} را حساب کنید.

$$A=\begin{bmatrix}۲&۴&۳\\-۴&-۶&-۳\\۳&۳&۱\end{bmatrix}.$$

حل. در اینجا محاسبه‌ی e^{At} مستقیماً از طریق سری توانی تعریف، کاری بسیار دشوار و حتی غیر ممکن است. اما می‌توان با استفاده از تذکر ۳۴.۴، این کار را انجام داد. برای این منظور، ماتریس A را در فرم جردن قرار می‌دهیم. اول، مقادیر ویژه‌ی A را بدست می‌آوریم.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}۲-\lambda&۴&۳\\-۴&-۶-\lambda&-۳\\۳&۳&۱-\lambda\end{vmatrix}=(۱-\lambda)(\lambda+۲)^۲=۰\implies\begin{cases}\lambda_۱=۱\\\lambda_۲=\lambda_۳=-۲\end{cases}$$

اکنون بردارهای ویژه را بدست آورده و ماتریس P را تشکیل می‌دهیم. در ادامه خواهید دید که برای $\lambda_۲$ که یک مقدار ویژه تکراری است لازم است که بردار ویژه تعمیم یافته بیابیم.

محاسبه بردار ویژه نظیر $\lambda_۱=۱$:

$$(A-I)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۴&۳\\-۴&-۷&-۳\\۳&۳&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\۰\\۰\end{bmatrix}\implies\begin{cases}x+۴y+۳z=۰\\-۴x-۷y-۳z=۰\\۳x+۳y=۰\end{cases}\implies\begin{cases}y=-x\\z=x\end{cases}$$

پس $V_۱=[۱,-۱,۱]^T$. محاسبه بردار ویژه نظیر $\lambda_۲=\lambda_۳=-۲$:

$$(A+۲I)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۴&۳\\-۴&-۴&-۳\\۳&۳&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\۰\\۰\end{bmatrix}\implies\begin{cases}۴x+۴y+۳z=۰\\-۴x-۴y-۳z=۰\\۳x+۳y+۳z=۰\end{cases}$$

در اینجا معادله اول و دوم یکسانند و از معادله سوم داریم $z=-x-y$ که با جایگذاری در معادله اول خواهیم داشت $y=-x$. پس $z=0$. لذا بردار ویژه‌ی دوم هم برابر است با $V_2=[1,-1,0]^T$. حال بردار V_3 را چنان می‌یابیم که $(A+2I)V_3=V_2$. لذا باید داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -4 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} 4x+4y+3z=1 \\ -4x-4y-3z=-1 \\ 3x+3y+3z=0 \end{cases}$$

در اینجا هم معادله اول و دوم یکسانند و از معادله سوم داریم $z=-x-y$ که با جایگذاری در معادله اول خواهیم داشت $y=-x+1$. پس $z=-1$. بنابراین، بردار ویژه تعمیم‌یافته برابر است با $V_3=[0,1,-1]^T$. پس ماتریس P برابر است با:

$$P=[V_1\ V_2\ V_3]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

در این صورت با محاسبه P^{-1} خواهیم دید که:

$$P^{-1}AP=J=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\Lambda}+\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N}.$$

توجه کنید که $N^2=0$. پس در ادامه داریم:

$$e^{Nt}=I+tN=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad e^{\Lambda t}=\begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix},$$
$$e^{Jt}=e^{(\Lambda+N)t}=e^{\Lambda t}e^{Nt}=\begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

و در نهایت

$$e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}=\begin{bmatrix} e^{-2t}\left(t+e^{3t}\right) & e^{-2t}\left(t+e^{3t}-1\right) & e^{-2t}\left(-1+e^{3t}\right) \\ -e^{-2t}\left(t+e^{3t}-1\right) & -e^{-2t}\left(t+e^{3t}-2\right) & -e^{-2t}\left(-1+e^{3t}\right) \\ e^{-2t}\left(-1+e^{3t}\right) & e^{-2t}\left(-1+e^{3t}\right) & e^{t} \end{bmatrix}.$$

■

قضیه ۳۷.۴. (*الگوریتم پوتزر برای یافتن e^{At}*) *فرض کنید $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه (نه لزوماً متمایز) ماتریس ثابت A باشند. در این صورت*

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} P_{k+1}(t) M_k,$$

که در آن

$$M_0 = I, \quad M_k = \prod_{i=1}^{k} (A - \lambda_i I), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

و تابع برداری $P(t) = [P_1(t), \ldots, P_n(t)]^T$ جواب مساله مقدار اولیه

$$\dot{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ 1 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_n \end{bmatrix} P,$$

با شرط اولیه $P(0) = [1, 0, \ldots, 0]^T$ است.

اثبات. در مرحله اول داریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \\ \vdots \\ \dot{P}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ 1 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \dot{P}_1 = \lambda_1 P_1, \quad P_1(0) = 1 \\ \dot{P}_2 = P_1 + \lambda_2 P_2, \quad P_2(0) = 0 \\ \quad \vdots \\ \dot{P}_n = P_{n-1} + \lambda_n P_n, \quad P_n(0) = 0 \end{cases}$$

حال قرار می‌دهیم $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} P_{k+1}(t) M_k$ و نشان می‌دهیم که $\varphi(t)$ جواب مساله مقدار اولیه

$$\begin{cases} \dot{X} = AX, \\ X(0) = I \end{cases}$$

است. ابتدا توجه کنید که

$$\varphi(0) = \sum_{k=0}^{n-1} P_{k+1}(0) M_k = I.$$

پس در شرط اولیه صدق می‌کند. از طرف دیگر، با استفاده از معادلات (۴.۴)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) - A\varphi(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \dot{P}_{k+1}(t)M_k - A\sum_{k=0}^{n-1} P_{k+1}(t)M_k \\ &= \dot{P}_1(t)M_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \dot{P}_{k+1}(t)M_k - \sum_{k=0}^{n-1} AP_{k+1}(t)M_k \\ &= \lambda_1 P_1(t)M_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\big(P_k(t) + \lambda_{k+1}P_{k+1}(t)\big)M_k - \sum_{k=0}^{n-1} P_{k+1}(t)AM_k.\end{aligned}$$

با توجه به تعریف M_k داریم:

$$M_{k+1} = \prod_{i=1}^{k+1}\big(A - \lambda_i I\big) = \overbrace{\left(\prod_{i=1}^{k}\big(A-\lambda_i I\big)\right)}^{M_k}\big(A - \lambda_{k+1}I\big) \implies AM_k = M_{k+1} + \lambda_{k+1}M_k.$$

با جایگذاری این نتیجه در عبارت قبلی، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) - A\varphi(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} P_k(t)M_k - \sum_{k=0}^{n-1} P_{k+1}(t)M_{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P_k(t)M_k - \sum_{k=1}^{n} P_k(t)M_k = -P_n(t)M_n.\end{aligned}$$

اما طبق قضیه کیلی همیلتون، $M_n = 0$ و در نتیجه،

$$\dot{\varphi}(t) - A\varphi(t) = 0 \implies \dot{\varphi}(t) = A\varphi(t).$$

از آنجایی که e^{At} نیز جواب این دستگاه است، پس طبق قضیه وجود و یکتایی جواب، داریم

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} P_{k+1}(t)M_k.$$

■

مثال ۳۸.۴. برای $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$، ماتریس e^{At} را محاسبه کرده و با استفاده از آن جواب عمومی دستگاه برداری $\dot{x} = Ax$ را معرفی کنید.

حل. این دستگاه را با استفاده از الگوریتم پوتزر حل می‌کنیم.

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{2-1} P_{k+1}(t)M_k = P_1(t)M_0 + P_2(t)M_1.$$

برای محاسبه M_1 و P_iها می‌بایست مقادیر ویژه‌ی A را بیابیم. داریم

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies (\lambda-1)(\lambda-3)+1=0 \implies \lambda_1=\lambda_2=2.$$

در این صورت،

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \prod_{i=1}^{1}(A-2I) = (A-2I) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

همچنین، برای P_iها داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{P}_1 = 2P_1, \quad P_1(0)=1 \\ \dot{P}_2 = P_1 + 2P_2, \quad P_2(0)=0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} P_1(t) = e^{2t} \\ P_2(t) = te^{2t} \end{array} \right.$$

حال می‌توانیم e^{At} را به صورت زیر بدست آوریم:

$$e^{At} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{2t}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}-te^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t}+te^{2t} \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix}.$$

بنابراین، جواب عمومی دستگاه برداری $\dot{x} = Ax$ عبارت است از:

$$x(t) = e^{At}C = e^{2t}\begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1e^{2t}\begin{bmatrix} 1-t \\ -t \end{bmatrix} + c_2e^{2t}\begin{bmatrix} t \\ 1+t \end{bmatrix}.$$

■

مثال ۳۹.۴. برای $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$، ماتریس e^{At} را محاسبه کرده و با استفاده از آن جواب عمومی دستگاه برداری $\dot{x} = Ax$ را معرفی کنید.

حل. با استفاده از الگوریتم پوتزر داریم

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{2-1} P_{k+1}(t)M_k = P_1(t)M_0 + P_2(t)M_1.$$

برای محاسبه‌ی مقادیر ویژه‌ی A داریم:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 5 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0 \implies (\lambda-1)(\lambda+1)+5=0 \implies \begin{cases}\lambda_1=2i\\ \lambda_2=-2i\end{cases}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$M_1=\prod_{i=1}^{1}(A-2iI)=(A-2iI)=\begin{bmatrix}1-2i & -1\\ 5 & -1-2i\end{bmatrix}.$$

همچنین، برای P_iها داریم:

$$\begin{cases}\dot{P}_1=2iP_1,\quad P_1(0)=1 \implies P_1(t)=e^{2it}=\cos 2t+i\sin 2t\\[2ex] \dot{P}_2=P_1-2iP_2,\quad P_2(0)=0 \implies P_2(t)=-\frac{1}{4}ie^{2it}+\frac{1}{4}ie^{-2it}\end{cases}$$

عبارت $P_2(t)$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}P_2(t)&=-\frac{1}{4}ie^{2it}+\frac{1}{4}ie^{-2it}=-\frac{1}{4}i\big(\cos 2t+i\sin 2t\big)+\frac{1}{4}i\big(\cos 2t-i\sin 2t\big)\\ &=-\frac{1}{4}i^2\sin 2t-\frac{1}{4}\sin 2t=\frac{1}{2}\sin 2t.\end{aligned}$$

حال می‌توانیم e^{At} را به صورت زیر بدست آوریم:

$$\begin{aligned}e^{At}&=\big(\cos 2t+i\sin 2t\big)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\sin 2t\begin{bmatrix}1-2i & -1\\ 5 & -1-2i\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t & -\frac{1}{2}\sin 2t\\ \frac{5}{2}\sin 2t & \cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

بنابراین، جواب عمومی دستگاه برداری مورد نظر عبارت است از

$$x(t)=e^{At}C=e^{At}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\\ \frac{5}{2}\sin 2t\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\sin 2t\\ \cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\end{bmatrix}.$$

■

مثال ۴۰.۴. با استفاده از الگوریتم پوتزر، دستگاه مقدار اولیه برداری زیر را حل کنید.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}x,\quad x(0)=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}.$$

حل. با استفاده از فرمول ارائه شده توسط پوتزر، داریم

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{2} P_{k+1}(t)M_k = P_1(t)M_0 + P_2(t)M_1 + P_3(t)M_2.$$

از آنجایی که ماتریس ضرایب یک ماتریس پایین مثلثی است، مقادیر ویژه همان مقادیر روی قطر اصلی هستند، یعنی $\lambda_1 = 2$، $\lambda_2 = 2$، و $\lambda_3 = 3$. پس طبق تعریف،

$$\begin{aligned}
M_0 &= I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
M_1 &= (A - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
M_2 &= (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

حال P_iها را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \\ \dot{P}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}, \qquad P(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{P}_1 = 2P_1, & P_1(0) = 1 \implies P_1(t) = e^{2t} \\ \dot{P}_2 = P_1 + 2P_2, & P_2(0) = 0 \implies P_2(t) = te^{2t} \\ \dot{P}_3 = P_2 + 3P_3, & P_3(0) = 0 \implies P_3(t) = -te^{2t} - e^{2t} + e^{3t} \end{cases}$$

با جایگذاری موارد بدست آمده در بالا در فرمول پوتزر، می‌یابیم که

$$e^{At} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{2t} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{3t} - (1+t)e^{2t}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} & 0 \\ -e^{2t} + e^{3t} & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

پس جواب عمومی دستگاه داده شده به صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$x(t) = e^{At} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ te^{2t} \\ -e^{2t} + e^{3t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix}.$$

با اعمال شرط اولیه داده شده، خواهیم داشت $c_۱ = ۱, c_۲ = ۲, c_۳ = ۳$. پس جواب دستگاه مقدار اولیه مورد سوال برابر است با

$$x(t) = e^{At} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{۲t} \\ (t+۲)e^{۲t} \\ ۴e^{۳t} - e^{۲t} \end{bmatrix}.$$

■

همانطور که قبلاً بیان شد، برای بررسی یک دستگاه برداری ناهمگن، لازم است که دستگاه همگن نظیر آن بررسی شود. اکنون پس از بررسی دستگاه همگن در بخش‌های قبل، می‌توانیم به بررسی دستگاه ناهمگن آن پرداخته و در این رابطه، قضیه‌ی زیر را می‌آوریم.

قضیه ۴۱.۴. (فرمول تغییر ثابت) *فرض کنید $A(t)$ یک تابع ماتریسی $n \times n$ و پیوسته روی I و $b(t)$ یک تابع برداری پیوسته روی I باشد. در این صورت، جواب مساله‌ی مقدار اولیه*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + b(t), \\ x(t_۰) = x_۰ \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

عبارت است از

$$x(t) = \varphi(t)\varphi^{-۱}(t_۰)x_۰ + \varphi(t)\int_{t_۰}^{t} \varphi^{-۱}(s)\, b(s)ds, \qquad (۵.۴)$$

که در آن $\varphi(t)$ ماتریس اساسی جواب معادله همگن $\dot{x} = A(t)x$ است.

اثبات. از تغییر متغیر $x = \varphi(t)z$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} x = \varphi(t)z &\implies \dot{x} = \dot{\varphi}(t)z + \varphi(t)\dot{z} \implies A(t)\varphi(t)z + b(t) = A(t)\varphi(t)z + \varphi(t)\dot{z} \\ &\implies b(t) = \varphi(t)\dot{z} \implies \dot{z} = \varphi^{-۱}(t)b(t) \implies z(t) = z(t_۰) + \int_{t_۰}^{t} \varphi^{-۱}(s)\, b(s)ds \\ &\implies x(t) = \varphi(t)z(t) = \varphi(t)\left[\varphi^{-۱}(t_۰)x_۰ + \int_{t_۰}^{t} \varphi^{-۱}(s)\, b(s)ds\right]. \end{aligned}$$

■

نتیجه ۴۲.۴. *حالت خاصی از قضیه قبل وقتی است که ماتریس $A(t)$ یک ماتریس ثابت باشد. در این حالت، فرمول تغییر ثابت را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:*
فرض کنید A یک ماتریس ثابت $n \times n$ و $b(t)$ یک تابع برداری پیوسته روی I باشد. در این صورت، جواب مساله‌ی مقدار اولیه

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b(t), \\ x(t_۰) = x_۰ \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

با فرمول زیر داده می‌شود:

$$x(t) = e^{A(t-t_۰)}x_۰ + \int_{t_۰}^{t} e^{A(t-s)}b(s)ds. \qquad (۶.۴)$$

مثال ۴۳.۴. مساله مقدار اولیه‌ی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \dot{x}_۱ = x_۱ + x_۲ + e^{۲t}, & x_۱(۰) = ۲ \\ \dot{x}_۲ = -x_۱ + ۳x_۲ + ۲e^{۲t}, & x_۲(۰) = ۱ \end{cases}$$

حل. ابتدا معادله را به صورت ماتریسی بازنویسی می‌کنیم:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} e^{۲t} \\ ۲e^{۲t} \end{bmatrix}}_{b(t)}, \quad x(۰) = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}.$$

دستگاه همگن نظیر این دستگاه را در مثال ۳۸.۴ حل کردیم و دیدیم که ماتریس اساسی جواب آن برابر است با

$$e^{At} = e^{۲t} \begin{bmatrix} ۱-t & t \\ -t & ۱+t \end{bmatrix}.$$

چون A یک ماتریس ثابت است، از نتیجه قبل (فرمول تغییر ثابت (۶.۴)) داریم:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}[x_۰ + \int_۰^t e^{-As}b(s)ds] = e^{At}\left[\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} + \int_۰^t e^{-۲s}\begin{bmatrix} ۱+s & -s \\ s & ۱-s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{۲s} \\ ۲e^{۲s} \end{bmatrix} ds\right] \\ &= e^{At}\left[\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} + \int_۰^t \begin{bmatrix} ۱-s \\ ۲-s \end{bmatrix} ds\right] = e^{۲t}\begin{bmatrix} ۱-t & t \\ -t & ۱+t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲+t-\frac{t^۲}{۲} \\ ۱+۲t-\frac{t^۲}{۲} \end{bmatrix} \\ &= e^{۲t}\begin{bmatrix} ۲+\frac{t^۲}{۲} \\ ۱+t+\frac{t^۲}{۲} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

مثال ۴۴.۴. مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2te^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

حل. قبل از هرچیز دقت کنید که ماتریس ضرایب خاصیت جالبی دارد و آن هم اینکه می‌توان آنرا به شکل زیر نوشت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N}.$$

که در آن $IN = NI$ و به علاوه،

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^3 = 0.$$

بنابراین،

$$e^{At} = e^{(I+N)t} = e^{It}e^{Nt} = e^t I \left(I + tN + \frac{t^2}{2!}N^2 + 0 \right) = e^t \begin{bmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

حال برای محاسبه جواب دستگاه، از فرمول تغییر ثابت استفاده می‌کنیم:

$$x(t) = e^{At} \left(x_0 + \int_0^t e^{-As} b(s) ds \right)$$

$$= e^{At} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{-s} \begin{bmatrix} 1 & -2s & 2s^2 \\ 0 & 1 & -2s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2se^s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds \right)$$

$$= e^t \begin{bmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 + t^2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 2 + 2t + t^2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

■

تا کنون روش‌هایی که برای بدست آوردن ماتریس اساسی جواب یک دستگاه بیان شد، مختص دستگاه‌های برداری با ماتریس ضرایب ثابت بود. قضیه‌ی زیر روش محاسبه ماتریس اساسی جواب برای دستگاه‌های با ضرایب غیرثابت را ارائه می‌دهد.

قضیه ۴۵.۴. *فرض کنید $A(t)$ یک تابع ماتریسی $n\times n$ و پیوسته روی بازه I شامل $t_۰$ باشد و*

$$\forall\ s,t\in I,\quad A(t)A(s)=A(s)A(t).$$

در این صورت، ماتریس

$$\varphi(t)=\exp\left[\int_{t_۰}^{t}A(s)ds\right],$$

یک ماتریس اساسی جواب برای دستگاه برداری $\dot{x}=A(t)x$ است.

مثال ۴۶.۴. دستگاه مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{t} & ۰\\ ۰ & \frac{۲}{t}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}t^۲\\ t\end{bmatrix},\quad x(۱)=\begin{bmatrix}۱\\ -۲\end{bmatrix}.$$

حل. شرط قضیه‌ی قبل را برای ماتریس ضرایب روی بازه $I=(۰,+\infty)$ شامل $t_۰=۱$ بررسی می‌کنیم. داریم

$$A(t)=\begin{bmatrix}\frac{۱}{t} & ۰\\ ۰ & \frac{۲}{t}\end{bmatrix}\implies A(t)A(s)=\begin{bmatrix}\frac{۱}{ts} & ۰\\ ۰ & \frac{۴}{ts}\end{bmatrix}=A(s)A(t),\ \forall\ t,s>۰.$$

بنابراین، ماتریس اساسی جواب دستگاه همگن نظیر برابر است با

$$\varphi(t)=\exp\left(\int_۱^t\begin{bmatrix}\frac{۱}{s} & ۰\\ ۰ & \frac{۲}{s}\end{bmatrix}ds\right)=\exp\left(\begin{bmatrix}\ln t & ۰\\ ۰ & \ln t^۲\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}e^{\ln t} & ۰\\ ۰ & e^{\ln t^۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t & ۰\\ ۰ & t^۲\end{bmatrix}.$$

همچنین، برای $\varphi^{-۱}(t)$ داریم

$$\varphi^{-۱}(t)=\begin{bmatrix}\frac{۱}{t} & ۰\\ ۰ & \frac{۱}{t^۲}\end{bmatrix}.$$

در نتیجه،

$$\varphi^{-۱}(s)b(s)=\begin{bmatrix}\frac{۱}{s} & ۰\\ ۰ & \frac{۱}{s^۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s^۲\\ s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s\\ \frac{۱}{s}\end{bmatrix},\quad \int_۱^t\varphi^{-۱}(s)b(s)ds=\int_۱^t\begin{bmatrix}s\\ \frac{۱}{s}\end{bmatrix}ds=\begin{bmatrix}\frac{t^۲}{۲}-\frac{۱}{۲}\\ \ln t\end{bmatrix}.$$

حال با استفاده از فرمول تغییر ثابت (۵.۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}x(t)&=\varphi(t)\varphi^{-۱}(۱)x(۱)+\varphi(t)\int_۱^t\varphi^{-۱}(s)b(s)ds\\ &=\begin{bmatrix}t & ۰\\ ۰ & t^۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ -۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t & ۰\\ ۰ & t^۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}(t^۲-۱)\\ \ln t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}t(۱+t^۲)\\ t^۲(\ln t-۲)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

■

۳.۴ پایداری دستگاه‌های خطی

در فصل قبل با دستگاه‌های خودگردان آشنا شدیم. گفتیم که در دستگاه خودگردان $\dot{x} = f(x)$، ریشه‌های $f(x)$ را نقطه‌ی تعادل می‌نامند و سپس در مورد پایداری آن‌ها بحث کردیم. حال با این تعریف، در دستگاه خطی همگن $\dot{x} = Ax$ بردار $x = \circ$ یک نقطه تعادل دستگاه است که آن را **نقطه تعادل بدیهی** دستگاه می‌نامیم. در این بخش، در مورد پایداری این نقطه تعادل بدیهی صحبت خواهیم کرد.

تعریف ۴۷.۴. (پایداری نقطه تعادل بدیهی) فرض کنید A یک ماتریس ثابت $n \times n$ حقیقی و $\varphi(t, x_\circ)$ جواب مساله مقدار اولیه زیر باشد:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \ x \in \mathbb{R}^n, \\ x(\circ) = x_\circ \end{cases}$$

آ) گوییم نقطه تعادل بدیهی $x = \circ$ پایدار لیاپانوف است هرگاه:

$$\forall\, \varepsilon > \circ,\ \exists\, \delta > \circ;\ \ \forall\, y_\circ :\ |y_\circ| < \delta \implies |\varphi(t, y_\circ)| < \varepsilon.$$

ب) نقطه تعادل بدیهی $x = \circ$ ناپایدار است هرگاه پایدار لیاپانوف نباشد.

ج) گوییم نقطه تعادل بدیهی $x = \circ$ برای دستگاه، پایدار مجانبی است هرگاه اولا پایدار لیاپانوف باشد و علاوه بر این،

$$\exists\, \delta > \circ;\ \ \forall\, y_\circ :\ |y_\circ| < \delta \implies \lim_{t \to \infty} \varphi(t, y_\circ) = \circ.$$

د) گوییم نقطه تعادل بدیهی $x = \circ$ برای دستگاه، پایدار مجانبی سراسری است هرگاه اولا پایدار لیاپانوف باشد و ثانیا

$$\forall\, y_\circ \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{t \to \infty} \varphi(t, y_\circ) = \circ.$$

قضیه ۴۸.۴. (*پایداری*) *فرض کنید A یک ماتریس ثابت $n \times n$ باشد.*

آ) *اگر A دارای یک مقدار ویژه با قسمت حقیقی مثبت باشد، آنگاه نقطه تعادل بدیهی $x = 0$ برای دستگاه برداری $\dot{x} = Ax$، ناپایدار است.*

ب) *اگر مقادیر ویژه A با قسمت حقیقی صفر ساده (یعنی با تکرار ۱) باشند و مابقی مقادیر ویژه دارای قسمت‌های حقیقی منفی باشند، آنگاه نقطه تعادل بدیهی $x = 0$ برای دستگاه برداری $\dot{x} = Ax$ پایدار لیاپانوف است.*

ج) *اگر تمام مقادیر ویژه A دارای قسمت حقیقی منفی باشند، آنگاه نقطه تعادل بدیهی $x = 0$ برای دستگاه برداری $\dot{x} = Ax$ پایدار مجانبی سراسری است.*

مثال ۴۹.۴. نوع پایداری نقطه تعادل بدیهی $x = 0$ را در هر یک از دستگاه‌های زیر بررسی کنید.

الف) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x$ ب) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x$ ج) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$

حل. **(الف)** مقادیر ویژه‌ی ماتریس ضرایب را بدست می‌آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \implies \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = 0 \implies \lambda = 1 \pm i.$$

چون قسمت حقیقی مقادیر ویژه مثبت است پس نقطه تعادل بدیهی $x = 0$ برای دستگاه (الف) ناپایدار است.

(ب) در دستگاه (ب) ماتریس ضرایب بالا مثلثی است. پس مقادیر ویژه‌ی آن مقادیر روی قطر اصلی هستند، یعنی $\lambda_1 = -1$، $\lambda_2 = -2$، و $\lambda_3 = -3$. چون همگی دارای قسمت حقیقی منفی‌اند، پس نقطه تعادل $x = 0$ برای این دستگاه پایدار مجانبی سراسری است.

(ج) مقادیر ویژه‌ی این دستگاه برابر است با:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda = 0 \pm i.$$

قسمت حقیقی مقدار ویژه صفر است و چون تکرار هر کدام نیز برابر یک است پس نقطه تعادل بدیهی $x = \circ$ برای دستگاه (ج) پایدار است. ■

تعریف ۵۰.۴. دستگاه برداری $\dot{x} = Ax$ را در نظر بگیرید که در آن A یک ماتریس ثابت $n \times n$ حقیقی است. فرض کنید $W_j = U_j \pm iV_j$ بردارهای ویژه تعمیم‌یافته متناظر با مقادیر ویژه $\lambda_j = a_j \pm ib_j$ باشند. در حالت $b_j = \circ$ داریم $V_j = \circ$. در این صورت، زیرفضاهای پایدار E^s، ناپایدار E^u، و مرکزی E^c به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} E^s &= \operatorname{span}\{U_j, V_j \mid a_j < \circ\}, \\ E^u &= \operatorname{span}\{U_j, V_j \mid a_j > \circ\}, \\ E^c &= \operatorname{span}\{U_j, V_j \mid a_j = \circ\}. \end{aligned}$$

مثال ۵۱.۴. زیرفضاهای پایدار، ناپایدار، و مرکزی را برای هر یک از دستگاه‌های زیر مشخص کنید.

الف) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -۲ & -۱ & \circ \\ ۱ & -۲ & \circ \\ \circ & \circ & ۳ \end{bmatrix} x$ ب) $\dot{x} = \begin{bmatrix} \circ & ۲ & \circ \\ -۲ & \circ & \circ \\ ۲ & \circ & ۶ \end{bmatrix} x$

حل. الف) مقادیر ویژه ماتریس ضرایب عبارتند از

$$\lambda_{۱,۲} = -۲ \pm i, \quad \lambda_۳ = ۳.$$

بردار ویژه‌ی نظیر $\lambda_۱ = -۲ + i$ را بدست می‌آوریم:

$$(A - \lambda_۱ I)X = \circ \implies \begin{bmatrix} -i & -۱ & \circ \\ ۱ & -i & \circ \\ \circ & \circ & ۵ - i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \circ \implies \begin{cases} -ix - y = \circ \\ x - iy = \circ \\ (۵ - i)z = \circ \end{cases}$$

با حل دستگاه فوق داریم:

$$W_۱ = \begin{bmatrix} \circ \\ ۱ \\ \circ \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} ۱ \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix} = U_۱ + iV_۱.$$

حال بردار ویژه‌ی نظیر $\lambda_3 = 3$ را بدست می‌آوریم:

$$(A-\lambda_3 I)X = 0 \implies \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \implies W_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = U_3.$$

پس زیرفضاهای خطی پایدار، ناپایدار، و مرکزی دستگاه مورد نظر عبارتند از

$$E^s = \text{span}\{U_1, V_1\} =< \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} >, \quad E^u = \text{span}\{U_3\} =< \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} >, \quad E^c = \{(0,0,0)\}.$$

دقت کنید که E^s صفحه‌ی xy، E^u محور z، و E^c مبدا مختصات است.

حل ب) اول مقادیر ویژه‌ی ماتریس ضرایب را بدست می‌آوریم:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies (\lambda^2+4)(6-\lambda) = 0 \implies \begin{cases} \lambda_{1,2} = 0 \pm 2i \\ \lambda_3 = 6 \end{cases}$$

بردار ویژه‌ی نظیر $\lambda_1 = 0 + 2i$ را بدست می‌آوریم:

$$(A-\lambda_1 I)X = 0 \implies \begin{bmatrix} -2i & 2 & 0 \\ -2 & -2i & 0 \\ 2 & 0 & 6-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \implies \begin{cases} -2ix + 2y = 0 \\ -2x - 2iy = 0 \\ 2x + (6-2i)z = 0 \end{cases}$$

با حل دستگاه فوق داریم:

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{3}{10} \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{10} \end{bmatrix} = U_1 + iV_1.$$

حال بردار ویژه‌ی نظیر $\lambda_3 = 6$ را بدست می‌آوریم:

$$(A-\lambda_3 I)X = 0 \implies \begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \implies \begin{cases} -6x + 2y = 0 \\ -2x - 6y = 0 \\ 2x = 0 \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق بدست می‌آوریم که

$$W_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = U_3.$$

پس زیرفضاهای خطی دستگاه مورد نظر عبارتند از

$$E^c = \text{span}\{U_۱, V_۱\} =< \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -\frac{۳}{۱۰} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -\frac{۱}{۱۰} \end{bmatrix} >, \quad E^u = \text{span}\{U_۲\} =< \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} >, \quad E^s = \{(۰, ۰, ۰)\}.$$

توجه کنید که E^s مبدا مختصات، E^u محور z، و E^c یک صفحه با معادله $z = -\frac{۳}{۱۰}x - \frac{۱}{۱۰}y$ است. برای پیدا کردن معادله صفحه، کافی است بردار نرمال آن را با استفاده از ضرب خارجی دو بردار به طریق زیر محاسبه کنید:

$$U_۱ \times V_۱ = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & ۰ & -\frac{۳}{۱۰} \\ ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۱۰} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۰ & -\frac{۳}{۱۰} \\ ۱ & -\frac{۱}{۱۰} \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} ۱ & -\frac{۳}{۱۰} \\ ۰ & -\frac{۱}{۱۰} \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} \vec{k} = \frac{۳}{۱۰}\vec{i} + \frac{۱}{۱۰}\vec{j} + \vec{k}.$$

■

تعریف ۵۲.۴. (دستگاه هذلولوی) اگر تمامی مقادیر ویژه ماتریس $A_{n\times n}$ دارای قسمت حقیقی ناصفر باشند، آنگاه نقطه تعادل بدیهی $x = ۰$ را یک نقطه تعادل هذلولوی دستگاه $\dot{x} = Ax$ گوییم و در این حالت جریان $\phi_t(x) = e^{At}x$ را یک جریان هذلولوی و دستگاه $\dot{x} = Ax$ را نیز یک دستگاه هذلولوی می‌نامیم.

تعریف ۵۳.۴. (زیرمجموعه‌ی پایا) زیرمجموعه‌ی $E \subseteq \mathbb{R}^n$ تحت جریان $e^{At} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **پایا** نامیده می‌شود هرگاه برای هر $t \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $e^{At}(E) \subseteq E$.

قضیه ۵۴.۴. *فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد. در این صورت،*

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c.$$

همچنین، زیرفضاهای E^s، E^u، و E^c تحت جریان e^{At} پایا هستند.

قضیه ۵۵.۴. *همه مقادیر ویژه‌ی A دارای قسمت حقیقی مثبت (منفی) هستند اگر و تنها اگر برای هر $x_۰ \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم:*

$$\lim_{\substack{t \to +\infty \\ (t \to -\infty)}} e^{At}x_۰ = ۰,$$

و برای هر $x_\circ \neq \circ$ *داشته باشیم:*

$$\lim_{\substack{t \to -\infty \\ (t \to +\infty)}} |e^{At}x_\circ| = +\infty.$$

نتیجه ۵۶.۴. *اگر* $x_\circ \in E^s$*، آنگاه* $e^{At}x_\circ \in E^s$ *و*

$$\lim_{t \to +\infty} e^{At}x_\circ = \circ.$$

و اگر $x_\circ \in E^u$*، آنگاه* $e^{At}x_\circ \in E^u$ *و*

$$\lim_{t \to -\infty} e^{At}x_\circ = \circ.$$

۴.۴ نظریه فلوکه

در بخش‌های قبل دیدیم چنانچه در دستگاه خطی $\dot{x} = A(t)x$، ماتریس ضرایب $A(t) = A$ ثابت باشد، آنگاه یک ماتریس اساسی جواب برای این دستگاه ماتریس e^{At} خواهد بود که روش‌های مختلفی برای بدست آوردن آن بیان شد.
ساده‌ترین حالت دیگری که می‌توان برای دستگاه خطی غیرخودگردان $\dot{x} = A(t)x$ مطرح کرد، این است که $A(t)$ یک ماتریس متناوب باشد، یعنی عددی ثابت و مثبت مانند T موجود باشد به طوری که $A(t+T) = A(t)$ به ازای هر $t \in \mathbb{R}$. در این حالت، T را دوره تناوب $A(t)$ می‌نامیم. در این بخش، به مطالعه‌ی چنین دستگاه‌هایی می پردازیم.

تعریف ۵۷.۴. (نظریه فلوکه) فرض کنید $A : \mathbb{R} \longrightarrow M_{m\times n}(\mathbb{R})$ یک تابع ماتریسی پیوسته و متناوب با دوره تناوب T باشد. در این صورت، دستگاه خطی غیرخودگردان و متناوب $\dot{x} = A(t)x$ را یک دستگاه فلوکه و مطالعه‌ی این نوع دستگاه را نظریه فلوکه می‌نامند.

در بررسی دستگاه فلوکه، نیاز به مفهوم لگاریتم یک ماتریس داریم. این مفهوم را ابتدا در لم زیر برای ماتریس‌های ۲ × ۲ و سپس در قضیه‌ای، به صورت کلی بیان کرده و طریقه‌ی محاسبه‌ی لگاریتم یک ماتریس را در قالب اثبات این قضایا شرح خواهیم داد.

لم ۵۸.۴. **(لگاریتم یک ماتریس 2×2)** *فرض کنید C یک ماتریس 2×2 معکوس‌پذیر باشد. در این صورت، ماتریس B چنان موجود است که $e^B = C$. ماتریس B را لگاریتم C می‌نامیم و آن را با نماد $\ln C$ نمایش می‌دهیم.*

اثبات. فرض کنیم λ_1 و λ_2 مقادیر ویژه‌ی ماتریس C باشند. از آنجایی که C معکوس پذیر است، $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$. سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر $C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$، آنگاه $B = \begin{bmatrix} \ln\lambda_1 & 0 \\ 0 & \ln\lambda_2 \end{bmatrix}$ ماتریس مورد نظر است که $e^B = C$.

حالت دوم: اگر $C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$، آنگاه با در نظر گرفتن $B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix}$، خواهیم داشت

$$e^B = C \iff \begin{bmatrix} e^{a_1} & a_2 e^{a_1} \\ 0 & e^{a_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a_1 = \ln\lambda_1 \\ a_2 = \frac{1}{\lambda_1} \end{cases}$$

پس در این حالت، ماتریس B به صورت $B = \begin{bmatrix} \ln\lambda_1 & \frac{1}{\lambda_1} \\ 0 & \ln\lambda_1 \end{bmatrix}$ خواهد بود.

حالت سوم: اگر C یک ماتریس معکوس‌پذیر دلخواه باشد، آنگاه، طبق قضیه فرم جردن، ماتریس معکوس‌پذیر P چنان موجود است که $P^{-1}CP = J$ که J در فرم جردن است. یعنی J به صورت یکی از حالت‌های اول یا دوم خواهد بود که برای آن ماتریس B معرفی شد. بنابراین،

$$\exists\, B_1 :\ e^{B_1} = J = P^{-1}CP \implies C = Pe^{B_1}P^{-1} = e^{PB_1P^{-1}} \implies \ln C = PB_1P^{-1} := B.$$

پس در این حالت نیز B معرفی شد. ■

مثال ۵۹.۴. لگاریتم ماتریس $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

حل. مقادیر ویژه‌ی C عبارتند از

$$\det(C-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-4) - 3 = 0 \implies \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$$

بردار ویژه‌ی نظیر $\lambda_1 = 1$ را بدست می‌آوریم:

$$(C-\lambda_1 I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 3x+3y=0 \end{cases} \Longrightarrow y=-x \Longrightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

همچنین بردار ویژه‌ی نظیر $\lambda_2 = 5$ نیز برابر است با:

$$(C-\lambda_2 I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} -3x+y=0 \\ 3x-y=0 \end{cases} \Longrightarrow y=3x \Longrightarrow V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

بنابراین، ماتریس P به صورت زیر بدست می‌آید:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

در این صورت داریم:

$$P^{-1}CP = J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Longrightarrow B_1 = \ln J = \begin{bmatrix} \ln 1 & 0 \\ 0 & \ln 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \ln 5 \end{bmatrix}.$$

و در نهایت لگاریتم ماتریس C برابر است با:

$$B = \ln C = PB_1P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \ln 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\ln 5 & \frac{1}{4}\ln 5 \\ \frac{3}{4}\ln 5 & \frac{1}{4}\ln 5 \end{bmatrix}.$$

■

مثال ۶۰.۴. لگاریتم ماتریس $C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

حل. این ماتریس در فرم جردن قرار دارد و به شکل $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$ می‌باشد. بنابراین، لگاریتم آن برابر است با:

$$\ln C = \begin{bmatrix} \ln(-2) & -\frac{1}{2} \\ 0 & \ln(-2) \end{bmatrix} \overset{-1=e^{i\pi}}{=\!=\!=} \begin{bmatrix} \ln(2e^{i\pi}) & -\frac{1}{2} \\ 0 & \ln(2e^{i\pi}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln 2 + i\pi & -\frac{1}{2} \\ 0 & \ln 2 + i\pi \end{bmatrix}.$$

■

مثال ۶۱.۴. لگاریتم ماتریس $C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

حل. مقادیر ویژه‌ی C عبارتند از

$$\det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

محاسبه بردار ویژه نظیر $\lambda_1 = 2i$:

$$(C - \lambda_1 I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2i & 4 \\ -1 & -2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \implies \begin{cases} -2ix + 4y = 0 \\ -x + 2iy = 0 \end{cases} \implies x = 2iy.$$

پس بردار ویژه نظیر λ_1 و λ_2 برابر است با

$$W_1 = \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{W}_1 = \begin{bmatrix} -2i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

در این حالت، ماتریس P به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P = \begin{bmatrix} 2i & -2i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{4i}\begin{bmatrix} 1 & 2i \\ -1 & 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4}i & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}i & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

در این صورت، داریم

$$P^{-1}CP = J = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix} \implies B_1 = \ln J = \begin{bmatrix} \ln(2i) & 0 \\ 0 & \ln(-2i) \end{bmatrix}.$$

از طرفی می‌دانیم $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ و $-2i = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$. لذا با جایگذاری این مقادیر در ماتریس فوق، خواهیم داشت:

$$B_1 = \begin{bmatrix} \ln 2 + i\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & \ln 2 + i\frac{3\pi}{2} \end{bmatrix}.$$

حال ماتریس $B = \ln C$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$B = PB_1P^{-1} = \begin{bmatrix} 2i & -2i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ln 2 + i\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & \ln 2 + i\frac{3\pi}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-1}{4}i & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}i & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

در نهایت لگاریتم ماتریس C برابر است با

$$B = \begin{bmatrix} 2i\ln 2 - \pi & 3\pi - 2i\ln 2 \\ \ln 2 + i\frac{\pi}{2} & \ln 2 + i\frac{3\pi}{2} \end{bmatrix}.$$

■

قضیه ۶۲.۴. (لگاریتم یک ماتریس) *اگر C یک ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیر باشد، آنگاه ماتریس B موجود است که تساوی $C = e^B$ برقرار است. چنین ماتریسی را لگاریتم C می‌نامیم.*

اثبات. از آنجاییکه C معکوس‌پذیر است، همه‌ی مقادیر ویژه‌ی آن ناصفرند. بنابراین، با یک ماتریس J در فرم جردن متشابه است، یعنی ماتریس معکوس‌پذیر P که ستون‌های آن از بردارهای ویژه تعمیم‌یافته C تشکیل شده وجود دارد به طوری که تساوی $P^{-1}CP = J$ برقرار است.

از طرفی می‌دانیم هر ماتریس در فرم جردن را می‌توان به شکل $J = \Lambda + N'$ نوشت که در آن Λ یک ماتریس قطری و N' یک ماتریس پوچ‌توان است. در این صورت،

$$P^{-1}CP = J = \Lambda + N' \implies C = PJP^{-1} = \underbrace{P\Lambda P^{-1}}_{S} + \underbrace{PN'P^{-1}}_{N},$$

که در آن S یک ماتریس نیم ساده و N یک ماتریس پوچ‌توان است، به علاوه $SN = NS$. پس داریم

$$C = S + N = S(I + S^{-1}N) \implies \ln C = \ln S + \ln(I + S^{-1}N).$$

حال برای $\ln S$ داریم

$$\ln S = \ln(P\Lambda P^{-1}) = P\big(\ln \Lambda\big)P^{-1}.$$

برای محاسبه‌ی $\ln(I + S^{-1}N)$ از بسط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

در این صورت،

$$\ln(I + S^{-1}N) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\big(S^{-1}N\big)^n}{n} = \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\frac{\big(S^{-1}N\big)^j}{j}.$$

پس در نهایت، لگاریتم ماتریس C برابر است با

$$B = P\big(\ln \Lambda\big)P^{-1} + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\frac{\big(S^{-1}N\big)^j}{j}.$$

■

قضیه ۶۳.۴. ***(فلوکه)*** *اگر تابع ماتریسی $\varphi(t)$ یک ماتریس اساسی جواب برای دستگاه فلوکه $\dot{x} = A(t)x$ با دوره تناوب T باشد، آنگاه تابع ماتریسی $\psi(t) = \varphi(t+T)$ نیز یک ماتریس اساسی جواب برای این دستگاه فلوکه است. علاوه بر این، ماتریس تناوبی و معکوس‌پذیر $P(t)$ با دوره تناوب T و ماتریس ثابت B چنان موجودند که*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = P(t)e^{Bt},$$

و $P(t)$ مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته است.

قضیه ۶۴.۴. *فرض کنید B، $P(t)$، و $\varphi(t) = P(t)e^{Bt}$ همان‌هایی باشند که در قضیه فلوکه معرفی شدند. در این صورت، تابع برداری $x(t)$ یک جواب از دستگاه فلوکه $\dot{x} = A(t)x$ است اگر و تنها اگر تابع برداری $y(t)$ تعریف شده با $y(t) = P^{-1}(t)x(t)$، جواب دستگاه $\dot{y} = By$ باشد.*

تعریف ۶۵.۴. **(ماتریس مونودرومی و ضرایب فلوکه)** فرض کنید $\varphi(t)$ ماتریس اساسی دستگاه فلوکه $\dot{x} = A(t)x$ باشد. قرار می‌دهیم $C = \varphi^{-1}(0)\varphi(T)$. در این صورت، C را ماتریس مونودرومی دستگاه فلوکه و مقادیر ویژه‌ی آن را ضرایب فلوکه می‌نامیم.

تذکر ۶۶.۴. *همانطور که در قضیه فلوکه بیان شد، ماتریس اساسی جواب برای دستگاه فلوکه یکتا نیست. از این نتیجه می‌شود که ماتریس مونودرومی نیز یکتا نیست. اما در لم زیر، ثابت می‌کنیم که تمامی ماتریس‌های مونودرومی یک دستگاه فلوکه با هم متشابه‌اند.*

لم ۶۷.۴. *ضرایب فلوکه‌ی دستگاه فلوکه $\dot{x} = A(t)x$ یکتا هستند.*

اثبات. فرض کنیم $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ دو ماتریس اساسی جواب برای دستگاه فلوکه باشند. در این صورت، به راحتی می‌توان نشان داد که ماتریس ثابت و معکوس پذیر M چنان موجود است که $\psi(t) = \varphi(t)M$. در واقع، کافی است نشان دهیم $\frac{d}{dt}[\varphi^{-1}(t)\psi(t)] = 0$، و در نتیجه $M := \varphi^{-1}(0)\psi(0) = \varphi^{-1}(t)\psi(t)$. اکنون قرار می‌دهیم

$$C := \varphi^{-1}(0)\varphi(T), \qquad D := \psi^{-1}(0)\psi(T).$$

در این صورت،

$$C = \varphi^{-1}(0)\varphi(T) = M\psi^{-1}(0)\psi(T)M^{-1} = MDM^{-1}.$$

و این یعنی، C و D متشابه‌اند و در نتیجه مقادیر ویژه‌ی یکسانی دارند. پس ضرایب فلوکه‌ی یک دستگاه فلوکه یکتا هستند. ■

قضیه ۶۸.۴. *فرض کنید $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ ضرایب فلوکه‌ی دستگاه فلوکه $\dot{x} = A(t)x$ باشند. در این صورت، نقطه تعادل بدیهی $x = 0$ از این دستگاه،*

آ) ***پایدار مجانبی*** *است هرگاه برای هر $1 \leqslant i \leqslant n$ داشته باشیم $|\mu_i| < 1$.*

ب) ***پایدار لیاپانوف*** *است هرگاه برای هر $1 \leqslant i \leqslant n$ داشته باشیم $|\mu_i| \leqslant 1$ و اگر $|\mu_i| = 1$، آنگاه μ_i یک مقدار ویژه ساده از ماتریس مونودرومی باشد.*

ج) ***ناپایدار*** *است هرگاه $1 \leqslant i_0 \leqslant n$ موجود باشد به طوری که $|\mu_{i_0}| > 1$.*

یادآوری ۶۹.۴. *اگر λ یک مقدار ویژه از ماتریس A باشد، آنگاه e^λ یک مقدار ویژه از ماتریس e^A خواهد بود.*

قضیه ۷۰.۴. *عدد $\mu_\circ$ یک ضریب فلوکه برای دستگاه فلوکه $\dot{x} = A(t)x$ است اگر و تنها اگر جواب ناصفر $x(t)$ از این دستگاه موجود باشد به طوری که*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t+T) = \mu_\circ x(t).$$

اثبات. ($\Longleftarrow$) فرض کنیم $\mu_\circ$ یک ضریب فلوکه از دستگاه فلوکه $\dot{x} = A(t)x$ باشد. در این صورت اگر $\varphi(t)$ یک ماتریس اساسی جواب از دستگاه فلوکه باشد، آنگاه $\mu_\circ$ مقدار ویژه‌ی ماتریس مونودرومی $C = \varphi^{-1}(\circ)\varphi(T)$ است. گیریم $x_\circ$ بردار ویژه‌ی نظیر $\mu_\circ$ باشد. قرار می‌دهیم $x(t) = \varphi(t)x_\circ$. در این صورت،

$$x(t+T) = \varphi(t+T)x_\circ = \varphi(t)Cx_\circ = \varphi(t)\mu_\circ x_\circ = \mu_\circ\varphi(t)x_\circ = \mu_\circ x(t).$$

($\Longrightarrow$) فرض کنیم $x(t)$ جواب ناصفری از دستگاه فلوکه $\dot{x} = A(t)x$ باشد به طوری که $x(t+T) = \mu_\circ x(t)$. نشان می‌دهیم $\mu_\circ$ یک ضریب فلوکه است.
اگر $\psi(t)$ یک ماتریس اساسی جواب از دستگاه فلوکه باشد، آنگاه بردار ناصفر $y_\circ \in \mathbb{R}^n$ موجود است که $x(t) = \psi(t)y_\circ$. دلیل آن این است که بردار جواب $x(t)$ به صورت یک ترکیب خطی از ستون‌های ماتریس $\psi(t)$ است. داریم

$$x(t+T) = \mu_\circ x(t) \implies \psi(t+T)y_\circ = \mu_\circ\psi(t)y_\circ \implies \psi(T)y_\circ = \mu_\circ\psi(\circ)y_\circ$$
$$\implies \underbrace{\psi^{-1}(\circ)\psi(T)}_{\text{ماتریس مونودرومی}}\, y_\circ = \mu_\circ y_\circ.$$

در نتیجه، $\mu_\circ$ مقدار ویژه‌ی ماتریس مونودرومی $D = \psi^{-1}(\circ)\psi(T)$ با بردار ویژه‌ی $y_\circ$ است و لذا یک ضریب فلوکه است. ■

نتیجه ۷۱.۴. *دستگاه فلوکه $\dot{x} = A(t)x$ با دوره تناوب T دارای یک جواب تناوبی ناصفر با دوره تناوب T است اگر و تنها اگر $\mu_\circ = ۱$ یک ضریب فلوکه‌ی آن باشد و همچنین دارای یک*

جواب تناوبی ناصفر با دوره تناوب $2T$ است اگر و تنها اگر $\mu_0 = -1$ یک ضریب فلوکه‌ی آن باشد.

قضیه ۷۲.۴. *فرض کنید $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ ضرایب فلوکه دستگاه فلوکه $\dot{x} = A(t)x$ باشند. در این صورت،*

$$\mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_n = \exp\left[\int_0^T tr\big(A(t)\big)dt\right]. \tag{۷.۴}$$

اثبات. فرض کنیم $\varphi(t)$ جواب دستگاه ماتریسی

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)X \\ X(0) = I_{n\times n} \end{cases}$$

باشد. پس $\varphi(t)$ یک ماتریس اساسی جواب برای دستگاه فلوکه است. قرار می‌دهیم

$$C = \varphi^{-1}(0)\varphi(T) = I\varphi(T) = \varphi(T).$$

در این صورت،

$$\mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_n = \det C = \det\varphi(T) = \underbrace{\det\varphi(0)}_{=1} \exp\left[\int_0^T tr\big(A(\tau)\big)d\tau\right].$$

بنابراین،

$$\mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_n = \exp\left[\int_0^T tr\big(A(t)\big)dt\right].$$

■

مثال ۷۳.۴. ضریب فلوکه‌ی دستگاه فلوکه $\dot{x} = (\sin^2 t)x$ را یافته و با توجه به آن، وضعیت پایداری نقطه تعادل بدیهی $x = 0$ را مشخص کنید.

حل. ماتریس ضرایب این دستگاه یک ماتریس ۱×۱ تک درایه‌ای به صورت $A(t) = [\sin^2 t]$ با دوره تناوب $T = \pi$ است.

برای یافتن ماتریس اساسی جواب، معادله را به طریق زیر حل می‌کنیم:

$$\frac{dx}{dt} = (\sin^2 t)x \implies \frac{dx}{x} = (\sin^2 t)dt \implies \int \frac{dx}{x} = \int (\sin^2 t)dt$$

$$\implies \ln|x| = \int \frac{1-\cos 2t}{2}dt \implies \ln|x| = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t + c_1$$

$$\implies x = \pm\exp\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t + c_1\right] = (\pm e^{c_1})e^{\frac{1}{2}t}e^{-\frac{1}{4}\sin 2t} = c_2 e^{\frac{1}{2}t}e^{-\frac{1}{4}\sin 2t}.$$

پس ماتریس اساسی جواب دستگاه برابر است با

$$\varphi(t) = e^{-\frac{1}{4}\sin 2t}e^{\frac{1}{2}t}.$$

با نمادگذاری قضیه فلوکه، $B = \frac{1}{2}$ و $P(t) = e^{-\frac{1}{4}\sin 2t}$ خواهد بود. ماتریس مونودرومی نیز برابر است با

$$C = \varphi^{-1}(0)\varphi(\pi) = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

پس $e^{\frac{\pi}{2}}$ ضریب فلوکه دستگاه است و چون $|e^{\frac{\pi}{2}}| > 1$، پس $x = 0$ یک نقطه تعادل ناپایدار می‌باشد. ■

مثال ۷۴.۴. ضرایب فلوکه‌ی دستگاه زیر را یافته و با توجه به آن، وضعیت پایداری مبدا را مشخص کنید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \dfrac{\cos t + \sin t}{2 + \sin t - \cos t} \end{bmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

حل. ماتریس ضرایب این دستگاه یک ماتریس متناوب با دوره تناوب $T = 2\pi$ است. برای محاسبه ماتریس اساسی جواب، به حل دستگاه می‌پردازیم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{\cos t + \sin t}{2 + \sin t - \cos t}x_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x}_1 - x_1 = x_2(0)(2 + \sin t - \cos t) \\ x_2(t) = x_2(0)(2 + \sin t - \cos t) \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x_1(t) = x_1(0)e^t - x_2(0)(2 + \sin t) \\ x_2(t) = x_2(0)(2 + \sin t - \cos t) \end{cases} \implies \varphi(t) = \begin{bmatrix} e^t & -2 - \sin t \\ 0 & 2 + \sin t - \cos t \end{bmatrix}.$$

پس ماتریس مونودرومی برابر است با

$$C = \varphi^{-1}(0)\varphi(2\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2\pi} & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2\pi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

بنابراین، $\mu_1 = e^{2\pi}$ و $\mu_2 = 1$ ضرایب فلوکه دستگاه هستند و چون $|e^{2\pi}| > 1$، پس مبدا ناپایدار است. از آنجایی که یکی از ضرایب فلوکه برابر یک است، پس دستگاه یک جواب تناوبی ناصفر دارد. ■

مثال ۷۵.۴. ضرایب فلوکه‌ی دستگاه فلوکه زیر را یافته و پایداری مبدا را بررسی کنید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 + 2\sin t & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

حل. ماتریس ضرایب $A(t)$ یک ماتریس متناوب با دوره تناوب $T = 2\pi$ است. به علاوه به ازای هر t و s داریم $A(t)A(s) = A(s)A(t)$. در نتیجه، طبق قضیه ۴۵.۴، ماتریس اساسی جواب برابر است با

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_0^t A(s)ds\right) = \exp\left(\int_0^t \begin{bmatrix} -3 + 2\sin s & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ds\right) = \begin{bmatrix} e^{-3t+2(1-\cos t)} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

در این صورت، ماتریس مونودرومی به صورت زیر است:

$$C = \varphi^{-1}(0)\varphi(2\pi) = \begin{bmatrix} e^{-6\pi} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi} \end{bmatrix}.$$

پس ضرایب فلوکه‌ی دستگاه عبارت‌اند از $\mu_1 = e^{-2\pi}$ و $\mu_2 = e^{-6\pi}$ که هر دوی آنها کمتر از یک هستند، لذا مبدا یک نقطه تعادل مجانبی پایدار برای دستگاه می‌باشد. ■

مثال ۷۶.۴. بدون یافتن ماتریس اساسی جواب، نشان دهید مبدا برای دستگاه زیر ناپایدار است.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & \sin^2 t \\ \cos^2 t & \sin t \end{bmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

حل. با استفاده از فرمول (۷.۴)، حاصلضرب ضرایب فلوکه عبارت است از

$$\mu_1 \times \mu_2 = \exp\left(\int_0^{2\pi} tr\big(A(t)\big)dt\right) = \exp\left(\int_0^{2\pi} (2+\sin t)dt\right) = e^{4\pi}.$$

پس حاصل‌ضرب ضرایب فلوکه بزرگتر از یک است. در نتیجه، $|\mu_1| > 1$ یا $|\mu_2| > 1$ و این یعنی مبدا برای دستگاه ناپایدار است. ■

مثال ۷۷.۴. نشان دهید $y(t) = [-\sin t, \cos t]^T$ یک جواب از دستگاه فلوکه‌ی زیر است. سپس، با استفاده از این جواب، ضرایب فلوکه دستگاه را بیابید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} = -2\cos^2 t & -1-\sin^2 t \\ 1-\sin^2 t & -2\sin^2 t \end{bmatrix} x.$$

حل. با جایگذاری $y(t)$ در دستگاه و با توجه به اینکه $\dot{y} = [-\cos t, -\sin t]^T$، خواهیم داشت:

$$A(t)y(t) = \begin{bmatrix} -2\cos^2 t & -1-\sin^2 t \\ 1-\sin^2 t & -2\sin^2 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \implies \dot{y} = A(t)y.$$

پس $y(t)$ جواب دستگاه است. از طرفی می‌بینیم که $y(t)$ متناوب با دوره تناوب 2π است و چون ماتریس ضرایب $A(t)$ متناوب با دوره تناوب π است، پس طبق نتیجه ۷۱.۴ یکی از ضرایب فلوکه برابر ۱− است. قرار می‌دهیم $\mu_1 = -1$ و μ_2 را از فرمول زیر بدست می‌آوریم:

$$\mu_1 \times \mu_2 = \exp\left(\int_0^{\pi} tr\big(A(t)\big)dt\right) = \exp\left(\int_0^{\pi} \big(-2\cos^2 t - 2\sin^2 t\big)dt\right) = e^{-2\pi}.$$

چون $\mu_1 = -1$، پس $\mu_2 = -e^{-2\pi}$. حال چون $|\mu_1| = 1$ با تکرار یک است و $|\mu_2| < 1$، بنابراین مبدا پایدار لیاپانوف است. ■

۵.۴ تمرینات

۱. معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت زیر را به شکل دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$ بنویسید و سپس آنرا حل کنید:

$$(a)\ \ \ddot{x} + \dot{x} - ۲x = ۰ \qquad\qquad (b)\ \ \dddot{x} - ۲\ddot{x} - \dot{x} + ۲x = ۰$$

۲. با یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس A و تعیین زیرفضاهای خطی پایدار و ناپایدار، نمای فاز دستگاه معادلات زیر را در فضای فاز آن رسم کنید:

$$\dot{x}_۱ = x_۱, \quad \dot{x}_۲ = x_۱ + ۲x_۲, \quad \dot{x}_۳ = x_۱ - x_۳.$$

۳. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A را بیابید و نشان دهید که ماتریس وارون پذیر P وجود دارد به طوری که $B = P^{-۱}AP$ یک ماتریس قطری است. دستگاه خطی $\dot{y} = By$ و سپس $\dot{x} = Ax$ را با استفاده از نتیجه فوق حل کنید. و سپس نماهای فاز را هم در صفحه‌ی x و هم در صفحه‌ی y رسم کنید.

$$(a)\ \ A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} \qquad\qquad (b)\ \ A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}.$$

۴. ماتریس e^{At} را بیابید هرگاه

$$(a)\ \ A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \qquad\qquad (b)\ \ A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \ A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \qquad\qquad (d)\ \ A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$(e)\ \ A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۳ & ۳ & ۳ & ۳ \\ ۴ & ۴ & ۴ & ۴ \end{bmatrix}$$

۵. فرم جردن ماتریس‌های داده شده را بیابید:

$$(a)\ \ A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \qquad (b)\ \ A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \ A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} \qquad (d)\ \ A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$(e)\ \ A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

فصل ۵

نمای فاز دستگاه‌های خطی در $\mathbb{R}^۲$

در فصل قبل با دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی در $\mathbb{R}^n$ آشنا شدیم. در این فصل قصد داریم تا مشخصاً در مورد دستگاه‌های خطی همگن خودگردان در فضای $\mathbb{R}^۲$ صحبت کنیم و رفتار کیفی جواب آنها را در صفحه مورد بحث و بررسی قرار دهیم.

یادآوری می‌کنیم که یک دستگاه خطی همگن با ضرایب ثابت در $\mathbb{R}^۲$ به شکل

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{۱۱}x + a_{۱۲}y \\ \dot{y} = a_{۲۱}x + a_{۲۲}y \end{cases}$$

است که با در نظر گرفتن

$$\varphi = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \dot{\varphi} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix},$$

می‌توان آن را به صورت

$$\dot{\varphi} = A\varphi \tag{۱.۵}$$

نوشت. هر جواب از (۱.۵) به صورت $\varphi(t) = [x(t), y(t)]^T$ است که در دستگاه صدق می‌کند. برای هر جواب، با حذف t بین $x(t)$ و $y(t)$ می‌توان آن را به صورت یک خم در صفحه نمایش داد که این خم‌ها را همانطور که قبلاً بیان شد، **مدارهای دستگاه** می‌نامیم.

تعریف ۱.۵. **(نمای فاز)** تصویری دو بعدی است که رفتار کیفی دستگاه (۱.۵) را نشان داده و توسط $x(t)$ و $y(t)$ با تغییر t مشخص می‌شود.

۱.۵ نمای فاز دستگاه‌های متعارف

تعریف ۲.۵. (دستگاه متعارف) دستگاه $\dot{x} = Jx$ که در آن J یک ماتریس در فرم جردن است را یک دستگاه متعارف می‌گویند.

می‌دانیم که اگر P ماتریسی باشد که ستون‌های آن بردارهای ویژه تعمیم‌یافته A باشند، آنگاه $P^{-1}AP = J$. یعنی A با J متشابه است که در آن J فرم جردن A است و بسته به مقادیر ویژه‌ی A، به صورت یکی از سه حالت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

حال با قرار دادن $\psi = P^{-1}\varphi$، دستگاه (۱.۵) به شکل

$$\dot{\psi} = J\psi \tag{۲.۵}$$

در می‌آید که یک دستگاه متعارف است و آن را دستگاه متشابه با دستگاه ۱.۵ می‌نامیم. حال از آنجایی که A و J متشابه‌اند، پس مقادیر ویژه‌ی یکسانی دارند و در نتیجه نوع پایداری نقطه تعادل $x = 0$ دستگاه‌های (۱.۵) و (۲.۵) ، یعنی مبدا، یکسان است. بنابراین، در ابتدا برای راحتی کار، نمای فاز دستگاه (۲.۵) را برای هر کدام از سه حالت J بررسی کرده و نوع پایداری مبدا را در هر مورد بررسی می‌کنیم.

(حالت اول): مقادیر ویژه حقیقی

اگر $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه دستگاه خطی به صورت $\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases}$ خواهد بود که دارای جواب‌های

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \qquad y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$$

است. شکل نمای فاز و پایداری مبدا به مقادیر λ_1 و λ_2 بستگی دارد که در قسمت‌های زیر به صورت مجزا آن را بررسی می‌کنیم.

۱. اگر λ_1 و λ_2 هر دو مثبت باشند، آنگاه مبدا یک گره ناپایدار است چرا که

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty, \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = \infty.$$

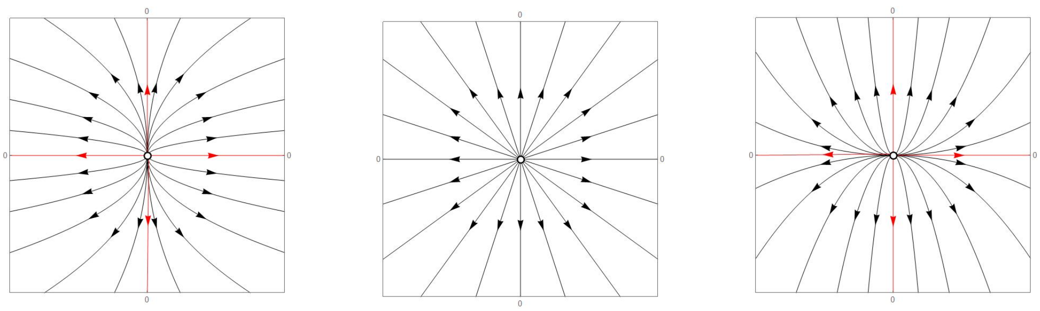
از طرفی

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\lambda_2 y}{\lambda_1 x} = c\gamma e^{(\lambda_2-\lambda_1)t},$$

که در آن $\gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. بنابراین وقتی $t \to -\infty$، آنگاه

$$\frac{dy}{dx} \to \begin{cases} 0 & \gamma > 1 \\ c & \gamma = 1 \\ \infty & \gamma < 1 \end{cases}$$

این یعنی وقتی $\gamma > 1$، مسیرها با شیب صفر، وقتی $\gamma = 1$ مسیرها با شیب ثابت، و وقتی $\gamma < 1$، مسیرها با شیب بی‌نهایت از مبدا خارج می‌شوند. پس نمای فاز این حالت بسته به آنکه کدام بزرگتر است، در شکل ۱.۵ نمایش داده شده است.



(آ) $\lambda_2 > \lambda_1$ (ب) $\lambda_2 = \lambda_1$ (ج) $\lambda_2 < \lambda_1$

شکل ۱.۵: نمای فاز دستگاه با مقادیر ویژه حقیقی و مثبت.

۲. اگر λ_1 و λ_2 هر دو منفی باشند، آنگاه مبدا یک گره پایدار است چرا که

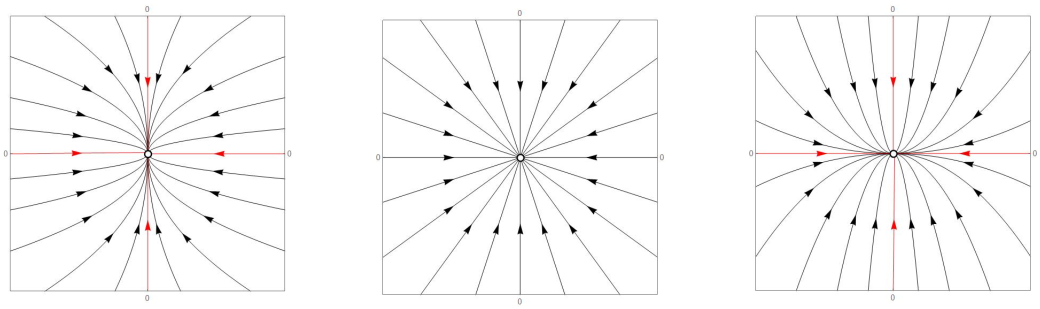
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

پس وقتی $t \to \infty$، مسیرها به مبدا میل می‌کنند. از طرفی وقتی $t \to \infty$ با نمادهای

قسمت قبل خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{dx} \to \begin{cases} ۰ & \gamma > ۱ \\ c & \gamma = ۱ \\ \infty & \gamma < ۱ \end{cases}$$

و این یعنی وقتی $\gamma > ۱$، مسیرها با شیب صفر، وقتی $\gamma = ۱$ مسیرها با شیب ثابت، و وقتی $\gamma < ۱$، مسیرها با شیب بی‌نهایت به مبدا وارد می‌شوند. نمای فاز این حالت بسته به آنکه کدام کوچکتر است، در شکل ۲.۵ نمایش داده شده است.



(آ) $\lambda_۲ < \lambda_۱$ (ب) $\lambda_۲ = \lambda_۱$ (ج) $\lambda_۲ > \lambda_۱$

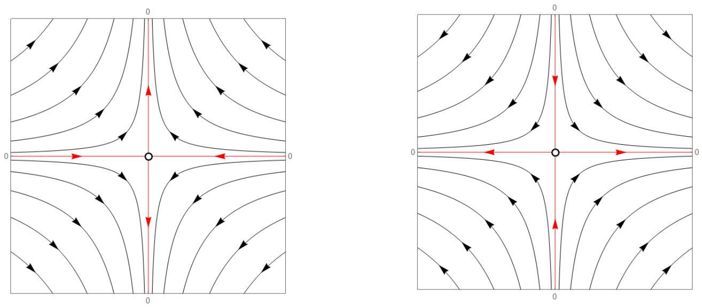
شکل ۲.۵: نمای فاز دستگاه با مقادیر ویژه حقیقی و منفی.

۳. اگر $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ هم علامت نباشند، یعنی $\lambda_۱\lambda_۲ < ۰$، آنگاه مبدا یک زین هذلولوی است چرا که اگر $\lambda_۱ < ۰ < \lambda_۲$، آنگاه

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = ۰, \qquad \lim_{t\to-\infty} y(t) = \begin{cases} +\infty & c_۲ > ۰ \\ -\infty & c_۲ < ۰ \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{cases} +\infty & c_۱ > ۰ \\ -\infty & c_۱ < ۰ \end{cases} \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = ۰$$

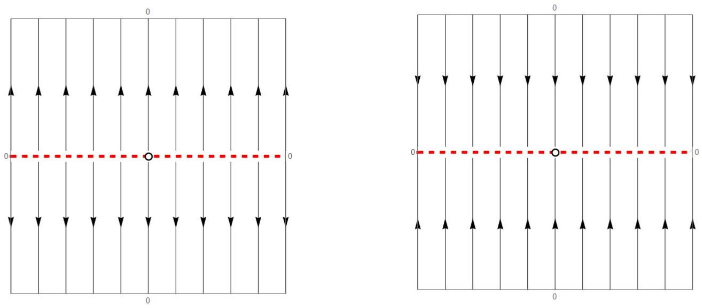
در حالتی که $c_۱ = ۰$ یا $c_۲ = ۰$، مسیرها خطوط راستی هستند که بر محور y یا بر محور x منطبق هستند. بنابراین نمای فاز دستگاه در این حالت بسته به علامت هر کدام، به شکل ۳.۵ خواهد بود.



(آ) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ (ب) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

شکل ۳.۵: نمای فاز دستگاه با مقادیر ویژه حقیقی و مختلف العلامه.

۴. اگر $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 \neq 0$، آنگاه محور x خطی از نقاط تعادل است که پایداری آنها به علامت λ_2 بستگی دارد. نمای فاز این حالت در شکل ۴.۵ نمایش داده شده است.



(آ) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ (ب) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$

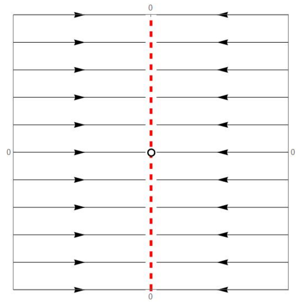
شکل ۴.۵: نمای فاز دستگاه با یک مقدار ویژه‌ی صفر.

۵. اگر $\lambda_2 = 0$ و $\lambda_1 \neq 0$، آنگاه محور y خطی از نقاط تعادل است که پایداری آنها به علامت λ_1 بستگی دارد. نمای فاز این حالت در شکل ۵.۵ نمایش داده شده است.

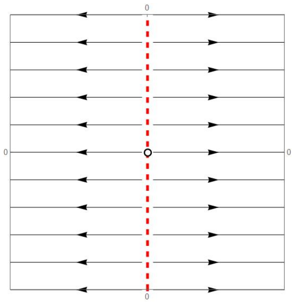
۶. اگر $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$، آنگاه تمام نقاط صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ نقاط تعادل دستگاه خواهند بود.

(حالت دوم): مقادیر ویژه حقیقی و برابر

اگر $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه دستگاه خطی به صورت $\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases}$ خواهد بود که دارای



(آ) $\lambda_۲ = ۰, \lambda_۱ < ۰$



(ب) $\lambda_۲ = ۰, \lambda_۱ > ۰$

شکل ۵.۵: نمای فاز دستگاه با یک مقدار ویژه‌ی صفر.

جواب‌هایی به شکل

$$x(t) = (c_۱ + c_۲ t)e^{\lambda t}, \qquad y(t) = c_۲ e^{\lambda t}$$

است. بسته به علامت λ سه حالت رخ می‌دهد:

۱. اگر $\lambda > ۰$، آنگاه مبدا یک گره‌ی ناپایدار است چرا که

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty, \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = \infty.$$

از طرفی، این مسیرها با شیب صفر از مبدا خارج می‌شوند زیرا

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-\infty} \frac{c_۲}{c_۱ + c_۲ t} = ۰.$$

از آنجاییکه وقتی $t \to -\infty$ میل می‌کند، علامت $x(t)$ و $y(t)$ به علامت $c_۲$ بستگی دارد، یعنی

$$c_۲ > ۰ \implies \begin{cases} x(t) < ۰ \\ y(t) > ۰ \end{cases}, \qquad c_۲ < ۰ \implies \begin{cases} x(t) > ۰ \\ y(t) < ۰ \end{cases}$$

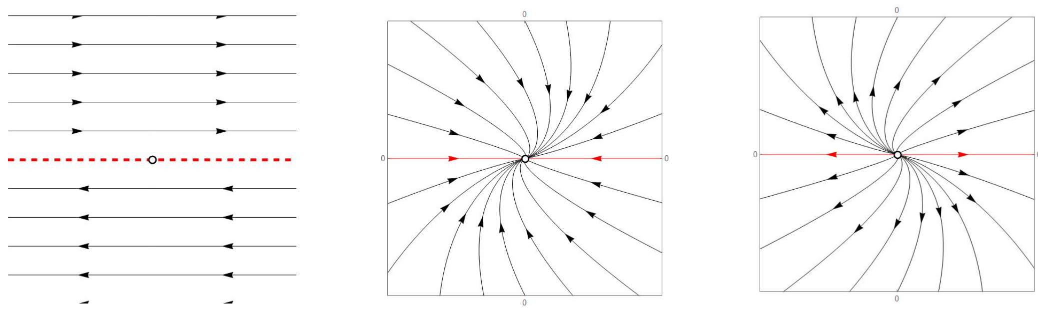
لذا در نزدیکی مبدا، مسیرها یا در ربع دوم و یا در ربع چهارم قرار دارند. در نتیجه، نمای فاز دستگاه در این حالت به شکل ۶.۵آ است.

۲. اگر $\lambda < ۰$، آنگاه مبدا یک گره‌ی پایدار است که با استدلالی مشابه قسمت قبل، نمای فاز دستگاه در این حالت به شکل ۶.۵ب است.

۳. اگر $\lambda = 0$، آنگاه دستگاه به صورت $\begin{cases}\dot{x} = y\\ \dot{y} = 0\end{cases}$ خواهد بود. بنابراین، $y = 0$ خطی از نقاط تعادل است. جواب‌های این دستگاه برابرند با

$$x(t) = c_1 + c_2 t, \qquad y(t) = c_2.$$

مشاهده می‌شود که اگر $c_2 > 0$، آنگاه x صعودی و اگر $c_2 < 0$، آنگاه x نزولی است. همچنین، اگر $c_2 = 0$، آنگاه x ثابت است. پس نمای فاز دستگاه در این حالت به شکل ۶.۵ج است.



(ج) $\lambda = 0$ (ب) $\lambda < 0$ (آ) $\lambda > 0$

شکل ۶.۵: نمای فاز دستگاه با یک مقدار ویژه‌ی تکراری.

(حالت سوم): مقادیر ویژه مختلط

اگر $J = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ باشد، که در آن $b \neq 0$، آنگاه دستگاه خطی به صورت $\begin{cases}\dot{x} = ax - by\\ \dot{y} = bx + ay\end{cases}$ خواهد بود. با در نظر گرفتن مختصات قطبی

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \implies \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

و مشتق‌گیری از r و θ نسبت به t و جایگذاری در دستگاه، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dot{r} = ar \\ \dot{\theta} = b \end{cases}$$

که دارای جواب‌هایی به صورت

$$r(t) = r_0 e^{at}, \qquad \theta(t) = bt + \theta_0$$

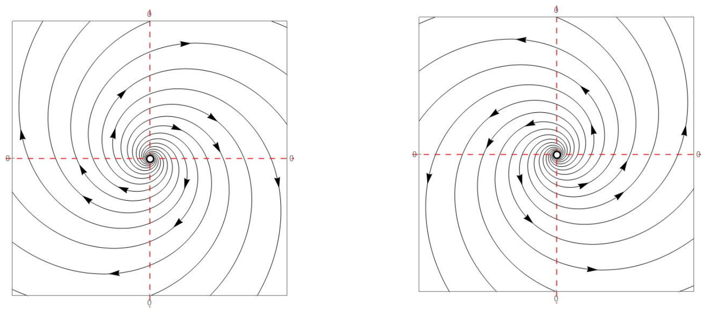
است. شکل نمای فاز به علامت a و b بستگی دارد که در حالات زیر جداگانه بررسی می‌کنیم.

۱. اگر $a > 0$، آنگاه مبدا یک کانون ناپایدار است زیرا

$$\lim_{t\to-\infty} r(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} r(t) = \infty.$$

بنابراین نمای فاز آن یک مارپیچ واگرا از مبدا است که جهت چرخش آن به علامت b بستگی دارد.

- اگر $b > 0$، آنگاه $\dot{\theta} > 0$ و این یعنی θ در حال افزایش است. پس مدارها به صورت مارپیچ در جهت پادساعتگرد از مبدا دور می‌شوند. (شکل۷.۵آ)
- اگر $b < 0$، آنگاه $\dot{\theta} < 0$ و این یعنی θ در حال کاهش است. پس مدارها به صورت مارپیچ در جهت ساعتگرد از مبدا دور می‌شوند. (شکل۷.۵ب)



(آ) $a > 0,\ b > 0$ (ب) $a > 0,\ b < 0$

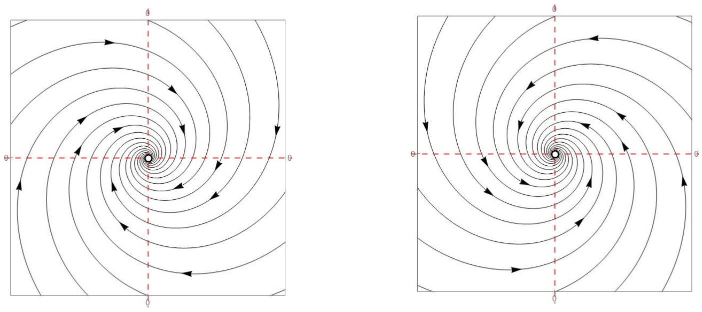
شکل ۷.۵: نمای فاز دستگاه با مقادیر ویژه مختلط با قسمت حقیقی مثبت.

۲. اگر $a < 0$، آنگاه مبدا یک کانون پایدار است زیرا

$$\lim_{t\to-\infty} r(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} r(t) = \infty.$$

بنابراین، نمای فاز این حالت یک مارپیچ همگرا به مبدا است که جهت چرخش آن به علامت b بستگی دارد.

- اگر $b > ۰$، آنگاه $\dot{\theta} > ۰$ و این یعنی θ در حال افزایش است. پس مدارها به صورت مارپیچ در جهت پادساعتگرد به مبدا نزدیک می‌شوند. (شکل۸.۵آ)
- اگر $b < ۰$، آنگاه $\dot{\theta} < ۰$ و این یعنی θ در حال کاهش است. پس مدارها به صورت مارپیچ در جهت ساعتگرد به مبدا نزدیک می‌شوند. (شکل۸.۵ب)



(ب) $a < ۰,\ b < ۰$ (آ) $a < ۰,\ b > ۰$

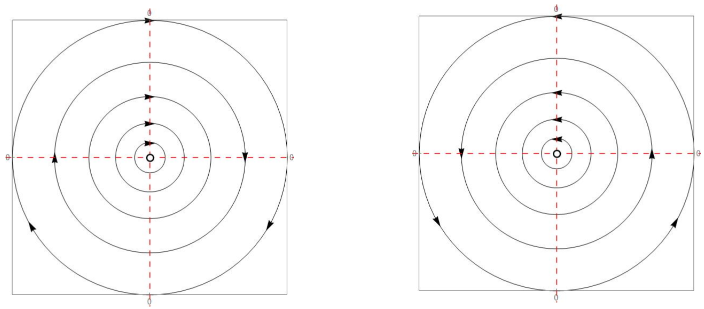
شکل ۸.۵: نمای فاز دستگاه با مقادیر ویژه مختلط با قسمت حقیقی منفی.

۳. اگر $a = ۰$، آنگاه مبدا یک مرکز است چرا که در این حالت $r(t) = r_۰$ است. پس نمای فاز آن دایره‌هایی به مرکز مبدا و شعاع $r_۰$ هستند که جهت چرخش آنها به علامت b وابسته است. (شکل ۹.۵)

حال که انواع مختلف نمای فاز را برای دستگاه متعارف (۲.۵) بررسی کردیم، با تغییر متغیر $\varphi = P\psi$ می‌توانیم نمای فاز دستگاه خطی (۱.۵) را بدست آوریم.

مثال ۳.۵. نمای فاز دستگاه زیر را رسم کنید.

$$\begin{cases} \dot{x} = ۵x + ۳y \\ \dot{y} = -۶x - ۴y \end{cases} \qquad (۳.۵)$$



(آ) $a = ۰,\ b > ۰$ (ب) $a = ۰,\ b < ۰$

شکل ۹.۵: نمای فاز دستگاه با مقادیر ویژه مختلط با قسمت حقیقی صفر.

حل. ماتریس ضرایب این دستگاه برابر $A = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ -۶ & -۴ \end{bmatrix}$ است که مقادیر ویژه‌ی آن عبارتند از

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - ۵)(\lambda + ۴) + ۱۸ = ۰ \implies \begin{cases} \lambda_۱ = -۱ \\ \lambda_۲ = ۲ \end{cases}$$

چون یکی از مقادیر ویژه مثبت است و دیگری منفی، پس مبدا یک زین هذلولوی است و دستگاه

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{۴.۵}$$

با دستگاه (۳.۵) متشابه است. با فرض $\psi(t) = [X(t), Y(t)]^T$ به عنوان جواب این دستگاه، نمای فاز آن به شکل ۱۰.۵آ می‌باشد.

حال برای رسم نمای فاز دستگاه (۳.۵)، ماتریس P را بدست می‌آوریم. بردارهای ویژه‌ی A عبارتند از

$$V_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}, \qquad V_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}.$$

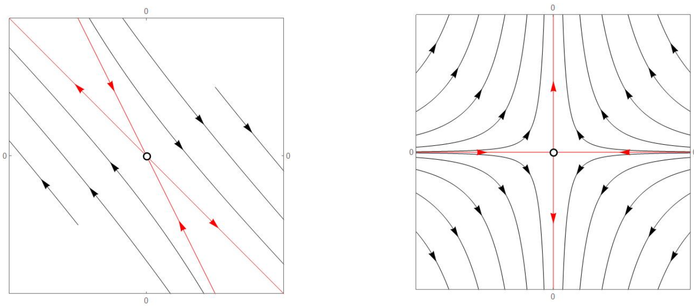
در نتیجه، $P = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$. بنابراین،

$$\varphi = P\psi \implies \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X + Y \\ -۲X - Y \end{bmatrix}.$$

پس

$$x = X + Y, \qquad y = -۲X - Y.$$

می‌بینیم که مدارهای دستگاه متعارف دوران یافته‌ی مدارهای دستگاه اصلی هستند. در واقع، جهت اصلی $X = ۰$ در شکل ۱۰.۵آ، روی جهت $y = -x$ که همان بردار ویژه‌ی $V_۱$ است منطبق شده و جهت اصلی $Y = ۰$ روی جهت $y = -۲x$ که همان بردار ویژه‌ی $V_۲$ است، منطبق می‌شود و نمای فاز دستگاه اصلی، به شکل ۱۰.۵ب در می‌آید. ■



(ب) (آ)

شکل ۱۰.۵: نمای فاز مثال ۳.۵

دیدیم که نمای فاز یک دستگاه خطی داده شده، دوران یافته نمای فاز دستگاه متعارف یا متشابه آن است که در آن جهت‌های اصلی بر بردارهای ویژه ماتریس ضرایب منطبق شده‌اند. پس می‌توان تنها با بدست آوردن بردارهای ویژه، نمای فاز را تعیین و رسم کرد.

مثال ۴.۵. نمای فاز دستگاه زیر را رسم کنید.

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{۳}{۲}x + \frac{۱}{۲}y \\ \dot{y} = \frac{۱}{۲}x + \frac{۳}{۲}y \end{cases}$$

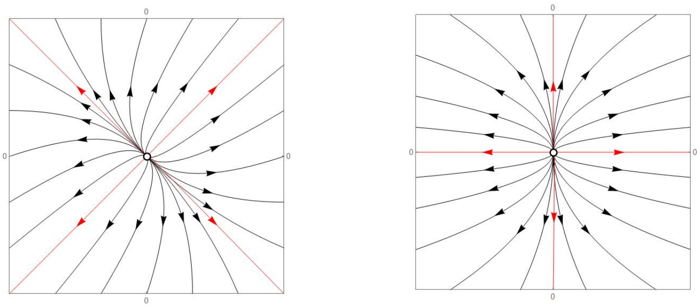
حل. ماتریس ضرایب این دستگاه برابر $A = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$ است که مقادیر ویژه‌ی آن عبارتند از

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - \frac{۳}{۲})^۲ - \frac{۱}{۴} = ۰ \implies \begin{cases} \lambda_۱ = ۲ \\ \lambda_۲ = ۱ \end{cases}$$

چون دو مقدار ویژه‌ی مثبت داریم، پس مبدا یک گره ناپایدار است و چون $\lambda_۲ < \lambda_۱$، پس نمای فاز دستگاه شبیه شکل ۱۱.۵آ است. بردارهای ویژه A عبارتند از

$$V_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \qquad V_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}.$$

در نتیجه، جهت $X = ۰$ در نمای فاز دستگاه متشابه بر بردار $V_۲$ و جهت $Y = ۰$ بر بردار $V_۱$ منطبق شده و نمای فاز دستگاه به شکل ۱۱.۵ب خواهد بود. ■



(ب) (آ)

شکل ۱۱.۵: نمای فاز مثال ۴.۵

مثال ۵.۵. نمای فاز دستگاه زیر را رسم کنید.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۴ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

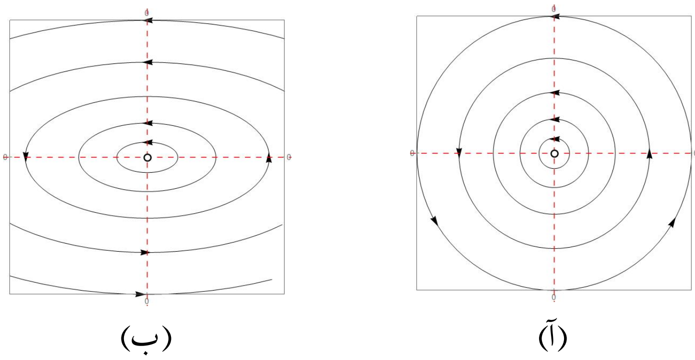
حل. مقادیر ویژه‌ی ماتریس ضرایب A عبارتند از

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -۴ \\ ۱ & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^۲ + ۴ = ۰ \implies \lambda_{۱,۲} = \pm ۲i.$$

چون مقادیر ویژه موهومی محض هستند، پس مبدا یک مرکز است. چون $\dot{x} = -۴y$ نشان می‌دهد x برای $y > ۰$ کاهشی است، پس مدارها پادساعتگردند. لذا نمای فاز دستگاه متشابه به شکل ۱۲.۵آ می‌باشد. بردارهای ویژه نظیر $\lambda_{۱,۲}$ برابرند با

$$W_۱, \bar{W}_۱ = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} = U_۱ \pm i V_۱.$$

بنابراین جهت $X = ۰$ به $U_۱ = [۰, ۱]^T$ و جهت $Y = ۰$ به $V_۱ = [۲, ۰]^T$ انتقال پیدا کرده و نمای فاز دستگاه به شکل ۱۲.۵ب خواهد بود. ■



شکل ۱۲.۵: نمای فاز مثال ۵.۵

۲.۵ صفحه اثرــ دترمینان

در بخش قبل دیدیم که در دستگاه خطی $\begin{cases}\dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy\end{cases}$، پایداری مبدا به مقادیر ویژه‌ی ماتریس ضرایب بستگی دارد و ماهیت آن از طریق این مقادیر ویژه مشخص می‌شود. در این بخش قصد داریم تا با استفاده از اثر و دترمینان ماتریس ضرایب، ماهیت نقطه تعادل را مشخص کنیم. قرار می‌دهیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. در این صورت،

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \underbrace{\lambda^{۲} - (a+d)\lambda + (ad-bc)}_{\text{چندجمله‌ای مشخصه A}},$$

که نتیجه می‌دهد چندجمله‌ای مشخصه A به صورت $f(\lambda) = \lambda^{۲} - T\lambda + D$ است که در آن

$$T = tr(A) = a + d, \qquad D = \det(A) = ad - bc.$$

پس $T = \lambda_{۱} + \lambda_{۲}$ و $D = \lambda_{۱}\lambda_{۲}$ و همچنین $\Delta = T^{۲} - ۴D$. در این صورت حالات زیر را خواهیم داشت:

۱. <u>($D < ۰$)</u> در این حالت مقادیر ویژه‌ی A ناصفر و مختلف‌العلامه هستند. بنابراین مبدا یک نقطه زینی است.

۲. <u>($D > ۰$)</u>

الف) اگر $\Delta > 0$، آنگاه مقادیر ویژه حقیقی و متمایزند که دو حالت رخ می‌دهد:

ñ اگر $T > 0$، آنگاه هر دو مقدار ویژه مثبت‌اند. پس مبدا گره‌ی ناپایدار است.

ñ اگر $T < 0$، آنگاه هر دو مقدار ویژه منفی‌اند. پس مبدا گره‌ی پایدار است.

ب) اگر $\Delta < 0$، آنگاه مقادیر ویژه مختلط و مزدوج‌اند که سه حالت رخ می‌دهد:

ñ اگر $T < 0$، آنگاه مقادیر ویژه‌ی مختلط با قسمت حقیقی منفی داریم. پس مبدا کانون پایدار است.

ñ اگر $T > 0$، آنگاه مقادیر ویژه‌ی مختلط با قسمت حقیقی مثبت داریم. پس مبدا کانون ناپایدار است.

ñ اگر $T = 0$، آنگاه مقادیر ویژه موهومی محض‌اند و در نتیجه مبدا مرکز است.

ج) اگر $\Delta = 0$، آنگاه مقادیر ویژه تکراری داریم که در اینجا هم دو حالت رخ می‌دهد:

ñ اگر $T > 0$، آنگاه مقدار ویژه مثبت است. پس مبدا گره ستاره ناپایدار است.

ñ اگر $T < 0$، آنگاه مقدار ویژه منفی است. پس مبدا گره ستاره پایدار است.

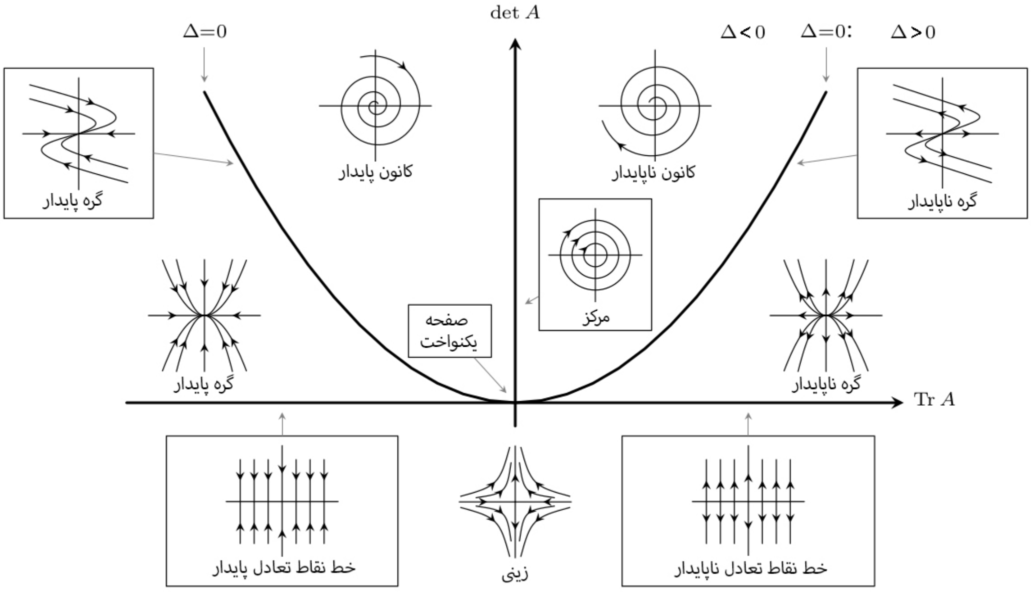
۳. $\underline{(D = 0)}$ در این حالت یکی از مقادیر ویژه صفر است. پس یک خط از نقاط تعادل داریم که بسته به علامت T، دو حالت رخ می‌دهد:

الف) اگر $T > 0$، آنگاه نقاط تعادل ناپایدارند.

ب) اگر $T < 0$، آنگاه نقاط تعادل پایدارند.

تمام حالات بیان شده در بالا، در شکل ۱۳.۵، که موسوم به **صفحه اثرـ دترمینان** است، نمایش داده شده‌اند.

مثال ۶.۵. ماهیت نقطه تعادل مبدا در دستگاه $\begin{cases} \dot{x} = x + 16y \\ \dot{y} = -8x - y \end{cases}$ را مشخص کنید.



شکل ۱۳.۵: صفحه اثر_ دترمینان

حل. قرار می‌دهیم $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱۶ \\ -۸ & -۱ \end{bmatrix}$. در این صورت،

$$T = tr(A) = ۱ - ۱ = ۰, \qquad D = \det(A) = -۱ + ۱۲۸ = ۱۲۷ > ۰.$$

بنابراین، با توجه به صفحه اثر_دترمینان، مبدا یک مرکز است. همچنین، با تعیین علامت $\dot{y} = -۸x - y$، مشخص می‌شود که جهت حرکت مدارها ساعتگرد می‌باشد. ■

مثال ۷.۵. ماهیت نقطه تعادل مبدا در دستگاه $\begin{cases} \dot{x} = -x - ۵y \\ \dot{y} = ۲x + ۵y \end{cases}$ را مشخص کنید.

حل. قرار می‌دهیم $A = \begin{bmatrix} -۱ & -۵ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$. در این صورت،

$$\begin{cases} T = tr(A) = -۱ + ۵ = ۴ > ۰ \\ D = \det(A) = -۵ + ۱۰ = ۵ > ۰ \end{cases} \implies \Delta = T^۲ - ۴D = ۱۶ - ۲۰ = -۴ < ۰.$$

بنابراین، با توجه به صفحه اثر_دترمینان، مبدا یک کانون ناپایدار است. همچنین، با تعیین علامت $\dot{x} = -x - ۵y$ مشخص می‌شود که جهت حرکت مارپیچ پادساعتگرد می‌باشد. ■

۳.۵ تمرینات

۱. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

را به صورت یک دستگاه خطی در $\mathbb{R}^2$ بنویسید و سپس نوع نقطه تعادل در مبدا را مشخص کنید.

۲. نمای فاز دستگاه‌های خطی زیر را رسم کنید:

$$(a) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases} \qquad (b) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \qquad (d) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

فصل ۶

دستگاه‌های خودگردان غیرخطی

در فصل‌های قبل، با دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل خطی آشنا شدیم و در مورد خواص آنها بحث کرده و نتایجی را بدست آوردیم. در این فصل، قصد داریم تا در مورد دستگاه‌های غیرخطی خودگردان $\dot{x} = f(x)$ صحبت کنیم که در آن $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ بردار متغیرهای حالت (متغیرهای فاز) و $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)]^T$ یک تابع برداری n متغیره حقیقی است. نتایجی که در فصل‌های قبل بیان شد را برای چنین دستگاه‌هایی مورد استفاده قرار می‌دهیم. قبل از هر چیز، قضیه‌ی اساسی وجود و یکتایی جواب را برای دستگاه غیرخطی $\dot{x} = f(x)$ بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۶. ***(قضیه وجود و یکتایی جواب)*** *فرض کنیم $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ (یعنی f مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته باشد) و $x \in \mathbb{R}^n$. در این صورت،* $a > 0$ ***چنان موجود است که مساله مقدار*** *اولیه* $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ *دارای جوابی یکتا روی بازه $[-a, a]$ است.*

اولین قدم در بررسی دستگاه غیرخطی $\dot{x} = f(x)$، بررسی نقاط تعادل آن است.

تعریف ۲.۶. اگر $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ مشتق پذیر باشد، آنگاه مشتق f در نقطه p ماتریس $n \times m$ زیر است:

$$D_p f = Df(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{bmatrix}.$$

پس D_pf ماتریسی است که ستون‌های آن مشتقات جزئی زیر هستند:

$$\frac{\partial f}{\partial x_۱}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(p).$$

مثال ۳.۶. اگر $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ تابع $f(x,y) = (x^۲ + y^۲, x^۳ - y^۳, x^۴y^۴)$ باشد، آنگاه

$$D_{(x,y)}f = \begin{bmatrix} ۲x & ۲y \\ ۳x^۲ & -۳y^۲ \\ ۴x^۳y^۴ & ۴x^۴y^۳ \end{bmatrix}.$$

تعریف ۴.۶. اگر $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد، آنگاه مشتق آن یعنی Df توسط ماتریس یاکوبی (ژاکوبی) $n \times n$ زیر داده می‌شود:

$$Df = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_۱}{\partial x_۱} & \frac{\partial f_۱}{\partial x_۲} & \cdots & \frac{\partial f_۱}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_۲}{\partial x_۱} & \frac{\partial f_۲}{\partial x_۲} & \cdots & \frac{\partial f_۲}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_۱} & \frac{\partial f_n}{\partial x_۲} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

توجه کنید که اثر ماتریس ژاکوبی با دیورژانس میدان برداری f برابر است زیرا

$$tr(Df) = \frac{\partial f_۱}{\partial x_۱} + \frac{\partial f_۲}{\partial x_۲} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = div(f).$$

مثال ۵.۶. مشتق تابع $f(x) = \begin{bmatrix} x_۱ + x_۱x_۲^۲ \\ -x_۲ + x_۱^۲ + x_۲^۲ \end{bmatrix}$ را در نقطه $p = (۱, -۲)$ محاسبه کنید.

حل.

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_۱}{\partial x_۱} & \frac{\partial f_۱}{\partial x_۲} \\ \frac{\partial f_۲}{\partial x_۱} & \frac{\partial f_۲}{\partial x_۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ + x_۲^۲ & ۲x_۱x_۲ \\ ۲x_۱ & -۱ + ۲x_۲ \end{bmatrix} \implies Df(۱, -۲) = \begin{bmatrix} ۵ & -۴ \\ ۲ & -۵ \end{bmatrix}.$$

■

تعریف ۶.۶. (دستگاه خطی شده) فرض کنید $x^\star$ یک نقطه تعادل از دستگاه غیرخطی $\dot{x} = f(x)$ باشد، یعنی $f(x^\star) = \vec{۰}$. قرار می‌دهیم $A = Df(x^\star)$. در این صورت، A را ماتریس خطی‌سازی و دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$ را خطی شده‌ی $\dot{x} = f(x)$ حول $x^\star$ می‌گوییم.

تعریف ۷.۶. (نقطه تعادل هذلولوی) نقطه تعادل $x^\star$ را برای دستگاه غیرخطی $\dot{x} = f(x)$ هذلولوی گوییم هرگاه ماتریس ژاکوبی $Df(x^\star)$ مقادیر ویژه با قسمت حقیقی صفر نداشته باشد. در غیر این صورت، آن را غیرهذلولوی می‌گوییم.

۱.۶ تعیین پایداری با قضیه هارتمن‌ـ گرابمن

قضیه ۸.۶. ***(هارتمن‌ـ گرابمن)*** *فرض کنید $f \in C^{۲}(\mathbb{R}^n)$. در این صورت، اگر $x^\star$ یک نقطه تعادل هذلولوی برای دستگاه غیرخطی $\dot{x} = f(x)$ باشد، آنگاه نوع این نقطه تعادل برای دستگاه $\dot{x} = f(x)$، همانند نوع نقطه تعادل مبدا برای دستگاه خطی شده‌ی آن است.*

مثال ۹.۶. نوع نقاط تعادل دستگاه‌های غیرخطی زیر را مشخص کنید.

.۱
$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = x^{۲} + y^{۲} - ۱ \end{cases}$$

حل. ابتدا نقاط تعادل را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x = ۰ \\ x^{۲} + y^{۲} - ۱ = ۰ \implies y = \pm ۱ \end{cases} \implies \begin{cases} p_۱ = (۰, ۱) \\ p_۲ = (۰, -۱) \end{cases}$$

ماتریس خطی‌سازی دستگاه برای این نقاط عبارت است از

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲x & ۲y \end{bmatrix} \implies Df(۰,۱) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}, \quad Df(۰,-۱) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}.$$

بنابراین، برای دستگاه خطی شده $p_۱$ یک گره‌ی ناپایدار و $p_۲$ یک زین است. از آنجایی که $p_۱$ و $p_۲$ نقاط تعادل هذلولوی دستگاه هستند، پس برای دستگاه غیرخطی نیز $p_۱$ یک گره‌ی ناپایدار و $p_۲$ یک نقطه زینی است. نمای فاز این دستگاه به شکل ۱.۶آ می‌باشد.

■

.۲
$$\begin{cases} \dot{x} = x^{۲} - y^{۲} - ۱ \\ \dot{y} = ۲y \end{cases}$$

حل. نقاط تعادل دستگاه برابر است با

$$\begin{cases} x^{۲} - y^{۲} - ۱ = ۰ \implies x = \pm ۱ \\ ۲y = ۰ \end{cases} \implies \begin{cases} p_۱ = (۱, ۰) \\ p_۲ = (-۱, ۰) \end{cases}$$

ماتریس خطی‌سازی دستگاه برای این نقاط عبارت است از

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} ۲x & -۲y \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \implies Df(۱,۰) = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}, \quad Df(۰,-۱) = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}.$$

بنابراین، برای دستگاه خطی شده، p_1 یک گره‌ی ناپایدار و p_2 یک زین است. از آنجایی که p_1 و p_2 نقاط تعادل هذلولوی دستگاه هستند، پس برای دستگاه غیرخطی نیز p_1 یک گره‌ی ناپایدار و p_2 یک نقطه زینی است. نمای فاز این دستگاه به شکل ۶.۱ب می‌باشد. ■

۳.
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x(1-x^2) + y \end{cases}$$

حل. ابتدا نقاط تعادل دستگاه را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x(1-x^2) + y = 0 \end{cases} \xRightarrow{y=0} x = 0, \pm 1 \qquad \Longrightarrow \begin{cases} p_1 = (0,0) \\ p_2 = (1,0) \\ p_3 = (-1,0) \end{cases}$$

ماتریس خطی‌سازی دستگاه برای این نقاط عبارت است از

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow Df(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Df(\pm 1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

با استفاده از صفحه اثر_دترمینان برای ماتریس‌های فوق، مشخص خواهد شد که برای دستگاه خطی شده، p_1 یک نقطه زینی و p_2 و p_3 کانون ناپایدارند. از آنجایی که این نقاط، هذلولوی هستند، پس برای دستگاه غیرخطی نیز p_1 یک نقطه زینی و p_2 و p_3 کانون ناپایدار هستند. نمای فاز این دستگاه به شکل ۶.۱ج می‌باشد. ■

۴.
$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(1 - \frac{1}{2}x - y\right) \\ \dot{y} = y\left(x - 1 - \frac{1}{2}y\right) \end{cases}$$

حل. ابتدا نقاط تعادل دستگاه را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x\left(1-\frac{1}{2}x-y\right) = 0 \\ y\left(x-1-\frac{1}{2}y\right) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{یا} \quad 1-\frac{1}{2}x-y = 0 \\ y = 0 \quad \text{یا} \quad x-1-\frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p_1 = (0,0) \\ p_2 = (0,-2) \\ p_3 = (2,0) \\ p_4 = (\frac{6}{5}, \frac{2}{5}) \end{cases}$$

ماتریس خطی‌سازی دستگاه برای این نقاط عبارت است از

$$Df(x,y)=\begin{bmatrix} ۱-x-y & -x \\ y & x-۱-y \end{bmatrix},$$

$$Df(۰,۰)=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}, \qquad Df(۰,-۲)=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix},$$

$$Df(۲,۰)=\begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \qquad Df\left(\frac{۶}{۵},\frac{۲}{۵}\right)=\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۵} & -\frac{۶}{۵} \\ \frac{۲}{۵} & -\frac{۱}{۵} \end{bmatrix}.$$

طبق صفحه اثرـ دترمینان، $p_۱$ و $p_۳$ نقاط زینی و $p_۲$ و $p_۴$، به ترتیب، گره ناپایدار و کانون پایدار برای دستگاه خطی‌شده هستند و از آنجا که همگی این نقاط هذلولوی هستند، لذا ماهیت آنها برای دستگاه غیرخطی نیز به همین صورت می‌باشد. نمای فاز این دستگاه به شکل ۱.۶د می‌باشد. ■

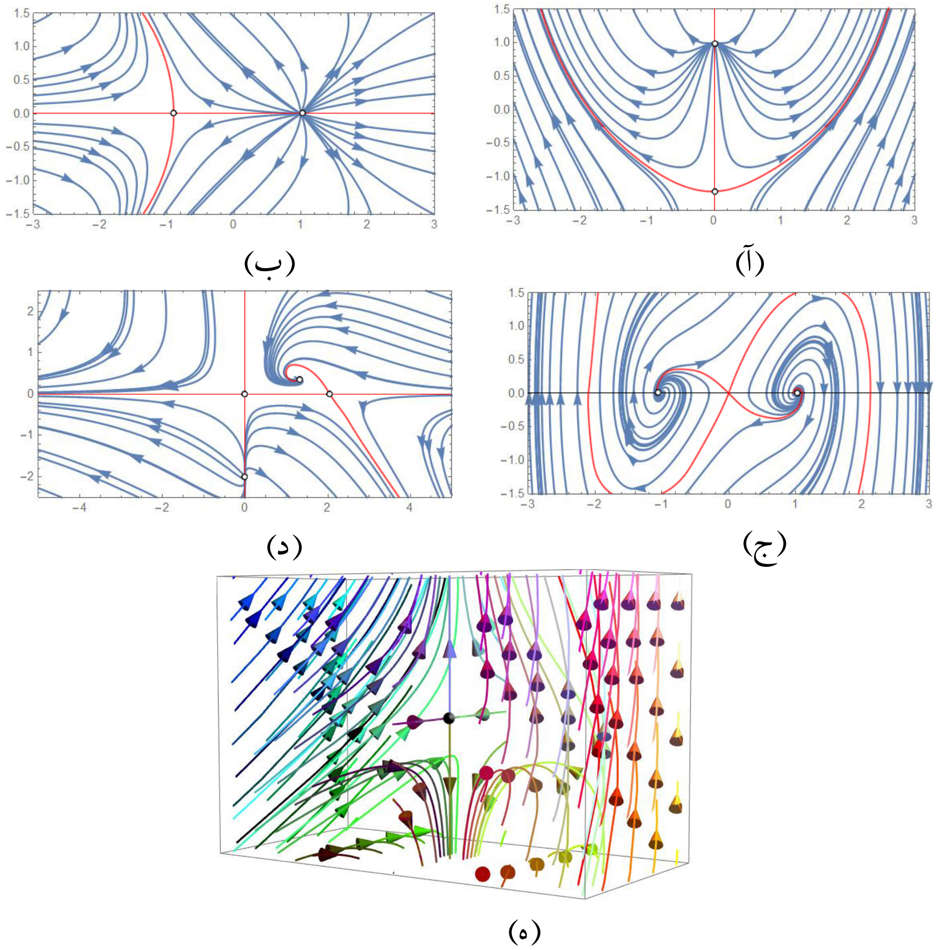
.۵ $$\begin{cases} \dot{x}=-x \\ \dot{y}=-y+x^{۲} \\ \dot{z}=z+x^{۲} \end{cases}$$

حل. این دستگاه تنها یک نقطه تعادل دارد و آن هم $p=(۰,۰,۰)$ است. ماتریس خطی‌سازی این دستگاه عبارت است از

$$Df(x,y,z)=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۲x & -۱ & ۰ \\ ۲x & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \implies Df(۰,۰,۰)=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

طبق صفحه اثرـ دترمینان، p یک نقطه زینی برای دستگاه خطی‌شده است و از آنجا که p یک نقطه تعادل هذلولوی است، پس برای دستگاه غیرخطی نیز یک نقطه زینی می‌باشد. نمای فاز این دستگاه به شکل ۱.۶ه می‌باشد. ■

ملاحظه ۱۰.۶. *دیدیم که تنها در مواقعی می‌توان از قضیه هارتمن‌ـ گرابمن استفاده کرد که نقطه تعادل دستگاه غیرخطی هذلولوی باشد. در غیر این صورت، این قضیه برای تعیین پایداری نقطه تعادل، ناکارآمد خواهد بود.*



شکل ۶.۱: نمای فاز دستگاه‌های مثال ۶.۹

یک روش تعیین پایداری، بازنویسی دستگاه در مختصات قطبی است که در مثال‌های زیر از این روش استفاده می‌کنیم.

مثال ۶.۱۱. پایداری مبدا را برای هر یک از دستگاه‌های غیرخطی زیر مشخص کنید.

۱.
$$\begin{cases} \dot{x} = -y - xy \\ \dot{y} = x + x^{2} \end{cases}$$

حل. همانطور که مشخص است، مبدا برای این دستگاه یک نقطه تعادل است. به علاوه، از آنجایی که در هر دو معادله داریم $x + 1 = 0$، پس خط $x = -1$ نیز خطی از

نقاط تعادل است. ماتریس خطی سازی برای مبدا برابر است با

$$Df(x,y)=\begin{bmatrix}-y & -1-x\\ 1+2x & 0\end{bmatrix} \implies Df(0,0)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \implies \lambda_{1,2}=0\pm i.$$

پس مبدا برای دستگاه خطی‌شده یک مرکز است. اما چون قسمت حقیقی مقادیر ویژه، صفر است، مبدا یک نقطه تعادل غیرهذلولوی برای دستگاه غیرخطی است و لذا نمی‌توان از قضیه هارتمن_ گرابمن برای تعیین پایداری استفاده کرد.

با در نظر گرفتن تغییر مختصات قطبی

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases} \implies \begin{cases}r^2=x^2+y^2\\ \theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\end{cases} \implies \begin{cases}r\dot r=x\dot x+y\dot y\\ r^2\dot\theta=x\dot y-y\dot x\end{cases}$$

دستگاه غیرخطی مورد نظر به دستگاه قطبی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases}\dot r=0\\ \dot\theta=1+x\end{cases}$$

چون $\dot r=0$، پس r ثابت است، بنابراین مبدا برای دستگاه غیرخطی نیز یک مرکز است. از طرفی، برای $x>-1$ داریم $\dot\theta>0$، یعنی θ افزایشی است. پس در این ناحیه جهت حرکت مدارها، پادساعتگرد خواهد بود. همچنین، برای $x<-1$ داریم که $\dot\theta<0$، یعنی θ کاهشی است. پس در این ناحیه جهت مدارها، ساعتگرد خواهد بود. در نهایت، نمای فاز این دستگاه به شکل ۶.۲آ است. ■

۲. $$\begin{cases}\dot x=-y-x^3-xy^2\\ \dot y=x-y^3-x^2y\end{cases}$$

حل. ماتریس خطی سازی برابر است با

$$Df(x,y)=\begin{bmatrix}-3x^2-y^2 & -1-2xy\\ 1-2xy & -3y^2-x^2\end{bmatrix} \implies Df(0,0)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \implies \lambda_{1,2}=0\pm i.$$

پس مبدا برای دستگاه خطی‌شده یک مرکز است. اما چون مبدا یک نقطه تعادل غیرهذلولوی از دستگاه غیرخطی است، لذا نمی‌توان از قضیه هارتمن_ گرابمن استفاده

کرد.

با در نظر گرفتن تغییر مختصات قطبی

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \implies \begin{cases} r^{2} = x^{2} + y^{2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \implies \begin{cases} r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} \\ r^{2}\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x} \end{cases}$$

دستگاه غیرخطی مورد نظر به دستگاه قطبی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{r} = -r^{3} \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

در این دستگاه می‌بینیم که $\dot{r} < 0$، پس r همواره کاهشی است و چون $\dot{\theta} > 0$، پس θ همواره افزایشی است. در نتیجه، مبدا برای دستگاه غیرخطی یک کانون پایدار است. نمای فاز این دستگاه به شکل ۶.۲ب است. ■

۳. $$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^{3} + xy^{2} \\ \dot{y} = x + y^{3} + x^{2}y \end{cases}$$

حل. ماتریس خطی سازی برابر است با

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^{2} + y^{2} & -1 + 2xy \\ 1 + 2xy & 3y^{2} + x^{2} \end{bmatrix} \implies Df(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies \lambda_{1,2} = 0 \pm i.$$

پس مبدا برای دستگاه خطی‌شده یک مرکز است. اما چون مبدا یک نقطه تعادل غیرهذلولوی برای دستگاه غیرخطی است، لذا نمی‌توان از قضیه هارتمن‌ـ گرابمن استفاده کرد.

با در نظر گرفتن تغییر مختصات قطبی $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$، دستگاه غیرخطی مورد نظر به دستگاه قطبی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{r} = r^{3} \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

در این دستگاه می‌بینیم که همیشه $\dot{r} > 0$. پس r همواره افزایشی است و چون $\dot{\theta} > 0$، پس θ نیز همواره افزایشی است. بنابراین، مبدا برای دستگاه غیرخطی یک کانون ناپایدار است. نمای فاز این دستگاه به شکل ۶.۲ج است. ■

۴. $$\begin{cases} \begin{cases} \dot{x} = -y + x\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\sin\left(\dfrac{۱}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}\right) \\ \dot{y} = x + y\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\sin\left(\dfrac{۱}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}\right) \end{cases} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ \begin{cases} \dot{x} = ۰ \\ \dot{y} = ۰ \end{cases} & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

حل. ماتریس خطی سازی در مبدا برابر است با

$$Df(۰,۰) = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \implies \lambda_{۱,۲} = ۰ \pm i.$$

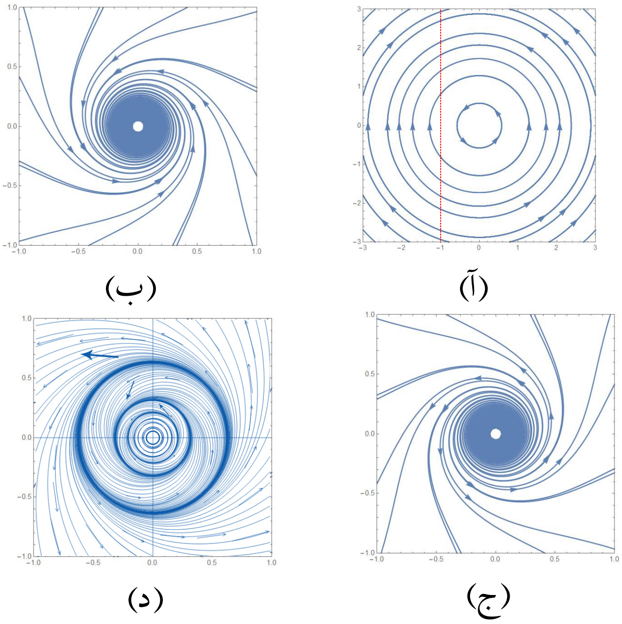
پس مبدا برای دستگاه خطی‌شده یک مرکز است. اما چون مبدا یک نقطه تعادل غیرهذلولوی برای دستگاه غیرخطی است، لذا نمی‌توان در مورد پایداری آن برای دستگاه غیرخطی اظهار نظر کرد. اگر از تغییر مختصات قطبی $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ استفاده کنیم، آنگاه دستگاه غیرخطی مورد نظر به دستگاه قطبی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{r} = r^{۲}\sin\left(\dfrac{۱}{r}\right) \\ \dot{\theta} = ۱ \end{cases}$$

در این دستگاه می‌بینیم که همیشه $\dot{\theta} > ۰$، پس θ همواره افزایشی است. اما در مورد r داریم که

$$\dot{r} = r^{۲}\sin\left(\frac{۱}{r}\right) = ۰ \implies r = ۰ \text{ یا } r = \frac{۱}{n\pi};\ n \in \mathbb{N}.$$

جواب $r = ۰$ متناظر با مبدا مختصات است که یک نقطه تعادل است و جواب‌های مثبت $r = \frac{۱}{n\pi}$ برای $n \in \mathbb{N}$ متناظر با مدارهای بسته یا تناوبی هستند که جهت آنها پادساعتگرد است. علاوه بر این، می‌بینیم که برای $\frac{۱}{(n+۱)\pi} < r < \frac{۱}{n\pi}$، مشتق $\dot{r}$ همواره علامت ثابتی دارد. در واقع، اگر n زوج، آنگاه $\dot{r} > ۰$ و اگر n فرد، آنگاه $\dot{r} < ۰$. نمای فاز این دستگاه به شکل ۲.۶د است. مبدا برای این دستگاه، مرکز ـ کانون پایدار نامیده می‌شود. ■



شکل ۲.۶: نمای فاز دستگاه‌های مثال ۱۱.۶

ملاحظه ۱۲.۶. *دیدیم که برای استفاده از قضیه هارتمن–گرابمن، هذلولوی بودن نقطه تعادل، بسیار حائز اهمیت است. یکی دیگر از شرایط استفاده از این قضیه، C^2 بودن تابع برداری f است که برقرار بودن این شرط نیز الزامی است. در مثال بعد، اهمیت این نکته مشخص می‌شود.*

مثال ۱۳.۶. با تبدیل دستگاه زیر به مختصات قطبی، پایداری مبدا را بررسی کنید.

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{x} = -x - \dfrac{y}{\ln\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dot{y} = -y - \dfrac{x}{\ln\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} & (x,y) \neq (0,0) \\ \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

حل. ماتریس خطی سازی در مبدا برابر است با

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \implies \lambda_{1,2} = -1 < 0.$$

پس مبدا برای دستگاه خطی‌شده یک گره‌ی پایدار است. با در نظر گرفتن مختصات قطبی

$(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$، دستگاه غیرخطی مورد نظر به دستگاه قطبی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{r}=-r \\ \dot{\theta}=\dfrac{1}{\ln r} \end{cases}$$

در این دستگاه می‌بینیم که همیشه $\dot{r}<0$، پس r همواره کاهشی است. همچنین، برای $0<r<1$ می‌بینیم که $\dot{\theta}<0$، پس θ نیز کاهشی است. بنابراین، مبدا برای دستگاه غیرخطی یک کانون پایدار است. این در حالی است که طبق قضیه هارتمن- گرابمن، می‌بایست مبدا برای دستگاه غیرخطی یک گره‌ی پایدار باشد. اما دیدیم که چنین نیست و دلیل این امر آن است که $f\notin C^2$. ■

۲.۶ تعیین پایداری با تابع لیاپانوف

در بخش قبل، تعیین پایداری نقاط تعادل هذلولوی دستگاه غیرخطی $\dot{x}=f(x)$ توسط روش خطی‌سازی بیان شد. اما دیدیم که برای نقاط تعادل غیرهذلولوی، این روش کارساز نخواهد بود. به همین دلیل، روش دیگری بیان کردیم تا این مشکل را رفع کند و آن هم تبدیل دستگاه غیرخطی به دستگاه قطبی بود که مثال‌هایی از آن را دیدیم. در این بخش، یک روش دیگر برای تعیین پایداری نقاط تعادل دستگاه غیرخطی معرفی خواهیم کرد. این روش، به روش لیاپانوف معروف است. برای تعیین نوع پایداری نقاط تعادل غیرهذلولوی که روش خطی‌سازی جوابگو نیست می‌توان از روش لیاپانوف استفاده کرد. ابتدا ایده اصلی این روش را مطرح می‌کنیم.

فرض کنید یک میدان برداری مسطح (تعریف شده در صفحه $\mathbb{R}^2$) داریم که دارای یک نقطه تعادل غیرهذلولوی مانند $x^\star$ است و می‌خواهیم که نوع پایداری آنرا تعیین کنیم.

بر طبق تعریف پایداری، کافی است یک همسایگی مانند U از $x^\star$ بیابیم که مدارهای شروع شده در U برای تمامی زمان‌های مثبت در U باقی بمانند. این شرط برآورده خواهد شد اگر بتوانیم نشان دهیم که میدان برداری به مرز U مماس است و یا جهت آن به سمت داخل است.

اکنون روش لیاپانوف را بطور دقیق برای میدان‌های برداری تعریف شده در $\mathbb{R}^۲$ بیان می‌کنیم و سپس آنرا به $\mathbb{R}^n$ تعمیم می‌دهیم.

فرض کنید $V : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ یک تابع دو متغیره حقیقی از کلاس $C^۱$ باشد، به طوری که $V(x_\circ, y_\circ) = \circ$، و V در یک همسایگی محذوف از $(x_\circ, y_\circ)$ مثبت است و مجموعه‌های تراز $V(x,y) = c$ منحنی‌های بسته حول $(x_\circ, y_\circ)$ هستند. حال چون $\overrightarrow{\nabla V}$ برداری است عمود بر منحنی تراز $V = c$ و در جهت افزایش V، پس جهت میدان برداری $X = (P, Q)$ در طول این منحنی‌های احاطه کننده $(x_\circ, y_\circ)$ به سمت داخل و یا مماس خواهد بود اگر و تنها اگر

$$\overrightarrow{\nabla V} \cdot X \leq \circ \iff P(x,y)\frac{\partial V}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial V}{\partial y} \leq \circ \iff \dot{V} = XV \leq \circ.$$

به شکل زیر توجه کنید.

۱.۲.۶ قضیه پایداری لیاپانوف

میدان برداری $\dot{x} = f(x)$ تعریف شده در $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $x^\star$ یک نقطه تعادل و $V : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع $C^۱$ با دامنه تعریف U باشد که U یک همسایگی باز از $x^\star$ است به طوری که

$$V(x^\star) = \circ, \quad V(x) > \circ, \quad \forall\, x \in U \setminus \{x^\star\}.$$

در این صورت، نقطه تعادل $x^\star$ **پایدار لیاپانوف** است هرگاه

$$\dot{V}(x) = \overrightarrow{\nabla V} \cdot f(x) \leq \circ, \quad \forall\, x \in U \setminus \{x^\star\},$$

و **پایدار مجانبی** است هرگاه

$$\dot{V}(x) = \overrightarrow{\nabla V} \cdot f(x) < \circ, \quad \forall\, x \in U \setminus \{x^\star\}.$$

در حالت اول، V را یک **تابع لیاپانوف ضعیف**، و در حالت دوم، V را یک **تابع لیاپانوف قوی** برای میدان برداری $\dot{x} = f(x)$ می‌نامیم.

۲.۲.۶ قضیه ناپایداری لیاپانوف

میدان برداری $\dot{x} = f(x)$ ، که $x \in \mathbb{R}^n$ ، از کلاس C^1 را در نظر بگیرید. فرض کنید $x^\star$ یک نقطه تعادل و $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی مقدار از کلاس C^1 باشد به طوری که $V(x^\star) = 0$ و $\dot{V}(x) > 0$ برای هر $x \in U \setminus \{x^\star\}$ که U یک همسایگی از $x^\star$ است. در این صورت اگر $V(x_n) > 0$ برای یک دنباله‌ی $x_n \to x^\star$، آنگاه $x^\star$ ناپایدار است.

تذکر ۱۴.۶. *در حالت کلی، یافتن یک تابع لیاپانوف مناسب برای یک دستگاه، از راه حدس و گمان است و روش سیستماتیک برای یافتن آن وجود ندارد. و این یکی از مشکلات این روش است.*

تعریف ۱۵.۶. **(دامنه‌ی جذب)** فرض کنید V یک تابع لیاپانوف قوی برای نقطه تعادل $x^\star$ از دستگاه $\dot{x} = f(x)$ باشد. در این صورت، بزرگترین مجموعه‌ی باز و همبندی که در آن $\dot{V} < 0$ باشد را دامنه‌ی جذب یا دامنه‌ی پایداری لیاپانوف می‌نامیم.

اکنون چند مثال در مورد روش لیاپانوف ارائه می‌دهیم.

مثال ۱۶.۶. با استفاده از تابع

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^4 - \frac{1}{2}x_2^2,$$

نشان می‌دهیم که مبدا یک نقطه تعادل ناپایدار دستگاه زیر است:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^3 + x_1x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_2^2 + x_1x_2 - x_1^3\end{aligned}$$

حل. شرایط قضیه ناپایداری لیاپانوف را بررسی می‌کنیم. اولا $V(0,0) = 0$ و به ازای دنباله $(\frac{1}{n}, 0) \to (0,0)$ داریم $V(\frac{1}{n}, 0) = \frac{1}{4n^4} > 0$. حال نشان می‌دهیم که در یک همسایگی محذوف

از مبدا، $\dot V > 0$ است. می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\dot V &= x_1^6 + x_2x_1^3(1+x_1) + x_2^2(1-x_1-x_2)\\ &\geq x_1^6 - |x_2x_1^3|(1+x_1) + x_2^2(1-x_1-x_2)\\ &\geq x_1^6 - \frac{5}{4}|x_2||x_1|^3 + \frac{3}{4}x_2^2 > 0, \quad \forall\ (x_1,x_2) \in \{|x_1|+|x_2| < \frac{1}{4}\} \setminus \{(0,0)\}.\end{aligned}$$

■

مثال ۶.۱۷. با استفاده از یک تابع لیاپانوف مناسب، پایداری مبدا را برای دستگاه زیر بررسی کرده و دامنه‌ی جذب آن را بیابید.

$$\begin{cases}\dot x = -x + y - y^2 - x^3\\ \dot y = x - y + xy\end{cases}$$

حل. تابع $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ را در نظر می‌گیریم و شرایط قضیه پایداری لیاپانوف را برای آن بررسی می‌کنیم. اولاً $V \in C^1$. ثانیاً $V(0,0) = 0$ و برای هر $(x,y) \neq (0,0)$ داریم $V(x,y) > 0$. از طرفی

$$\dot V = x\dot x + y\dot y = -(x-y)^2 - x^4 < 0.$$

بنابراین $\dot V < 0$ برای هر $(x,y) \neq (0,0)$. پس $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ برای مبدا یک تابع لیاپانوف قوی است و در نتیجه، مبدا برای دستگاه مورد نظر، پایدار مجانبی است. همچنین، دامنه‌ی جذب آن کل $\mathbb{R}^2$ است. ■

مثال ۶.۱۸. با استفاده از یک تابع لیاپانوف مناسب، پایداری مبدا را برای دستگاه زیر بررسی کرده و دامنه‌ی جذب آن را بیابید.

$$\begin{cases}\dot x = -\frac{1}{2}x(1-y^2)\\ \dot y = -\frac{1}{2}y(1-x^2)\end{cases}$$

حل. تابع $V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ را در نظر می‌گیریم و شرایط قضیه پایداری لیاپانوف را برای آن بررسی می‌کنیم. اولاً $V\in C^1$. ثانیاً $V(0,0)=0$ و برای هر $(x,y)\neq(0,0)$ داریم $V(x,y)>0$. از طرفی

$$\dot V = x\dot x + y\dot y = -\left(x^2(1-y^2)+y^2(1-x^2)\right).$$

بنابراین اگر $|x|<1$ و $|y|<1$، آنگاه $\dot V<0$ است. پس V برای مبدا یک تابع لیاپانوف قوی بوده و مبدا برای دستگاه پایدار مجانبی است. همچنین، دامنه‌ی جذب مبدا ناحیه مربعی شکل $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ |x|<1,\ |y|<1\}$ می‌باشد. ■

مثال ۱۹.۶. با تعیین مقادیر a و b، نشان دهید $V(x,y)=ax^2+by^2$ یک تابع لیاپانوف قوی برای دستگاه زیر است و با استفاده از آن نتیجه بگیرید که مبدا پایدار مجانبی است.

$$\begin{cases}\dot x = -x - xy^2\\ \dot y = -y + 3x^2y\end{cases}$$

حل. برای تابع V داریم:

$$\dot V = 2ax\dot x + 2by\dot y = -2ax^2 - 2ax^2y^2 - 2by^2 + 2bx^2y^2 = -2ax^2 - 2by^2 + (6b-2a)x^2y^2.$$

حال اگر $6b-2a=0$، آنگاه $\dot V=-6bx^2-2by^2$، که با انتخاب $b=1$ اکیدا منفی خواهد بود. پس برای $a=3$ و $b=1$، تابع V یک تابع لیاپانوف قوی برای مبدا است. در این صورت مبدا برای دستگاه داده شده پایدار مجانبی است و دامنه‌ی جذب آن کل $\mathbb{R}^2$ است. ■

مثال ۲۰.۶. پایداری مبدا را برای دستگاه زیر بررسی کنید.

$$\begin{cases}\dot x = -2y + yz\\ \dot y = 2x - xz\\ \dot z = xy\end{cases}$$

حل. ماتریس خطی‌سازی این دستگاه در مبدا برابر است با

$$Df(0,0,0)=\begin{bmatrix}0 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \implies \lambda_{1,2}=0\pm 2i,\quad \lambda_3=0.$$

بنابراین مبدا برای این دستگاه یک نقطه تعادل غیرهذلولوی است. پس نمی‌توان از قضیه هارتمن ـ گرابمن استفاده کرد. در اینجا سعی می‌کنیم یک تابع لیاپانوف مناسب برای آن بسازیم. برای این منظور، قرار می‌دهیم:

$$V(x,y,z) := ax^۲ + by^۲ + cz^۲,$$

$$\dot{V} = ۲ax\dot{x} + ۲by\dot{y} + ۲cz\dot{z} = (۴b - ۴a)xy + (۲a - ۲b + ۲c)xyz,$$

و مقادیر مثبت c, b, a را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$\begin{cases} ۴b - ۴a = ۰ & \Longrightarrow\ a = b \\ ۲a - ۲b + ۲c = ۰ & \Longrightarrow\ c = ۰ \end{cases} \Longrightarrow\ a = b = ۱,\quad c = ۰.$$

در نتیجه، $\dot{V} = ۰$. پس تابع $V(x,y,z) = x^۲ + y^۲$ برای مبدا یک تابع لیاپانوف ضعیف بوده و نقطه تعادل مبدا برای دستگاه داده شده، پایدار لیاپانوف است. ■

مثال ۲۱.۶. با استفاده از یک تابع لیاپانوف مناسب، پایداری مبدا را برای دستگاه زیر بررسی کرده و دامنه‌ی جذب آن را بیابید.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^۳ \\ \dot{y} = -۲(x^۳ + y^۳) \end{cases}$$

حل. تابع $V(x,y) = x^۴ + y^۴$ را در نظر می‌گیریم. اولاً $V \in C^۱$. ثانیاً $V(۰,۰) = ۰$ و برای هر $(x,y) \neq (۰,۰)$ داریم $V(x,y) > ۰$. پس تابع V شرایط تابع لیاپانوف را داراست. از طرفی

$$\dot{V} = ۴x^۳\dot{x} + ۲y\dot{y} = -۴(x^۶ + y^۴) < ۰,\quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^۲ \setminus \{(۰,۰)\}.$$

بنابراین V برای مبدا یک تابع لیاپانوف قوی بوده و مبدا برای دستگاه مورد نظر پایدار مجانبی است. همچنین، دامنه‌ی جذب آن کل $\mathbb{R}^۲$ است. ■

مثال ۲۲.۶. با استفاده از یک تابع لیاپانوف مناسب، پایداری مبدا را برای دستگاه زیر بررسی کنید.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^۳ \\ \dot{y} = x^۳ \end{cases}$$

حل. تابع $V(x,y) = x^۴ + y^۴$ را در نظر می‌گیریم. اولاً $V \in C^۱$. ثانیاً $V(۰,۰) = ۰$ و برای هر $(x,y) \neq (۰,۰)$ داریم $V(x,y) > ۰$. پس تابع V شرایط تابع لیاپانوف را داراست. از طرفی

$$\dot{V} = ۴x^۳\dot{x} + ۲y\dot{y} = -۴x^۳y^۳ + ۴x^۳y^۳ = ۰.$$

پس V برای مبدا یک تابع لیاپانوف ضعیف بوده و مبدا پایدار لیاپانوف است. در واقع، با حل دستگاه، می‌بینیم که مبدا یک مرکز است. ∎

۳.۶ منیفلدهای پایدار و ناپایدار

در این بخش به مطالعه نظریه موضعی دستگاه‌های غیرخطی $\dot{x} = f(x)$ از معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم که در آن $f : E \to \mathbb{R}^n$ و E یک زیرمجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^n$ است. در قضیه اساسی وجود و یکتایی جواب، دیدیم که اگر $f \in C^۱(E)$، آنگاه دستگاه غیرخطی $\dot{x} = f(x)$ دارای یک جواب یکتا گذرا از هر نقطه $x_۰ \in E$ است که در یک بازه زمانی ماگزیمال وجود $(\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{R}$ تعریف شده است. به طور کلی، دستگاه غیرخطی $\dot{x} = f(x)$ را نمی‌توان حل کرد؛ اما با این وجود، می‌توان مقدار زیادی اطلاعات کیفی در مورد رفتار موضعی جواب‌ها بدست آورد (قضیه هارتمن ـ گرابمن). در اینجا، قضیه منیفلد پایدار را بیان می‌کنیم که نشان می‌دهد رفتار موضعی دستگاه غیرخطی $\dot{x} = f(x)$ در نزدیکی یک نقطه تعادل هذلولوی $x^\star$ که در آن $f(x^\star) = ۰$، معمولا توسط رفتار موضعی دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$ در نزدیکی مبدا تعیین می‌شود که در آن $A = Df(x^\star)$ مشتق f در نقطه $x^\star$ است.

در فصل ۴ دیدیم که زیرفضاهای پایدار E^s، ناپایدار E^u، و مرکزی E^c از دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$ تحت جریان خطی $\varphi_t = e^{At}$ پایا هستند. نتیجه مشابهی برای جریان غیرخطی φ_t از دستگاه $\dot{x} = f(x)$ برقرار است.

به عنوان مثال، دستگاه غیرخطی $\dot{x} = f(x)$ با $f(x) = \begin{bmatrix} -x_۱ \\ x_۲ + x_۱^۲ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید که

جواب آن با شرط اولیه $x(0) = c$ به صورت زیر است:

$$x = \varphi_t(c) = \varphi(t, c) = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^t + \frac{c_1^2}{3}(e^t - e^{-2t}) \end{bmatrix}.$$

حال نشان می‌دهیم که مجموعه‌های

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_2 = -\frac{x_1^2}{3}\}, \qquad U = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 = 0\},$$

تحت جریان φ_t پایا هستند. اگر $c \in S$، آنگاه $c_2 = -\frac{c_1^2}{3}$ و در نتیجه

$$\varphi_t(c) = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} \\ -\frac{c_1^2}{3} e^{-2t} \end{bmatrix} \in S.$$

بنابراین، $\varphi_t(S) \subset S$ برای هر $t \in \mathbb{R}$. به نحو مشابه، $\varphi_t(U) \subset U$ برای هر $t \in \mathbb{R}$. نمای فاز این دستگاه غیرخطی در شکل ؟؟ رسم شده است.

مثال ۲۳.۶. جریان $\varphi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ را برای دستگاه غیرخطی $\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 + x_1^2 \\ x_3 + x_1^2 \end{bmatrix}$ تعیین کنید و نشان دهید که مجموعه‌های

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_3 = -\frac{1}{3} x_1^2\}, \qquad U = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 = x_2 = 0\}$$

تحت جریان φ_t پایا هستند. سپس نمای فاز معادله را رسم کنید.

حل. جواب معادله $\dot{x} = f(x)$ با شرط اولیه $x(0) = c$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{-t}, \\ x_2(t) &= c_2 e^{-t} + c_1^2(e^{-t} - e^{-2t}) = (c_2 + c_1^2)e^{-t} - c_1^2 e^{-2t}, \\ x_3(t) &= c_3 e^t + \frac{c_1^2}{3}(e^t - e^{-2t}) = (c_3 + \frac{c_1^2}{3})e^t - \frac{c_1^2}{3} e^{-2t}. \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi_t(c) = 0 \iff c_3 + \frac{c_1^2}{3} = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{t \to -\infty} \varphi_t(c) = 0 \iff c_1 = c_2 = 0.$$

در نتیجه،

$$S = \{c \in \mathbb{R}^۳ \mid c_۳ = -\frac{۱}{۳}c_۱^۲\}, \qquad U = \{c \in \mathbb{R}^۳ \mid c_۱ = c_۲ = ۰\}.$$

روشن است که $\varphi_t(S) \subset S$ و $\varphi_t(U) \subset U$ برای هر $t \in \mathbb{R}$. نمای فاز معادله در شکل ؟؟ رسم شده است. ■

۱.۳.۶ قضیه منیفلد پایدار

قضیه منیفلد پایدار یکی از مهمترین نتایج در نظریه کیفی موضعی معادلات دیفرانسیل معمولی است. این قضیه نشان می‌دهد که در نزدیکی یک نقطه تعادل هذلولوی مانند $x^\star$، دستگاه غیرخطی $\dot{x} = f(x)$ دارای منیفلدهای پایدار و ناپایدار S و U مماس به زیر فضاهای خطی پایدار و ناپایدار E^s و E^u در $x^\star$ از دستگاه خطی شده $\dot{x} = Ax$ است که در آن $A = Df(x^\star)$. علاوه بر این، اگر φ_t جریان دستگاه غیرخطی باشد، آنگاه S و U به ترتیب تحت φ_t بطور مثبت و بطور منفی پایا هستند و در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$۱)\ \lim_{t\to+\infty} \varphi_t(c) = x^\star,\ \ \forall\, c \in S \qquad \text{and} \qquad ۲)\ \lim_{t\to-\infty} \varphi_t(c) = x^\star,\ \ \forall\, c \in U.$$

فرض بر این است که نقطه تعادل $x^\star$ در مبدا قرار دارد. اگر چنین نباشد، آنگاه با تغییر مختصات آفین $x = x^\star + y$ می‌توان نقطه تعادل $x^\star$ را به مبدا انتقال داد.

قضیه ۲۴.۶. ***(قضیه منیفلد پایدار)*** *فرض کنید E یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ شامل مبدا باشد، فرض کنید $f \in C^۱(E)$، و فرض کنید φ_t جریان دستگاه غیرخطی $\dot{x} = f(x)$ باشد. فرض کنید که $f(۰) = ۰$ و اینکه $Df(۰)$ دارای k مقدار ویژه با قسمت حقیقی منفی و $n-k$ مقدار ویژه با قسمت حقیقی مثبت است. در این صورت یک منیفلد مشتق‌پذیر kـ بعدی S مماس به زیر فضای پایدار E^s از دستگاه خطی $\dot{x} = Df(۰)x$ در ۰ وجود دارد به طوری که برای هر*

$t \geq 0$، S، $\varphi_t(S) \subset S$ و برای هر $x_0 \in S$،

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_t(x_0) = 0;$$

و یک منیفلد مشتق‌پذیر $(n-k)$ـ بعدی U مماس به زیر فضای ناپایدار E^u از $\dot{x} = Df(0)x$ در ۰ وجود دارد به طوری که برای هر $t \leq 0$، $\varphi_t(U) \subset U$ و برای هر $x_0 \in U$،

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi_t(x_0) = 0.$$

ملاحظه ۶.۲۵. قبل از استفاده از این قضیه، ملاحظه می‌کنیم که اگر $f \in C^1(E)$ و $f(0) = 0$، آنگاه دستگاه $\dot{x} = f(x)$ را می‌توان به صورت $\dot{x} = Ax + F(x)$ نوشت که در آن

$$A = Df(0), \quad F(x) = f(x) - Ax, \quad F \in C^1(E), \quad F(0) = 0, \quad DF(0) = 0.$$

با توجه به فصل ۴، یک ماتریس معکوس‌پذیر $n \times n$ وجود دارد به طوری که

$$B = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix},$$

که در آن مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ از ماتریس P دارای قسمت حقیقی منفی و مقادیر ویژه $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ از ماتریس Q دارای قسمت حقیقی مثبت هستند.

با قرار دادن $x = Cy$، دستگاه $\dot{x} = Ax + F(x)$ به دستگاه $\dot{y} = By + G(y)$ تبدیل می‌شود که در آن

$$G(y) = C^{-1}F(Cy) \in C^1(\widetilde{E}) \quad \textit{with} \quad \widetilde{E} = C^{-1}(E).$$

در اثبات نشان داده خواهد شد که توابع $(n-k)$ بار مشتق‌پذیر $\Psi_j(y_1, \dots, y_k)$ وجود دارند به طوری که معادلات

$$y_j = \Psi_j(y_1, \dots, y_k), \quad j = k+1, \dots, n$$

یک منیفلد مشتق‌پذیر kـ بعدی $\tilde{S}$ در فضای y تعریف می‌کنند. در این صورت، منیفلد مشتق‌پذیر S در فضای x با تغییر مختصات خطی $x = Cy$ از $\tilde{S}$ بدست می‌آید.

مثال ۲۶.۶. دستگاه غیرخطی

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 6x_2 + x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 + 3x_2 - x_1^2 \end{aligned}$$

را به صورت $\dot{y} = By + G(y)$ بنویسید که در آن

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2,$$

و $G(y)$ برحسب y_1 و y_2 درجه دوم است.

حل. ابتدا قسمت‌های خطی و غیرخطی دستگاه فوق را مشخص می‌کنیم، که به ترتیب، عبارتند از

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad F(x) = \begin{bmatrix} x_1x_2 \\ -x_1^2 \end{bmatrix}.$$

اکنون با یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A، فرم جردن A را مشخص می‌کنیم. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر با آنها عبارتند از

$$\lambda_{1,2} = \frac{tr(A) \mp \sqrt{tr(A)^2 - 4\det(A)}}{2} = \frac{4 \mp \sqrt{16 - 4(-21)}}{2} = \frac{4 \mp 10}{2}.$$
$$\Longrightarrow \lambda_1 = -3 < 0, \quad \lambda_2 = 7 > 0, \quad V_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

در نتیجه،

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

اکنون از تغییر متغیر خطی $x = Cy$ استفاده می‌کنیم تا دستگاه مورد نظر به صورت مطلوب نوشته شود (یعنی در فرم جردن قرار گیرد).

$$\begin{aligned} y = C^{-1}x \implies \dot{y} &= C^{-1}\dot{x} = C^{-1}(Ax + F(x)) = C^{-1}(ACy + F(Cy)) \\ &= C^{-1}ACy + C^{-1}F(Cy) \\ &= By + G(y), \end{aligned}$$

که در آن

$$G(y) = C^{-1}F(Cy) = C^{-1}F(-3y_1 + y_2, 2y_1 + y_2) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-3y_1 + y_2)(2y_1 + y_2) \\ -(-3y_1 + y_2)^2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3y_1^2 + 7y_1y_2 - 2y_2^2 \\ -39y_1^2 + 16y_1y_2 - y_2^2 \end{bmatrix}.$$

حال برای منیفلدهای مشتق‌پذیر ۱ــ بعدی $\tilde{S}$ و $\tilde{U}$ در فضای y داریم

$$\tilde{S} : y_2 = \Psi_2(y_1) = a_2y_1^2 + a_3y_1^3 + \ldots = \frac{3}{5}y_1^2 - \frac{33}{200}y_1^3 + \frac{381}{3800}y_1^4 + \ldots,$$
$$\tilde{U} : y_1 = \Psi_1(y_2) = b_2y_2^2 + b_3y_2^3 + \ldots = -\frac{2}{85}y_2^2 - \frac{3}{1700}y_2^3 - \frac{107}{447950}y_2^4 + \ldots.$$

■

مثال ۲۷.۶. دستگاه غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_1^2 \end{cases}$$

در این صورت،

$$S: \ x_2 = \Psi_2(x_1) = -\frac{1}{3}x_1^2 + O(x_1^5), \qquad U: \ x_1 = \Psi_1(x_2) = -\frac{1}{3}x_2^2 + O(x_2^5).$$

توجه کنید که دستگاه فوق تحت تبدیل

$$(t, x_1, x_2) \to (-t, x_2, x_1)$$

پایا است، یعنی تغییر نمی‌کند. بنابراین، با اعمال تبدیل

$$(x_1, x_2) \to (x_2, x_1)$$

روی S معادله U بدست می‌آید. نمای فاز موضعی معادله در شکل **؟؟** رسم شده است.

۴.۶ تمرینات

۱. (الف) مشتق تابع زیر را محاسبه کنید:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 \\ -x_1 + x_2 - x_2x_3 + x_1x_2x_3 \\ x_2 + x_3 - x_1^2 \end{bmatrix}.$$

(ب) صفرهای تابع فوق را بیابید و ماتریس یاکوبی را در این نقاط محاسبه کنید.

۲. با استفاده از قضیه هارتمن_گرابمن، نقاط تعادل و نوع آنها (چاه، منبع یا زین) را برای دستگاه‌های غیرخطی $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ مشخص کنید هرگاه

$$(a)\ \ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - x_1x_2 \\ x_2 - x_1^2 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -4x_2 + 2x_1x_2 - 8 \\ 4x_2^2 - x_1^2 \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_1x_2 \\ 2x_2 - x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix} \qquad (d)\ \ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ kx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_2 - x_3 \end{bmatrix}.$$

۳. با استفاده از تغییر مختصات قطبی، نمای فاز دستگاه معادلات زیر را رسم کنید:

$$1)\ \ \begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2)^2, \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2)^2. \end{cases}$$

$$2)\ \ \begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

$$3)\ \ \begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

$$4)\ \ \begin{cases} \dot{x} = -y\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \dot{y} = x\sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

۴. نشان دهید که چندجمله‌ای همگن درجه دوم $V(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$، که در آن a, b, c اعداد حقیقی هستند، مثبت اکید است (یعنی در مبدا صفر است و در نقاط دیگر مثبت است) اگر و تنها اگر $a > 0$ و $ac - b^2 > 0$.

۵. برای سه دستگاه زیر، با استفاده از توابع لیاپانوف درجه دوم مناسب، نوع پایداری مبدا را تعیین کنید:

$$(i)\quad \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_1x_2^2,\quad \dot{x}_2 = -2x_1^2x_2 - x_2^3.$$

$$(ii)\quad \dot{x}_1 = -x_1^3 + 2x_2^3,\ \dot{x}_2 = -2x_1x_2^2.$$

$$(iii)\quad \dot{x}_1 = x_1^3 - x_2^3,\quad \dot{x}_2 = x_1x_2^2 + 2x_1^2x_2 + x_2^3.$$

۶. دستگاه معادلات

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1 f(x_1, x_2)\\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 f(x_1, x_2)\end{aligned}$$

را در نظر بگیرید که در آن f یک تابع حقیقی مقدار از کلاس C^1 است. با استفاده از یک تابع درجه دوم، نشان دهید که اگر در یک همسایگی باز از مبدا، $f > 0$ باشد، آنگاه مبدا پایدار مجانبی است. اگر در یک همسایگی مبدا، $f < 0$ باشد، آنگاه نوع پایداری مبدا چیست؟

۷. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع C^1 است که در نقطه $\bar{x}$ دارای یک نقطه بحرانی ایزوله است و این نقطه بحرانی یک ماگزیمم موضعی اکید برای f است. نشان دهید $\bar{x}$ یک نقطه تعادل پایدار مجانبی از میدان برداری گرادیانی $F(x) = \nabla f(x)$ است.

۸. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع C^1 است که در نقطه $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ دارای یک نقطه بحرانی ایزوله است و این نقطه بحرانی یک ماگزیمم موضعی برای f نیست. نشان دهید $\bar{x}$ یک نقطه تعادل ناپایدار از میدان برداری گرادیانی $F(x) = \nabla f(x)$ است.

۹. نشان دهید تابع $V = x^2 + 4y^2 + 2xy^2 + y^4$ برای میدان برداری

$$F(x, y) = (-2xy^2, xy - 2y)$$

یک تابع لیاپانوف (ضعیف یا قوی) است.

۱۰. با استفاده از تابع

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2),$$

نشان دهید مبدا یک نقطه تعادل ناپایدار دستگاه زیر است:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^3 + x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2 \end{aligned}$$

۱۱. جریان $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ را برای دستگاه غیرخطی $\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ 2x_2 + x_1^2 \end{bmatrix}$ تعیین کنید و نشان دهید که مجموعه‌ی

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \;:\; x_2 = -\frac{1}{4}x_1^2\}$$

نسبت به جریان φ_t پایا است. سپس نمای فاز معادله را رسم کنید.

۱۲. جریان $\phi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ را برای دستگاه غیرخطی زیر تعیین کنید و سپس نمای فاز آن را در فضای $\mathbb{R}^3$ رسم کنید:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2^2 \\ x_2 + x_3^2 \\ -x_3 \end{bmatrix}.$$

۱۳. با حل دستگاه زیر مجموعه‌های پایای S و U را مشخص کنید:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 &= x_3 + x_2^2 \end{aligned}$$

۱۴. منیفلدهای پایدار و ناپایدار مبدا را برای دستگاه غیرخطی زیر تعیین کنید و نمای فاز آن را رسم کنید:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 2y + x^2 - y^2 \\ \dot{y} &= 3x + 4y - 2xy \end{aligned}.$$

۱۵. دستگاه‌های مسطح زیر را در نظر بگیرید:

$$(i) \quad \dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = x_2 + x_1^3.$$

$$(ii) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_1^3.$$

نشان دهید مبدا یک نقطه زینی است. منیفلدهای پایدار و ناپایدار مبدا برای دستگاه خطی شده و همچنین غیرخطی را تعیین کنید. نماهای فاز معادلات خطی شده حول مبدا و معادلات غیرخطی را رسم کرده و آنها را با هم مقایسه کنید.

۱۶. تقریب‌هایی برای منیفلدهای پایدار و ناپایدار تمامی نقاط زینی دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر به دست آورید و به کمک آنها نمای فاز را رسم کنید:

$$\dot{x}_1 = 1 - x_1x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3.$$

فصل ۷

انتگرال اول و دستگاه‌های حافظ انرژی

در این فصل، در مورد نوع خاصی از دستگاه‌های غیرخطی، موسوم به دستگاه‌های همیلتونی، نیوتنی، و گرادیانی، بحث خواهیم کرد که رسم نمای فاز آنها آسان است. قبل از آن، مطالبی از توابع چند متغیره حقیقی را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱.۷. (نقطه بحرانی) فرض کنید $H : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی دو متغیره باشد. در این صورت، نقطه‌ی $(a, b) \in \mathbb{R}^۲$ را برای H یک نقطه بحرانی گوییم هرگاه H در (a, b) مشتق‌پذیر نباشد یا اگر مشتق‌پذیر بود، آنگاه $\nabla H(a, b) = ۰$.

قضیه ۲.۷. (آزمون مشتق دوم) *فرض کنید* $(a, b) \in \mathbb{R}^۲$ *یک نقطه بحرانی از تابع* H *باشد و* $\nabla H(a, b) = ۰$. *قرار می‌دهیم:*

$$\Delta(a, b) = \begin{vmatrix} H_{xx}(a, b) & H_{xy}(a, b) \\ H_{yx}(a, b) & H_{yy}(a, b) \end{vmatrix} = H_{xx}(a, b)H_{yy}(a, b) - H_{xy}^{۲}(a, b).$$

در این صورت،

۱. *اگر* $\Delta(a, b) > ۰$ *و* $H_{xx}(a, b) > ۰$*، آنگاه* (a, b) *مینیمم است.*

۲. *اگر* $\Delta(a, b) > ۰$ *و* $H_{xx}(a, b) < ۰$*، آنگاه* (a, b) *ماکزیمم است.*

۳. *اگر* $\Delta(a, b) < ۰$*، آنگاه* (a, b) *نقطه زینی است.*

۴. اگر $\Delta(a,b)=\circ$، آنگاه آزمون نتیجه‌ای ندارد.

۱.۷ دستگاه‌های همیلتونی

تعریف ۳.۷. (انتگرال اول) تابع $H:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ از کلاس $C^{۱}$ که در هیچ زیرمجموعه‌ی بازی از $\mathbb{R}^{۲}$ ثابت نیست، یک انتگرال اول از دستگاه مسطح

$$\begin{cases} \dot{x}=P(x,y) \\ \dot{y}=Q(x,y) \end{cases}$$

نامیده می‌شود، هرگاه

$$XH=\nabla H\cdot X=P(x,y)\frac{\partial H}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial H}{\partial y}=\circ,$$

که در آن

$$X=P(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

بنابراین، تابع H در طول هر جواب معادله ثابت است، یعنی

$$H(x(t),y(t))=H(x(\circ),y(\circ))=H(x_\circ,y_\circ),\quad \forall\, t\in\mathbb{R}.$$

زیرا

$$\frac{d}{dt}H(x(t),y(t))=\frac{\partial H}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial H}{\partial y}\dot{y}=P(x,y)\frac{\partial H}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial H}{\partial y}=XH=\circ.$$

مثال ۴.۷. نشان می‌دهیم که دستگاه خطی زیر دارای انتگرال اول نیست.

$$\begin{cases} \dot{x}=-x \\ \dot{y}=-y \end{cases}$$

حل. فرض کنیم $H:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ یک انتگرال اول برای این دستگاه باشد. در این صورت، H در طول هر جواب معادله ثابت است. چون H در مبدا پیوسته است و تمامی جواب‌های

معادله جذب مبدا می‌شوند، پس H در $\mathbb{R}^۲$ تابعی ثابت است که با تعریف H در تناقض است. توجه کنید که مبدا یک گره پایدار است و در صورت وجود H، برای هر $(x_\circ, y_\circ) \in \mathbb{R}^۲$ می‌توان نوشت

$$H(x_\circ, y_\circ) = H(x(t, x_\circ, y_\circ), y(t, x_\circ, y_\circ)) = \lim_{t\to\infty} H(x(t, x_\circ, y_\circ), y(t, x_\circ, y_\circ)) = H(\circ, \circ).$$

■

تعریف ۵.۷. (دستگاه همیلتونی) فرض کنید $H : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع دو متغیره از کلاس $C^۲$ باشد. در این صورت، دستگاه مسطح

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \tag{۱.۷}$$

را یک دستگاه همیلتونی (با یک درجه آزادی) می‌نامیم و همچنین H را تابع همیلتونی دستگاه گوییم. روشن است که تابع غیر ثابت $H : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ یک انتگرال اول از دستگاه فوق است و مدارهای آن توسط منحنی‌های تراز $H(x, y) = h$ داده می‌شوند.

نکته ۶.۷. *در دستگاه‌های همیلتونی که دارای انتگرال اول H هستند، نقاط حدی مثل گره یا کانون و مجموعه‌های حدی مثل سیکل‌های حدی نمی‌توانند وجود داشته باشند.*

مثال ۷.۷. دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$$

در این صورت، $H(x, y) = -\cos(y) - \cos(x)$ یک تابع همیلتونی از این دستگاه خواهد بود.

مثال ۸.۷. اگر $H(x, y) = \frac{۱}{۲}y^۲ + xy - ۲x^۲$، آنگاه دستگاه همیلتونی آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x \\ \dot{y} = -y + ۴x \end{cases}$$

قضیه ۹.۷. *فرض کنید $f \in C^1(E)$، که در آن E یک زیرمجموعه‌ی باز و همبند ساده از $\mathbb{R}^2$ است. در این صورت، دستگاه غیرخطی $\dot{x} = f(x)$ در E یک دستگاه همیلتونی است اگر و تنها اگر $\nabla \cdot f(x) = div(f)(x) = 0$ برای هر $x \in E$.*

اثبات. قرار می‌دهیم $f = (f_1, f_2)$. اول، توجه کنید که

$$\nabla \cdot f(x) = div(f(x)) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \implies \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_2}.$$

حال قرار دهید

$$H(x) = \int_{x_{20}}^{x_2} f_1(x_1, t)dt - \int_{x_{10}}^{x_1} f_2(s, x_{20})ds = c + \int_0^1 (x_2 f_1(tx_1, tx_2) - x_1 f_2(tx_1, tx_2))\, dt,$$

که در آن $x_0 = (x_{10}, x_{20})$ نقطه‌ای دلخواه در E است. در این صورت،

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial x_2}(x) &= \int_0^1 \left(f_1(tx_1, tx_2) + tx_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(tx_1, tx_2) - tx_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(tx_1, tx_2) \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(f_1(tx_1, tx_2) + tx_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(tx_1, tx_2) + tx_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx_1, tx_2) \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(f_1(tx_1, tx_2) + t\frac{\partial}{\partial t} f_1(tx_1, tx_2) \right) dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(t f_1(tx_1, tx_2)\right) dt = t f_1(tx_1, tx_2)\Big|_0^1 \\
&= f_1(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

به نحو مشابه،

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial x_1}(x) &= \int_0^1 \left(tx_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx_1, tx_2) - tx_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(tx_1, tx_2) - f_2(tx_1, tx_2) \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(-tx_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(tx_1, tx_2) - tx_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(tx_1, tx_2) - f_2(tx_1, tx_2) \right) dt \\
&= -\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(t f_2(tx_1, tx_2)\right) dt = -t f_2(tx_1, tx_2)\Big|_0^1 \\
&= -f_2(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

■

نتیجه ۱۰.۷. *جریان تولید شده توسط یک میدان برداری همیلتونی در صفحه حافظ مساحت است چرا که دیورژانس آن متحد با صفر است.*

قضیه ۱۱.۷. *اگر $(x^\star, y^*)$ یک اکسترمم برای تابع H باشد، آنگاه $(x^\star, y^*)$ یک نقطه تعادل از نوع مرکز برای دستگاه همیلتونی خواهد بود و همچنین اگر $(x^\star, y^*)$ برای تابع H یک زین باشد، آنگاه برای دستگاه همیلتونی نیز یک نقطه تعادل زینی خواهد بود.*

مثال ۱۲.۷. دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - y \\ \dot{y} = x + \frac{۱}{۲}(x^۲ - y^۲) \end{cases}$$

الف) نشان دهید این دستگاه همیلتونی است و تابع همیلتونی آن را بدست آورید.

ب) نقاط تعادل دستگاه را یافته و آن‌ها را دسته‌بندی کنید.

ج) نمای فاز دستگاه را رسم کنید.

حل. قرار می‌دهیم

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} f_۱(x,y) \\ f_۲(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy - y \\ x + \frac{۱}{۲}(x^۲ - y^۲) \end{bmatrix} \implies divF = y - y = ۰.$$

بنابراین، دستگاه فوق همیلتونی است. برای تعیین تابع همیلتونی، می‌توانیم از قضیه ۹.۷ استفاده کنیم و بنویسیم:

$$\begin{aligned} H(x,y) &= y\int_۰^۱ f_۱(tx,ty)dt - x\int_۰^۱ f_۲(tx,ty)dt \\ &= y\int_۰^۱ (t^۲xy - ty)dt - x\int_۰^۱ (tx + \frac{t^۲}{۲}(x^۲ - y^۲))dt \\ &= y(\frac{۱}{۳}xy - \frac{۱}{۲}y) - x(\frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۶}(x^۲ - y^۲)) \\ &= \frac{۱}{۲}y^۲(x - ۱) - \frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۱}{۶}x^۳. \end{aligned}$$

حال نقاط تعادل دستگاه همیلتونی که همان نقاط بحرانی تابع H هستند را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial y} = 0 \implies y(x-1) = 0 \implies \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x} = 0 \implies -x - \dfrac{1}{2}(x^2 - y^2) = 0 \implies \begin{cases} \text{if } y = 0 \quad \text{then } x = 0 \text{ یا } x = -2 \\ \text{if } x = 1 \quad \text{then } y = \pm\sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

نقاط بحرانی تابع H عبارت‌اند از:

$$p_1 = (0,0), \qquad p_2 = (-2,0), \qquad p_3 = (1,\sqrt{3}), \qquad p_4 = (1,-\sqrt{3}).$$

قرار می‌دهیم $\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{yx} & H_{yy} \end{vmatrix} = H_{xx}H_{yy} - H_{xy}^2$. در این صورت، برای هر کدام از نقاط فوق خواهیم داشت:

$$\Delta(p_1) > 0, \qquad \Delta(p_2) < 0, \qquad \Delta(p_3) < 0, \qquad \Delta(p_4) < 0.$$

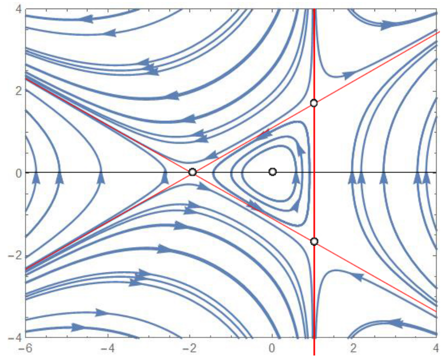
در نتیجه، p_1 یک مرکز و p_2, p_3, p_4 نقاط زینی دستگاه همیلتونی هستند.

از آنجایی که $H(p_2) = H(p_3) = H(p_4)$، این نقاط در یک مجموعه تراز قرار دارند و در نمای فاز مسیر گذرنده از آنها به هم متصل می‌شوند. برای تعیین جهت مسیرها نیز کافی است توجه کنید که در معادله‌ی $\dot{x} = y(x-1)$، برای $y > 0$ و $x > 1$، همواره داریم $\dot{x} > 0$، و این یعنی در این ناحیه x افزایشی است و لذا سایر جهت‌ها نیز به تبع این جهت مشخص می‌شوند. نمای فاز این دستگاه به شکل ۱.۷آ است. ■

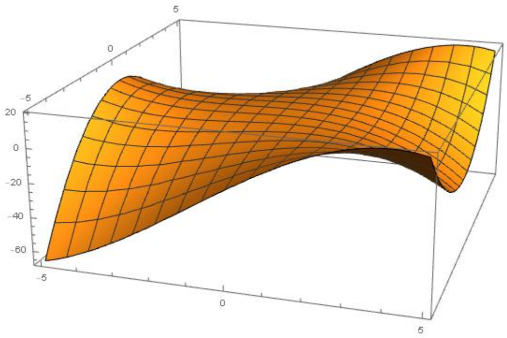
۲.۷ دستگاه‌های نیوتنی

در این بخش، به حالت خاصی از دستگاه‌های همیلتونی، یعنی دستگاه‌های نیوتنی می‌پردازیم. یک دستگاه نیوتنی به شکل زیر است:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x) \end{cases} \tag{۲.۷}$$



(آ) نمای فاز دستگاه همیلتونی



(ب) نمودار تابع همیلتونی

شکل ۱.۷: نمای فاز و نمودار تابع همیلتونی مثال ۱۲.۷

این دستگاه از روی معادله دیفرانسیل نیوتنی $\ddot{x} + f(x) = 0$ بدست می‌آید. تابع همیلتونی دستگاه فوق به شکل زیر است:

$$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x f(s)ds = \frac{1}{2}y^2 + u(x); \quad u(x) = \int_0^x f(s)ds.$$

تابع

$$u(x) = \int_0^x f(s)ds$$

را تابع پتانسیل می‌نامند. واضح است که نقاط تعادل یک دستگاه نیوتنی روی خط $y = 0$ قرار دارند و متناظر با نقاط بحرانی تابع پتانسیل $u(x)$ هستند. با استفاده از بسط تیلور به راحتی می‌توان دید که نقاط ماگزیمم تابع پتانسیل متناظر با نقاط تعادل زینی، نقاط مینیمم تابع پتانسیل متناظر با نقاط تعادل از نوع مرکز و نقاط عطف افقی تابع پتانسیل متناظر با نقاط تعادل از نوع گوشه هستند. به شکل‌های ؟؟ توجه کنید.

قضیه ۱۳.۷. *فرض کنید $x^\star$ یک نقطه بحرانی از تابع $u(x)$ باشد. در این صورت،*

۱. *اگر $x^\star$ برای $u(x)$ مینیمم باشد، آنگاه $(x^\star, 0)$ یک نقطه تعادل مرکز برای (۲.۷) است.*

۲. *اگر $x^\star$ برای $u(x)$ ماکزیمم باشد، آنگاه $(x^\star, 0)$ یک نقطه تعادل زینی برای (۲.۷) است.*

۳. *اگر $x^\star$ برای $u(x)$ یک نقطه عطف افقی باشد، آنگاه $(x^\star, ۰)$ یک نقطه تعادل گوشه برای (۲.۷) است.*

مثال ۱۴.۷. نمای فاز هر یک از دستگاه‌های نیوتنی زیر را رسم کنید.

۱. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$

حل. در مرحله اول داریم:

$$u(x) = \int_{۰}^{x} \sin s \, ds = ۱ - \cos x.$$

در نتیجه، تابع همیلتونی دستگاه برابر با $H(x,y) = \frac{۱}{۲}y^{۲} + ۱ - \cos x$ خواهد بود. از طرفی، نقاط تعادل دستگاه که همان نقاط بحرانی $u(x)$ هستند به طریق زیر بدست می‌آیند:

$$u'(x) = ۰ \implies \sin x = ۰ \implies x = n\pi.$$

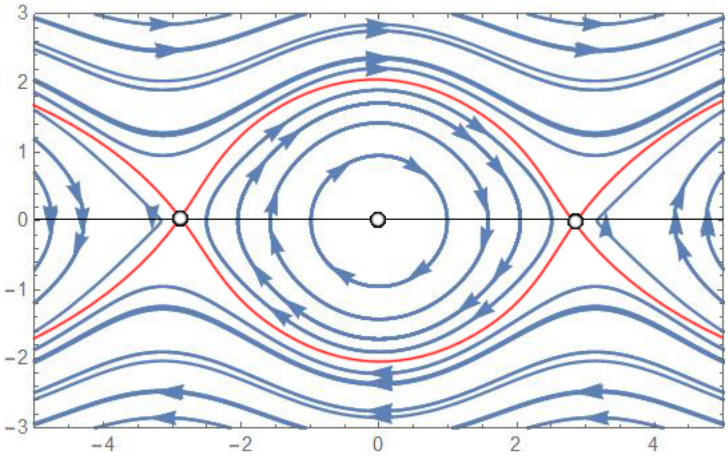
$$u''(x) = \cos x \implies u''(n\pi) = \cos(n\pi) = (-۱)^n.$$

در نتیجه، نقاط $(x,y) = (n\pi, ۰)$ برای nهای زوج، مرکز و برای nهای فرد، نقاط زینی هستند. از آنجایی که $H(-\pi, ۰) = H(\pi, ۰)$، مدارهای گذرنده از این نقاط به هم متصل می‌شوند و چون برای $y > ۰$، $\dot{x} > ۰$، پس جهت مسیرها ساعتگرد می‌باشد. در نهایت، نمای فاز این دستگاه به شکل ۲.۷ خواهد بود. ■

۲. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + x^{۲} \end{cases}$

حل. در مرحله اول داریم:

$$u(x) = -\int_{۰}^{x} (s + s^{۲}) ds = -\frac{۱}{۲}x^{۲} - \frac{۱}{۳}x^{۳}.$$



شکل ۲.۷: نمای فاز دستگاه نیوتنی مثال ۱۴.۷ قسمت ۱

در نتیجه، تابع همیلتونی دستگاه برابر $H(x,y) = \frac{۱}{۲}y^۲ - \frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۱}{۳}x^۳$ خواهد بود. از طرفی، نقاط تعادل دستگاه که همان نقاط بحرانی $u(x)$ هستند به طریق زیر بدست می‌آیند:

$$u'(x) = ۰ \implies -x - x^۲ = ۰ \implies -x(۱+x) = ۰ \implies \begin{cases} x = ۰ \\ x = -۱ \end{cases}$$

$$u''(x) = -۱ - ۲x \implies \begin{cases} u''(۰) = -۱ \\ u''(-۱) = ۱ \end{cases}$$

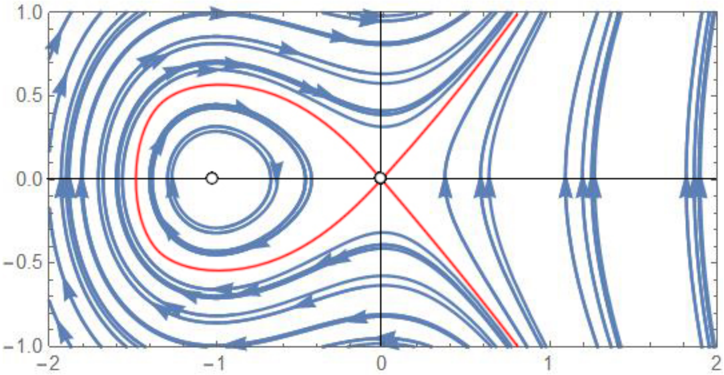
در نتیجه، نقطه $(-۱,۰)$ یک مرکز و نقطه $(۰,۰)$ یک نقطه زینی می‌باشد. چون برای $y > ۰$، $\dot{x} > ۰$، پس جهت مدارها ساعتگرد می‌باشد. در نهایت، نمای فاز این دستگاه به شکل ۳.۷ خواهد بود. ■

۳. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^۳ - x \end{cases}$

حل. در مرحله اول داریم:

$$u(x) = -\int_۰^x (s^۳ - s)ds = -\frac{۱}{۴}x^۴ + \frac{۱}{۲}x^۲.$$

در نتیجه، تابع همیلتونی دستگاه به صورت $H(x,y) = \frac{۱}{۲}y^۲ - \frac{۱}{۴}x^۴ - \frac{۱}{۲}x^۲$ خواهد بود. از طرفی، نقاط تعادل دستگاه که همان نقاط بحرانی $u(x)$ هستند با محاسبات زیر



شکل ۳.۷: نمای فاز دستگاه نیوتنی مثال ۱۴.۷ قسمت ۲

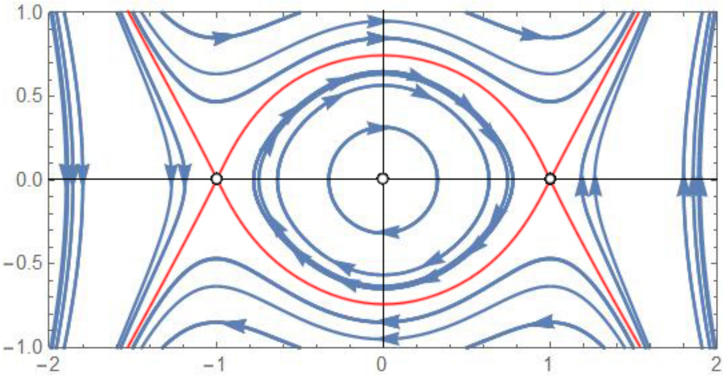
تعیین می‌شوند:

$$u'(x) = ۰ \implies -x^۳ + x = ۰ \implies -x(-x^۲ + ۱) = ۰ \implies \begin{cases} x = ۰ \\ x = \pm ۱ \end{cases}$$

$$u''(x) = ۱ - ۳x^۲ \implies \begin{cases} u''(۰) = ۱ \\ u''(\pm ۱) = -۲ \end{cases}$$

در نتیجه، نقطه $(۰,۰)$ یک مرکز و $(\pm ۱,۰)$ نقاط زینی می‌باشند. از آنجایی که $H(-۱,۰) = H(۱,۰)$، مسیرهای گذرنده از این نقاط به هم متصل می‌شوند و همانند قبل، جهت مسیرها ساعتگرد می‌باشد. در نهایت، نمای فاز این دستگاه به شکل ۴.۷ خواهد بود.

■



شکل ۴.۷: نمای فاز دستگاه نیوتنی مثال ۱۴.۷ قسمت ۳

۴. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^۳ \end{cases}$

حل. در مرحله اول داریم:

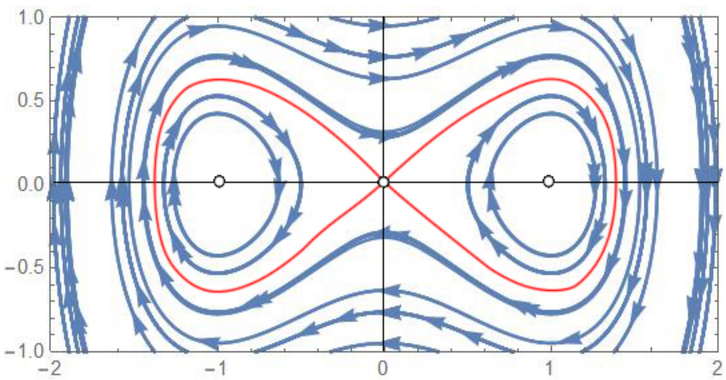
$$u(x) = -\int_{۰}^{x} (s - s^{۳})ds = -\frac{۱}{۲}x^{۲} + \frac{۱}{۴}x^{۴}.$$

در نتیجه، تابع همیلتونی دستگاه به صورت $H(x,y) = \frac{۱}{۲}y^{۲} - \frac{۱}{۲}x^{۲} + \frac{۱}{۴}x^{۴}$ خواهد بود.
از طرفی، نقاط تعادل دستگاه که همان نقاط بحرانی $u(x)$ هستند با محاسبات زیر بدست می‌آیند:

$$u'(x) = ۰ \implies -x + x^{۳} = ۰ \implies -x(۱ - x^{۲}) = ۰ \implies \begin{cases} x = ۰ \\ x = \pm ۱ \end{cases}$$

$$u''(x) = -۱ + ۳x^{۲} \implies \begin{cases} u''(۰) = -۱ \\ u''(\pm۱) = ۲ \end{cases}$$

در نتیجه، نقطه $(۰,۰)$ یک زین و $(\pm۱,۰)$ نقاط مرکز می‌باشند. بنابراین، نمای فاز این دستگاه به شکل ۵.۷ خواهد بود. ■



شکل ۵.۷: نمای فاز دستگاه نیوتنی مثال ۱۴.۷ قسمت ۴

۵. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x(x-۱)^{۲} \end{cases}$

حل. در مرحله اول داریم:

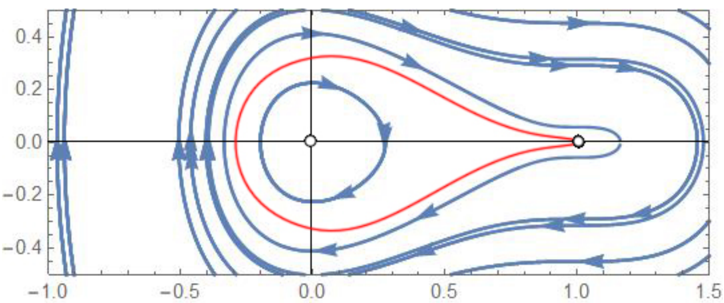
$$u(x) = \int_{۰}^{x} s(s-۱)^{۲}ds = \int_{۰}^{x} (s^{۳} - ۲s^{۲} + s)ds = (\frac{۱}{۴}s^{۴} - \frac{۲}{۳}s^{۳} + \frac{۱}{۲}s^{۲})\Big|_{۰}^{x} = \frac{۱}{۴}x^{۴} - \frac{۲}{۳}x^{۳} + \frac{۱}{۲}x^{۲}.$$

در نتیجه، تابع همیلتونی دستگاه به صورت $H(x,y)=\frac{۱}{۲}y^۲+\frac{۱}{۴}x^۴-\frac{۲}{۳}x^۳+\frac{۱}{۲}x^۲$ خواهد بود. از طرفی، نقاط تعادل دستگاه که همان نقاط بحرانی $u(x)$ هستند با محاسبات زیر بدست می‌آیند:

$$u'(x)=۰ \implies x(x-۱)^۲=۰ \implies \begin{cases} x=۰ \\ x=۱ \end{cases}$$

$$u''(x)=-۱+۳x^۲ \implies \begin{cases} u''(۰)=۱ \\ u''(۱)=۰ \end{cases}$$

در نتیجه، نقطه $(۰,۰)$ یک مرکز و نقطه $(۱,۰)$ یک گوشه می‌باشد. بنابراین، نمای فاز این دستگاه به شکل ۶.۷ خواهد بود. ■



شکل ۶.۷: نمای فاز دستگاه نیوتنی مثال ۱۴.۷ قسمت ۵

۳.۷ دستگاه‌های گرادیانی

نوع خاص دیگری از دستگاه‌های غیرخطی، دستگاه‌های گرادیانی هستند که در این بخش پیرامون آنها صحبت می‌کنیم.

تعریف ۱۵.۷. **(دستگاه گرادیانی)** فرض کنید $V:\mathbb{R}^۲\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع دو متغیره مشتق‌پذیر باشد. در این صورت، دستگاه

$$\dot{X}=-\nabla V \iff \begin{cases} \dot{x}=-\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dot{y}=-\dfrac{\partial V}{\partial y} \end{cases} \qquad (۳.۷)$$

را یک دستگاه گرادیانی نظیر V می‌نامیم.

لم ۱۶.۷. *مدارهای دستگاه همیلتونی و دستگاه گرادیانی نظیر تابع H، بر هم عمودند.*

اثبات. کافی است نشان دهیم میدان‌های برداری متناظر با آنها بر هم عمودند. اگر $(H_y, -H_x)$ میدان همیلتونی نظیر به تابع همیلتونی H و $(-H_x, -H_y)$ میدان گرادیانی نظیر به تابع H باشد، آنگاه ضرب داخلی آنها برابر صفر است زیرا

$$\begin{bmatrix} H_y \\ -H_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -H_x \\ -H_y \end{bmatrix} = -H_xH_y + H_xH_y = ۰.$$

■

قضیه ۱۷.۷. *نقاط تعادل دستگاه گرادیانی (۳.۷) نظیر نقاط بحرانی تابع V هستند. فرض کنید $(x^\star, y^*)$ یک نقطه تعادل ناتباهیده از دستگاه گرادیانی (۳.۷) باشد. در این صورت،*

۱. *اگر $(x^\star, y^*)$ برای V یک مینیمم باشد، آنگاه $(x^\star, y^*)$ یک گره‌ی پایدار برای (۳.۷) است.*

۲. *اگر $(x^\star, y^*)$ برای V یک ماکزیمم باشد، آنگاه $(x^\star, y^*)$ یک گره‌ی ناپایدار برای (۳.۷) است.*

۳. *اگر $(x^\star, y^*)$ برای V یک نقطه زینی باشد، آنگاه $(x^\star, y^*)$ یک نقطه تعادل زینی برای (۳.۷) است.*

مثال ۱۸.۷. نمای فاز دستگاه‌های همیلتونی و گرادیانی نظیر تابع

$$V(x,y) = \frac{۱}{۲}y^۲ - \frac{۱}{۴}x^۴ + \frac{۱}{۲}x^۲$$

را رسم کرده و با هم مقایسه کنید.

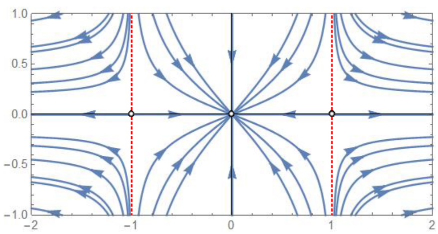
حل. دستگاه‌های همیلتونی و گرادیانی نظیر تابع V، به ترتیب، عبارتند از

$$\text{دستگاه گرادیانی}: \begin{cases}\dot{x} = -V_x = x^۳ - x\\ \dot{y} = -V_y = -y\end{cases} \qquad \text{دستگاه همیلتونی}: \begin{cases}\dot{x} = V_y = y\\ \dot{y} = -V_x = x^۳ - x\end{cases}$$

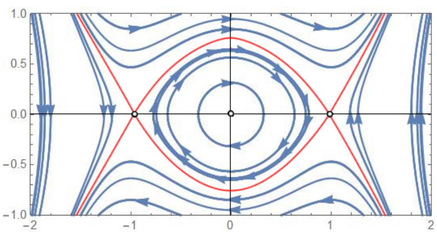
نقاط تعادل این دستگاه‌ها که همان نقاط بحرانی تابع V هستند را بدست می‌آوریم.

$$y = ۰, \quad x - x^۳ = ۰ \implies x(۱ - x^۲) = ۰ \implies x = ۰, \pm۱.$$

بنابراین، $p_۱ = (۰,۰)$ و $p_۲ = (\pm۱,۰)$ نقاط تعادل هستند که طبق آزمون مشتق دوم، $p_۱ = (۰,۰)$ برای V یک مینیمم و $p_۲ = (\pm۱,۰)$ برای V نقاط زینی هستند. در نتیجه، $p_۱ = (۰,۰)$ برای دستگاه همیلتونی یک مرکز و برای دستگاه گرادیانی یک گره پایدار است. نقاط $p_۲ = (\pm۱,۰)$ نیز برای هر دو دستگاه نقاط زینی می‌باشند. در نهایت، نمای فاز هر دو دستگاه به شکل ۷.۷ خواهد بود. در این دو شکل واضح است که مدارهای دستگاه‌های همیلتونی و گرادیانی بر هم عمودند. ■



(ب) دستگاه گرادیانی



(آ) دستگاه همیلتونی

شکل ۷.۷: نمای فاز دستگاه‌های مثال ۱۸.۷

۴.۷ تمرینات

۱. نمای فاز دستگاه‌های همیلتونی زیر را رسم کنید:

$$۱)\ \begin{cases}\dot{x} = y + y(x^۲ + y^۲)\\ \dot{y} = x - x(x^۲ + y^۲)\end{cases} \qquad ۲)\ \begin{cases}\dot{x} = y - y^۳\\ \dot{y} = x - x^۳\end{cases}$$

$$۳)\ \begin{cases}\dot{x} = \cos y\\ \dot{y} = \cos x\end{cases} \qquad ۴)\ \begin{cases}\dot{x} = \sin x\\ \dot{y} = -y\cos x\end{cases}$$

۲. نمای فاز معادلات نیوتنی زیر را در صفحه $\mathbb{R}^۲$ رسم کنید:

$$۱)\ \ \ddot{x}+x+x^۳=۰ \qquad\qquad ۲)\ \ \ddot{x}+x(۱-x)(\lambda-x)=۰,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

۳. نمای فاز دستگاه‌های گرادیانی زیر را در صفحه فاز $\mathbb{R}^۲$ رسم کنید:

$$۱)\ \ \begin{cases}\dot{x}=-۲x(x-۱)(x-\frac{۱}{۲})\\ \dot{y}=-y\end{cases} \qquad\qquad ۲)\ \ \begin{cases}\dot{x}=y\sin x\\ \dot{y}=-\cos x\end{cases}$$

۴. نمای فاز دستگاه‌های حاصلضرب زیر را در فضای $\mathbb{R}^۲$ رسم کنید:

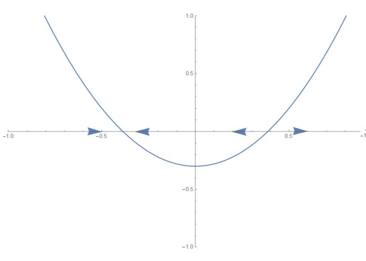
$$۱)\ \ \begin{cases}\dot{x}=x^۴-x^۲\\ \dot{y}=y^۲-y^۴\end{cases} \qquad\qquad ۲)\ \ \begin{cases}\dot{x}=x-x^۳\\ \dot{y}=y-y^۳\end{cases}$$

فصل ۸
مقدمه‌ای بر نظریه انشعاب

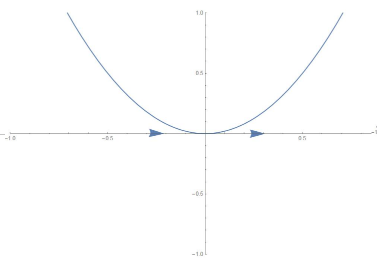
دستگاه $\dot{x} = f(x,\mu)$ را در نظر بگیرید که در آن μ یک پارامتر است. در این دستگاه، ممکن است با تغییر μ، تعداد نقاط تعادل نیز تغییر کند. اگر در $\mu = \mu_\circ$ این اتفاق رخ دهد، آنگاه $\mu_\circ$ را **نقطه‌ی انشعاب دستگاه** گوییم. در این حالت در $\mu_\circ$ یا نقطه تعادلی به وجود می‌آید و یا نقطه تعادلی از بین می‌رود. به عنوان مثال، معادله‌ی $\dot{x} = x^۲ + \mu$ را در نظر بگیرید. برای این دستگاه داریم:

$$f(x,\mu) = x^۲ + \mu = \circ \implies \begin{cases} \text{جواب ندارد} & \mu > \circ \\ x = \circ & \mu = \circ \\ x = \pm\sqrt{\mu} & \mu < \circ \end{cases}$$

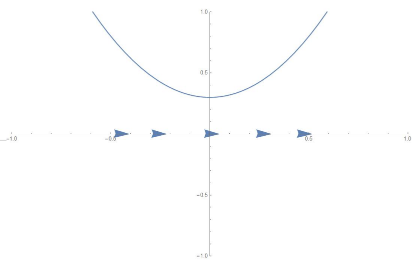
بنابراین $\mu = \circ$ یک نقطه انشعاب دستگاه است و همچنین نمای فاز این دستگاه بر اساس $f(x,\mu)$ به شکل ۱.۸ خواهد بود.



$\mu < \circ$ (ج)



$\mu = \circ$ (ب)

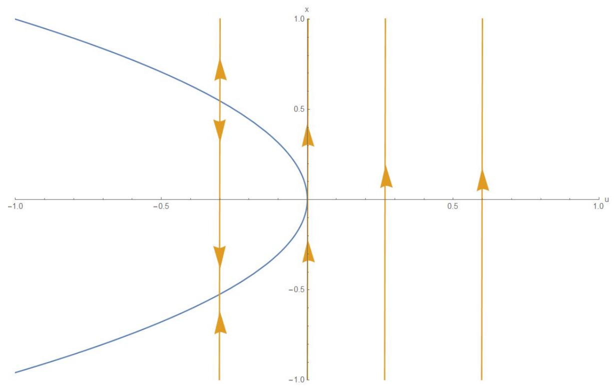


$\mu > \circ$ (آ)

شکل ۱.۸: نمای فاز دستگاه $\dot{x} = x^۲ + \mu$

تعریف ۱.۸. **(دیاگرام انشعاب)** نمایش نقاط تعادل دستگاه $\dot{x} = f(x, \mu)$ در صفحه‌ی (μ, x) را دیاگرام انشعاب گوییم.

به عنوان مثال، دیاگرام انشعاب دستگاه $\dot{x} = x^۲ + \mu$ که در بالا بررسی شد، به شکل ۲.۸ خواهد بود.



شکل ۲.۸: دیاگرام انشعاب دستگاه $\dot{x} = x^۲ + \mu$

۱.۰.۸ انشعاب گره‌ـزینی

فرض کنید $\dot{x} = f(x, \mu)$ یک دستگاه باشد و در $\mu = \mu^\star$ یک انشعاب برای نقطه‌ی $x = x^\star$ رخ دهد. در این صورت، $\mu^\star$ را انشعاب گره‌ـزینی گوییم هرگاه

۱. $f(x^\star, \mu^\star) = ۰$ یعنی $(x^\star, \mu^\star)$ یک نقطه تعادل دستگاه باشد.

۲. $\frac{\partial f}{\partial x}(x^\star, \mu^\star) = ۰$ یعنی $(x^\star, \mu^\star)$ غیرهذلولوی باشد.

۳. $\frac{\partial f}{\partial \mu}(x^\star, \mu^\star) \neq ۰$

۴. $\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(x^\star, \mu^\star) \neq ۰$

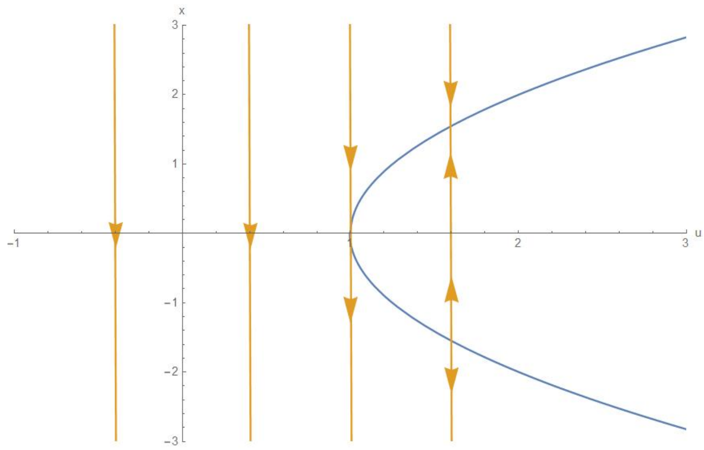
به عنوان مثال، انشعابی که برای دستگاه در بالا یافتیم، یک انشعاب گره‌ـزینی است (چهار شرط فوق را برای آن بررسی کنید.)

مثال ۲.۸. نشان دهید دستگاه $\dot{x} = \mu - x - e^{-x}$ در $\mu = ۱$ برای نقطه تعادل $x = ۰$ تحت یک انشعاب گره‌ـزینی قرار می‌گیرد. سپس دیاگرام انشعاب آن را رسم کنید.

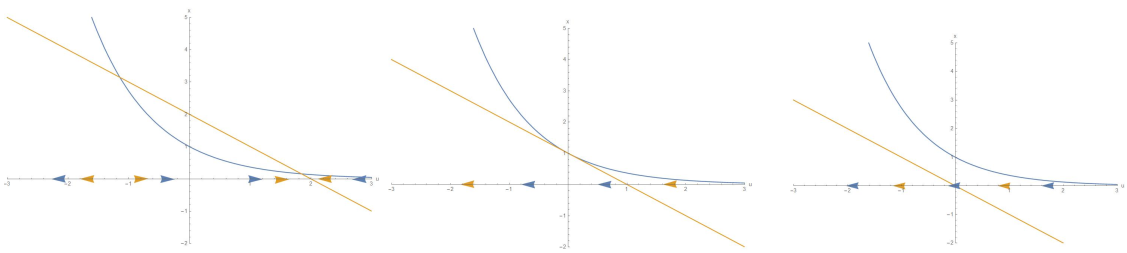
حل. شرایط چهارگانه‌ی انشعاب گره‌ـزینی را برای نقطه‌ی $(۰, ۱)$ بررسی می‌کنیم:

$$f(۰, ۱) = ۰, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(۰, ۱) = ۰, \qquad \frac{\partial f}{\partial \mu}(۰, ۱) = ۱ \neq ۰, \qquad \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(۰, ۱) = -۱ \neq ۰.$$

بنابراین، در $x = ۰$ برای $\mu = ۱$ یک انشعاب گره‌ـزینی رخ می‌دهد. دیاگرام این انشعاب به شکل ۳.۸ است. همچنین، نمای فاز این دستگاه به ازای μهای مختلف بر اساس تقاطع نمودارها در شکل ۴.۸ آمده است. ■



شکل ۳.۸: دیاگرام انشعاب مثال ۲.۸



(ج) $\mu > ۱$ (ب) $\mu = ۱$ (آ) $\mu < ۱$

شکل ۴.۸: نمای فاز مثال ۲.۸

۲.۰.۸ انشعاب تبادل پایداری

فرض کنید $\dot{x} = f(x,\mu)$ یک دستگاه باشد و در $\mu = \mu^\star$ یک انشعاب برای نقطه‌ی $x = x^\star$ رخ دهد. در این صورت، $\mu^\star$ را نقطه انشعاب تبادل پایداری گوییم هرگاه

۱. $f(x^\star,\mu^\star) = ۰$ یعنی $(x^\star,\mu^\star)$ یک نقطه تعادل دستگاه باشد.

۲. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^\star,\mu^\star) = ۰$ یعنی $(x^\star,\mu^\star)$ غیرهذلولوی باشد.

۳. $\dfrac{\partial f}{\partial \mu}(x^\star,\mu^\star) = ۰$

۴. $\dfrac{\partial^۲ f}{\partial x\partial \mu}(x^\star,\mu^\star) \neq ۰$

۵. $\dfrac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(x^\star,\mu^\star) \neq ۰$

مثال ۳.۸. نشان دهید دستگاه $\dot{x} = \mu\ln x + x - ۱$ تحت یک انشعاب تبادل پایداری قرار می‌گیرد.

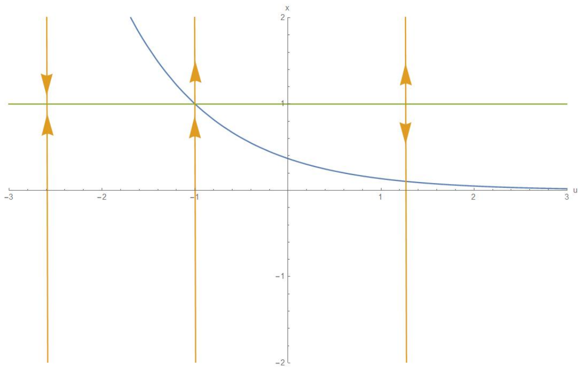
حل. ابتدا نقطه‌ی انشعاب را بدست می‌آوریم. برای این منظور، قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} (۱) \quad f(x,\mu) = \mu\ln x + x - ۱ = ۰ \\ (۲) \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\mu) = \dfrac{\mu}{x} + ۱ = ۰ \implies \mu = -x \end{cases}$$

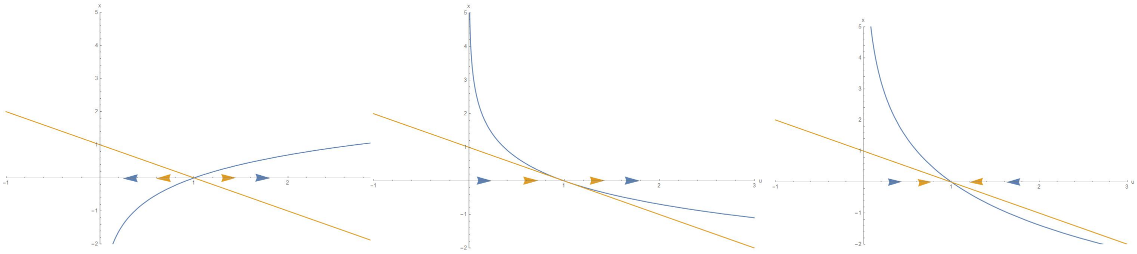
با جایگذاری (۲) در (۱)، خواهیم داشت $x = ۱$ و از اینجا نتیجه می‌شود $\mu = -۱$. حال شرایط پنج‌گانه‌ی انشعاب تبادل پایداری را برای دستگاه مورد نظر در نقطه‌ی $(۱,-۱)$ بررسی می‌کنیم. اولاً واضح است که $f(۱,-۱) = ۰$. همچنین، به راحتی می‌توان دید که

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۱,-۱) = ۰, \quad \frac{\partial f}{\partial \mu}(۱,-۱) = ۰, \quad \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(۱,-۱) = ۱ \neq ۰, \quad \frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial \mu}(۱,-۱) = ۱ \neq ۰.$$

پس تمامی شرایط انشعاب تبادل پایداری برقرارند. بنابراین، در $x = ۱$ برای $\mu = -۱$، یک انشعاب تبادل پایداری رخ می‌دهد. دیاگرام این انشعاب به شکل ۵.۸ است. همچنین، نمای



شکل ۵.۸: دیاگرام انشعاب مثال ۳.۸



$\mu < -۱$ (آ)　　$\mu = -۱$ (ب)　　$\mu > -۱$ (ج)

شکل ۶.۸: نمای فاز مثال ۳.۸

فاز این دستگاه به ازای μهای مختلف بر اساس تقطیع نمودارها در شکل ۶.۸ آمده است.

■

۳.۰.۸ انشعاب چنگال

فرض کنید $\dot{x} = f(x, \mu)$ یک دستگاه باشد و در $\mu = \mu^\star$ یک انشعاب برای نقطه‌ی $x = x^\star$ رخ دهد. در این صورت، $\mu^\star$ را نقطه انشعاب چنگال گوییم هرگاه

۱. $f(x^\star, \mu^\star) = ۰$ یعنی $(x^\star, \mu^\star)$ یک نقطه تعادل دستگاه باشد.

۲. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^\star, \mu^\star) = ۰$ یعنی $(x^\star, \mu^\star)$ غیرهذلولوی باشد.

۳. $\dfrac{\partial f}{\partial \mu}(x^\star, \mu^\star) = ۰$

۴. $\dfrac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(x^\star, \mu^\star) = ۰$

۵. $\dfrac{\partial^۲ f}{\partial x \partial \mu}(x^\star, \mu^\star) \neq ۰$

۶. $\dfrac{\partial^۳ f}{\partial x^۳}(x^\star, \mu^\star) \neq ۰$

مثال ۴.۸. نشان دهید $\dot{x} = -x + \mu \tanh x$ تحت یک انشعاب چنگال قرار می‌گیرد.

حل. ابتدا نقطه‌ی انشعاب را بدست می‌آوریم. برای این منظور، قرار می‌دهیم:

$$f(x, \mu) = -x + \mu \tanh x = ۰ \implies \begin{cases} x = ۰ \\ \mu = \dfrac{x}{\tanh x} \end{cases}$$

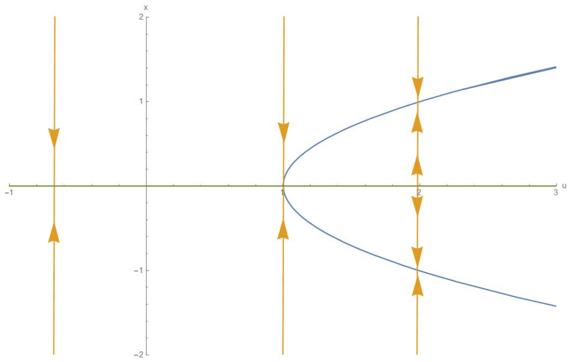
اما

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ۰ \implies -۱ + \mu \frac{۱}{\cosh^۲ x} = ۰ \implies \mu = \cosh^۲ x.$$

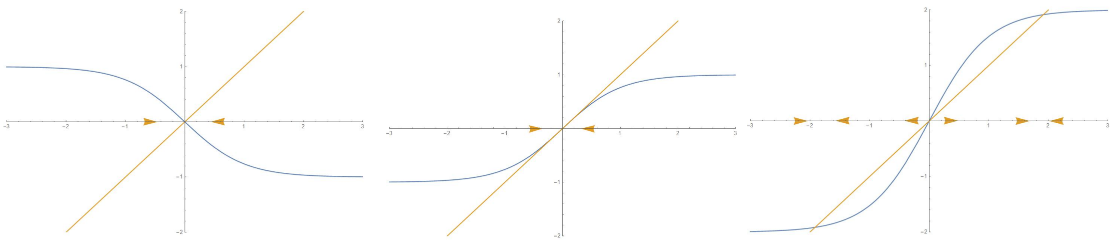
در نتیجه، به ازای $x = ۰$ داریم $\mu = ۱$. بنابراین، در نقطه $x = ۰$ به ازای $\mu = ۱$ یک انشعاب رخ می‌دهد. حال شرایط انشعاب چنگال را برای $(۰, ۱)$ بررسی می‌کنیم. اولاً واضح است که دو شرط اول برقرار است و در ادامه داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(۰, ۱) = ۰, \qquad \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(۰, ۱) = ۰, \qquad \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial \mu}(۰, ۱) \neq ۰, \qquad \frac{\partial^۳ f}{\partial x^۳}(۰, ۱) \neq ۰.$$

بنابراین، در $x = ۰$ برای $\mu = ۱$ یک انشعاب چنگال رخ می‌دهد. دیاگرام این انشعاب به شکل ۷.۸ است. همچنین، نمای فاز این دستگاه به ازای μهای مختلف بر اساس تقطیع نمودارها در شکل ۸.۸ آمده است. ■



شکل ۷.۸: دیاگرام انشعاب مثال ۴.۸



(آ) $\mu > ۱$ (ب) $\mu = ۱$ (ج) $\mu < ۱$

شکل ۸.۸: نمای فاز مثال ۴.۸

فهرست مراجع

[1] M. W. Hirsch, S. Smale, Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, New York, Academic Press, 1974.

[2] W. M. Hirsch, S. Smale, R. Devaney, Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos, Elsevior, 2004.

[3] Y. A. Kuznetsov, Elements of Bifurcation Theory. New York, Springer-Verlag 1995.

[4] J. D. Meiss, Differential Dynamical Systems, SIAM 2007.

[5] L. Perko, Differntial Equations and Dynamical systems, Third Edition, Springer-Verlag , 2001.

[6] S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications in Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. Reading, MA, Addison–Wesley 1994.

[7] S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Second Edition, Springer-Verlag, NewYork, 2003.