بسمه تعالی

تمرین درس ریاضیات مهندسی پیشرفته موعد تحویل: 98/8/14

1- فضای توابع $L^2(-2,2)$ را در نظر بگیرید. مجموعه توابع مستقل خطی $\{1, e^x, e^{-x}, \cos(x), \sin(x)\}$ را نیز در این فضا در نظر بگیرید. الف- اگر f یک تابع دلخواه در فضای مذکور باشد و بخواهیم ترکیبی خطی از پنج تابع ذکر شده به بهترین نحوی f را تقریب بزند آنگاه ضرایب ترکیب خطی از چه رابطه ای بدست خواهند آمد. ب- به ازای $f(x) = x^2\cosh(x)$ این ضرایب را در صورت لزوم با کمک کدی به زبان متلب بدست آورید و شکل تابع تقریب زننده $\tilde{f}(x)$ را بنویسید. ج- توابع $\tilde{f}(x)$ و $f(x)$ را در یک گراف متلب در بازه $(-2,2)$ رسم نموده و مقایسه نمایید.

2- مجموعه بردارهای $\{y_j\}_{j=1}^{m}$ را در یک فضای خطی در نظر بگیرید. ثابت کنید ماتریس Gram (با نماد G)که درایه های آن با رابطه ذیل داده می شوند می تواند برای تست استقلال خطی بردارها مورد استفاده قرار گیرد. بدین معنی که اگر دترمینان G صفر نباشد بردارها مستقل خطی بوده و در غیر اینصورت وابسته خطی هستند.

$$G_{ij} = \langle y_i, y_j \rangle$$

3- فضای هیلبرت توابع عضو $L^2(-1,1)$ را در نظر بگیرید. بررسی کنید که آیا ضرب داخلی با تعریف زیر یک ضرب داخلی قابل قبول می باشد یا نه؟

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(\xi)\, g(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

4- تابع $u(x,y)$ پاسخ معادله پواسون زیر در سطح درون یک مستطیل با مرزهای ($x=0, x=a, y=0, y=b$) می باشد.

$$\nabla^2 u = e^x + xy$$

و شرط مرزی $u(x,y)$ صفر شدن روی اضلاع مستطیل (شرط مرزی دیریشله) می باشد.

الف- مطلوبست ارائه حل سری برای تابع $u(x,y)$ روی توابع پایه زیر:

$$\psi_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

ضرایب بسط را به طور کامل بیابید.

ب- اگر توابع پایه را به صورت $\psi_{mn}(x,y) = x^{m-1}y^{n-1}$ تعریف کنیم. دستگاهی ماتریسی را ارائه دهید که ضرایب بسط روی توابع فوق را به ازای $m=1,2,\ n=1,2$ بدست دهد.

راهنمایی: در مسأله اخیر می توان میان هر زوج مرتب (m,n) و یک عدد صحیح p تناظری به صورت $p \leftrightarrow (m_p, n_p)$ تولید کرد. در این صورت یک اندیس شمارش p بیشتر وجود ندارد. مثلاً تناظر می تواند مطابق با جدول زیر باشد که بخشی از مقادیر برای نوشته شده است.

P	m	n
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	2	1
5	2	2
6	2	3

مثلاً مطابق جدول داده شده می توان توابع ψ در بخش الف را تنها با یک اندیس P نمایش داد لذا مثلا داریم که :

$$\psi_2 = \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{b}y\right), \quad \psi_6 = \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{3\pi}{b}y\right)$$

موفق باشید