

1- الف- اگر  $x_1, x_2, \dots, x_n$  یک مجموعه وابسته خطی باشد، نشان دهید که دست کم یکی از بردارها را می توان به صورت ترکیب خطی از سایر بردارها نوشت ب- نشان دهید که اگر  $0$  یکی از اعضاء یک مجموعه  $x_1, x_2, \dots, x_n$  باشد آنگاه آن مجموعه حتماً وابسته خطی است.

2- فضای توابع حقیقی دو بار مشتق پذیر در بازه  $(0,1)$  را در نظر بگیرید. فرض کنید ضرب داخلی به صورت زیر تعریف شود

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f''(x) g''(x) dx$$

بررسی کنید که آیا فضای مذکور به همراه ضرب داخلی فوق تشکیل یک فضای ضرب داخلی را می دهد یا نه؟

3- قضیه فرعی زیر را که از اثبات نامساوی CSB حاصل می شود اثبات نمایید:

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow x \text{ and } y \text{ are linearly dependent}$$

4- اتحاد زیر را اثبات کنید:

$$\|x - y\| \geq \| \|x\| - \|y\| \|$$

5- فرض کنید مقادیر عددی دو تابع مختلط  $f(x)$  و  $g(x)$  (توابع از  $R \rightarrow C$ ) در تعدادی از نقاط یک بازه (مثلاً 100 نقطه در بازه  $(-2,2)$  داده شده اند). از شما خواسته می شود که بررسی کنید که آیا این دو تابع ضریب یکدیگر هستند یا نه. هدف آن است که کامپیوتر این تست را بدون رسم هیچ نموداری انجام دهد. چه راهی را پیشنهاد می دهید؟ (راهنمایی: آیا می توان مفهوم زاویه میان دو تابع را تعریف کرد و در این صورت چه برداشت فیزیکی از این زاویه می توان به عمل آورد؟)

6- سه تابع مستقل خطی  $f_1(x)=1$ ،  $f_2(x)=e^x$  و  $f_3(x)=e^{-x}$  در فضای توابع  $L_2(-1,1)$  تعریف شده اند. با استفاده از الگوریتم متعامد سازی گرم-اشمیت یک پایه متعامد از روی آنها را در دو حالت تولید کنید (انتخاب متفاوت ترتیب لحاظ کردن توابع می تواند منجر به 6 دسته جواب شود که 2 دسته از آنها کفایت می کند).

موفق باشید