(1

$$\nabla^2 g + k^2 g = \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(z-z')$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + k^2 g(x,y,z) = \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(z-z')$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x^2}(x,y,k_z) + \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial y^2} + (k^2-k_z^2)\,\tilde{g}(x,y,k_z) = \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,e^{+jk_z z'}$$

$$\tilde{g}(x,y,k_z) = \sum \tilde{g}_m(y,k_z)\sin\frac{m\pi}{a}x \rightarrow$$ شرایط مرزی مربوط به x را ارضا می‌کند

$$\sum\left\{\frac{d^2 g_m}{dy^2} + \left(k^2-k_z^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right)g_m\right\}\sin\frac{m\pi}{a}x = \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,e^{jk_z z'}$$

ضرب طرفین در $\sin\frac{m\pi}{a}x$ و انتگرال‌گیری داریم که

$$\frac{d^2 g_m}{dy^2} + \underbrace{\left[k^2-k_z^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]}_{\text{فرض می‌کنیم } \lambda^2} g_m = \frac{2}{a}\,\delta(y-y')\sin\frac{m\pi}{a}x'\,e^{+jk_z z'}$$

$$g_m(y,k_z) = \begin{cases} C_1\cos(\lambda y) & 0 \le y \le y' \\ C_2\cos\lambda(y-b) & y' \le y \le b \end{cases}$$

$$C_1\cos(\lambda y') = C_2\cos\lambda(y'-b) \qquad (1)$$

$$-C_2\lambda\sin\lambda(y'-b) + C_1\lambda\sin\lambda y' = \frac{2}{a}\sin\frac{m\pi}{a}x'\,e^{+jk_z z'} \qquad (2)$$

از حل (۱) و (۲) نهایتاً C_1, C_2 حساب شده و g_m ها حساب خواهند شد.

$$\tilde{g}(x,y,k_z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{g}_m(y,k_z)\sin\frac{m\pi}{a}x\right)e^{-jk_z(z-z')}\,dk_z$$

۲) می‌توان روی توابع $\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y$ بسط داد.

$$g(x,y,z)=\sum_{m,n} g_{mn}(z)\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y \qquad (1)$$

قرار دادن در معادله قبلی

$$\sum_{m,n}\left\{\frac{d^2 g_{mn}}{dz^2}-\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]g_{mn}+k^2 g_{mn}\right\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y=\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \qquad (2)$$

ضرب طرفین در توابع ویژه $\psi_{mn}=\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y$ و استفاده از تعامد بودن در ناحیه انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود که:

$$\frac{d^2 g_{mn}}{dz^2}+\overbrace{\left[k^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]}^{\beta_{mn}^2}g_{mn}=\frac{4}{ab}\sin\frac{m\pi}{a}x'\sin\frac{n\pi}{b}y'\,\delta(z-z') \qquad (3)$$

با حل تحلیلی رابطه بالا به صورت دو ناحیه‌ای داریم که

$$g_{mn}(z)=\begin{cases} C_1\sin(\beta_{mn}z) & 0\le z\le z' \\ C_2\,e^{-j\beta_{mn}z} & z'\le z\le\infty \end{cases} \qquad (4)$$

شرایط مرزی

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\sin(\beta_{mn}z') & e^{-j\beta_{mn}z'} \\ \cos(\beta_{mn}z') & -j\,e^{-j\beta_{mn}z'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}=\frac{-4}{ab\beta_{mn}}\sin\frac{m\pi}{a}x'\sin\frac{n\pi}{b}y' \qquad (5)$$

با حل C_1 و C_2 نهایتاً g_{mn} بدست می‌آید که در معادله (1) قرار داده می‌شود.

$$\nabla^2 g + k^2 g = \frac{1}{\rho'}\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi')\delta(z-z')$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial g}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}+k^2 g=\frac{1}{\rho'}\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi')\delta(z-z')$$

تبدیل فوریه نسبت به z

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial g}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}+(\overbrace{-k_z^2+k^2}^{k_\rho^2})g=\frac{1}{\rho'}\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi')e^{jk_z z'}$$

$$g = \tilde{g}(\rho,\varphi,k_z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_m(\rho)e^{jm\varphi}$$

$$\sum\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dg_m}{d\rho}\right)-\frac{m^2}{\rho^2}g_m+k_\rho^2 g_m\right)e^{jm\varphi}=\frac{1}{\rho'}\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi')e^{jk_z z'}$$

ضرب طرفین در $e^{-jm\varphi}$ و انتگرال حول 2π

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dg_m}{d\rho}\right)-\frac{m^2}{\rho^2}g_m+(k_\rho^2)g_m=\frac{1}{2\pi\rho'}\delta(\rho-\rho')e^{jk_z z'}e^{-jm\varphi'}$$

درصورتی که

$$A J_m(k_\rho a)+B Y_m(k_\rho a)=0 \Leftarrow (\rho=a) \text{ شرط مرزی در}$$

$$B=-A\frac{J_m(k_\rho a)}{Y_m(k_\rho a)}$$

$$\Rightarrow g_m=\begin{cases} C_1\left[J_m(k_\rho\rho)-\dfrac{J_m(k_\rho a)}{Y_m(k_\rho a)}Y_m(k_\rho\rho)\right] & a<\rho<\rho' \\ C_2 H_m^{(2)}(k_\rho\rho) & \rho'<\rho<\infty \end{cases}$$

روابط حاکم بر C_1 و C_2

$$\left[J_m(k_\rho\rho')-\frac{J_m(k_\rho a)}{Y_m(k_\rho a)}Y_m(k_\rho\rho')\right]C_1-C_2H_m^{(2)}(k_\rho\rho')=0 \quad (1)$$

$$\left[J_m'(k_\rho\rho')-\frac{J_m(k_\rho a)}{Y_m(k_\rho a)}Y_m'(k_\rho\rho')\right]C_1-C_2H_m^{(2)\prime}(k_\rho\rho')=\frac{-1}{2\pi k_\rho\rho'}e^{jk_z z'} \quad (2)$$

با حل (۱) و (۲) با استفاده از اتحادهای رونسکین مقادیر C_1 و C_2 به دست آمده و g_m محاسبه می‌شود

$$g(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}g_m(\rho,k_z)e^{jm\varphi}e^{-jk_z(z-z')}$$

۴-

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y_x}\frac{dy_x}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y_x + \frac{\partial f}{\partial y_x} y_{xx} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\left(y_x \frac{\partial f}{\partial y_x}\right) = \frac{dy_x}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x} + y_x \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_x}\right) = y_{xx}\frac{\partial f}{\partial y_x} + y_x \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_x}\right) \quad (2)$$

با قرار دادن (۱) و (۲) در عبارت صورت مسأله داریم که

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y_x \frac{\partial f}{\partial y} - y_x \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_x}\right) = 0$$

اگر f تابعیت مستقیم از x وجود نداشته باشد $\Leftarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0$

$$y_x\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_x}\right)\right] = 0$$

با کنار گذاشتن پاسخ ثابت $(y_x = 0)$ داریم که

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_x}\right) = 0$$

---

۵)

$$c(x) = x\hat{x} + y(x)\hat{x} \Rightarrow c'(x) = (\hat{x} + y_x\hat{x})\,dx$$

$$\Rightarrow ds = |c'(x)| = \sqrt{1+y_x^2}\,dx$$

$$(a) \Rightarrow J = \int_{x_1}^{x_2} e^y \sqrt{1+y_x^2}\,dx$$

طبق بلترامی $\quad \frac{d}{dx}\left(f - y_x\frac{\partial f}{\partial y_x}\right) = 0 \Rightarrow e^y\sqrt{1+y_x^2} - y_x\frac{e^y y_x}{\sqrt{1+y_x^2}} = c_1$

$$\Rightarrow \frac{e^y\left[1+y_x^2 - y_x^2\right]}{\sqrt{1+y_x^2}} = c_1 \Rightarrow 1+y_x^2 = \frac{e^{2y}}{c_1^2} \Rightarrow y_x = \sqrt{\frac{e^{2y}}{c_1^2} - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{c_1}{\sqrt{e^{2y} - c_1^2}} \Rightarrow x = \int \frac{c_1}{\sqrt{e^{2y} - c_1^2}}\,dy$$ انتگرال نامعین

$$(b) \quad f = a(y-y_0)\sqrt{1+y_x^2} \Rightarrow a(y-y_0)\sqrt{1+y_x^2} - \frac{y_x^2 a(y-y_0)}{\sqrt{1+y_x^2}} = c_1$$

$$\Rightarrow \frac{a(y-y_0)}{\sqrt{1+y_x^2}} = c_1 \Rightarrow 1+y_x^2 = \frac{a^2}{c_1^2}(y-y_0)^2 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{c_1^2}(y-y_0)^2 - 1}} \Rightarrow$$ انتگرال نامعین بر حسب y

$$L=\frac{1}{2}m\left(x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)\right)-q\varphi(x,y,z)+q\,(\bar A\cdot\bar V)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}(mx'+qA_x)+q\frac{\partial\varphi}{\partial x}-q\frac{\partial}{\partial x}(\bar A\cdot\bar V)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}(my'+qA_y)+q\frac{\partial\varphi}{\partial y}-q\frac{\partial}{\partial y}(\bar A\cdot\bar V)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial z'}\right)-\frac{\partial L}{\partial z}=0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}(mz'+qA_z)+q\frac{\partial\varphi}{\partial z}-q\frac{\partial}{\partial z}(\bar A\cdot\bar V)=0$$

با ترکیب ۳ رابطه بالا داریم که

گرادیان

$$m\frac{d^2}{dt^2}(\bar r)=q\overbrace{\left[-\frac{\partial\bar A}{\partial t}-\nabla\varphi\right]}^{\text{همان میدان }\bar E}+q\,\nabla(\bar A\cdot\bar V)\quad(1)$$

حالا اگر بخش دوم برابر همان نیروی مغناطیسی $q\bar V\times\bar B$ باشد که باید این را اثبات کنیم:

$$\bar V\times\bar B=\bar V\times(\nabla\times\bar A)=\nabla(\bar V\cdot\bar A)-(\bar V\cdot\bar\nabla)\bar A\quad(2)$$

اما $\bar\nabla\cdot\bar V=0$ است چرا که $\bar V$ فقط شامل $x'(t)$، $y'(t)$، $z'(t)$ است که اسکالرها مشتقات جزئی نسبت به x و y و z صفر می‌شوند لذا

$$\bar V\times\bar B=\nabla(\bar A\cdot\bar V)\quad(3)$$

$$(1)\text{ در }(3)\Longrightarrow\quad m\underbrace{\frac{d^2\bar r}{dt^2}}_{\text{همان شتاب است}}=\underbrace{q\bar E+q\bar V\times\bar B}_{\text{همان نیروی لورنتز است.}}$$

۷) با توجه به سوال بالا به عنوان تمرین حل کنید و تحویل دهید.