$u(x,y) = x^2 - y^2 \qquad v(x,y) = 0$

مثال: تابع مختلط $w = f(z) = \bar{z}$ را مشخص کنید.

$z = x + iy \rightarrow w = \bar{z} = x - iy$

$u(x,y) = x \qquad v(x,y) = -y$

مثال: تابع مختلط $f(z) = e^z$

$z = x + iy \quad w = e^z \rightarrow w = e^{x+iy} \rightarrow e^x \cdot e^{iy}$

$e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i(e^x \sin y)$

$$\begin{cases} u(x,y) = e^x \cos y \\ v(x,y) = e^x \sin y \end{cases}$$

یادآوری: اگر $z_0 \in \mathbb{C}$ یک عدد مختلط باشد و $\delta > 0$ عدد حقیقی مثبت باشد، همسایگی z_0 شعاع δ عبارت است از:

$$N_\delta(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta \}$$

Sôroush

Subject:
Year: Month: Day: ( )

اگر $z=x+iy$ ، $z_0=x_0+iy_0$

$$|z-z_0|=|(x-x_0)+i(y-y_0)|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

لذا $N_\delta(z)=\{z=x+iy\in\phi \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$

دیسک باز به مرکز x_0,y_0 و شعاع δ =

تعریف: اگر $w=f(z)$ یک تابع مختلط باشد و $z\in\phi$ ، $z_0\in\phi$ آنگاه

$\lim_{z\to z_0} f(z)=L$ هرگاه

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \quad 0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-L|<\varepsilon$$

تذکر: تمام قضایای حد و مشتق توابع حقیقی در مورد توابع مختلط نیز برقرارند

(حد مجموع و تفاضل و ضرب حاصل ...)

تعریف: فرض کنید $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ یک تابع مختلط باشد

و $z_0=x_0+iy_0$ ، یا $z_0=\infty$ اعداد مختلط باشند. تابع $w=f(z)$ در

z_0 دارای حد موجود و برابر با L است اگر و تنها اگر دو متغیره $u(x,y)$ و $v(x,y)$

Soroush

Subject: ۱۳۳
Year: Month: Day: ( )
page: ( )

دارای حد منحصر و برتریب برابر با f و g باشند

مثال: برای تابع متغیر $w=f(z)=z^2$ در نقطه $z_0=0$ داریم:

اگر $z=x+iy \Rightarrow w=z^2=(x^2-y^2)+(2xy)i$

$u(x,y)=x^2-y^2 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2-y^2)=0$

$v(x,y)=2xy \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2xy=0$

بنابر $\Rightarrow \lim_{z\to 0} (z^2)=0$

تعریف: فرض کنید $w=f(z)$ یک تابع متغیر باشد و $z\in A$ باشد

گوییم f در z پیوسته است هرگاه f در z صدق کند و $\lim f(z)=f(z)$

شرط تابع متغیر $w=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$

در نقطه $z_0=x_0+iy_0$ پیوسته است اگر و تنها اگر توابع دو متغیره $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در (x_0,y_0) پیوسته باشند

Soroush

Subject:
Year: Month: Day: ( )

مثال: تابع مختلط $w = f(z) = z^2$ در تمام نقاط غیر مختلط ϕ پیوسته است

زیرا توابع $\begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{cases}$ هیچ عاملی بوده و همه جا پیوسته است

مثال: ثابت کنید تمام توابع چند جمله‌ای $w = f(z) = z^n$ که $n \in \mathbb{N}$ در تمام

نقاط صفحه مختلط ϕ پیوسته‌اند

مثال: تابع مختلط $w = f(z) = \text{Arg}(z)$ در تمام نقاط به‌جز خط $\begin{cases} y = 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$ پیوسته است در نقاط سایر نقاط پیوسته است.

قضیه: تمام عملیات پیوستگی توابع حقیقی در مورد توابع مختلط برقرار است

پیوستگی مجموع، حاصل ضرب، تقسیم و ...

تعریف: فرض کنید $w = f(z)$ یک تابع مختلط است و $z_0 \in \mathbb{C}$ که f در z_0 مشتق پذیر است هرگاه حد زیر موجود و متناهی باشد

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

در صورت وجود مقدار آن را با $f'(z_0)$ نشان می‌دهیم

Soroush

Subject: ۱۳ ژ
Year: Month: Day: ( )
page: ( )

مثال: تابع فقط $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ثابت کنید اولاً متوان نشان داد که تابع دو متغیره $u(x,y)$ در $(0,0)$ متن نیرایست همچنین $v(x,y)$ نیز همواره متن نیرایست اما

متن نیرایست تابع فقط متن نیرنیست

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0} \frac{u(x,y)-0}{x+iy}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)(x+iy)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(2x^2)(x+ix)} = \lim \frac{1}{2x(1+i)} = \frac{1}{2(1+i)} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

لذا متن نیر $z=0$ متعدد نیست.

قضیه اول کوشی-ریمان: $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تابع فقط باشد

اگر f در نقطه $z = x+iy$ متن نیر باشد آنگاه معادلات زیر برقرارند

Soroush

Subject:
Year: Month: Day: ( )

$$\begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{cases}$$ معادلات کوشی ریمان

به علاوه مقدار مشتق f در z عبارت است از:

$$f'(z) = u_x(x,y) + i v_x(x,y)$$

قضیه: کوشی ـ ریمان: اگر $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ یک تابع متغیر

بوده و $z = x + iy$ چنان باشد که معادلات کوشی ـ ریمان در نقطه z برقرار

باشند و علاوه تابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در نقطه (x,y) پیوسته بوده و دارای

مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند آنگاه f در $z = x+iy$ مشتق پذیر

است

$$f'(x+iy) = u_x(x,y) + i v_x(x,y)$$

مثال: تابع مختلط $w = f(z) = z^2$ را در نظر بگیرید نشان دهید این تابع

در همه جا مشتق پذیر است.

$$w = z^2 = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$u(x,y) = x^2 - y^2$$
$$v(x,y) = 2xy$$

لذا روابط فوق در $\longrightarrow$ کوشی ـ ریمان برقرار نند $\begin{cases} 2x = 2x \\ -2y = -2y \end{cases}$

Soroush

از طرفی در هر نقطه (x,y) ، توابع چند جمله‌ای $U(x,y)$ و $V(x,y)$ پیوسته دارای مشتقات جزئی پیوسته‌اند پس طبق قضیه داریم $w=z^2$ همه جا مشتق پذیراست.

$$f'(x+iy) = U_x(x,y) + iV_x(x,y) = 2x + i(2y)$$

$$= 2(x+iy) = 2z$$

* بطور کلی توابع $w=f(z)=z^n$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ همه جا مشتق پذیرند

$$(z^n)' = nz^{n-1}$$

مثال، تمام نقاط مشتق پذیر تابع مختلط $w=f(z)=|z|^2$ و مقدار مشتق آن را به دست آورید

$$w = |z|^2 = x^2+y^2$$

$$\begin{cases} U(x,y) = x^2+y^2 \\ V(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

لذا f تنها در $z=0$ مشتق پذیر است داریم

$$f'(0) = U_x(0,0) + iV_x(0,0) = 0 + 0i = 0$$

مثال، نشان دهید $w=f(z)=\bar{z}$ در هیچ نقطه‌ای مشتق پذیر نیست.

و همه جا پیوسته است

Soroush

Subject:
Year: Month: Day: ( )

$z = x + iy \longrightarrow \bar{z} = x - iy$

$u(x,y) = x$

$v(x,y) = y \Longrightarrow$ معادلات کوشی $\begin{cases} 1 = 1 \\ -1 = 1 \end{cases}$ ✗

چون هیچ جا مشتق پذیر نیست، لذا این توابع مختلط در x و y هیچ جا پیوسته اند، لذا تعریف f هم جا پیوسته است

مثال: تابع مقابل در چه نقاطی مشتق پذیر است و مقدار مشتق را بیابید

$f(x,iy) = \cos x + i(\cos x + \cos y)$

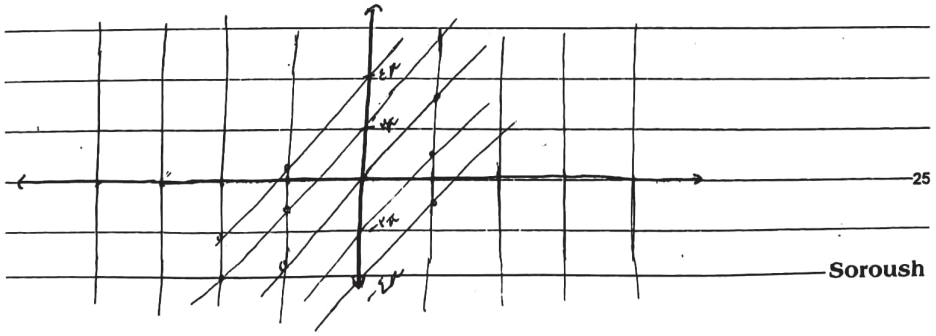
$u(x,y) = \cos x$

$v(x,y) = \cos x + \cos y$

معادلات کوشی ریمان $\Longrightarrow$ $\begin{cases} -\sin(x) = -\sin y & (1) \\ 0 = +\sin x & (2) \end{cases}$

$(1) \rightarrow y - x = 2k\pi \; ; \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad y = x + 2k\pi$

$(2) \rightarrow x = n\pi \; ; \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



Soroush

Subject: ۱۳۹
Year: Month: Day: ( )
page: ( )

$$\begin{cases} x = n\pi, & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ y = x = 2k\pi, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

$f(x+iy) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$ قضیه

$= (-\sin(n\pi)) + i(-\sin(n\pi)) = 0$

لزوم عقبی معادلات کوشی ـ ریمان: فرض کنید تابع مختلط

$w = f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ در نقطه $z = re^{i\theta}$ برای $r \neq 0$

مشتق پذیر باشد در این صورت معادلات کوشی ریمان نیز برقرارند

$$\begin{cases} u_\theta = -rv_r \\ v_\theta = ru_r \end{cases}$$

به علاوه در این وضعیت مقدار مشتق در نقطه $z = re^{i\theta}$ عبارت است از

$f'(re^{i\theta}) = (u_r + iv_r)e^{-i\theta}$

مثال: نشان دهید تابع مختلط $w = f(z) = \frac{1}{z}$ در نقطه $z \neq 0$

مشتق پذیر است و مقدار آن را بدست آورید

Soroush

Subject:
Year: Month: Day: ( )

$$w = f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= \underbrace{\frac{\cos\theta}{r}}_{u(r,\theta)} + i\underbrace{\left(\frac{-\sin\theta}{r}\right)}_{v(r,\theta)}$$

شرایط کوشی ـ ریمان:
$$\begin{cases} \frac{-\sin\theta}{r} = r\left(\frac{\sin\theta}{r^2}\right) \\ \frac{-\cos\theta}{r} = r\left(\frac{-\cos\theta}{r^2}\right) \end{cases}$$

با توجه به اینکه توابع مثلثاتی $u(r,\theta)$ و $v(r,\theta)$ در هر نقطه $z = re^{i\theta}$ که $r \neq 0$، پیوسته و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته‌اند، طبق قضیه دوم کوشی ـ ریمان، f در هر نقطه $z \neq 0$، مشتق‌پذیر است.

برای محاسبه مشتق داریم:

$$f'(re^{i\theta}) = (u_r + iv_r)e^{-i\theta} = \left(\frac{-\cos\theta}{r^2} + i\frac{-\sin\theta}{r^2}\right)(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= \left(\frac{-\cos^2\theta}{r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\right) + i\left(\frac{\sin\theta\cdot\cos\theta}{r^2} + \frac{\sin\theta\cdot\cos\theta}{r^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{r^2}\left[\cos^2\theta - \sin^2\theta\right] + \frac{i}{r^2}\left[2\sin\theta\cdot\cos\theta\right]$$

Soroush

$$= \frac{-1}{2^2}\left[\cos 2\theta\right] + \frac{i}{2^2}\left[\sin 2\theta\right]$$

$$= \frac{-1}{2^2}\left[\cos 2\theta - i\sin 2\theta\right]$$

$$= \frac{-1}{2^2}\left[e^{-2i\theta}\right] = -\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^{i\theta}}\right)^2 = -\left(\frac{1}{2e^{i\theta}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{z}\right)^2 = \frac{-1}{z^2}$$

مثال: مشتق توابع $f(z)=\sqrt{z}$ را بدست آورید.

تعریف: $w=f(z)$ یک تابع مختلط باشد که دامنه‌ی D واقع در صفحه‌ی مختلط تعریف شده است. فرض کنید $z\in D$. در این صورت f در z تحلیلی است هرگاه حداقل یک همسایگی $N_\delta(z)$ از z موجود باشد که f در تمام نقاط آن همسایگی مشتق‌پذیر باشد.

[illegible]

Soroush

Subject:
Year: Month: Day: ( )

به علاوه گوییم f در کل ناحیه D تحلیلی است هرگاه f در تمام نقاط واقع در D، تحلیلی باشد.

تعریف: یک تابع مختلط $w=f(z)$ را تام گوییم هرگاه f همه جا در صفحه مختلط، تحلیلی باشد.

مثال: توابع چندجمله‌ای مختلط، توابعی تام هستند.

مثال: اگر تابع تحلیلی f تعریف شده در ناحیه D، همواره D دارای مقادیر حقیقی باشد، آنگاه f تابعی ثابت است.

حل: قرار دهید $f(x+iy)=u(x,y)+0i \quad \forall (x,y)\in D$

چون f همه جا در D تحلیلی است پس f همه جا در D مشتق‌پذیر است پس برای هر $(x,y)\in D$ معادلات کوشی-ریمان برقرارند:

$$\begin{cases} u_x(x,y)=0 \\ u_y(x,y)=0 \end{cases} \quad \forall x+iy\in D$$

نتیجه: لذا f در D ثابت است.

Soroush

Subject: ۱۴۳
Year: Month: Day: ( ) page: ( )

تعریف: فرض کنید $u(x,y)$ تابعی ۲ متغیره تعریف شده بر ناحیه D باشد

گوییم $u(x,y)$ بر D همساز است هرگاه اولاً $u(x,y)$ در تمام نقاط D دارای

مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد و ثانیاً $u(x,y)$ معادله لاپلاس را برآورده کند

یعنی: $u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0$ برای هر $(x,y)\in D$

قضیه: فرض کنید تابع مختلط $f(x,iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ در ناحیه D تحلیلی باشد

در این صورت هر دو تابع مؤلفه‌ای $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در D همساز هستند

تعریف: فرض کنید $u(x,y)$ تابعی دو متغیره و تعریف شده بر ناحیه D باشد

اگر $u(x,y)$ یک تابع همساز باشد، آنگاه تابع دو متغیره $v(x,y)$ مزدوج همساز

u روی D می‌نامیم هرگاه تابع مختلط $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در ناحیه

D تحلیلی باشد

هدف: یافتن مزدوج همساز یک تابع داده‌شده همساز $u(x,y)$:

مثال: تابع تحلیلی $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ را چنان بیابید که

$u(x,y)=e^{-y}(x\cos x-y\sin x)$

Soroush $=x\cos x\,e^{-y}-ye^{-y}\sin x$

Subject:
Year: Month: Day: ( )

حل: اولاً u تابعی همساز است:

$$u_x(x,y) = e^{-y}(\cos x - x\sin x) - ye^{-y}\cos x$$

$$u_{xx} = e^{-y}(-\sin x - (\sin x + x\cos x)) + ye^{-y}\sin x$$

$$u_y(x,y) = -e^{-y}\cdot x\cos x - \sin x\,(e^{-y} - ye^{-y})$$

$$u_{yy}(x,y) = e^{-y}\cdot x\cos x - \sin x\,(-e^{-y} - (e^{-y} - ye^{-y}))$$

$$u_{xx} = e^{-y}(-2\sin x - x\cos x) + ye^{-y}\sin x$$

$$u_{yy} = e^{-y}\cdot x\cos x - \sin x\,(-2e^{-y} + ye^{-y})$$

$$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} \equiv 0$$

برای پیدا کردن مزدوج همساز u صورت زیر عمل می‌کنیم

چون $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ خود تحلیلی است، پس v در شرایط زیر

است و به شرایط معادلات کوشی-ریمان خود معروف‌اند:

$$\begin{cases} u_x = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{cases}$$

Soroush

Subject: ۱۴۰۴
Year: Month: Day: ( ) page: ( )

$e^{-y}(\cos x - x\sin x) - y e^{-y}\cos x = V_y(x,y)$ (۱)

$-e^{-y}\cdot x\cos x - \sin x(e^{-y} - y e^{-y}) = -V_x(x,y)$ (۲)

معادله (۱) → $V(x,y) = -(\cos x - x\sin x)e^{-y} - \cos x(y e^{-y} - e^{-y}) + h(x)$

انتگرال گیری نسبت به y

نسبت به x مشتق → $V_x(x,y) = -e^{-y}(-\sin x - (\sin x + x\cos x))$

$-(y e^{-y} + e^{-y})\sin x + h'(x)$ (۳)

$e^{-y}\cdot x\cos x + \sin x(e^{-y} - y e^{-y}) = e^{-y}(-\sin x - \sin x$ مساوی ۲و۳

$- x\cos x) - (y e^{-y} + e^{-y})\sin x + h'(x)$

$\Rightarrow h'(x) = 0 \rightarrow h(x) = c$

$V(x,y) = (-\cos x + x\sin x)e^{-y} + \cos x\, e^{-y}(1+y) + c$ ← جواب نهایی

$f(x+iy) = e^{-y}(x\cos x - y\sin x) + i\big((-\cos x + x\sin x)e^{-y}$

$+ \cos x\cdot e^{-y}(1+y) + c\big)$

Soroush

Subject:
Year: Month: Day: ( )

مثال: تمام توابع تحلیلی f را پیدا کنید که

$$Real(f'(z)) = 3x^2 - 6y - 3y^2$$

حل: قرار دهید $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$

بنا بر تعریف کوشی ـ ریمان:

$$f'(x+iy) = u_x(x,y) + i v_x(x,y)$$

$$real(f'(z)) = u_x(x,y) = 3x^2 - 6y - 3y^2$$

$$u_x(x,y) = 3x^2 - 6y - 3y^2$$

$$u(x,y) = x^3 - 6xy - 3xy^2 + h(y) \quad (1)$$

از طرفی معادلات کوشی ـ ریمان برقرارند:

$$\left.\begin{array}{l} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_y(x,y) = 3x^2 - 6y - 3y^2 \quad (2) \\ v_x(x,y) = -[-6x - 6y + h'(y)] \quad (3) \end{array}\right.$$

~~انتگرال (3) نسبت به x: $v(x,y) = 3x^2 y - 6xy - h(y)x + k(y)$~~

~~$v_y(x,y) = 3x^2 - 6x - h(y) + k'(y)$~~

Subject: ۱۴۷

Year: Month: Day: ( ) page: ( )

$\frac{\partial V}{\partial x} = 3x^2 + 4xy - 3y^2 = 3x^2 - x\,g(y) + k'(y)$

$k'(y) + 4xy + 3y^2 - x\,g'(y) \to x = \frac{k'(y) + 3y^2}{g'(y)} \to x \neq R$

$\frac{k'(y) + 4xy + 3y^2}{g'(y)}$

(۲) $\to V(x,y) = 3x^2y - 2y^2 - y^3 + k(x)$

$\frac{\partial}{\partial x} \to V_x(x,y) = 6xy + k'(x)$ (۱)

۳,۴ $\to 4x + 6xy - h'(y) = 6xy + k'(x)$

$4x - k'(x) = h'(y) = -k$ ثابت

$k'(x) = 4x - k \to k(x) = 2x^2 - kx + c_2$

$h'(y) = k \to h(y) = ky + c_1$

$u(x,y) = x^3 - 6xy - 3xy^2 + ky + c_1$

$V(x,y) = 3x^2 - 4y^2 - y^3 + 2x^2 - kx + c_2$

$f(x+iy) = (x^3 - 6xy - 3xy^2 + ky + c_1) +$

$i\,(3x^2y - 2y^2 - y^3 + 2x^2 - kx + c_2)$

Soroush

Subject:
Year: Month: Day: ( )

برخی توابع مختلط

نگاشت های مختلط:

$W = f(z) = z$

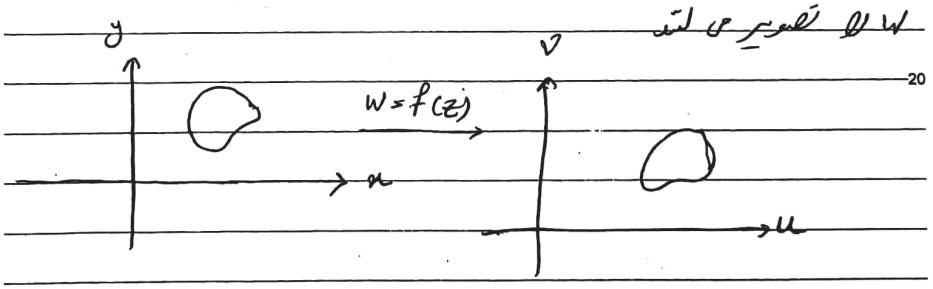
$f(x+iy) = x+iy \rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x \\ v(x,y) = y \end{cases}$

معادلات کوشی ریمان $\rightarrow \begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) = 1 \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) = 0 \end{cases}$

بنابر قضیه کوشی ریمان، تابع $f(z)=z$ یعنی $W = f(z) = z$ در جاهائی تابع است

$f'(z) = 1 + 0i = 1$

این نگاشت دوناحیه در صفحه مختلط z را به همان ناحیه در صفحه مختلط w تصویر می کند



Soroush

Subject: ۱۴۹
Year: Month: Day: ( )
page: ( )

تابع انتقال $w = f(z) = z + b$ که در آن b یک عدد مختلط ثابت است، نشان دهید

پس داریم: $\begin{cases} z = x + iy \\ b = b_2 i + b_1 \end{cases}$

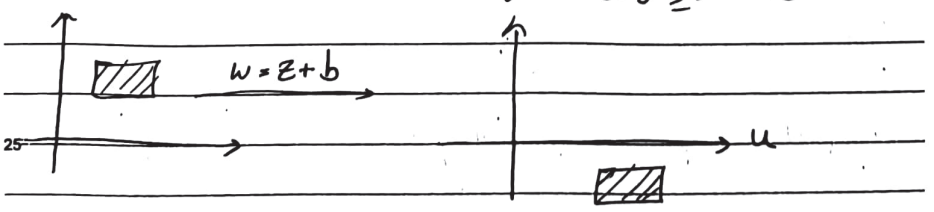
$$w = z + b \Rightarrow (x+iy) + (b_2 i + b_1) = (x + b_1) + (y + b_2) i$$

$$\begin{cases} u(x,y) = x + b_1 \\ v(x,y) = y + b_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{معادلات کوشی ریمان}} \begin{cases} u_x = v_y = 1 \\ u_y = -v_x = 0 \end{cases}$$

طبق قضیه دیفرانسیل پذیر است $f'(z) = 1 + 0i = 1$

لذا با توجه به قضیه فوق ثابت می‌شود که این تابع، هر عدد مختلط $z = x + iy$ را با بردار ثابت (b_1, b_2) جمع می‌کند لذا این تابع از نظر هندسی به اندازه بردار (b_1, b_2) جابجا می‌کند و در هندسه صفحه مختلط z را به انتقال یافته آن نگاشت می‌کند.

صفحه مختلط تصویر صفحه مختلط



Soroush

Subject:
Year: Month: Day: ( )

۳ نالا ثابت $W = f(z) = az$ که a یک عدد مختلط ثابت است

اگر $\begin{cases} a = a_1 + a_2 i \\ z = x + iy \end{cases}$ آنگاه داریم:

$W = f(z) = (a_1 + a_2 i)(x + iy)$

$(a_1 x - a_2 y) + (a_1 y + a_2 x) i$

$\begin{cases} u(x,y) = a_1 x - a_2 y \\ v(x,y) = a_1 y + a_2 x \end{cases}$ → معادلات کوشی ریمان

$\begin{cases} u_x = v_y = 1 \\ u_y = -v_x = 0 \end{cases}$

لذا تابع کوشی ریمان خواهد شد نیز است.

$f'(z) = a_1 + i(a_2) = a$

حالت اول: $|a| = 1$

لذا $\begin{cases} a = e^{i\varphi} \\ z = r e^{i\theta} \end{cases}$

$W = az = r e^{i(\theta+\varphi)}$

$|W| = r = |z|$

$Arg(W) = \theta + \varphi = Arg\, z + Arg\, a$

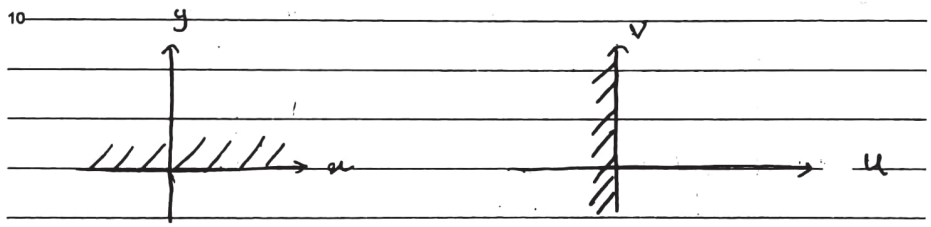
Soroush

Subject: ۱۵۱
Year: Month: Day: ( ) page: ( )

بنابر مطالب فوق در این حالت، نلاشت منتاظ $W=aZ$ تنها بر دوران به اندازه $Arg(a)$ ایجاد می‌کند و تصویر هر ناحیه در صفحه‌ی منتاظ Z تحت f، دوران یافته آن به اندازه $Arg(a)$ در صفحه‌ی منتاظ W می‌باشد.

مثال: $W=f(z)=iz$ ؟ $Arg(i)=\frac{\pi}{2}$

تصویر ناحیه $Im(z)>0$ تحت نلاشت فوق عبارت است از:



$$\begin{cases} z=re^{i\theta} \\ a=\rho e^{i\varphi} \end{cases}$$ حالت $|a|\neq 1$ در نظر می‌گیریم.

$$W=aZ=(\rho e^{i\varphi})(re^{i\theta})=r\rho e^{i(\theta+\varphi)}$$

$$\begin{cases} |W|=r\rho=|Z|\cdot|a| \\ Arg(W)=\theta+\varphi=Arg(Z)+Arg(a) \end{cases}$$

اگر $|a|<1$، آنگاه $|Z|<|W|$، یعنی در این حالت نلاشت

Soroush

Subject:
Year: Month: Day: ( )

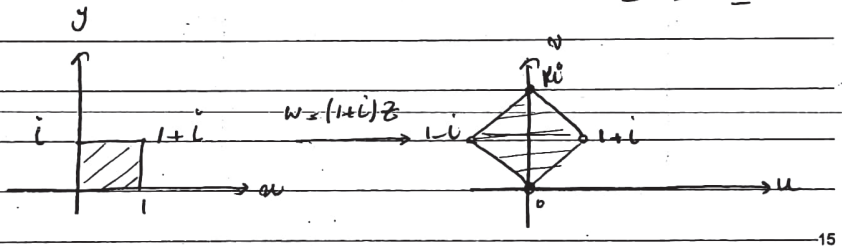
فرق، تر یبی از کمان انبساط دوران یا دوران عکس برد به اندازه Arg(a) است

اگر |a|<1 آنگاه |z| > |w| ، یعنی در حالت نامساوی فرق تر یبی است

از کمان انقباض دوران یا دوران عکس برد به اندازه Arg(a)

مثال: $w = f(z) = (1+i)z$

تصویر ناحیه زیر تحت نامساوی فرق عبارت است از



$a = 1+i \rightarrow |a| = \sqrt{2} > 1$

$Arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$

$0 \xrightarrow{f} 0$

$1 \xrightarrow{f} 1+i$

$1+i \xrightarrow{f} (1+i)^2 = 2i$

$i \xrightarrow{f} (1+i)i = i-1$

Soroush

Subject: ۱۵۳
Year: Month: Day: ( ) page: ( )

④ تابع خطی متقابل $w=f(z)=az+b$

این نگاشت ترکیبی است از یک انتقال (اصلاً یک انبساط یا انقباض به اندازه $|a|$ و یک دوران به اندازه $\text{Arg}(a)$ (بسته به اینکه $|a|<1$ یا $|a|>1$)

این نگاشت همدیس است $\forall z$ ، $f'(z)=a$

مثال: نگاشت خطی $w=f(z)=(1-i)z+1$ را در $1+2i$ بیابید.

① $|1-i|=\sqrt{2}>1$

② $\text{Arg}(1-i)=\frac{-\pi}{4}$ ، $\frac{-\pi}{4}$ یعنی یک دوران به اندازه

③ انتقال به اندازه بردار $(1,1)$

نگاشت توانی $w=f(z)=z^2$

$z=x+iy$

$w=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2xyi$

قبلاً دیدیم که این نگاشت همدیس است، $f'(z)=2z$

در قطبی داریم $\begin{cases} z=re^{i\theta} \\ w=\rho e^{i\varphi} \end{cases}$

Soroush

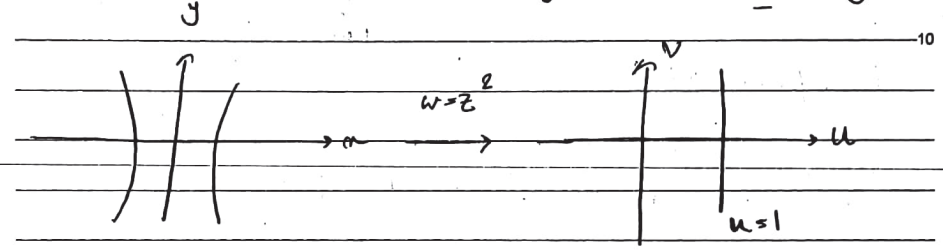
Subject:
Year: Month: Day: ( )

$$\rho e^{i\varphi} = (re^{i\theta})^2 = r^2 e^{i2\theta}$$

$$\begin{cases} |W| = r^2 = |Z|^2 \\ Arg(W) = 2\theta = 2\,Arg(Z) \end{cases}$$

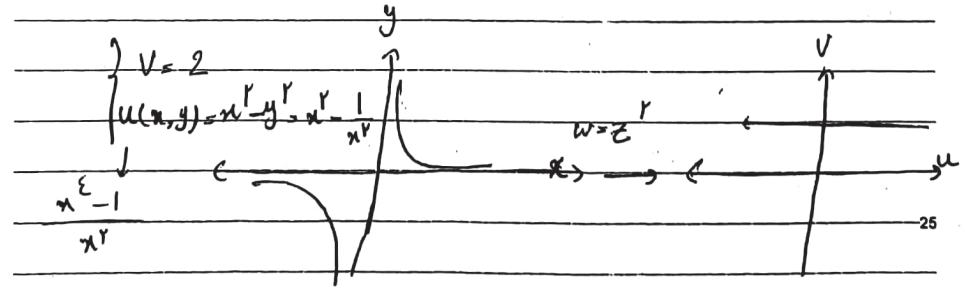
این قاعدتا تقریبی است از انبساط و انقباض و دوران

مثال: تصویر هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ تحت $W = Z^2$



$$x^2 - y^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} u(x,y) = 1 \quad \forall (x,y) \\ v(x,y) = 2x\left(\pm\sqrt{x^2-1}\right) \quad \forall (x,y) \end{cases}$$

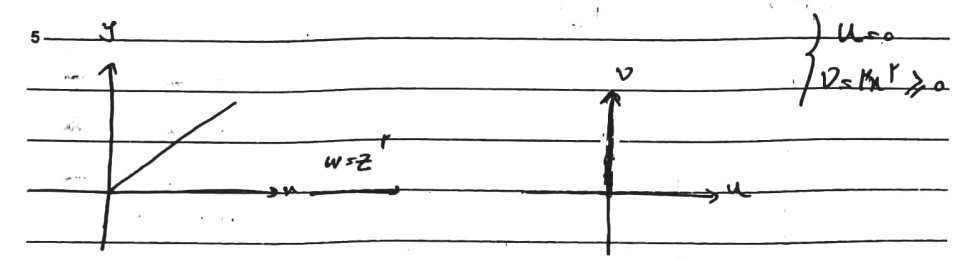
مثال: تصویر هذلولی $xy = 1$ تحت $W = Z^2$ عبارت است از



Soroush

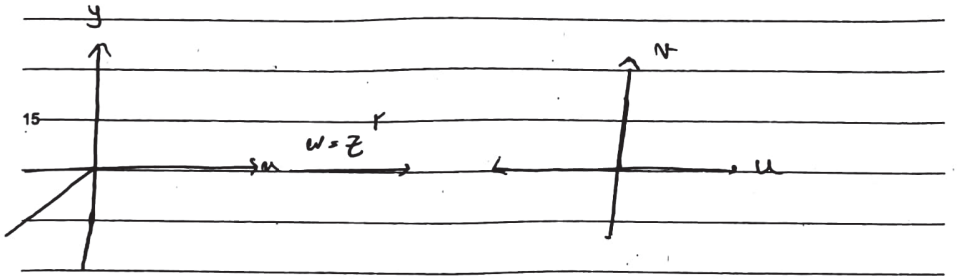
Subject: ۱۵۵
Year: Month: Day: ( ) page: ( ).

مثال: تصویر نیم خط $\begin{cases} y=x \\ x\geq 0 \end{cases}$ تحت $w=z^2$ عبارت است از



$\begin{cases} u=0 \\ v=2x^2\geq 0 \end{cases}$

همچنین نیم خط $\begin{cases} y=x \\ x\leq 0 \end{cases}$ تصویر می‌شود $\begin{cases} u=0 \\ v=2x^2\geq 0 \end{cases}$



یعنی $y=x$ بار دیگر به نیم خط $\begin{cases} u=0 \\ v=2x^2\geq 0 \end{cases}$ تصویر می‌شود

مثال: خط $y=c\neq 0$ که c یک عدد ثابت است تصویر می‌شود تحت $w=z^2$ به

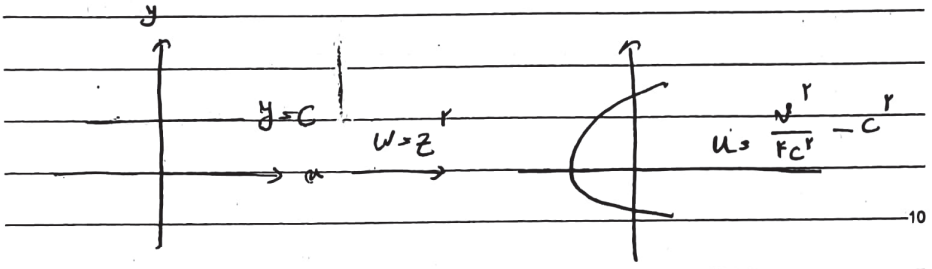
$$\begin{cases} u(x,y)=x^2-c^2 \\ v(x,y)=2cx \end{cases}$$

Soroush

Subject:
Year: Month: Day: ( )

$x = \frac{v}{2c}$

$u = \left(\frac{v}{2c}\right)^2 - c^2 = \frac{v^2}{4c^2} - c^2$



ب) تابع $w = f(z) = \frac{1}{z}$ را در نقاط مختلف بررسی کنید.

قبلا دیدیم که این تابع در تمام نقاط $z \neq 0$ مشتق پذیر بوده و $f' = \frac{-1}{z^2}$

ابتدا فرض کنید

$z = x + iy$

$w = u + iv$

$w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w} = \frac{1}{u+iv} = \frac{u-iv}{(u+iv)(u-iv)}$

$= \left(\frac{u}{u^2+v^2}\right) + i\left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{u^2+v^2} \\ y = \frac{-v}{u^2+v^2} \end{cases}$ ✱

Soroush

Subject: ۱۵۷
Year: Month: Day: ( ) page: ( )

از طرفین عبارتیم معادله کلی خط و دایره در صفحه مختلط z عبارت است از:

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}\right)+\frac{bu}{u^2+v^2}-\frac{cv}{u^2+v^2}+d=0$$

$$\frac{a}{u^2+v^2}+\frac{bu}{u^2+v^2}-\frac{cv}{u^2+v^2}+d=0$$

$$\Rightarrow d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$$

لذا تابع ثابت مختلط $w=\frac{1}{z}$

الف) هر خط ماری بر مبدأ تابعیک خط ماری بر مبدأ تصویر می‌شود

ب) هر خط غیرماری بر مبدأ تابعیک دایره ماری بر مبدأ تصویر می‌شود

ج) هر دایره ماری بر مبدأ تابعیک خط غیرماری بر مبدأ تصویر می‌شود

د) هر دایره غیرماری بر مبدأ تابعیک دایره غیرمار بر مبدأ تصویر می‌شود

مثال: خط $x=\frac{1}{2}$ تحت تابع $\frac{1}{z}$ تصویر می‌شود به:

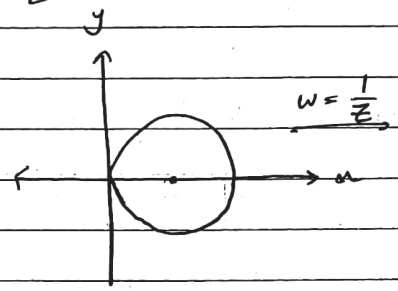
$$\frac{u}{u^2+v^2}=1 \Rightarrow u^2+v^2-u=0 \Rightarrow (u-\tfrac{1}{2})^2+v^2=\tfrac{1}{4}$$

Soroush

Subject:
Year: Month: Day: ( )

تصویر معکوس به دایره مانند برعکس به معادله $(u-\frac{1}{2r_0})^2+v^2=(\frac{1}{2r_0})^2$

مثال: تصویر درون دایره به مرکز $(x_0,0)$ و شعاع r_0 تحت $w=\frac{1}{z}$ ؟



$w=\frac{1}{z}$

$(x-x_0)^2+y^2=r_0^2$

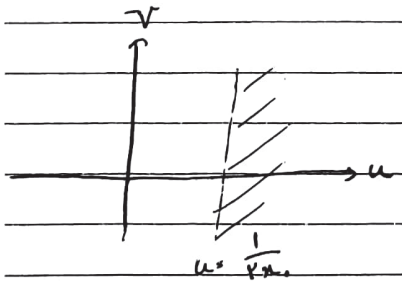
$(x-x_0)^2+y^2\le r_0^2$

$x^2-2x_0x+x_0^2+y^2\le r_0^2$

$x^2+y^2\le 2x_0x$

$x^2+y^2=\frac{1}{u^2+v^2}\quad ;\quad x=\frac{u}{u^2+v^2}$

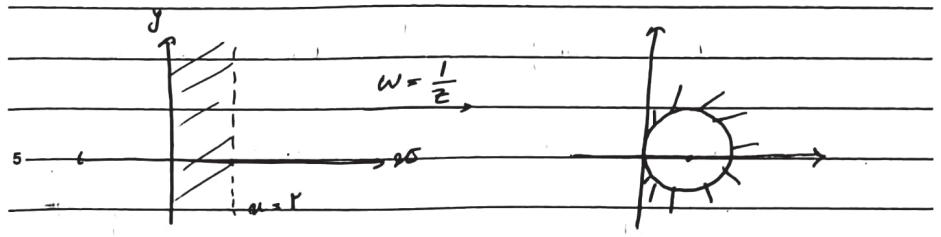
$\frac{1}{u^2+v^2}\le 2x_0\frac{u}{u^2+v^2}\Rightarrow 1\le 2x_0u\Rightarrow u\ge\frac{1}{2x_0}$



Soroush

Subject: 129
Year: Month: Day: ( ) page: ( )

مثال: تصویر ناحیه $0 < \text{Real}(z) < 2$ تحت $w = \frac{1}{z}$



$z = x + iy \qquad x = \text{Real}(z)$

$0 < x < 2 \rightarrow 0 < \frac{u}{u^2+v^2} < 2$

$\Rightarrow \begin{cases} u > 0 \\ \frac{u}{u^2+v^2} < 2 \rightarrow u < 2u^2 + 2v^2 \end{cases}$

$2u^2 - u + 2v^2 > 0 \rightarrow (u - 1/4)^2 + v^2 > \frac{1}{16}$

$w = e^z$ تابع نمایی است. $\forall$

$z = x + iy$

$w = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow \rho e^{i\varphi} = e^{x+iy} = e^{iy} \cdot e^x$

$= e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i(e^x \sin y)$

$\rightarrow \begin{cases} u(x,y) = e^x \cdot \cos y \\ v(x,y) = e^x \sin y \end{cases}$

Soroush

Subject:
Year: Month: Day: ( )

معادلات کوشی ریمان

$$\begin{cases} u_x = e^x \cdot \cos y = v_y \\ u_y = e^x \sin y = -(e^x \cdot \sin y) = -v_x \end{cases}$$

پس طبق قضیه کوشی ریمان $w = e^z$ ضعیف مشتق پذیر است و

$$(e^z)' = (e^x \cos y) + i(e^x \sin y) = e^{x+iy} = e^z$$

تذکر: تمام خواص توابع حقیقی در مورد تابع نمایی مختلط نیز برقرار است

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \qquad z, w \in \mathbb{C}$$

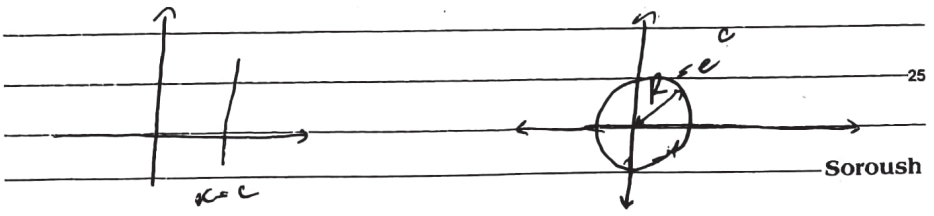
$$\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w} \qquad z, w \in \mathbb{C}$$

$$e^{-w} = \frac{1}{e^w} \qquad w \in \mathbb{C}$$

تذکر: تابع $w = e^z$ متناوب است با دوره تناوب $2\pi i$

مثال: تصویر خط $x = c$ که c یک ثابت است تحت $w = e^z$

$$w = e^z = \rho e^{i\varphi} = e^c \cdot e^{iy} \quad \begin{cases} \rho = e^c \text{ ثابت} \\ \varphi = y \end{cases}$$



Soroush