



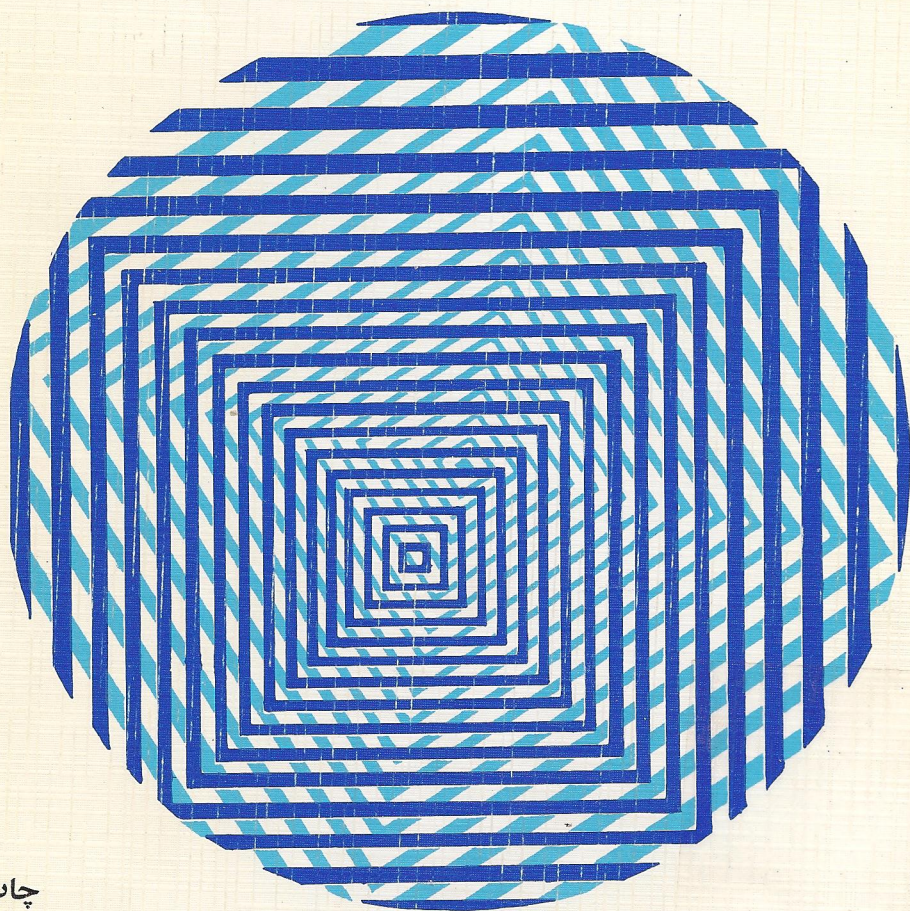
انتشارات  
دانشگاه اصفهان

۴۰۴

در آمدی بر

# نور شناخت نوین

تألیف : گرانت . ر . فولز



چاپ پنجم

ترجمه :

دکتر احمد کیاست پور      دکتر جمشید احبسیان



# درآمدی بر نورشناخت نوین

گرائٹ۔ ر۔ فولز

ترجمہ دکترا احمد کیاست پور۔ دکترا جمشید احبسیان

## پیشگفتار مترجمان

بتازگی آموزش عالی در ایران گسترش چشمگیری داشته و افزایش تعداد دانشگاهها و موسسات آموزش عالی آن در میان کشورهای جهان بی سابقه بوده است. کیفیت آموزش گرچه روبه بهبود می باشد با پیشرفت کمی همزمان نبوده است. یکی از علل این عدم همگامی، فقدان کتابهای نوین فارسی در رشته های علمی برای دوره کارشناسی است. اعضای هیئت آموزشی دانشگاهها باید برطرف ساختن این ناهماهنگی را از وظائف مهم خود بدانند و به ترجمه و تالیف کتب جدید بپردازند. مترجمان این کتاب با وجود این که سالها خود به تدریس نورشناسی اشتغال داشته اند و تالیف کتابی در این زمینه برای آنان امکان پذیر بوده است، ترجیح داده اند به برگرداندن کتابی که چندین سال مورد استفاده دانشگاههای معتبر دنیا قرار گرفته و معایب آن در عمل برطرف شده است اقدام کنند.

گروه فیزیک دانشگاه اصفهان در تجدیدنظر در برنامه های آموزشی خود در چند سال گذشته، استفاده از چند کتاب درسی را که در دانشگاههای معتبر دنیا تدریس می شوند توصیه و تصویب کرده است. کتابی که ترجمه آن در برابر خواننده قرار دارد کتابی است جدید، مختصر و دقیق و یکی از کتابهای یاد شده است.

در برگرداندن این کتاب کوشش شده است تا جای امکان از به کار بردن لغات علمی خارجی خودداری شود و مطالب به زبان فارسی روان بیان شوند. برای اینکه

دانشجویان با برابره‌های انگلیسی لغات علمی نیز آشنایی پیدا کنند و از هنامهای در آخر کتاب افزوده شده است و امید می‌رود که مترجمان و مولفان دیگر و نیز به‌کار آید.

مترجمان چند نکته را به کتاب افزوده‌اند که در پای صفحات آورده شده و با حرف " م " مشخص شده‌اند. ضمناً برخی از روابط که در کتاب اصلی اشتباه چاپ شده بود تصحیح شده است و نیز مسایل نورشناسی نسبیتی، که در ویرایش نخست کتاب اصلی موجود بود، در آخر پیوست که مربوط به همین مبحث است گنجانیده شده است.

در خاتمه مترجمان وظیفه خود می‌دانند از اعضای شورای انتشارات دانشگاه اصفهان که در انجام این کار مشوق و راهنما بوده‌اند سپاسگزاری کنند و بویژه از دقت و دلسوزی که خانم بدری صمدانی در آماده‌سازی کتاب برای چاپ افسست به‌کار برده‌اند قدردانی کنند.

## پیشگفتار ویرایش دوم ترجمه

در ویرایش جدید ترجمه، همه متن ترجمه دوباره با اصل مطابقت شده است و واژه‌هایی که توسط گروه فیزیک مرکز نشر دانشگاهی از منابع مختلف، از آن جمله برگردان پیشین همین کتاب، برگزیده شده و پذیرش همگانی یافته است در ویرایش جدید به‌کاربرده شده‌اند. شماری از فرمولها که در متن اصلی بویژه در فصل دهم غلط بودند در اینجا تصحیح شده‌اند. برخی از شکل‌های کتاب اصلی که از دقت کافی برخوردار نبوده یا اشتباه‌آمیز بوده‌اند در این کوشش تصحیح شده یا دوباره ترسیم شده‌اند. کتاب اصلی و ترجمه نخست آن توسط شورای برنامه‌ریزی ستاد انقلاب فرهنگی به‌عنوان کتاب درسی دروس اپتیک مدرن یک و دو برگزیده شده و در گروه‌های فیزیک دانشگاه‌های مختلف کشور مورد استفاده قرار گرفته است. از این رو پیشنهادهای مدرسان دیگر نیز در بهتر ساختن ویرایش کنونی مورد استفاده قرار گرفته است که در اینجا لازم می‌دانم بدون نام بردن آنان سپاسگزاری کنم.

از ریاست و اعضای محترم شورای انتشارات دانشگاه اصفهان به خاطر تشویق‌هایشان و تسهیلاتی که برای ویرایش و چاپ جدید در اختیار گذارده‌اند سپاسگزاری می‌شود.

از کوشش‌های خانم بدری صمدانی که در تایپ کردن نسخه تجدیدنظر شده اهتمام ورزیده و از دست‌نوشته‌های درهم من نسخه موجود را با حوصله برای چاپ

افست تایپ کرده و تغییرات بعدی هر صفحه را نیز با خوشرویی انجام داده است  
سیاسگزارم. همچنین از تلاش خانم مانوش غواندیانی برای تهیه واژه‌نامه و خدمات  
دیگر مربوط به کتاب تشکر می‌شود.

از آقای مرتضی حاج محمودزاده دانشجوی کارشناسی ارشد فیزیک که متن  
تایپ شده را خوانده و در جهت بهبود آن پیشنهادهای بجا و مفیدی ارائه داده  
و همچنین در کشیدن بعضی از شکلها و آماده‌سازی نتیجهء تایپ‌شده از لحاظ  
فرمولها و حروف لاتین و جز اینها از هیچ کوششی فروگذار نکرده است سیاسگزاری  
می‌شود.

از مسئول و کارکنان چاپخانه دانشگاه اصفهان قدردانی می‌شود.

مهرماه ۱۳۷۰

احمد کیاست‌پور

## پیشگفتار مؤلف

با اینکه نورشناسی علمی است قدیمی، اهمیت آن در سالهای اخیر، هم در علوم محض و هم در تکنولوژی با سرعت چشمگیری افزایش یافته است. این اهمیت تا حدی به خاطر توسعه لیزر و افزایش روزافزون کاربردهای آن بوده است. نیاز آشکار به کتابی نوین برای دوره کارشناسی دلیل اصلی نوشتن این کتاب بوده است. در ویرایش دوم، تغییراتی به شرح زیر داده شده که بعضی کم اهمیت و برخی اساسی هستند: قسمتی از متن دوباره تنظیم و مطالب و مسائل جدیدی افزوده شده است، این مطالب شامل گسترش توضیحات و نوآوری در بعضی از بخشها بویژه بخش لیزرها می باشد. بخش نورشناسی نسبی، که قبلاً در فصل اول بود، به صورت پیوست تنظیم شده است.

در نیمه اول کتاب، نورشناسی فیزیکی: انتشار و قطبش نور، همدوسی و تداخل، پراش و ویژگیهای نوری ماده بررسی می شود. بیشتر بقیه کتاب به طبیعت کوانتومی نور: تابش گرمایی، جذب و گسیل نور به وسیله اتمها و ملکولها، و نظریه تقویت نور و لیزرها اختصاص یافته است. کاربردهای زیادی از لیزر در نورشناسی به سراسر متن افزوده شده است.

در فصل اول انتشار نور و مفهوم عمومی سرعتهای فاز و گروه بررسی می شود. در فصل دوم ماهیت برداری نور، که شامل طرز استفاده از روش محاسبه جونز در

بررسی قطبش نیز هست، مطالعه می‌شود. در فصل سوم مفهوم کلی همدوسی جزئی و طول همدوسی در رابطه با تداخل بررسی می‌شود و بحث کوتاهی از تبدیل فوریه و کاربرد آن در نورشناسی ارائه می‌شود.

در فصل چهارم (که در ویرایش اول بخشی از فصل سوم بود) تداخل چند پرتوی بررسی می‌شود و شامل تداخل سنج فابری - پرو و نظریه فیلمهای چندلایه‌ای است. در فصل پنجم پراش و تمام‌نگاری (هولوگرافی) که کاربردی از آن است بررسی می‌شود.

فصل ششم از انتشار نور در محیطهای مادی بحث می‌کند که نورشناسی بلوری را نیز شامل می‌شود و مبحثی از نورشناسی غیرخطی که پیش از پیدایش لیزر کاملاً ناشناخته بود، را دربردارد.

برای درک بهتر نظریه تقویت نور و لیزرها، که در فصل نهم آمده است، در فصلهای هفتم و هشتم مقدمه کوتاهی از نظریه کوانتومی نور و بیناب آن ارائه شده است. اگر دانشجوی درس فیزیک اتمی را گذرانیده باشد و ساعات درس کم باشد، این دو فصل را می‌توان حذف کرد.

در فصل آخر، برای آشنا ساختن دانشجویان با روش ماتریسی حل دستگاههای اپتیکی، خلاصه‌ای از اصول نورشناسی هندسی آورده شده است. علت اصلی گنجاندن این فصل، ارائه بحث کامل نورشناسی پرتوی نیست، بلکه هدف به‌کاربردن ماتریسهای پرتو در بررسی بازآواگرهای لیزری است.

در تهیه این کتاب فرض براین بوده است که دانشجویان قبلاً در یک متوسط الکتریسته و مغناطیس با معادلات ماکسول آشنا شده و چند درس ریاضی پیشرفته گذرانیده است و مثلاً با مقدمه جبر ماتریسی، تبدیل فوریه و جزء اینها آشنا شده است. ریاضیات موردنیاز در حدود متونی مانند ریاضیات پیشرفته مهندسی تالیف Wylie است.

برای استفاده کلاس، تعدادی مسئله در پایان هر فصل آورده شده و پاسخی گزیده‌ای از آنها در پایان کتاب گنجاندن شده است. پاسخ مسایل دیگر در صورت درخواست معلمان در اختیار آنان گذارده خواهد شد.

نویسنده از همه کسانی که در تهیه کتاب کمک کرده‌اند از جمله آنان که چاپ اول را به‌کاربرده و انتقادهای سازنده ارائه داده‌اند تشکر می‌کند. همچنین از هیئت تحریریه ناشر، و از آقای "W. E. Wu" برای کمک وی در تصحیح سپاسگزار می‌شود.

ژانویه ۱۹۷۵



## فهرست

۱	فصل اول انتشار نور	
۳	پدیده‌های اولیه نوری و طبیعت نور	۱۰۱
۴	ثابت‌های الکتریکی و سرعت نور	۲۰۱
۱۰	امواج تخت سازگان. سرعت فاز	۳۰۱
۱۴	نمایش امواج سازگان به روشهای دیگر	۴۰۱
۱۷	سرعت گروه	۵۰۱
۲۰	پدیده دوپلر	۶۰۱
۲۴	مسائل	
۲۷	فصل دوم ماهیت برداری نور	
۲۹	نگرشهای کلی	۱۰۲
۳۲	شارش انرژی، بردار پوئینتینگ	۲۰۲
۳۳	قطبش خطی	۳۰۲
۳۷	قطبش بیضی و دایره‌ای	۴۰۲
۴۲	نمایش ماتریسی قطبش، روش محاسبه جونز	۵۰۲
۵۰	بازتاب و شکست در یک صفحه مرزی	۶۰۲

۵۲	دامنهٔ امواج بازتاب و شکست	۷۰۲
۶۰	زاویهٔ بروستر	۸۰۲
۶۲	موج ناپایا در بازتاب کلی	۹۰۲
۶۴	تغییرات فاز در بازتاب کلی درونی	۱۰۰۲
۶۶	ماتریس بازتاب	۱۱۰۲
۶۹	مسایل	
۷۳	<b>فصل سوم همدوسی و تداخل</b>	
۷۵	اصل برهم‌نهی خطی	۱۰۳
۷۷	آزمایش ینگ	۲۰۳
۸۲	تداخل سنج مایکلسون	۳۰۳
۸۴	نظریهٔ همدوسی پاره‌ای و نمایشی فریزها	۴۰۳
۸۸	زمان همدوسی و طول همدوسی	۵۰۳
۹۲	تجزیهٔ بینایی یک قطار موج پایاندار. همدوسی و پهنای خط	۶۰۳
۹۶	همدوسی فضایی	۷۰۳
۱۰۲	تداخل سنجی شدتی	۸۰۳
۱۰۴	بیناب‌نمایی تبدیل فوریه‌ای	۹۰۳
۱۰۶	مسایل	
۱۰۹	<b>فصل چهارم تداخل چند پرتوی</b>	
۱۱۱	تداخل چندپرتوی	۱۰۴
۱۱۶	تداخل سنج فابری - پرو	۲۰۴
۱۱۹	جداکنندگی دستگاه‌های فابری - پرو	۳۰۴
۱۲۴	نظریهٔ فیلمهای چندلایه‌ای	۴۰۴
۱۳۲	مسایل	
۱۳۵	<b>فصل پنجم پراش</b>	
۱۳۷	توصیف کلی پراش	۱۰۵
۱۳۸	نظریهٔ بنیادی	۲۰۵
۱۴۵	پراش فرانسهوفری و فرنلی	۳۰۵
۱۴۷	گرته‌های پراش فرانسهوفری	۴۰۵

۱۶۲	گرته‌های پراش فرنیلی	۵۰۵
۱۷۳	کاربردهای تبدیل فوریه در پراش	۶۰۵
۱۸۶	بازسازی جبهه موج به وسیله پراش، هولوگرافی (تمام نگاری)	۷۰۵
۱۹۰	مسایل	
۱۹۵	فصل ششم نورشناسی جامدات	
۱۹۷	نگرشهای کلی	۱۰۶
۱۹۸	میدانهای ماکروسکوپی و معادلات ماکسول	۲۰۶
۲۰۰	معادله کلی موج	۳۰۶
۲۰۱	انتشار نور در دی‌الکتریکهای همسانگرد - پاشندگی	۴۰۶
۲۰۸	انتشار نور در محیطهای رسانا	۵۰۶
۲۱۳	بازتاب و شکست در مرز یک محیط درآشامنده	۶۰۶
۲۲۰	انتشار نور در بلورها	۷۰۶
۲۳۴	شکست دوگانه در یک صفحه مرزی	۸۰۶
۲۴۰	فعالیت نوری	۹۰۶
۲۴۷	چرخش فاراده‌ای در جامدات	۱۰۰۶
۲۵۰	پدیده‌های دیگر مغناطواینتیکی و الکترواینتیکی	۱۱۰۶
۲۵۴	نورشناسی غیر خطی	۱۲۰۶
۲۵۹	مسایل	
۲۶۳	فصل هفتم تابش گرمایی و کوانتومهای نور	
۲۶۵	تابش گرمایی	۱۰۷
۲۶۶	قانون کیرشهوف، تابش جسم سیاه	۲۰۷
۲۶۹	مدهای تابش الکترومغناطیسی درون یک کاواک	۳۰۷
۲۷۳	نظریه کلاسیک تابش جسم سیاه، فرمول ریلی - جینز	۴۰۷
۲۷۴	کوانتیدگی تابش کاواکی	۵۰۷
۲۷۵	آمار فوتونی، فرمول پلانک	۶۰۷
۲۸۲	اثر فوتوالکتریک و آشکارسازی فردی فوتونها	۷۰۷
۲۸۳	اندازه حرکت یک فوتون، فشار نور	۸۰۷
۲۸۴	اندازه حرکت زاویه‌ای یک فوتون	۹۰۷

۲۸۵	طول موج یک ذرهٔ مادی، فرضیهٔ دوبروی	۱۰۰۷
۲۸۶	اصل عدم قطعیت هایزنبرگ	۱۱۰۷
۲۸۸	مسایل	
۲۹۱	فصل هشتم بینابهای اپتیکی	
۲۹۳	نگرشهای کلی	۱۰۸
۲۹۵	نظریهٔ مقدماتی بینابهای اتمی	۲۰۸
۳۰۲	مکانیک کوانتومی	۳۰۸
۳۰۵	معادلهٔ شرودینگر	۴۰۸
۳۰۷	مکانیک کوانتومی اتم هیدروژن	۵۰۸
۳۱۵	گذارهای تابشمند، قواعد گرینش	۶۰۸
۳۲۱	ساختار ریز خطوط بیناب، اسپین الکترون	۷۰۸
	چندگانگی در بیناب اتمهای چندالکترونی، نمادگذاری	۸۰۸
۳۲۳	بیناب‌نمایی	
۳۲۷	بینابهای مولکولی	۹۰۸
۳۳۴	ترازهای انرژی اتمی در جامدات	۱۰۰۸
۳۳۸	مسایل	
۳۳۹	فصل نهم تقویت نور، لیزرها	
۳۴۱	درآمد	۱۰۹
۳۴۲	گسیل القایی و تابش گرمایی	۲۰۹
۳۴۴	تقویت در یک محیط	۳۰۹
۳۴۹	روشهای تولید واژگونی فراوانی	۴۰۹
۳۵۱	نوسان لیزری	۵۰۹
۳۵۵	نظریهٔ بازآواگر اپتیکی	۶۰۹
۳۶۲	لیزرهای گازی	۷۰۹
۳۶۷	لیزرهای حالت جامد با دمش اپتیکی	۸۰۹
۳۶۹	لیزرهای رنگی	۹۰۹
۳۷۱	لیزرهای دیودی نیمرسانا	۱۰۰۹
۳۷۲	بستآوری و مدبستن	۱۱۰۹

۳۷۴	لیزر حلقه‌ای	۱۲۰۹
۳۷۶	مسایل	
۳۷۹	فصل دهم نورشناسی هندسی	
۳۸۱	بازتاب و شکست در یک سطح کروی	۱۰۱۰
۳۸۴	عدسیها	۲۰۱۰
۳۸۸	معادلات پرتو	۳۰۱۰
۳۹۰	ماتریسهای پرتو و بردارهای پرتو	۴۰۱۰
۳۹۱	موجبر با عدسیهای دوره‌ای بازآواگرهای نوری	۵۰۱۰
۳۹۵	مسایل	
۳۹۷	پیوست نورشناسی نسبیتی	
۳۹۹	آزمایش مایکلسون - مورلی	۰۱
۴۰۳	اصول موضوع نسبیت خاص اینشتین	۰۲
۴۰۴	پدیده‌های نسبیتی در نورشناسی	۰۳
۴۱۰	آزمایش ساینک و آزمایش مایکلسون و گیل برای آشکارسازی چرخش	۰۴
۴۱۳	مسایل	
۴۱۵	فهرست منابع	
۴۱۷	پاسخهای مسایل شماره فرد	
۴۲۱	واژه‌نامه	
۴۲۳	فهرست الفبایی	
۴۴۳	غلطنامه	

# فصل اول

انتشار نور

## ۱.۱ پدیده‌های اولیه نوری و طبیعت نور

اسحق نیوتون "Isaac Newton" در کتاب خود، رساله‌ای دربارهٔ نوری — *Treatise on Opticks*، نوشت: پرتوهای نور ذرات کوچکی هستند که از یک جسم نورانی نشر می‌شوند. احتمالاً نیوتون نور را به این دلیل به صورت ذره در نظر گرفت که در محیط‌های همگن به‌نظر می‌رسد در امتداد خط مستقیم منتشر می‌شود. این را قانون انتشار مستقیم نور می‌نامند و یکی از مثال‌های خوب برای توضیح آن به وجود آمدن سایه است.

همزمان با نیوتون، کریستیان هویگنس "Christiaan Huygens" (۱۶۹۵-۱۶۲۹)، طرفدار توضیح دیگری بود، که در آن حرکت نور به صورت موجی است و از چشمه به تمام جهات پخش می‌شود. یادآور می‌شود که هویگنس با به‌کاربردن امواج اصلی و موجک‌های ثانوی فوانین بازتاب و شکست را تشریح کرد. حقایق دیگری که با تصور موجی بودن نور توجیه می‌شوند، پدیده‌های تداخلی‌اند، مانند به وجود آمدن فریزهای روشن و تاریک در اثر بازتاب نور از لایه‌های نازک، و یا پراش نور در اطراف یک مانع.

بیشتر به خاطر نیوگ جیمز کلارک ماکسول "James Clerk Maxwell" (۱۸۳۱-۱۸۷۹) است که ما امروزه می‌دانیم نور نوعی انرژی الکترومغناطیسی است که معمولاً به عنوان امواج الکترومغناطیسی توصیف می‌شود و بیناب کامل آن شامل

امواج رادیویی، تابش فرو قرمز، بیناب مرئی از قرمز تا بنفش، تابش فرابنفش، پرتوهای ایکس و پرتوهای گاما می‌باشد. علاوه بر آن می‌دانیم که طبق نظریه کوانتومی نور، که در دو دهه اول قرن بیستم به وسیله پلانک، اینشتین و بور برای اولین بار پیشنهاد شد، انرژی الکترومغناطیسی کوانتیده است، یعنی جذب یا نشر انرژی میدان الکترومغناطیسی به مقدارهای گسسته‌ای به نام فوتون انجام می‌گیرد. بدین‌سان نظریه جدید نور شامل اصولی از تعریفهای نیوتون و هویگنس است. گفته می‌شود نور خاصیت دوگانگی دارد. برخی از پدیده‌ها مانند تداخل، خاصیت موجی آن را نشان می‌دهند و برخی دیگر مانند پدیده فتوالکتریکی با ویژگی ذره‌ای نور قابل توجیه‌اند.

اگر از کسی سؤال شود: نور حقیقتاً چیست؟ جواب ساده‌ای نمی‌تواند داشته باشد. جسم شناخته شده یا مدل مشخصی که شبیه آن باشد وجود ندارد ولی لازم نیست فهم هر چیز بر شباهت مبتنی باشد. نظریه الکترومغناطیسی و نظریه کوانتومی با هم ایجاد یک نظریه نامتناقض و بدون ابهام می‌کنند که تمام پدیده‌های نوری را توصیف می‌کند. نظریه ماکسول درباره انتشار نور بحث می‌کند، درحالی‌که نظریه کوانتومی برهم‌کنش نور و ماده یا جذب و نشر آن را شرح می‌دهد. نظریه‌ای که از آمیزش این دو به وجود می‌آید به نام کوانتوم الکترودینامیک شناخته شده است. چون نظریه‌های الکترومغناطیسی و کوانتومی، علاوه بر پدیده‌های مربوط به تابش، بسیاری از پدیده‌های فیزیکی دیگر را نیز تشریح می‌کنند منصفانه می‌توان فرض کرد که مشاهدات تجربی امروز را لاقلاً در قالب ریاضی جوابگو است. طبیعت نور کاملاً شناخته شده است. با این‌که هنوز پاسخ این پرسش که "واقعیت نور چیست" را نمی‌دانیم، مبحث نورشناسی را آغاز می‌کنیم.

## ۲.۱. ثابتهای الکتریکی و سرعت نور

وضع الکترومغناطیسی در یک نقطه از فضای تهی با دو بردار، یکی میدان الکتریکی  $E$  و دیگری میدان مغناطیسی  $H$  مشخص می‌شود. در حالت ایستا یعنی وقتی که دو میدان با زمان تغییر نمی‌کنند،  $E$  و  $H$  به یکدیگر بستگی ندارند و بترتیب با توزیع بار و شدت جریان در فضا مشخص می‌شوند. در حالت پویا یعنی موقعی که این بردارها به زمان وابسته‌اند، میدانها از یکدیگر مستقل نیستند. رابطه



بین مشتقهای آنها نسبت به فضا و زمان توسط معادلات تاو زیر داده می شوند:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.1)$$

شرایط واگرایی:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (4.1)$$

نشان می دهند که باری در نقطه مورد نظر نیست. این روابط برای هر دو حالت ایستا و پویا برقرارند.

چهار معادله بالا به معادلات ماکسول برای فضای تهی معروفند. این معادله‌ها را می توان معادلات دیفرانسیلی بنیادی میدان الکترومغناطیسی در غیاب ماده دانست.

ثابت  $\mu_0$  را تراوایی خلاء می نامند و بنا به تعریف اندازه آن  $4\pi \times 10^{-7}$  هانری بر متر است<sup>۱</sup>. ثابت  $\epsilon_0$  گذردهی خلاء نامیده می شود و مقدار آن باید به روش اندازه گیری معین شود. مقدار  $\epsilon_0$  تا چهار رقم دقت  $8.854 \times 10^{-12}$  فاراد بر متر است.

در دو معادله تاو، میدانهای  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{H}$  را می توان از یکدیگر جدا کرد. برای این کار از یکی از معادلات تاو گرفته، و از معادله دیگر مشتق زمانی می گیریم. با توجه به این که ترتیب مشتق گیری نسبت به زمان و فضا را می توان عوض کرد، نتیجه می شود:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (5.1)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (6.1)$$

۱- در سراسر این کتاب دستگاه MKS به کار برده شده است. در کلیه معادلات مربوط به میدانهای مغناطیسی،  $\mathbf{H}$  را به جای  $\mathbf{B}$  برگزیده ایم و چون در این کتاب فقط محیطهای غیرمغناطیسی در نظر گرفته می شوند، همه جا می توان  $\mathbf{H}$  را با  $\mathbf{B}/\mu_0$  جایگزین کرد.

فزون برایین با استفاده از شرایط واگرایی ( ۳۰۱ ) و ( ۴۰۱ ) و همچنین با توجه به اتحاد برداری زیر:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 (\mathbf{A}) \quad ( ۷۰۱ )$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad ( ۸۰۱ )$$

که در آنها:

$$c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} \quad ( ۹۰۱ )$$

بنابراین، میدانها هر دو از یک جور معادله دیفرانسیل پاره‌ای عادی پیروی می‌کنند:

$$\nabla^2 (\mathbf{A}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (\mathbf{A})}{\partial t^2}$$

که معادله موج نامیده می‌شود. این معادله در بسیاری از پدیده‌های فیزیکی مانند نوسانهای مکانیکی تارها، امواج صوتی، پرده‌های مرتعش و جز اینها صادق است، (۲۹). در اینجا مفهوم ضمنی این است که تغییرات میدانهای  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{H}$  با سرعتی برابر با مقدار ثابت  $c$  در فضای تهی منتشر می‌شوند. در دستگاه MKS مقدار  $c$  برابر است با:

$$1/\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \epsilon_0} \approx 3 \times 10^8$$

یکی از دقیقترین اندازه‌گیریهای الکتریکی کمیت  $(\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$  در موسسه ملی استانداردها در آمریکا به وسیله رزا "Rosa" و درسی "Dorsey" (۳۳) انجام شد. ایشان ظرفیت خازنی را که ابعاد فیزیکی آن دقیقاً معلوم بود از طریق محاسبه به دست آوردند. این ظرفیت در یکای الکتریسته ساکن به دست آمد. سپس با استفاده از یک پل، ظرفیت همان خازن را در یکای الکترومغناطیسی اندازه‌گیری کردند. نسبت این دو مقدار ظرفیت، وقتی به یکاهای MKS تبدیل می‌شود، چنین است  $(\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$ . نتیجه اندازه‌گیری رزا و درسی، با دقت یک بخش در

۳۰۰۰۰، برابر  $2.99784 \times 10^8$  متر بر ثانیه است. دیگران نیز  $(\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$  را با روشهای الکتریکی محض اندازه‌گیری کرده و نتایج مشابه ولی با دقت کمتر به دست آورده بودند.

از طرف دیگر، از زمان اندازه‌گیری تاریخی روْمِر "Römer" که سرعت نور را در سال ۱۶۷۶ با مطالعهٔ گرفتگی ماههای برجیس به دست آورد، اندازه‌گیریهای مستقیم سرعت انتشار نور به وسیلهٔ پژوهشگران متعددی انجام شده است. در جدول ۱-۱ خلاصه‌ای از اندازه‌گیریهای سرعت تابش الکترومغناطیسی نوشته شده است. نتایج همهٔ این اندازه‌گیریها پس از دخالت دادن خطاهای آزمایش و تحویل به‌خلاء مساوی‌اند. بنابراین، اینکه نور یک نوع آشفتگی الکترومغناطیسی است غیرقابل انکار است. دقیقترین اندازه‌گیری  $c$  با استفاده از لیزر بوده که در سال ۱۹۷۲ به‌وسیلهٔ اوانسون "Evanson" و همکاران او در موسسهٔ ملی استاندارد انجام شده و نتیجهٔ آن چنین است:

$$c = 29979245692 \pm 11 \text{ m/s} \quad (10.1)$$

بحث کلی بسیار خوبی در مقالهٔ "سرعت نور" نوشتهٔ برگسترند در دایره‌المعارف فیزیک (۲) موجود است.

### سرعت نور در یک محیط

معادلات تاو ماکسول برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در محیطهای نارسانای همسانگرد، درست مانند معادلات مربوط به خلاء اند با این تفاوت که ثابتهای خلاء  $\epsilon_0$  و  $\mu_0$  جای خود را به ثابتهای محیط یعنی  $\mu$  و  $\epsilon$  می‌دهند. در نتیجه سرعت انتشار  $u$  میدانهای الکترومغناطیسی در یک محیط به صورت زیر است:

$$u = (\mu\epsilon)^{-1/2} \quad (11.1)$$

با به کار بردن دو نسبت بدون بعد:

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (12.1)$$

## جدول ۱۰۱ اندازه‌گیریهای سرعت تابش الکترومغناطیسی

الف - سرعت نور				
تاریخ	آزمایش کننده	روش	نتیجه (km/s)	
۱۸۴۹	فیزو	Fizeau	چرخ‌دندان‌دار	$313000 \pm 5000^*$
۱۸۵۰	فوکو	Foucault	آینه‌چرخان	$298000 \pm 2000^*$
۱۸۷۵	کرنو	Cornu	آینه‌چرخان	$299990 \pm 200$
۱۸۸۰	مایکلسون	Michelson	آینه‌چرخان	$299910 \pm 150$
۱۸۸۳	نیوکم	Newcomb	آینه‌چرخان	$299860 \pm 30$
۱۹۲۸	میتلستد	Mittelstaedt	آینه‌چرخان	$299778 \pm 10$
۱۹۳۲	پیزو پیرسون	Pease and Pearson	آینه‌چرخان	$299774 \pm 2$
۱۹۴۰	هوتل	Hüttel	دریچه‌نوری‌کر	$299768 \pm 10$
۱۹۴۱	آندرسون	Anderson	دریچه‌نوری‌کر	$299776 \pm 6$
۱۹۵۱	برگسترند	Bergstrand	دریچه‌نوری‌کر	$299793 \pm 0.3$
ب - سرعت امواج رادیویی				
۱۹۲۳	مرسیه	Mercier	امواج ساکن روی سیم	$299782 \pm 30$
۱۹۴۷	جونزو کونفورد	Jones and Conford	رادار اوبو	$299782 \pm 25$
۱۹۵۰	بل	Bol	بازا و اگرکاواکی	$299789.3 \pm 0.4$
۱۹۵۰	اسن	Essen	بازا و اگرکاواکی	$299792.5 \pm 3.0$
۱۹۵۱	اسلاکسون	Aslakson	رادار شوران	$299794.2 \pm 1.9$
۱۹۵۲	فروم	Froome	تداخل سنج میکروموجی	$299792.6 \pm 0.7$
پ - نسبت یکاهای الکتریکی				
۱۸۵۷	ویبر و کولراوش	Weber and Kohlrausch		$310000 \pm 20000^*$
۱۸۶۸	ماکسول	Maxwell		$288000 \pm 20000^*$
۱۸۸۳	تامسون	Thomson		$282000 \pm 20000^*$
۱۹۰۷	رُزا و دُرسی	Rosa and Dorsey		$299784 \pm 10$

\* حد خطای تخمینی.

به نام گذردهی نسبی یا ضریب دی الکتریک و :

$$K_m = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (13.01)$$

به نام تراوایی نسبی، می‌توانیم بنویسیم :

$$u = (\mu\epsilon)^{-1/2} = (K_m\mu_0K\epsilon_0)^{-1/2} = c(KK_m)^{-1/2} \quad (14.01)$$

نمار شکست یک محیط  $n$  عبارت است از نسبت سرعت نور در خلأ به سرعت نور در آن محیط. بنابراین:

$$\frac{c}{u} = n = (KK_m)^{1/2} \quad (15.01)$$

بیشتر محیطهای نوری شفاف غیر مغناطیسی‌اند، بنابراین  $K_m = 1$ ، در این صورت نمار شکست برابر با ریشه دوم ضریب دی‌الکتریک محیط است:

$$n = \sqrt{K} \quad (16.01)$$

در جدول ۲۰۱ نمار شکست چند نمونه با ریشه دوم ضریب گذردهی ایستای آنها مقایسه شده است. در مورد گازها، یعنی هوا و دی‌اکسیدکربن و همچنین اجسام غیر قطبی مانند پلی‌استیرین توافق وجود دارد ولی برای محیطهایی که ملکولهای قطبی دارند، مانند آب و الکل، توافق خوب نیست. این ناشی از بالا بودن قطبش پذیری ایستای این اجسام است.

در واقع نمار شکست به بسامد تابش بستگی دارد و این ویژگی برای همه محیطهای نوری شفاف صادق است. تغییرات نمار شکست با بسامد را **پاشندگی** می‌نامند. پاشندگی شیشه در منشورها سبب تجزیه نور به رنگهای مختلف می‌شود.

برای تشریح پاشندگی، باید حرکت واقعی الکترونها را در محیطی که نوردرآن منتشر می‌شود در نظر گرفت. نظریه پاشندگی در فصل ششم به طور گسترده بررسی خواهد شد.

## جدول ۲۰۱. نمارشکست و ریشه دوم گذردهی ایستا (۱۴)

جسم	$n$ (نور زرد)	$\sqrt{K}$
هوا (یک اتمسفر)	۱٫۰۰۰۲۹۲۶	۱٫۰۰۰۲۹۵
دی اکسید کربن (یک اتمسفر)	۱٫۰۰۰۰۴۵	۱٫۰۰۰۰۵
پلی استیرین	۱٫۵۹	۱٫۶۰
شیشه*	۱٫۷ - ۱٫۵	۲٫۰ - ۳٫۰
کوارتز فشرده	۱٫۴۶	۱٫۹۴
آب	۱٫۳۳	۹٫۰
الکل اتیلیک	۱٫۳۶	۵٫۰

\* مقادیر تقریبی.

## ۳۰۱ امواج تخت سازگان. سرعت فاز

اگر از محورهای مختصات قائم استفاده کنیم و معادلات برداری موج (۸۰۱) و (۹۰۱) را روی آنها تصویر کنیم، خواهیم دید که هر یک از مولفه‌های  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{H}$  از معادله عمومی نرده‌ای زیر پیروی می‌کنند<sup>۳</sup>:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (۱۷۰۱)$$

در اینجا کمیت  $U$  می‌تواند هر یک از مولفه‌های  $H_x, H_y, H_z, E_x, E_y, E_z$  باشد.

## انتشار امواج در یک بعد

اکنون حالت ویژه‌ای را در نظر می‌گیریم، که در آن تغییرات فضایی  $U$  فقط روی یک محور، مثلاً "محور  $z$  باشد. در این صورت عملگر  $\nabla^2$  به  $\partial^2/\partial z^2$  ساده می‌شود و معادله (۱۷۰۱) به معادله موج تک‌بعدی تبدیل می‌شود.

۳- ماهیت برداری امواج الکترومغناطیسی در فصل دوم بررسی می‌شود.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (18.01)$$

به سادگی با جانشانی مستقیم، می توان تأیید کرد که تابع:

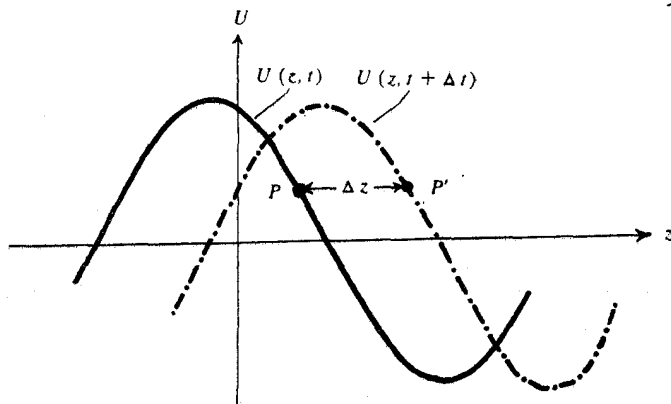
$$U(z,t) = U_0 \cos(kz - \omega t) \quad (19.01)$$

حواب معادله موج ( ۱۸.۰۱ ) است، مشروط بر آن که نسبت ثابتهای  $\omega$  و  $k$  برابر ثابت  $u$  باشد، یعنی:

$$\frac{\omega}{k} = u \quad (20.01)$$

جواب ویژه‌ای که به وسیله معادله ( ۱۹.۰۱ ) داده شده برای بررسی

نورشناسی بنیادی است و معرف یک موج تخت سازگان است و نمودار آن در شکل ۱۰۱ دیده می شود.



شکل ۱۰۱ نمودار تغییرات  $U$  نسبت به  $z$  در زمانهای  $t$  و  $t + \Delta t$

تابع  $U(z,t)$  در لحظه‌ای معین، به طور سینوسی با  $z$  تغییر می کند، و برای یک مقدار معین  $z$ ، این تابع به طور سازگان با زمان تغییر می کند. ماهیت پیشرونده موج با کشیدن دو منحنی  $U(z,t)$  و  $U(z,t + \Delta t)$  نشان داده شده است. منحنی دوم نسبت به اول به اندازه

$$\Delta z = u \Delta t$$

روی محور  $z$  جا به جا شده است. چنانکه در شکل دیده می شود، این فاصله بین

هر دو نقطه، هم فازی مانند  $P$  و  $P'$  است. به همین دلیل  $u$  را سرعت فاز می‌نامند. واضح است که تابع  $U_0 \cos(kz + \omega t)$  نشان دهنده موجی است که در جهت منفی محور  $z$  حرکت می‌کند.

ثابت‌های  $\omega$  و  $k$  را بترتیب بسامد زاویه‌ای و عدد موج زاویه‌ای می‌نامند.<sup>۴</sup> طول موج  $\lambda$  بنا به تعریف فاصله‌ای است که در راستای جهت انتشار اندازه‌گیری می‌شود و در طی آن تابع موج از یک چرخه کامل می‌گذرد. عکس طول موج را عدد موج می‌نامند و با  $\sigma$  نمایش می‌دهند. زمان یک چرخه کامل را دوره می‌نامند و با  $T$  نشان می‌دهند. تعداد چرخه‌ها در یکای زمان را بسامد می‌نامند و با  $\nu$  نمایش می‌دهند. با توجه به مراتب بالا، موج فاصله  $\lambda$  را در زمان  $T$  می‌پیماید. به‌سادگی می‌توان روابط زیر را بین پارامترهای گوناگون یادشده نوشت:

$$\lambda = uT = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{\sigma} \quad (21.1)$$

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad (22.1)$$

انتشار امواج در سه بعد:

اکنون به معادله سه بعدی موج (۱۷.۱) باز می‌گردیم. به‌سادگی می‌توان آزمود که تابع موج تخت سازگان سه بعدی زیر جوابی برای معادله بالاست.

$$U(x,y,z,t) = U_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (23.1)$$

که در آن بردار مکان  $\mathbf{r}$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

و بردار انتشار یا بردار موج  $\mathbf{k}$  برحسب مولفه‌های آن چنین است:

$$\mathbf{k} = \hat{i}k_x + \hat{j}k_y + \hat{k}k_z \quad (24.1)$$

۴- بعضی از نویسندگان ترجیح می‌دهند آنها را فقط بسامد و عدد موج بنامند؛  $k$  ثابت انتشار نیز خوانده می‌شود.

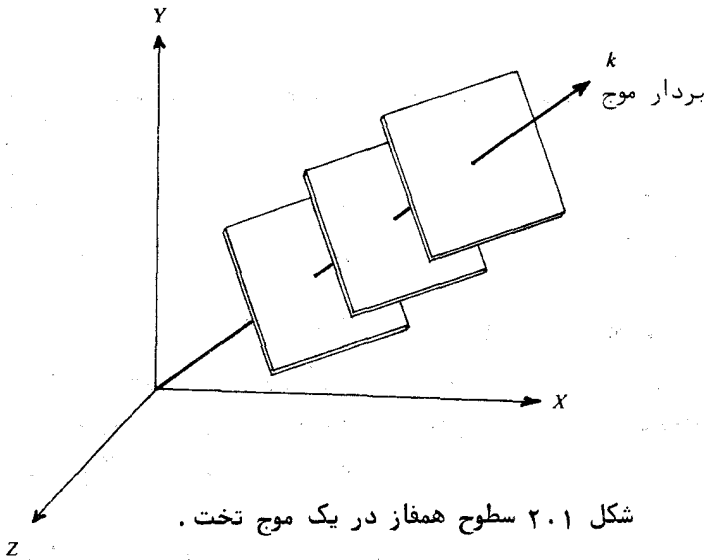


بزرگی بردار موج برابر با عدد موج است که قبلاً " تعریف شده، یعنی

$$|\mathbf{k}| = k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} \quad ( ۲۵.۱ )$$

برای تعبیر معادله ( ۲۳.۱ ) شناسه کسینوس، یعنی  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$  را در نظر می‌گیریم. اگر این کمیت را مساوی مقادیر ثابتی قرار دهیم معادلات یک گروه صفحه در فضا به دست می‌آیند که سطوح فاز ثابت خوانده می‌شوند:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t = \text{ثابت} \quad ( ۲۶.۱ )$$



شکل ۲.۱ سطوح همفاز در یک موج تخت .

این رابطه نشان می‌دهد که کسینوسهای هادی صفحات همفاز، با مولفه‌های بردار انتشار  $\mathbf{k}$  متناسبند، یعنی همانگونه که در شکل ۲.۱ نشان داده شده،  $\mathbf{k}$  بر سطوح موج عمود است. علاوه بر این، به خاطر سازه زمانی در معادله ( ۲۶.۱ )، دیده می‌شود که این سطوح موج با سرعتی مساوی با سرعت فاز در جهت  $\mathbf{k}$  حرکت می‌کنند و بروشنی داریم:

$$u = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \quad ( ۲۷.۱ )$$

## چشمه‌های امواج الکترومغناطیسی

تابش الکترومغناطیسی به وسیله بارهای الکتریکی نوسان کننده تولید می‌شود. بسامد نوسان نوع تابشی را که گسیل می‌شود معین می‌کند. در جدول ۳.۱ بخشهای گوناگون بیناب الکترومغناطیسی برحسب بسامد و طول موج نشان داده شده است. ( انرژی کوانتومی تابش نیز در این جدول آمده است. نظریه کوانتومی در فصل هفتم بحث خواهد شد ).

واحدهای طول موج که معمولاً " در بخش اپتیکی به کار برده می‌شوند عبارتند از :

واحد	علامت اختصاری	معادل
میکرون	$\mu$	$10^{-6}$ متر
نانومتر	nm	$10^{-9}$ متر
انگسترم	Å	$10^{-10}$ متر

واحد بسامد، چرخه بر ثانیه است که به آن هرتز ( Hz ) نیز گفته می‌شود. اگر در چشمه‌های بارها به طور هم‌آهنگ نوسان کنند، چشمه را همدوس و اگر بارها مستقل از یکدیگر به‌طور گاتوره‌ای نوسان کنند چشمه را ناهمدوس می‌گویند. چشمه‌های معمولی تابش در بخش دیدگانی ناهمدوسند، مانند لامپهای تنگستنی، لامپهای فلورسان، شعله‌ها و جز اینها.

چشمه‌های مصنوعی امواج رادیویی و کهموجها معمولاً همدوسند. این چشمه‌های کم‌بسامد همدوس اساساً " نوسان کننده‌های الکترونیکی‌اند که در آنها از تقویت کننده‌هایی مانند لامپهای خلاء، ترانزیستورها، کلیسترونها و جز اینها استفاده می‌شود. لیزر که تقویت کننده‌ای در بخش دیدگانی بیناب الکترومغناطیسی است گستره چشمه‌های همدوس را افزایش داده است. نظریه لیزر در فصل نهم بررسی می‌شود.

## ۴.۱ نمایش امواج سازگان به روشهای دیگر

اگر بردار یکای  $\hat{n}$  معرف جهت بردار موج  $\mathbf{k}$  باشد خواهیم داشت  $\mathbf{k} = \hat{n}k$  و

جدول ۳۰۱ بیناب الکترومغناطیسی

انرژی کوانتومی	طول موج	بسامد	نوع تابش
$4 \times 10^4$ الکترون ولت و کمتر	$3000$ تا $3 \times 10^8$ متری بیشتر	$10^9$ هرتز و کمتر	امواج رادیویی
$4 \times 10^4$ الکترون ولت و کمتر	$3000$ تا $3 \times 10^8$ متری بیشتر	$10^9$ تا $10^{12}$ هرتز	کیهوجها
الکترون ولت			
$4 \times 10^4$ الکترون ولت تا $10^7$ الکترون ولت	$3000$ تا $3 \times 10^8$ میکرون	$10^{12}$ تا $4 \times 10^{14}$ هرتز	فرو قرمز
$7 \times 10^4$ الکترون ولت تا $3 \times 10^7$ الکترون ولت	$7$ تا $4 \times 10^7$ میکرون	$10^{14}$ تا $4 \times 10^{16}$ هرتز	دیدگانی
$3 \times 10^4$ الکترون ولت تا $4 \times 10^7$ الکترون ولت	$4$ تا $3 \times 10^8$ میکرون	$10^{14}$ تا $7 \times 10^{16}$ هرتز	فرا بنفش
$4 \times 10^4$ الکترون ولت تا $4 \times 10^7$ الکترون ولت	$3000$ تا $3 \times 10^8$ انگسترم	$10^{16}$ تا $10^{19}$ هرتز	پرتوهای ایکس
$4 \times 10^4$ الکترون ولت و بیشتر	$3$ تا $3 \times 10^8$ انگسترم و کمتر	$10^{19}$ هرتز و بیشتر	پرتوهای گاما

توجه: مقادیر عددی تقریبی است و تقسیم به بخشهای گوناگون نمایشی و اختیاری است.

بنابراین، معادله موج تخت سازگان ( ۲۳.۱ ) به صورت زیر در می آید:

$$U_0 \cos [(\hat{n} \cdot \mathbf{r} - ut)k]$$

باید توجه داشت که ترتیب جمله‌ها در شناسه کسینوس مهم نیست زیرا  $\cos \theta$  برابر  $\cos(-\theta)$  است. همین‌طور می‌توان به جای تابع کسینوسی، تابع سینوسی به کار برد زیرا هر دو نمایانگر یک چیزند و تفاوت آنها تنها در فاز آنهاست. در اینجا یادآور می‌شود که تابع موج را می‌توان با به کار بردن معادلات ( ۲۱.۱ ) و ( ۲۲.۱ ) به صورتهای دیگر نیز نمایش داد ( به مسئله ۱.۱ مراجعه کنید ).

### تابع موج مختلط

نمایش معادله موج تخت سازگان با به کار بردن اتحاد:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

آسانتر می‌شود و به صورت زیر در می آید.

$$U = U_0 e^{i(k \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad ( ۲۸.۱ )$$

بدیهی است که بخش حقیقی این معادله کمیت فیزیکی مورد نظر را نمایش می‌دهد و آن عیناً " معادله قبلی ( ۲۳.۱ ) است. ولی بسادگی می‌توان امتحان کرد که عبارت مختلط ( ۲۸.۱ ) نیز جواب معادله موج است. دلیل عمده برای به کار بردن عبارت مختلط نمایی این است که از نظر جبری ساده‌تر از عبارت مثلثاتی است. در بخش بعد مثالی برای به کار بردن عبارت مختلط نمایی می آوریم.

### امواج کروی

توابع  $\cos(kr - \omega t)$  و  $e^{i(kr - \omega t)}$  روی کره‌ای به شعاع  $r$  در لحظه معین  $t$  مقادیر ثابتی دارند. این تابعها، با افزایش  $t$ ، امواج کروی در حال انبساط را — نمایش می‌دهند ولی جواب معادله موج نیستند. در صورتی که بسادگی می‌توان آزمود که توابع:

$$\frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad \text{و} \quad \frac{1}{r} \cos(kr - \omega t)$$

براستی جوابهای معادله موج بوده و بنابراین معرف امواج کروی که از مبدأ نثر می شوند می باشند ( به مسئله ۲۰.۱ مراجعه کنید ).

### ۵.۱ سرعت گروه

دو موج سازگان که بسامدهای زاویه‌ای آنها کمی با یکدیگر متفاوت است را در نظر می‌گیریم. این بسامدها را به ترتیب با  $\omega + \Delta\omega$  و  $\omega - \Delta\omega$  نمایش می‌دهیم. عددهای موج نیز معمولاً متفاوتند و آنها را با  $k + \Delta k$  و  $k - \Delta k$  نشان می‌دهیم. اکنون فرض می‌کنیم دامنه‌های دو موج مساوی بوده و برابر  $U_0$  باشند و هر دو در یک جهت مانند جهت محور  $z$  حرکت کنند. در این صورت نتیجه برهم‌نهی دو موج با به کار بردن عبارتهای مختلط چنین خواهد بود.

$$U = U_0 e^{i[(k + \Delta k)z - (\omega + \Delta\omega)t]} + U_0 e^{i[(k - \Delta k)z - (\omega - \Delta\omega)t]} \quad (29.1)$$

با سازه‌گیری و جمع‌آوری جملات، نتیجه می‌شود:

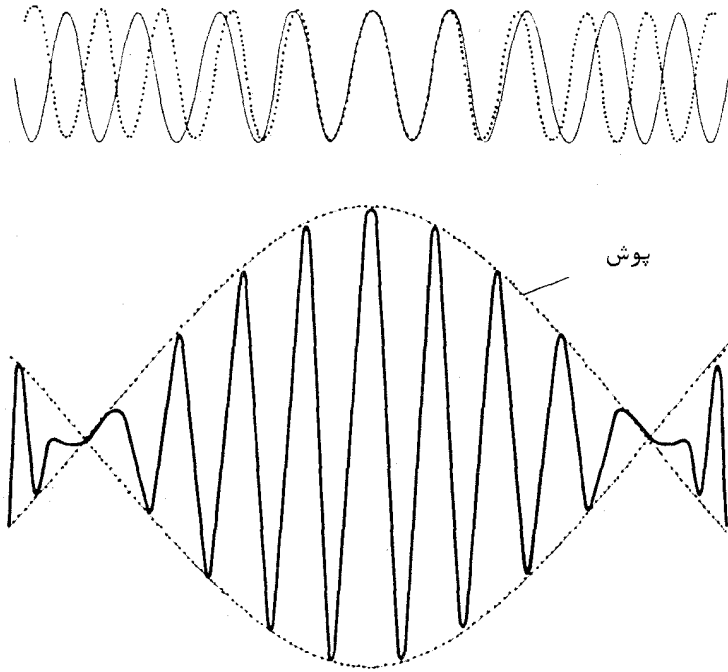
$$U = U_0 e^{i(kz - \omega t)} [e^{i(z\Delta k - t\Delta\omega)} + e^{-i(z\Delta k - t\Delta\omega)}] \quad (30.1)$$

یا

$$U = 2U_0 e^{i(kz - \omega t)} \cos(z\Delta k - t\Delta\omega) \quad (31.1)$$

عبارت نهایی را می‌توان مطابق شکل ۳.۱، به تک موج  $2U_0 e^{i(kz - \omega t)}$  تعبیر کرد که به وسیله پوش  $\cos(z\Delta k - t\Delta\omega)$  مدوله شده است. پوش مدولاسیون با سرعت فاز  $\omega/k$  که مربوط به هر یک از امواج است حرکت نمی‌کند بلکه با سرعت  $\Delta\omega/\Delta k$  که سرعت گروه نامیده می‌شود و با  $u_g$  نمایش داده می‌شود پیش می‌رود. بنابراین:

$$u_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (32.1)$$



شکل ۳۰۱ پوش ترکیب دو موج سازگان

یا در حد

$$u_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (33.1)$$

در کلیه محیطهای نوری، سرعت فاز  $u$  تابعی است از بسامد زاویه‌ای  $\omega$ . این پدیده همان پاشندگی است که پیشتر از آن بحث شد. در محیطی که نماز شکست  $n = c/u$  به طوری معلوم با بسامد یا طول موج تغییر می‌کند، می‌توانیم بنویسیم:

$$\omega = ku = \frac{kc}{n} \quad (34.1)$$

از این دو

$$u_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \left( \frac{kc}{n} \right) = \frac{c}{n} - \frac{ck}{n^2} \frac{dn}{dk} = u \left( 1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk} \right) \quad (35.01)$$

در محاسبات عملی سرعت گروه از روابط زیر استفاده می‌شود، که اثبات آنها به عنوان مسئله به خواننده واگذار می‌شود.

$$u_g = u - \lambda \frac{du}{d\lambda} \quad (36.01)$$

$$\frac{1}{u_g} = \frac{1}{u} - \frac{\lambda_0}{c} \frac{dn}{d\lambda_0} \quad (37.01)$$

در اینجا  $\lambda_0$  طول موج نور در خلاء است.

دیده می‌شود در محیطی که سرعت فاز یا نمار شکست ثابت است، سرعت فاز و سرعت گروه تفاوتی ندارند و بویژه برای خلاء داریم:

$$u_g = u = c \quad (38.01)$$

برای بیشتر محیطهای نوری، نمارشکست با بسامد یا عدد موج افزایش می‌یابد، به طوری که  $dn/dk$  مثبت است. بنابراین برای این محیطها، سرعت گروه از سرعت فاز کمتر است. چون هر علامتی را می‌توان یک نوع مدولاسیون موج پیوسته دانست، از این رو علامت با سرعت گروه حرکت می‌کند و بنابراین، معمولاً "سرعت انتشار آن از سرعت فاز کمتر است" در این حالت امواج درون پوش مدولاسیون در قسمت عقب پوش ظاهر می‌شوند و به قسمت جلو پیش می‌روند و ناپدید می‌شوند. در حالتی که سرعت گروه بیش از سرعت فاز است عکس پدیده فوق رخ می‌دهد و امواج در داخل پوش به عقب می‌روند.

بدیهی است که سرعت گروه، معمولاً تابعی است از بسامد، ولی در مواردی که یک موج مدوله شده معین، شامل نوار باریکی از بسامدها باشد، سرعت گروه کاملاً معین و یکتا خواهد بود. تپهای نوری نسبتاً تکفام، مثال خوبی در این مورد هستند. مایکلسون یکی از اولین کسانی بود که تفاوت بین سرعت فاز و سرعت گروه را به طور تجربی نشان داد. به این ترتیب که سرعت تپهای نوارزرد در دی‌سولفت‌کربن را برابر  $c/1.76$  به دست آورد، در حالی که نمار

شکست آن ۱٫۶۴ است و بنابراین سرعت فاز برابر با  $c/۱٫۶۴$  است. در اندازه‌گیریهای سرعت نور که از روش زمان حرکت استفاده می‌شود، باید تفاوت بین سرعت فاز و سرعت گروه در محیط در نظر گرفته شود. وقتی نتیجه نهایی داده‌های تجربی محاسبه می‌شود باید تصحیحات مقتضی به عمل آید.

### ۶.۱ پدیده دوپلر

اگر چشمه و گیرنده امواج نسبت به یکدیگر حرکت داشته باشند، بسامد موج دریافتی با حالتی که این دو نسبت به هم حرکت نداشته باشند متفاوت است. این پدیده معروف برای اولین بار در مورد امواج صوتی به وسیله دوپلر بررسی شد. تحلیلی مقدماتی بدین گونه است. اگر فرض شود که گیرنده نسبت به محیط ساکن است، و چشمه با سرعت  $u$  از آن دور می‌شود، تعداد  $\nu$  موج که در هر ثانیه نشر می‌شود، در طول  $c + u$  گسترده می‌شوند و نه در طول  $c$ . در اینجا  $c$  سرعت امواج در محیط است. بسامد دیده‌بانی شده  $\nu'$ ، یا تعداد امواجی که گیرنده در هر ثانیه دریافت می‌دارد چنین خواهد بود:

$$\nu' = \nu \left( \frac{c}{c+u} \right) = \nu \left( 1 - \frac{u}{c} + \frac{u^2}{c^2} - \dots \right) \quad (۳۹.۱)$$

از سوی دیگر، اگر گیرنده از چشمه دور شود، و چشمه نسبت به محیط ساکن باشد، در این صورت سرعت امواج نسبت به گیرنده  $c - u$  بوده و بسامد دیده‌بانی شده چنین خواهد بود:

$$\nu' = \nu \left( \frac{c-u}{c} \right) = \nu \left( 1 - \frac{u}{c} \right) \quad (۴۰.۱)$$

یا:

$$\frac{\nu - \nu'}{\nu} = \frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{u}{c} \quad (۴۱.۱)$$

اگر چشمه و گیرنده یکی به طرف دیگری حرکت کند، علامت  $u$  در هر یک از روابط بالا عوض خواهد شد.

در رابطه (۳۹.۱) دیده می‌شود که اگر  $u$  در مقابل سرعت موج  $c$  خیلی



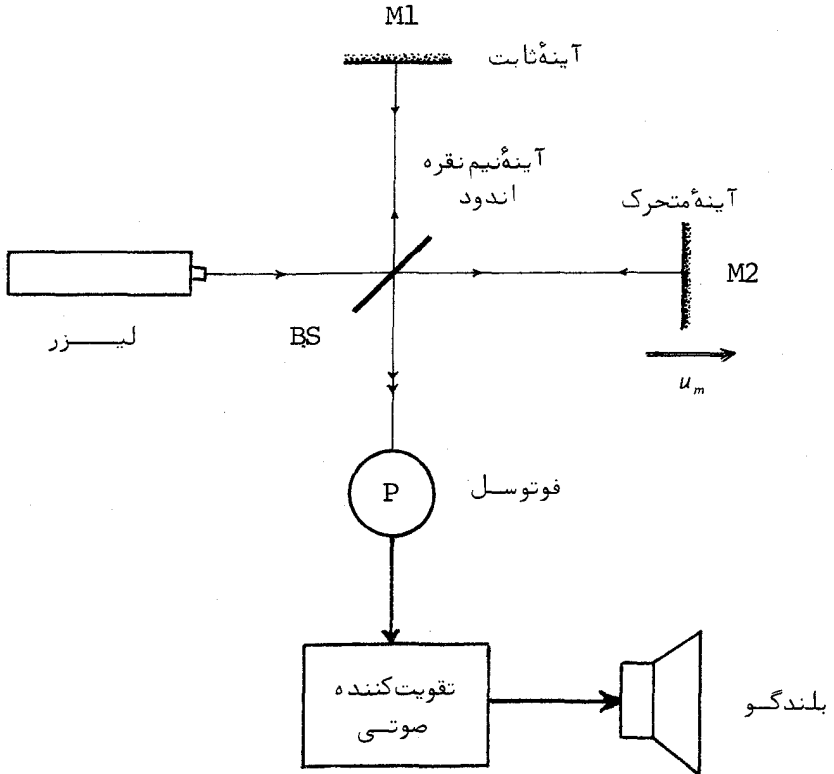
کوچک باشد، از جملات درجهٔ دوم و بالاتر می‌توان چشم پوشید و نتیجهٔ هر دو - حالت یکی خواهد شد.

در آزمایشگاه، اندازه‌گیری جابجاییهای دوپلری امواج نورانی<sup>۵</sup> به کمک نور گسیلی از باریکه‌های اتمی که در آن اتمها سرعت زیادی دارند امکان‌پذیر است. روش دیگر این است که نور از روی یک آئینهٔ متحرک بازتاب داده شود. با چشمه‌های معمولی، سرعت آئینه باید بسیار زیاد باشد، یعنی آئینه باید به چرخشی که بتواند با سرعت زیاد بچرخد متصل شود. ولی با استفاده از لیزر به عنوان چشمهٔ نور، پدیدهٔ دوپلر با سرعتهایی حدود چند سانتی‌متر بر ثانیه قابل مشاهده است. آزمایش آزمایش در شکل ۴۰۱ دیده می‌شود. نور لیزر به کمک یک نیم آئینهٔ BS به دو پرتو تقسیم می‌شود. یکی از پرتوها روی آئینهٔ ساکن M1 بازتاب می‌شود و از BS می‌گذرد و به فوتوسل P می‌رسد. پرتو دیگر روی آئینهٔ متحرک M2 بازتاب می‌شود. دو پرتو در P ترکیب می‌شوند و زنشی به وجود می‌آورند که بسامد آن برابر با  $\Delta\nu$ ، یعنی اختلاف بین بسامدهای دو پرتو است. اگر سرعت آئینهٔ متحرک  $u_m$  باشد در این صورت  $\Delta\nu/\nu = 2u_m/c$ . ضریب ۲ به خاطر این است که سرعت ظاهری چشمهٔ مجازی در آئینهٔ متحرک دو برابر سرعت آئینه است.

جابجاییهای دوپلری خطوط بیناب در ستاره‌شناسی کاملاً شناخته شده است. این پدیده برای اندازه‌گیری حرکت اجسام نجومی به‌کار برده می‌شود. مثلاً برای ستارگان دوتائی، یعنی دو ستاره که گرد مرکز جرم مشترک خود می‌چرخند، هریک از خطوط بیناب آنها به‌طور دوره‌ای به دو خط تبدیل می‌شود، زیرا وقتی یکی از ستارگان به زمین نزدیک می‌شود، دیگری از زمین دور می‌شود و این به گونه‌ای که در شکل ۵۰۱ نشان داده شده به‌طور منظم تکرار می‌شود.

سرعت نوعی اجرام نجومی درون کهکشان در حدود صد کیلومتر بر ثانیه است، بنابراین  $u/c$  در حدود  $10^{-4}$  است. ولی خطوط بیناب کهکشانهای بسیار دور، به قدری به طرف بسامدهای کم جابه‌جا می‌شوند که نشانگر سرعتهایی حدود نصف سرعت نور است. به نظر می‌آید که این جابجایی، که به نام جابجایی به‌فرز نامیده می‌شود، متناسب با فاصله است، از این‌رو انبساط کیهان را نشان می‌دهد. در اجسام

۵ - فیزو "Fizeau" یکی از اولین افرادی بود که این پدیده را در مورد امواج نورانی بررسی کرد. به این دلیل پدیدهٔ دوپلر در نور به نام پدیدهٔ دوپلر-فیزو هم معروف است.

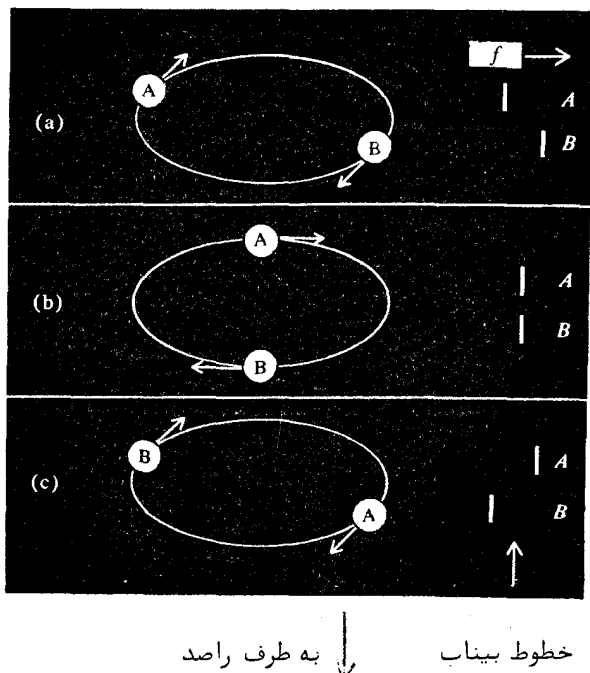


شکل ۴۰۱ روشی برای مشاهده پدیده دوپلر به کمک لیزر.

اختروار، یا کوازارها *quasars* که بتازگی کشف شده‌اند، جابجایی به قرمز خیلی زیاد است و نشانگر سرعت‌هایی حدود ۸۰٪ است.

### تصحیح نسبیتی رابطه دوپلر

در پیوست، که نورشناسی نسبیتی مورد بحث قرار می‌گیرد، نشان داده می‌شود که بنا به نظریه نسبیت خاص، تفاوتی میان دو حالت "دیدبان متحرک" و "چشمه متحرک" یعنی معادلات (۳۹.۱) و (۴۰.۱) وجود ندارد، بلکه تنها حرکت



شکل ۵.۱ نمایش حرکت یک دستگاه دوستاره‌ای و جابجایی‌های دوپلری خط بیناب.

نسبی وجود دارد و نشان داده می‌شود که رابطه نسبی چنین است:

$$v' = v \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}} = v \left( 1 - \frac{u}{c} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} - \dots \right) \quad (۴۲.۱)$$

در اینجا اگر چشمه و گیرنده از یکدیگر دور شوند  $u$  مثبت و در غیراین صورت منفی خواهد بود. بسط به سری نشان می‌دهد که جابجایی نسبی و غیرنسبی دوپلر تنها در توان دوم  $u/c$  با یکدیگر متفاوتند. برای سرعت‌های کم این تفاوت قابل چشم‌پوشی است، ولی اگر  $u$  نزدیک به  $c$  شود، تفاوت قابل ملاحظه خواهد شد.

## پهن شدگی خطوط بیناب در اثر پدیده دوپلر

یکی دیگر از راههایی که پدیده دوپلر خود را نشان می‌دهد، پهن شدن خطوط بیناب در تخلیه گازی است. این پهن‌شدگی به علت حرکت کاتوره‌ای گرمایی اتمهای تابنده به وجود می‌آید. بنابر نظریه مقدماتی جنبشی (۳۱) مقدار ریشه میانگین مربعی هر یک از مولفه‌های سرعت یک اتم از گاز برابر با  $\sqrt{kT/m}$  است، که در آن  $T$  دمای مطلق،  $k$  ثابت بولتزمن و  $m$  جرم اتم است. در هر لحظه قسمتی از اتمها به دیدبان نزدیک و قسمت دیگر دور می‌شوند. پهنای " نیم توان "  $\Delta\nu$  یک خط بیناب با بسامد متوسط  $\nu$  که در نتیجه حرکت گرمایی به وجود می‌آید، به کمک رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{2\sqrt{2} \ln 2}{c} \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad (۴۳۰۱)$$

عدد  $2\sqrt{2} \ln 2$  از توزیع سرعتها که گاوسی است می‌آید. توزیع شدت نیز تابعی از بسامد بوده و گاوسی است.

می‌بینیم که پهنای متناسب با ریشه دوم دماست و باعکس ریشه دوم جرم اتم نسبت دارد. پس هیدروژن، سبکترین اتمها، در دمایی معین پهن‌ترین خطوط بیناب را داراست. برای به دست آوردن خطوط نازک، لامپ تخلیه را باید سرد کرد و در آن از اتمهای سنگین استفاده کرد. از این رو است که استاندارد بین‌المللی طول، طول موج خط گسیلی نارنجی کریپتون است. این خط از تخلیه گاز کریپتون ۸۶ کسه به وسیله هوای مایع سرد شده است تابش می‌شود. چنین چشمه‌ای دقیق و تکرارپذیر است و در اندازه‌گیریهای تداخل‌سنجی از آن استفاده می‌شود. با وجود این شاید در آینده استاندارد کریپتونی طول با استاندارد لیزری جایگزین شود.

## مسائل

۱۰۱ برای امواج سازگان تک‌بعدی تابع موجی را برحسب هر جفت پارامتر زیر به دست آورید:

الف) بسامد و طول موج

ب) دوره و طول موج

پ) بسامد زاویه‌ای و سرعت فاز

ت) طول موج و سرعت فاز

۲.۱ نشان دهید تابع  $f(z - ut)$  یک جواب معادله موج تک‌بعدی  
 $\partial^2 f / \partial z^2 = (1/u^2) \partial^2 f / \partial t^2$  است که در آن  $f$  تابع مشتق‌پذیر دلخواهی  
 با شناسه  $z - ut$  است.

۳.۱ تعمیم مسئله بالا به یک مسئله سه‌بعدی، تابع  $f(\hat{n} \cdot \mathbf{r} - ut)$  خواهد بود،  
 که در آن  $\hat{n}$  یک بردار یکااست. نشان دهید که این تابع جوابی از معادله  
 سه‌بعدی موج  $\nabla^2 f = (1/u^2) \partial^2 f / \partial t^2$  است.

۴.۱ ثابت کنید که تابع موج کروی سازگان

$$\frac{1}{r} e^{i\hat{n}(kr - \omega t)}$$

جواب معادله سه‌بعدی موج است، که در آن  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ . اثبات  
 به کمک مختصات کروی آسانتر است.

۵.۱ طول موج نور لیزر هلیوم-نئون (درخلاء)  $633$  نانومتر است. مقدار عددی  
 عدد موج  $k$  این تابش را در آب ( $n = 1.33$ ) به دست آورید.

۶.۱ روابط زیر را به دست آورید:

$$u_g = u - \lambda \frac{du}{d\lambda}$$

و

$$\frac{1}{u_g} = \frac{1}{u} - \frac{\lambda_0}{c} \frac{dn}{d\lambda_0}$$

که در آنها  $u_g$  سرعت گروه،  $u$  سرعت فاز،  $\lambda$  طول موج،  $\lambda_0$  طول موج در  
 خلاء و  $n$  نماشکست محیط است.

۷.۱ تغییرات نماشکست با طول موج برای مواد شفاف مانند شیشه، را می‌توان  
 به‌طور تقریبی به‌کمک معادله آروینی کوشی به صورت زیر نوشت:

$$n = A + B\lambda_0^{-2}$$

در این رابطه  $A$  و  $B$  ثابتهای آروینی و  $\lambda_0$  طول موج در خلاء است. سرعت

گروه را در طول موج ۵۰۰ نانومتر در شیشه‌ای که برای آن  $n = ۱.۵$  و —  
 $B = 3 \times 10^4 \text{ (nm)}^2$  به دست آورید.

۸.۱. نمارشکست یک ماده فرضی با عکس طول موج نور در خلاف تغییر می‌کند،  
 یعنی  $n = A/\lambda_0$ . نشان دهید که سرعت گروه در یک طول موج معین،  
 درست نصف سرعت فاز است.

۹.۱. دومیچ که بسامدها و طول موجهای آنها کمی با هم تفاوت دارند را در نظر  
 بگیرید، به طوری که بتوان بسامدهای آنها را بترتیب با  $\nu$  و  $\nu + \Delta\nu$  و طول  
 موجهای آنها را با  $\lambda$  و  $\lambda + \Delta\lambda$  نمایش داد. نشان دهید نسبتهای  $|\Delta\nu/\nu|$   
 و  $|\Delta\lambda/\lambda|$  تقریباً با هم برابرند.

۱۰.۱. اعضای یک دستگاه دو ستاره‌ای به فاصله  $d$  از یکدیگر گرد مرکز جرم مشترک  
 با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  می‌گردند. نشان دهید، اگر خط دید در سطح مدار  
 دستگاه دوتایی باشد، حداکثر جدایی  $\Delta\lambda$  طول موجهای خطوط بیناب این  
 دو ستاره در اثر پدیده دوپلر برابر با  $\lambda\omega d/c$  است. اگر این سطح به اندازه  
 $\theta$  مایل باشد، اندازه  $\Delta\lambda$  چقدر خواهد بود؟

۱۱.۱. پهنای دوپلری خط بیناب مربوط به یک لامپ تخلیه نئون در دمای صد درجه  
 سلسیوس را محاسبه کنید. ثابت بولتزمن  $k = 1.38 \times 10^{-23}$  ژول بر درجه  
 کلوین (J/K) و جرم اتم نئون  $m = 3.34 \times 10^{-26}$  کیلوگرم است. طول موج  
 نور را  $\lambda = 600$  نانومتر اختیار کنید و پهنای خط را، هم بر حسب بسامد  
 و هم بر حسب طول موج به دست آورید.

## فصل دوم

# ماهیت برداری نور

## ۱.۲ نگرشهای کلی

همانطور که در فصل قبل نشان داده شد، مولفه‌های قائم میدانها در یک موج الکترومغناطیسی همه به‌طور فردی از یک معادله بنیادی موج تبعیت می‌کنند:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

بنا به معادلات تاو ماکسول، برای میدانهایی که با زمان و فضا تغییر می‌کنند، یک میدان مغناطیسی همواره باید با یک میدان الکتریکی همراه باشد و بعکس. بویژه برای امواج الکترومغناطیسی همیشه رابطه معینی بین این دو میدان وجود دارد. می‌خواهیم این رابطه را به‌طور گسترده بررسی کنیم. در اینجا بعضی از اتحادهای مفید عملگری را در رابطه با امواج تخت سازگان ثابت می‌کنیم. برای این منظور عبارت مختلط نمایی یک موج تخت سازگان را در نظر می‌گیریم:

$$\exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

اگر از این عبارت نسبت به زمان مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = -i\omega \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (2.2)$$



و با گرفتن مشتق پاره‌ای نسبت به یکی از متغیرهای فضا مانند  $x$  خواهیم یافت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) &= \frac{\partial}{\partial x} \exp i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \\ &= i k_x \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \end{aligned}$$

از این‌رو با به‌کار بردن عملگر

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad ( ۳.۲ )$$

بآسانی خواهیم داشت:

$$\nabla \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = i \mathbf{k} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad ( ۴.۲ )$$

پس رابطه‌های عملگری زیر برقرارند:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega \quad ( ۵.۲ )$$

$$\nabla \rightarrow i \mathbf{k} \quad ( ۶.۲ )$$

این رابطه‌ها برای امواج تخت سازگان صادقند. ( خواننده توجه دارد که  $\hat{i}$ ،  $\hat{j}$  و  $\hat{k}$  بردارهای یکا هستند، در حالی‌که  $i$  ریشه دوم  $-۱$  است و  $\mathbf{k}$  نیز بردار موج است. گرچه این نمادگذاری اشتباه‌آور است ولی استاندارد است). اکنون به معادلات ماکسول برای محیطی نارسا و همسانگرد برمی‌گردیم.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad ( ۷.۲ )$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad ( ۸.۲ )$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad ( ۹.۲ )$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad ( ۱۰.۲ )$$

به‌کمک رابطه‌های عملگری ( ۵.۲ ) و ( ۶.۲ )، معادلات ماکسول برای امواج تخت سازگان به صورت زیر در می‌آیند:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mu\omega\mathbf{H} \quad (11.2)$$

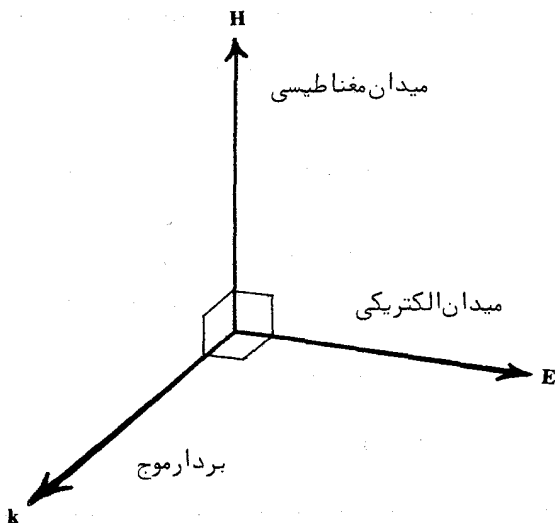
$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\epsilon\omega\mathbf{E} \quad (12.2)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (13.2)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (14.2)$$

بررسی معادلات بالا نشان می‌دهد که سه بردار  $\mathbf{k}$ ،  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{H}$  یک دستگاه سه‌بردار متقابلاً "راستگوش" تشکیل می‌دهند. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بر یکدیگر عمودند و مطابق شکل ۱۰۲ هر دو برجهت انتشار نور عمودند، و نیز بزرگیهای میدانها طبق رابطه زیر با یکدیگر بستگی دارند:

$$H = \frac{\epsilon\omega}{k} E = \epsilon u E \quad (15.2)$$



شکل ۱۰۲ وابستگی میان بردارهای میدان و بردار موج در یک موج الکترومغناطیسی.

که در آن از رابطه سرعت فاز  $u = \omega/k$  استفاده کرده‌ایم، و برحسب نمارشکست  $n = c/u$  داریم:

$$H = \frac{nE}{Z_0} \quad (16.2)$$

که در آن کمیت:

$$Z_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$$

پاگیری فضای تهی خوانده می‌شود و اندازه عددی آن ۳۷۷ اهم است. معادله (۱۶.۲) نشان می‌دهد که نسبت میدان مغناطیسی به میدان الکتریکی در یک موج الکترومغناطیسی که در یک محیط در حال انتشار است با نمارشکست محیط متناسب است. بنابراین وقتی پرتو نور از هوا وارد شیشه ( $n = 1.5$ ) می‌شود، نسبت میدان مغناطیسی به الکتریکی به‌طور ناگهانی ۱.۵ برابر می‌شود.

## ۲.۲ شارش انرژی . بردار پوئینتینگ

طبق قضیه پوئینتینگ (۱۶)، آهنگ زمانی شارش انرژی الکترومغناطیسی از واحد سطح برابر است با بردار  $S$  که بردار پوئینتینگ نامیده می‌شود، و بنا به تعریف برابر با حاصلضرب خارجی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی است.

$$S = E \times H \quad (17.2)$$

این بردار، جهت و بزرگی شار انرژی را تعیین می‌کند و در دستگاه یکاهای MKS، برحسب وات بر مترمربع بیان می‌شود.<sup>۱</sup> حال مورد امواج تخت سازگان را که در آن میدانها توسط عبارات حقیقی زیر داده می‌شوند در نظر می‌گیریم

$$E = E_0 \cos(k \cdot r - \omega t) \quad (18.2)$$

$$H = H_0 \cos(k \cdot r - \omega t) \quad (19.2)$$

۱- در یکاهای گاوسی  $S = (c/4\pi) E \times H$

پس برای مقدار لحظه‌ای بردار پوئینتینگ داریم:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (20.2)$$

چون مقدار متوسط مربع کسینوس  $\frac{1}{4}$  است، بنابراین برای مقدار متوسط بردار پوئینتینگ می‌توان نوشت:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 \quad (21.2)$$

(اگر برای  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{H}$  توابع مختلط نمایی به‌کار برده شوند، متوسط شار پوئینتینگ برابر با  $\frac{1}{4} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*$  خواهد شد. به مسئله ۴.۲ نگاه کنید). چون بردار موج  $\mathbf{k}$  بر دو بردار  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{H}$  عمود است، بنابراین با بردار پوئینتینگ همسوست و در نتیجه متوسط شار پوئینتینگ را می‌توان به‌صورت دیگری نیز نوشت:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = I \frac{\mathbf{k}}{k} = I \hat{\mathbf{n}} \quad (22.2)$$

که در آن  $\hat{\mathbf{n}}$  بردار یکا در جهت انتشار و  $I$  بزرگی متوسط شار پوئینتینگ است. کمیت  $I$  را تابندگی می‌نامند<sup>۲</sup> و برابر است با:

$$I = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{n}{2Z_0} |E_0|^2 \quad (23.2)$$

گام آخر از روابط بین بزرگی بردارهای الکتریکی و مغناطیسی که در بخش‌پیش به‌دست آمد نتیجه می‌شود. بنابراین آهنگ شارش انرژی متناسب با مجذور دامنه می‌سدان الکتریکی است. در محیطهای همسانگرد جهت شارش انرژی با جهت  $\mathbf{S}$  مشخص می‌شود و با بردار  $\mathbf{k}$  همسوست. (در محیطهای ناهمسانگرد مانند بلورها،  $\mathbf{k}$  همیشه همسو نیستند. این مطلب در فصل ششم مورد بحث قرار خواهد گرفت).

۲- گاهی، کلمه شدت برای  $I$  به‌کار برده می‌شود، ولی این از لحاظ فنی صحیح نیست (به فصل هفتم مراجعه کنید).

## ۳.۲ قطبش خطی

یک موج تخت سازگان الکترومغناطیسی را که برای آن میدانهای  $E$  و  $H$  از عبارات زیر به دست می‌آیند در نظر بگیرید:

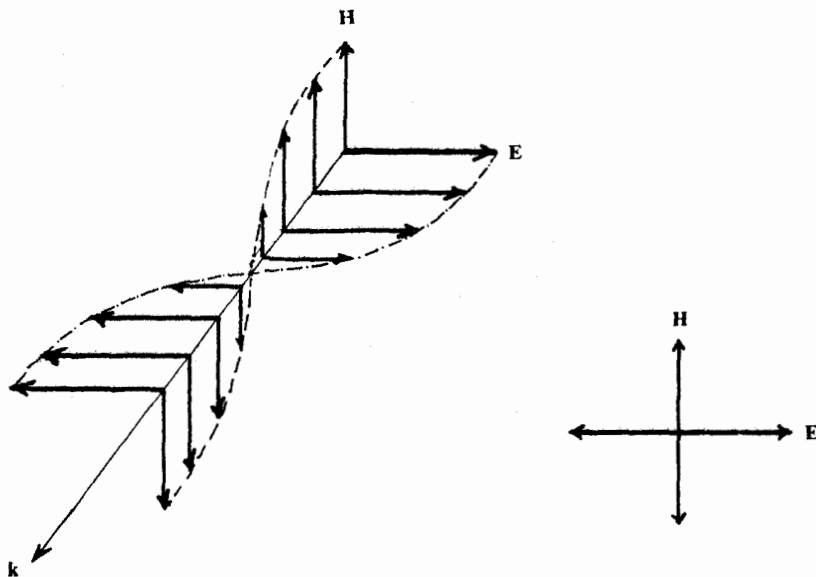
$$E = E_0 \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (24.2)$$

$$H = H_0 \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (25.2)$$

اگر دامنه‌های  $E_0$  و  $H_0$  بردارهای حقیقی و ثابتی باشند، موج، قطبیده خطی یا قطبیده تخت نامیده می‌شود. از بحث بخش گذشته می‌دانیم که میدانهای  $E$  و  $H$  بر یکدیگر عمودند. در مبحث نورشناسی رسم بر این است که جهت قطبش را با جهت میدان الکتریکی نمایش می‌دهند. شکل ۲.۲ میدانها را برای یک موج تخت قطبیده خطی نشان می‌دهد.

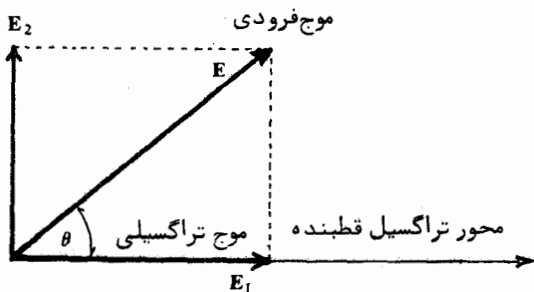
برای نور طبیعی یا ناقطبیده، قطبیدگی لحظه‌ای به‌طور دلخواه و سریع تغییر می‌کند. یک قطبنده خطی، نور ناقطبیده را به نور قطبیده خطی تبدیل می‌کند. قطبنده‌های خطی چندین نوعند. در ساختن موثرترین نوع آن از خاصیت شکست دوگانه استفاده می‌شود که در فصل ششم بررسی خواهد شد. نوع دیگری از آنها با استفاده از جذب نوری ناهمسانگرد یا پدیده دوفامی ساخته می‌شود. در پدیده دوفامی یکی از مولفه‌های قطبش بیشتر از مولفه دیگر جذب می‌شود. بلورهای کهربای (tourmaline) طبیعی خاصیت دوفامی دارند و از آنها می‌توان قطبنده ساخت، ولی خیلی موثر نیستند. یک محصول بازرگانی بسیار معروف، پلاروید است که به وسیله ادوین لاند Edwin Land ساخته شده است و از یک لایه نازک از بلورهای موازی سوزنی شکل تشکیل شده که دارای خاصیت دوفامی شدید است. این لایه در یک ورقه پلاستیکی جا داده می‌شود و می‌توان آن را خم کرد یا برش داد.

محور تراگیل چنین قطبنده‌ای بنا بر تعریف جهت بردار میدان الکتریکی موج نوری است که از آن، با جذب ناچیز و یا بدون جذب می‌گذرد. موج نوری که بردار الکتریکی آن بر محور تراگیل عمود باشد، کلاً جذب یا تضعیف می‌شود.



شکل ۲.۲ میدانها برای یک موج تخت قطبیده خطی.

یک قطبیده کامل آن است که برای نور قطبیده خطی در جهت محور تراگیسیل "کاملاً شفاف و برای نور قطبیده خطی عمود بر جهت محور تراگیسیل کاملاً تیره باشد" حالتی را در نظر بگیرید که نور ناقطبیده به یک قطبیده خطی کامل می‌تابد میدان الکتریکی  $E$  لحظه‌ای را همیشه می‌توان به دو مولفه عمود برهم  $E_1$  و  $E_2$  تجزیه کرد (شکل ۳.۲)، به گونه‌ای که  $E_1$  در امتداد محور تراگیسیل قطبیده قرار گیرد.



شکل ۳.۲ رابطه بین میدانهای فرودی و تراگیسیلیده برای یک قطبیده خطی.

اگر زاویه  $E$  با محور تراگیسل  $\theta$  باشد، اندازه میدان که از قطبیده می‌گذرد برابر است با:

$$E_1 = E \cos \theta$$

بنابراین شدت  $I_1$  نور عبوری که متناسب با مجذور میدان است، برابر خواهد بود با

$$I_1 = I \cos^2 \theta$$

که در آن  $I$  شدت پرتو فرودی است. برای نور ناقطبیده، تمام مقادیر  $\theta$  با احتمال یکسان وجود دارند. بنابراین ضریب تراگیسل یک قطبیده کامل برای نور ناقطبیده برابر با اندازه متوسط  $\cos^2 \theta$  یعنی  $\frac{1}{2}$  است.

### قطبیدگی جزئی

نوری را که به‌طور جزئی قطبیده است می‌توان مخلوطی از نور قطبیده و ناقطبیده دانست. درجه قطبیدگی در این حالت بنا بر تعریف کسری از شدت کل است که قطبیده می‌باشد:

$$P = \frac{I_{\text{pol}}}{I_{\text{pol}} + I_{\text{unpol}}} = \text{درجه قطبیدگی} \quad (26.2)$$

به‌عنوان تمرین نشان دهید که برای قطبیدگی خطی جزئی داریم:

$$P = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}} \quad (27.2)$$

که در آن  $I_{\text{max}}$  و  $I_{\text{min}}$  مربوط به شدتهای نور تراگیسلی از یک قطبیده خطی است که با چرخاندن  $360^\circ$  درجه کامل قطبیده، به دست می‌آیند.

### پراکندگی و قطبش

وقتی نور در محیطی به غیر از خلا پیش می‌رود، میدان الکتریکی نور، دو قطبیهای الکتریکی نوسان‌کننده آنها یا ملکولهای محیط را القا می‌کند و این دو قطبیهای القا شده سبب ویژگیهای نوری محیط، مانند شکست و جذب و جز اینها می‌شوند. این مبحث در فصل ششم بررسی خواهد شد. علاوه بر اینکه این دو قطبیهای

القاییده در انتشار امواج نوری تاثیر می‌گذارند، نور را در جهت‌های مختلف نیش می‌پراکنند. این پراکندگی ملکولی ( با پراکندگی دره‌ای، که به وسیله ذرات معلق مانند غبار انجام می‌شود، تفاوت دارد) به وسیله ریلی Rayleigh مطالعه شد و از راه نظری نشان داده شد که آن بخش از نور که به وسیله ملکولهای گاز پراکنده می‌شود، با توان چهارم بسامد یا عکس توان چهارم طول موج متناسب است. آبی بودن رنگ آسمان از این رو است، زیرا موجهای با طول کوتاه ( ناحیه آبی بیناب) بیشتر از موجهای با طول بلند ( ناحیه قرمز ) پراکنده می‌شوند.<sup>۳</sup>

پراکندگی نور علاوه بر این که به طول موج بستگی دارد ایجاد قطبیدگی نیز می‌کند. زیرا تابش یک دوقطبی نوسان کننده الکتریکی جهتمند است. بیشترین تابش در جهات عمود بر محور دو قطبی گسیل می‌شود و تابشی در امتداد محور آن گسیل نمی‌شود. گذشته از این، قطبیدگی تابش در جهت محور دوقطبی است. نوری را در نظر بگیرید که تحت زاویه ۹۰ درجه از جهت اصلی می‌پراکند. بردار الکتریکی موج پراکنده، چنانکه در شکل ۴۰۲ نشان داده شده، برجهت موج فرودی عمود است، به طوری که نور پراکنده قطبیده خطی است.

قطبیدگی نور آسمان آبی بسادگی با یک قطعه پلارویید قابل مشاهده است. بیشترین مقدار قطبیدگی در جهت عمود بر سوی خورشید است و اندازه‌گیری نشان می‌دهد که درجه قطبیدگی می‌تواند به بیشتر از ۵۰ درصد برسد.

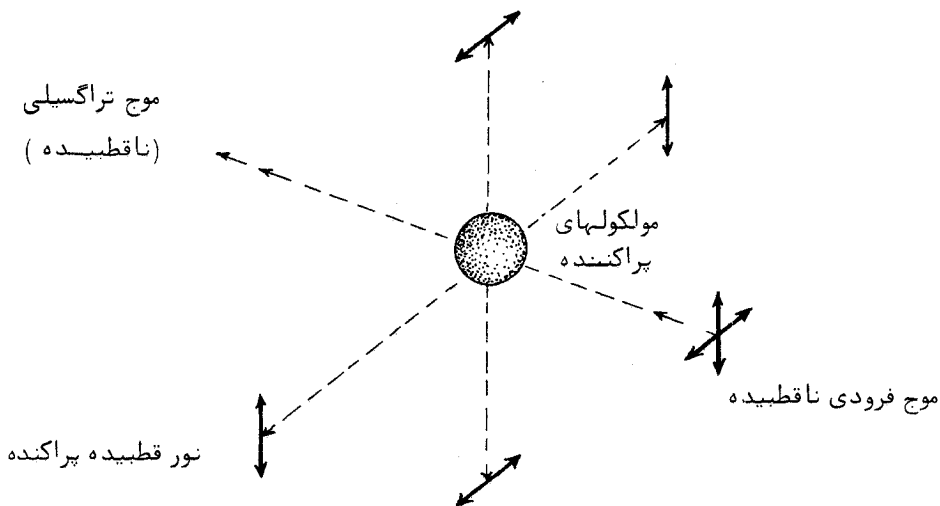
## ۴۰۲ قطبش بیضی و دایره‌ای

اکنون موقتاً به نمایش حقیقی امواج الکترومغناطیسی باز می‌گردیم. حالتی که دوموج قطبیده خطی هر دو دارای دامنه  $E_0$  بوده و به طور متعامد قطبیده‌اند را در نظر بگیرید، و نیز فرض کنید این دوموج با هم ۹۰ درجه اختلاف فاز داشته باشند. محورهای مختصات را طوری اختیار می‌کنیم که بردارهای الکتریکی دوموج برترتیب در جهت‌های  $x$  و  $y$  قرار گیرند. در این صورت میدانهای الکتریکی ترکیب‌شونده عبارت خواهند بود از:

۳- درحقیقت آسمان باید بیشتر بنفش باشد تا آبی ولی این طور نیست زیرا اولاً- حساسیت چشم در ناحیه بنفش سریعاً کاهش می‌یابد و ثانیاً انرژی خورشید در این ناحیه کم است.



نور قطبیده پراکنده



شکل ۴.۲ نمایش قطبش در پراکنندگی ملکولی نور. بردارهای  $E$  امواج فرودی و پراکنده نشان داده شده‌اند.

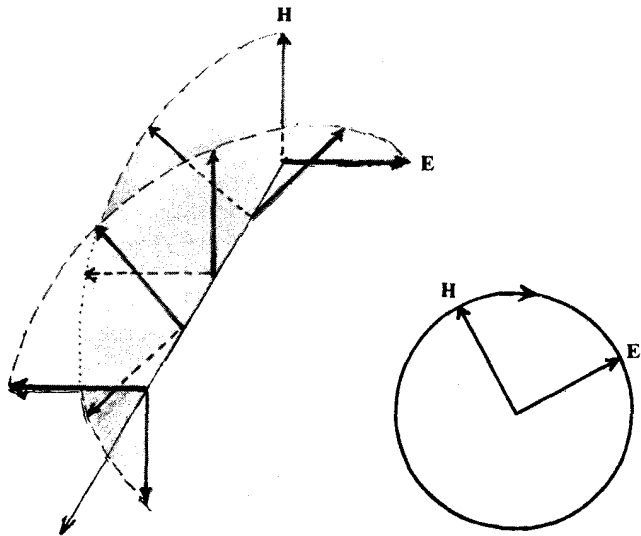
$$\hat{j}E_0 \sin(kz - \omega t)$$

$$\hat{i}E_0 \cos(kz - \omega t)$$

میدان الکتریکی کل،  $E$ ، برابر با جمع برداری دومیدان ترکیب شونده است:

$$\mathbf{E} = E_0 [\hat{i} \cos(kz - \omega t) + \hat{j} \sin(kz - \omega t)] \quad (28.2)$$

این عبارت جواب بسیار مناسبی برای معادله موج است، و می‌توان آن را موجی دانست که بزرگی بردار الکتریکی آن در هر نقطه ثابت است ولی با بسامد زاویه‌ای  $\omega$  می‌چرخد. گفته می‌شود این نوع امواج، قطبیده دایره‌ای‌اند. نمودار میدان الکتریکی موج قطبیده دایره‌ای و میدان مغناطیسی وابسته به آن در شکل ۵.۲



شکل ۵.۲ بردارهای الکتریکی و مغناطیسی برای نور قطبیده دایره‌ای راست. (الف) بردارها در یک لحظه از زمان، (ب) چرخش بردارها در یک نقطه از فضا.

نشان داده شده است.

معادله (۲۸.۲) با علامتهایی که جمله‌های آن دارند نشانگر چرخش ساعتگرد میدان الکتریکی در یک نقطه از فضا است و وقتی در جهت عکس انتشار نور نگاه شود، این چرخش با حرکت عقربه‌های ساعت همسوست. همچنین در هر لحظه از زمان بردارهای میدان، مطابق با شکل ۵.۲، مارپیجهایی را می‌پیمایند به نام مارپیچهای راستگرد. چنین موجی را قطبیده دایره‌ای راست می‌نامند.

اگر علامت جمله دوم عوض شود، جهت چرخش نیز تغییر خواهد کرد. در این حالت اگر در جهت عکس انتشار نگاه شود، چرخش در یک نقطه از فضا خلاف جهت عقربه‌های ساعت خواهد بود و میدانها در هر لحظه از زمان مارپیچهای چپگرد می‌پیمایند. چنین موجی قطبیده دایره‌ای چپ است.

شاید نیاز به گوشزد باشد که اگر همراه موج حرکت کنیم، جهت و بزرگی

بردارهای میدان هیچ یک تغییر نمی‌کند، زیرا کمیت  $kz - \omega t$  ثابت می‌ماند. این برای هر نوع قطبیدگی صادق است.

حال به نمایش مختلط بر می‌گردیم. میدان الکتریکی برای موج قطبیده دایره‌ای را می‌توان به صورت مختلط نمایش داد:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}E_0 \exp i(kz - \omega t) + \hat{\mathbf{j}}E_0 \exp i(kz - \omega t \pm \pi/2) \quad (29.2)$$

با به‌کاربردن اتحاد  $e^{i\pi/2} = i$ ، می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathbf{E} = E_0(\hat{\mathbf{i}} \pm i\hat{\mathbf{j}}) \exp i(kz - \omega t) \quad (30.2)$$

سادگی می‌توان نشان داد که قسمت حقیقی این رابطه، دقیقاً معادله (28.2) است، ولی علامت منفی باید برای نمایش قطبیدگی دایره‌ای راست به‌کاربرده شود و علامت مثبت برای قطبیدگی دایره‌ای چپ.

در اینجا به خواننده یادآور می‌شود که اگر به جای  $\exp i(kz - \omega t)$  تابع موج  $\exp i(\omega t - kz)$  به‌کاربرده شود در این صورت قرارداد علامت نیز عکس می‌شود.

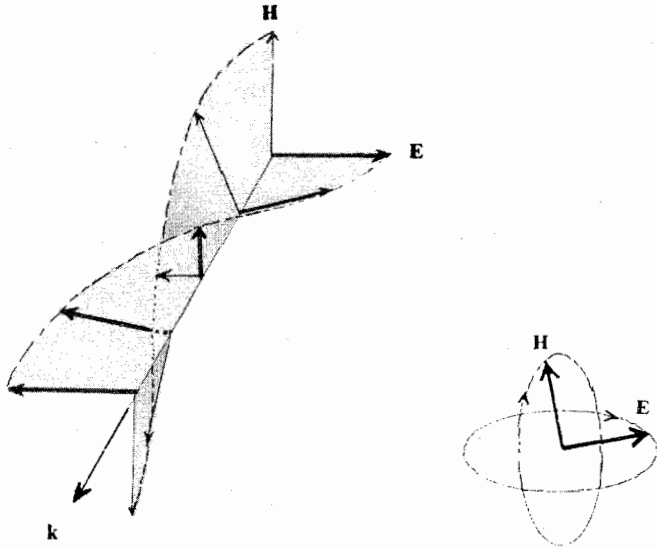
### قطبش بیضی

اگر دامنه (حقیقی) میدانهای ترکیب‌شونده با هم برابر نباشند، مانند  $\hat{\mathbf{i}}E_0 \cos(kz - \omega t)$  و  $\hat{\mathbf{j}}E_0' \sin(kz - \omega t)$  که در آن  $E_0 \neq E_0'$ ، آنگاه بردار الکتریکی حاصل جمع در هر نقطه از فضا، می‌چرخد و بزرگی آن نیز تغییر می‌کند به طوری که انتهای بردار، مطابق شکل ۶.۲ یک بیضی را طی می‌کند. در این حالت گفته می‌شود موج به‌طور بیضی قطبیده است.

گاهی به‌کاربردن دامنه برداری مختلط  $E_0$  که با معادله زیر تعریف می‌شود راحتتر است:

$$\mathbf{E}_0 = \hat{\mathbf{i}}E_0 + i\hat{\mathbf{j}}E_0' \quad (31.2)$$

در این حالت تابع موج چنین است:



شکل ۴.۲ بردارهای الکتریکی و مغناطیسی نور قطبیده بیضی راست. (الف) بردارها در یک لحظه از زمان، (ب) در یک نقطه از فضا.

$$E = E_0 \exp i(kz - \omega t) \quad (۲۲.۲)$$

این عبارت می‌تواند نشانگر هر نوع قطبیدگی باشد، به طوری که اگر  $E_0$  حقیقی باشد، قطبش خطی داریم، در صورتی که اگر مختلط باشد قطبش بیضی خواهیم داشت، در حالت ویژه قطبش دایره‌ای قسمتهای حقیقی و موهومی  $E_0$  با هم برابرند.

### تیغه چارک موجی

نور قطبیده دایره‌ای را می‌توان با به وجود آوردن اختلاف فاز ۹۰ درجه بین دو مولفه متعامد نور قطبیده خطی ایجاد کرد. یکی از وسایلی که برای این کار از آن استفاده می‌شود تیغه چارک موجی است. این تیغه‌ها از بلورهای شفاف

که دارای خاصیت شکست دوگانه‌اند، مانند کالسیت و میکا، ساخته می‌شوند.<sup>۴</sup> نمارشکست این بلورها برای جهت‌های گوناگون قطبیدگی متفاوت است. یک بلور دوشکستی را می‌توان طوری برش داد و تیغه‌هایی از آن درست کرد که محور بیشترین نما  $n_1$  (محور کند) در صفحه تیغه بر محور کمترین نما  $n_2$  (محور تند) عمود باشد. اگر کلفتی تیغه  $d$  باشد، راه نوری برای نوری که در جهت محور کند قطبیده است  $n_1 d$  و برای نوری که در جهت محور تند قطبیده است  $n_2 d$  است. در تیغه چارک موجی  $d$  طوری اختیار می‌شود که اختلاف  $n_1 d - n_2 d$  برابر با یک چهارم طول موج باشد، به طوری که  $d$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$d = \frac{\lambda_0}{4(n_1 - n_2)} \quad (33.2)$$

که در آن  $\lambda_0$  طول موج در خلأ است.

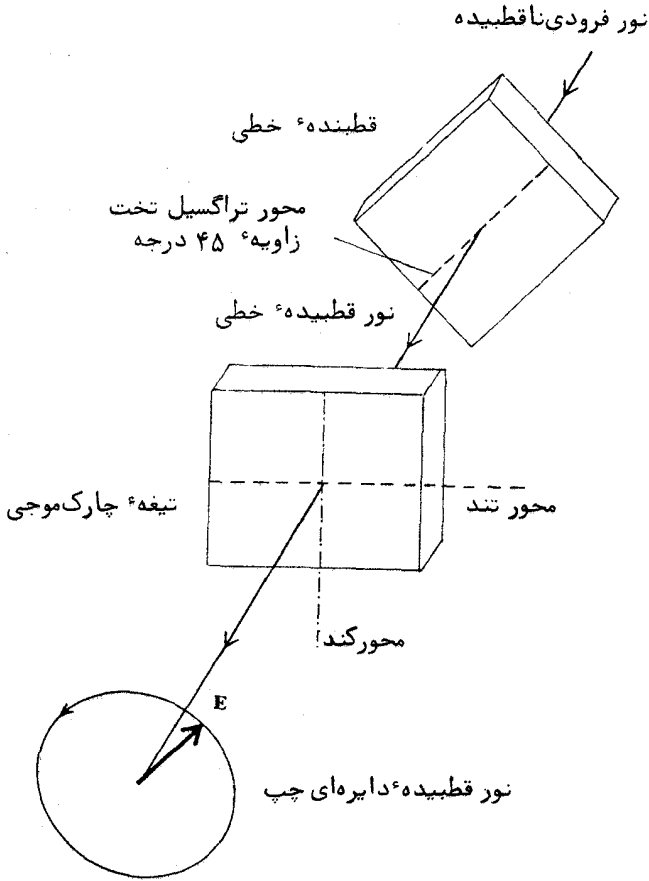
در شکل ۷.۲ آرایشی برای ایجاد نور قطبیده دایره‌ای نشان داده شده است. نور ناقطبیده فرودی به وسیله یک قطبیده خطی، مانند یک صفحه پلاروئید، قطبیده می‌شود. تیغه چارک موجی جلوی نور قطبیده خطی قرار داده شده است و جهت آن با  $\theta$  تعریف می‌شود و آن زاویه‌ای است که محور تراگیل پلاروئید با محور تند تیغه می‌سازد. اگر  $\theta$  را ۴۵ درجه اختیار کنیم، نوری که وارد تیغه چارک موجی می‌شود را می‌توان به دو مولفه متعام هم‌دامنه و هم‌فاز تجزیه کرد. این دو مولفه هنگام خارج شدن، با هم ۹۰ درجه اختلاف فاز خواهند داشت. بنابراین نور خارج شده قطبیده دایره‌ای خواهد بود.

جهت چرخش نور قطبیده دایره‌ای بستگی به اندازه  $\theta$  دارد، به طوری که با چرخاندن تیغه چارک موجی به اندازه ۹۰ درجه یا مساوی ساختن  $\theta$  با ۱۳۵ درجه جهت چرخش را می‌توان برگرداند. اگر اندازه  $\theta$  جز ۴۵ درجه و یا ۱۳۵ درجه باشد، قطبیدگی نور خروجی به‌جای دایره‌ای، بیضی خواهد بود.

## ۵.۲ نمایش ماتریسی قطبش . روش محاسبه جونز

دامنه برداری مختلط که در بخش قبل ارائه شد، معادله (۳۱.۲)، بیانی

۴- نورشناسی بلورها بتفصیل در فصل ششم بررسی خواهد شد.



شکل ۷.۳ آرایشی برای تولید نور قطبیده دایره‌ای .

کاملاً "عمومی نیست، زیرا در آنجا فرض شد که مولفه  $x$  حقیقی و مولفه  $y$  موهومی است. روش عمومی‌تر برای بیان دامنه موج تخت سازگان چنین است:

$$E_0 = \hat{i}E_{0,r} + \hat{j}E_{0,y} \quad ( ۳۴.۲ )$$

که در آن  $E_{0,r}$  و  $E_{0,y}$  هر دو ممکن است مختلط باشند، از این رو می‌توان آنها را

به صورت نمایی زیر نوشت :

$$E_{0x} = |E_{0x}| e^{i\phi_x} \quad (۳۵.۲)$$

$$E_{0y} = |E_{0y}| e^{i\phi_y} \quad (۳۶.۲)$$

این دو دامنهء مختلط را می‌توان با ماتریس زیر که به نام بردار جونز شناخته شده است نمایش داد :

$$\begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_{0x}| e^{i\phi_x} \\ |E_{0y}| e^{i\phi_y} \end{bmatrix} \quad (۳۷.۲)$$

اگر این بردار را به ریشهء دوم جمع مربعات دامنه‌ها، یعنی  $(|E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2)^{1/2}$  تقسیم کنیم شکل بهنجار بردار جونز به دست می‌آید. شکل دیگری از بردار جونز که بیشتر قابل استفاده است ولی الزاما " بهنجار نیست، با خارج کردن سازه‌های مشترک به دست می‌آید. مثلا "  $\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  نشانگر موجی است که به طور خطی در جهت محور  $x$  قطبیده است و  $\begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  نشانگر موج قطبیدهء خطی در جهت محور  $y$  است. بردار  $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  معرف یک موج قطبیدهء خطی است که با محور  $x$  زاویهء ۴۵ درجه می‌سازد. قطبش دایره‌ای چپ با  $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$  نشان داده می‌شود و  $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$  برای قطبش دایره‌ای راست به‌کار برده می‌شود. یکی از کاربردهای روش نمادگذاری جونز محاسبهء حاصل جمع دو یا چند موج با قطبیدگی معین است. این حاصل جمع بسادگی با جمع کردن بردارهای جونز به دست می‌آید. برای نمونه فرض کنید می‌خواهیم دو موج با دامنه‌های مساوی که یکی از آنها قطبیدهء دایره‌ای راست و دیگری قطبیدهء دایره‌ای چپ است را با هم جمع کنیم. با به‌کار بردن بردارهای جونز، محاسبه به صورت زیر است :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 \\ -i+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

عبارت آخر نشان می‌دهد که این حاصل جمع، موجی است که به‌طور خطی در امتداد محور  $x$  قطبیده است و دامنهء آن نیز دو برابر هر کدام از مولفه‌های دایره‌ای است. یکی دیگر از موارد کاربرد نمایش ماتریسی، محاسبهء اثر یک عنصر خطی

اپتیکی یا رشته‌ای از آنها است که وارد پرتو: نوری با قطبیدگی معین می‌شود. عناصر اپتیکی با ماتریسهای  $2 \times 2$  به نام ماتریسهای جونز نمایش داده می‌شوند. انواع وسایل نوری که با این روش می‌توان نمایش داد عبارتند از قطبنده‌های خطی، قطبنده‌های دایره‌ای، تاخیراندازهای فاز ( تیغه چارک موجی و جز اینها )، تغییر دهنده‌های همسانگردفاز و جذب‌کننده‌های همسانگرد. ماتریس چندین عنصر اپتیکی را در جدول ۱۰۲ بدون اثبات ارائه می‌دهیم (۳۹).

طرز استفاده از این ماتریسها به این شرح است. فرض کنید بردار نور ورودی به عنصر نوری را با  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$  و بردار نور خروجی را با  $\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix}$  نمایش دهیم، پس:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} \quad (38.2)$$

که در آن ماتریس جونز عنصر نوری است. اگر نور وارد یک رشته عنصرهای نوری شود، در این صورت نتیجه از حاصلضرب ماتریسی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} \quad (39.2)$$

برای مثال، فرض کنید یک تیغه چارک موجی مطابق شکل ۶۰۲ جلوی پرتوی که به‌طور خطی قطبیده است قرار داده شود. در اینجا نور ورودی تحت زاویه  $45^\circ$  درجه نسبت به جهت افقی ( محور  $x$  ) قطبیده است به‌طوری‌که بردار آن، بدون در نظر گرفتن سازه دامنه،  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  است. از جدول نتیجه می‌شود که ماتریس جونز تیغه چارک موجی وقتی محور تند افقی است  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$  است. پس بردار پرتو خروجی چنین است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

بنابراین نور خروجی قطبیده دایره‌ای چپ است.

باید توجه داشت که روش جونز را تنها برای نوری که در آغاز به‌صورتی قطبیده است می‌توان به‌کاربرد. برای نور ناقطبیده، نمایش برداری جونز وجود ندارد.



جدول ۱.۲ ماتریسهای جونز برای چندین عنصر نوری

ماتریس جونز	عنصر نوری
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	محور تراگیسیل افقی
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	محور تراگیسیل قائم
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{bmatrix}$	محور تراگیسیل در $\pm 45^\circ$ درجه
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$	محور تند قائم
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$	محور تند افقی
$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & 1 \end{bmatrix}$	محور تند در $\pm 45^\circ$ درجه
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	محور تند افقی یا قائم
$\begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix}$	تاخیر اندازه <sup>۱</sup> همسانگرد فاز
$\begin{bmatrix} e^{i\phi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} \end{bmatrix}$	تغییر دهنده <sup>۲</sup> نسبی فاز
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$	راست
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$	چپ

قطبنده<sup>۳</sup> خطی

تیغه<sup>۴</sup> چارک موجی

تیغه<sup>۵</sup> نیم موجی :

قطبنده<sup>۶</sup> دایره‌ای

توجه: سازه‌های بهنجارش در جدول منظور شده‌اند. این سازه‌ها تنها برای ملاحظات مربوط به انرژی لازمند، و در محاسبات مربوط به نوع قطبیدگی می‌توان آنها را از قلم انداخت. همچنین اگر به جای تابع موج  $\exp i(kz - \omega t)$  تابع  $\exp i(\omega t - kz)$  به‌کار برده شود باید علامت کلیه اجزای ماتریسی که حاوی سازه<sup>۶</sup>  $i$  هستند را تغییر داد.

## قطبیدگی متعامد.

دوموج که حالت‌های قطبیدگی آنها بترتیب با دامنه‌های برداری، مختلط  $E_1$  و  $E_2$  نمایش داده می‌شوند را در نظر می‌گیریم. اگر داشته باشیم:

$$E_1 \cdot E_2^* = 0$$

می‌گویند این دوموج به‌طور متعامد قطبیده‌اند. در این رابطه، ستاره معرف مزدوج مختلط است.

برای نور قطبیده خطی، معنی متعامد بودن صرفاً این است که میدانها بر یکدیگر عمودند. برای قطبش دایره‌ای بسادگی دیده می‌شود که قطبیدگیهای دایره‌ای راست و چپ برهم عمودند. در برابر هر نوع قطبیدگی، یک قطبیدگی متعامد با آن وجود دارد.

بسادگی می‌توان آزمود که بردارهای جونز  $\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$  در صورتی متعامدند که:

$$A_1 A_2^* + B_1 B_2^* = 0 \quad (40.2)$$

بدین ترتیب، برای مثال،  $\begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$  جفت بخصوصی از حالت‌های قطبیدگی بیضی متعامد را نمایش می‌دهند. این حالتها در شکل ۸۰۲ نشان داده شده‌اند. توجه به این موضوع آموزنده است که همیشه می‌توان هر نوری با قطبیدگی دلخواه را به دومولفه متعامد تجزیه کرد. مثلاً "تجزیه به مولفه‌های خطی چپین نوشته می‌شود:

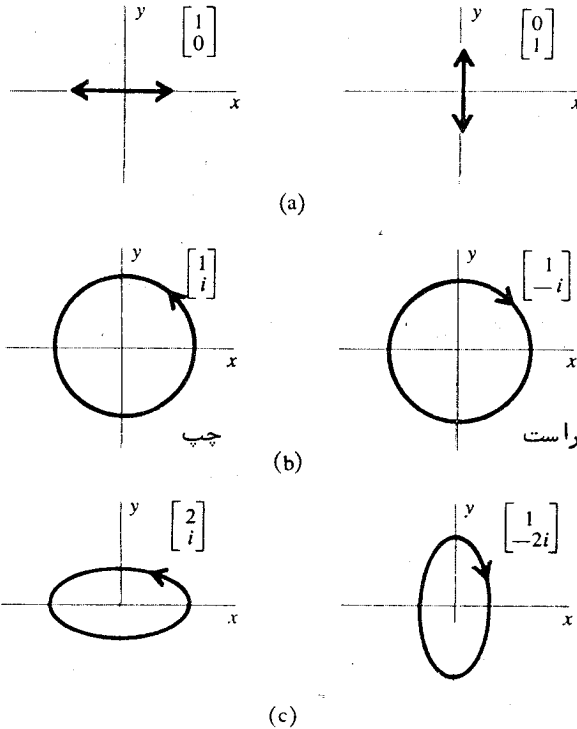
$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

و تجزیه به مولفه‌های دایره‌ای به این‌گونه

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (A + iB) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} (A - iB) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

## ویژه بردارهای ماتریسهای جونز

ویژه بردار هر ماتریس، برداری است ویژه که اگر ماتریس یادشده در آن ضرب



شکل ۸.۲ نمودارهای چند بردار جونز.

شود همان بردار با ضریبی ثابت نتیجه شود. در روش جونز این مطالب به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

ثابت  $\lambda$ ، که ممکن است حقیقی یا مختلط باشد، ویژه مقدار نامیده می شود. از دیدگاه فیزیکی، ویژه بردار یک ماتریس جونز نشانگر قطبیدگی بخصوصی از یک موج است که با عبور از عنصر نوری مورد نظر با همان قطبیدگی ورودی خارج شود. ولی دامنه و فاز آن بستگی به  $\lambda$  دارد و ممکن است تغییر کند. اگر بنویسیم

$\lambda = |\lambda|e^{i\psi}$  در این صورت  $|\lambda|$  تغییر دامنه و  $\psi$  تغییر فاز آن خواهد بود .

پیدا کردن ویژه مقادارها و ویژه بردارهای متناظر مربوط به یک ماتریس  $2 \times 2$

بسیار ساده است . معادله ماتریسی بالا را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0 \quad (41.2)$$

برای اینکه جواب غیر بدیهی ، یعنی جوابی که در آن  $A$  و  $B$  هر دو صفر نباشند ، وجود داشته باشد ، باید دترمینان ماتریس صفر شود :

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (42.2)$$

این یک معادله درجه دوم از  $\lambda$  است و معادله ویژه نامیده می شود . با بسط دترمینان خواهیم داشت :

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

که ریشه های آن  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  همان ویژه مقادارها هستند . برای هر ویژه مقدار یک ویژه بردار متناظر با آن وجود دارد . برای پیدا کردن این ویژه بردارها معادله ماتریسی (۴۱.۲) را به صورت دو معادله جبری زیر می نویسیم :

$$(a - \lambda)A + bB = 0 \quad cA + (d - \lambda)B = 0 \quad (43.2)$$

نسبت  $A$  به  $B$  مربوط به یک ویژه مقدار معین  $\lambda$  با قرار دادن آن ویژه مقدار در یکی از دو معادله بالا به دست می آید .

مثلاً ، در جدول ماتریسهای جونز ، دیده می شود که ماتریس جونز برای یک

تیغه چارک موجی که محور تند آن افقی است ،  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$  است و بنابراین معادله ویژه آن به شکل زیر است :

$$(1 - \lambda)(i - \lambda) = 0$$

که ویژه مقادارهای  $\lambda = 1$  و  $\lambda = i$  را به دست می دهد . بنابراین معادلات (۴۳.۲) ، به صورت  $(1 - \lambda)A = 0$  و  $(i - \lambda)B = 0$  درمی آیند . بدین ترتیب برای  $\lambda = 1$  باید  $A = 0$  و  $B = 0$  و برای  $\lambda = i$  باید  $A = 0$  و  $B \neq 0$  باشد . پس ویژه بردارهای

بهنجار برای  $\lambda = 1$ ،  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  و برای  $\lambda = i$ ،  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  می‌باشند. نتیجه‌ء بالا از نظر فیزیکی این است که نوری که به‌طور خطی در جهت یکی از محورهای تند یا کند قطبیده است، بدون تغییر قطبیدگی عبور می‌کند. در هر دو حالت، چون  $|\lambda| = 1$  است، دامنه تغییر نمی‌کند، ولی چون  $\lambda_2/\lambda_1 = i = e^{i\pi/2}$  است، تغییری به‌اندازه ۹۰ درجه در فاز نسبی رخ می‌دهد.

## ۶.۲ بازتاب و شکست در یک صفحهٔ مرزی

اکنون پدیده‌های بنیادی بازتاب و شکست نور را از دیدگاه نظریهٔ الکترومغناطیسی بررسی می‌کنیم. فرض این است که خواننده با قوانین اولیهٔ بازتاب و شکست آشنائی دارد و می‌داند چگونه به کمک اصل هوگنس به‌دست می‌آیند. این قوانین را چنانکه خواهیم دید می‌توان با به‌کار بردن شرایط مرزی برای امواج الکترومغناطیسی نیز به‌دست آورد.

یک موج تخت سازگان را در نظر بگیرید که بر یک صفحهٔ مرزی، که دو محیط متفاوت را از یکدیگر جدا می‌کند، فرود می‌آید ( شکل ۹.۲ ). یک موج بازتاب و یک موج تراگیسل وجود خواهد داشت. گذشته از سازه‌های ثابت دامنه‌ای، وابستگی فضا - زمانی این سه موج با عبارتهای مختلط زیر مشخص می‌شوند:

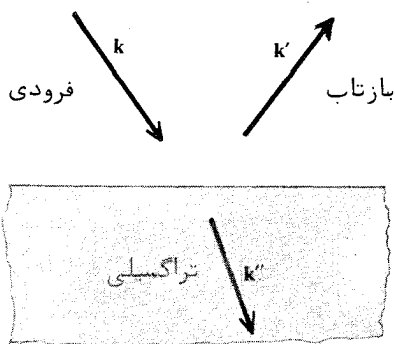
$$\text{موج فرودی} \quad \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

$$\text{موج بازتاب} \quad \exp i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

$$\text{موج تراگیسل ( شکست )} \quad \exp i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

برای اینکه رابطهٔ ثابتی برای تمام نقاط مرزی و برای کلیهٔ مقادیر  $t$  وجود داشته باشد، باید شناسه‌های سه‌تایی در مرز با هم برابر باشند. بدین‌سان چون سازه‌های زمانی از پیش با هم برابرند، داریم:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} \quad ( \text{در مرز} ) \quad ( ۴۴.۲ )$$



شکل ۹.۲ بردارهای موج نور فرودی بر صفحه مرزی جداکننده دو محیط نوری متفاوت.

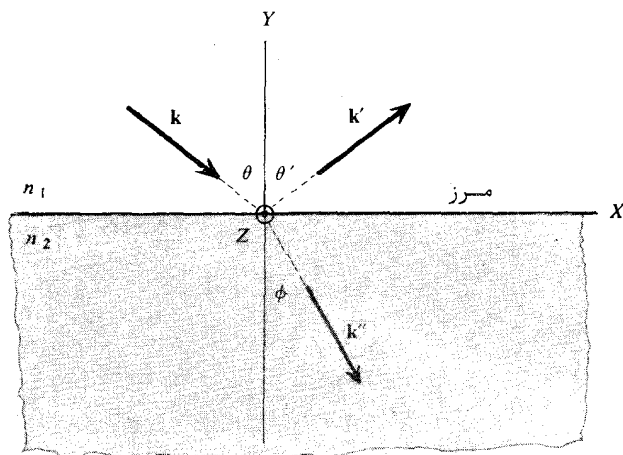
مفهوم ضمنی این معادلات این است که هر سه بردار  $k$ ،  $k'$  و  $k''$  در یک صفحه‌اند و تصاویر آنها روی صفحه مرزی با هم برابرند. برای استدلال، می‌توان محورهای مختصات را مطابق شکل ۱۰.۲ طوری اختیار کرد که یکی از صفحات مختصات، مثلاً "xz" ، صفحه مرزی بوده و بردار  $k$  در صفحه  $xy$  که صفحه فرودی نامیده می‌شود باشد. زوایای بین خط عمود بر صفحه مرزی (محور  $y$ ) و بردارهای موج را  $\theta$ ،  $\theta'$  و  $\phi$  نشان می‌دهیم، معادلات (۴۴.۲) چنین می‌شوند:

$$k \sin \theta = k' \sin \theta' = k'' \sin \phi \quad ( ۴۵.۲ )$$

در فضای امواج فرودی و بازتاب ( $y > 0$ )، دو موج در یک محیط حرکت می‌کند. از این رو بزرگی بردارهای موج آنها یکی است، یعنی  $k = k'$ . بنابراین معادله نخست به قانون شناخته شده بازتاب ساده می‌شود:

$$\theta = \theta' \quad ( ۴۶.۲ )$$

نسبت ثابتهای انتشار امواج تراگسیلی و فرودی به یکدیگر چنین است:



شکل ۱۰.۲ دستگاه مختصات برای بررسی بازتاب و شکست در یک صفحه مرزی.

$$\frac{k''}{k} = \frac{\omega/u''}{\omega/u} = \frac{c/u''}{c/u} = \frac{n_2}{n_1} = n \quad (۴۷.۲)$$

که در آن  $n_1$  و  $n_2$  نماشکست دو محیط، و  $n$  نماشکست نسبی است. بنابراین قسمت دوم معادله (۴۵.۲) همان قانون شکست اشنل است:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \phi} = n \quad (۴۸.۲)$$

## ۷.۲ دامنه امواج بازتاب و شکست

دامنه بردار الکتریکی موج تخت سازگانی که بر صفحه مرزی دومی محیط می‌تابد را با  $E$ ، و دامنه‌های امواج بازتاب و تراگسیل را به ترتیب با  $E'$  و  $E''$  نشان می‌دهیم. در این صورت، از نتیجه به‌کاربردن معادلات تاو ماکسول برای امواج سازگان، یعنی از معادله (۱۱.۲)، برای دامنه‌های بردارهای مغناطیسی وابسته خواهیم داشت:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (۴۹.۲) \quad (\text{فرودی})$$

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{\mu\omega} \mathbf{k}' \times \mathbf{E}' \quad (۵۰.۲) \quad (\text{بازتاب})$$

$$\mathbf{H}'' = \frac{1}{\mu\omega} \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}'' \quad (۵۱.۲) \quad (\text{تراگیل})$$

باید توجه داشت که معادلات بالا هم برای مقادیر لحظه‌ای میدانها به کار می‌روند. هم برای دامنه‌ها، زیرا سازه‌های نمائی  $\exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$  و غیره در میدانهای الکتریکی و میدانهای مغناطیسی وابسته مشترکند.

در این مرحله بهتر است دو حالت گوناگون را در نظر بگیریم. در حالت اول

بردار الکتریکی موج فرودی به موازات صفحه مرزی، یعنی عمود بر صفحه تابش است. این حالت را الکتریکی عرضی *transverse electric* یا قطبیدگی *TE* می‌نامند. در حالت دوم بردار مغناطیسی موج تابش موازی صفحه مرزی است. این حالت را مغناطیسی عرضی *transverse magnetic* یا قطبیدگی *TM* می‌نامند. حالت عمومی با به کار بردن ترکیب خطی این دو حالت به دست می‌آید. جهت بردارهای الکتریکی و مغناطیسی دو حالت یادشده در شکل ۱۱.۲ نشان داده شده است. همان‌گونه که در شکل دیده می‌شود صفحه مرزی، صفحه  $xz$  اختیار شده است، به طوری که محور  $y$  عمود بر صفحه مرزی است. صفحه  $xy$ ، صفحه تابش است.

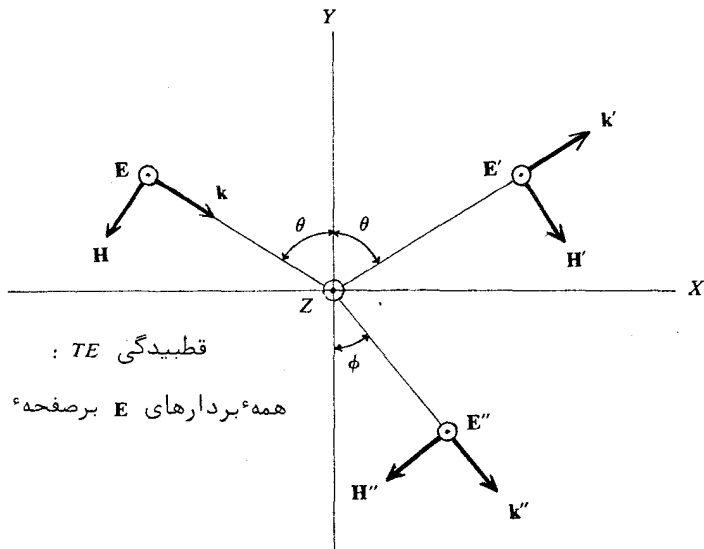
اکنون شرایط مرزی معروفی را به کار می‌بریم (۱۶) که طبق آن می‌بایست مولفه‌های مماسی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی هنگام عبور از صفحه مرزی پیوسته باشند. معنی آن این است که برای قطبیدگی *TE*،  $E + E' = E''$  و برای قطبیدگی *TM*،  $H - H' = H''$ . نتیجه آن به صورت زیر است:

(قطبیدگی *TE*)

$$E + E' = E''$$

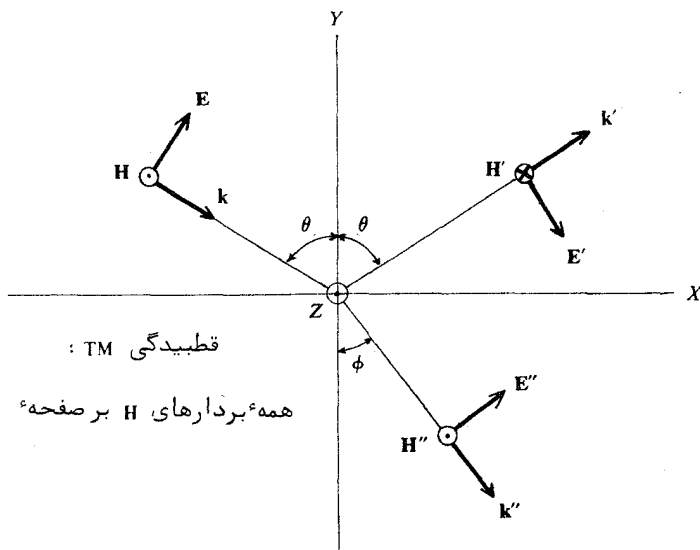
$$\begin{aligned} -H \cos \theta + H' \cos \theta &= -H'' \cos \phi & (۵۲.۲) \\ -kE \cos \theta + k'E' \cos \theta &= -k''E'' \cos \phi \end{aligned}$$





قطبیدگی TE :

همه بردارهای E بر صفحه  $xy$  عمودند.



قطبیدگی TM :

همه بردارهای H بر صفحه  $xy$  عمودند.

شکل ۱۱.۲ بردارهای موج و میدانهای وابسته به آنها برای

قطبیدگی TE (الف) و قطبیدگی TM (ب)

( قطبیدگی  $TM$  )

$$\begin{aligned} H - H' &= H'' \\ kE - k'E' &= k''E'' \end{aligned} \quad ( ۵۳.۲ )$$

$$E \cos \theta + E' \cos \theta = E'' \cos \phi$$

در اینجا از این خاصیت استفاده شده است که هر یک از دامنه‌های میدان مغناطیسی  $H''$ ،  $H'$ ،  $H$  طبق معادلات (۴۹.۲) تا (۵۱.۲) بترتیب با  $kE$ ،  $k'E'$ ،  $k''E''$  متناسبند.

ضرایب بازتاب  $r_s$  و  $r_p$ ، و ضرایب تراگسیل  $t_s$  و  $t_p$  بنا بر تعریف از نسبت دامنه‌ها، به روش زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} r_s &= \left[ \frac{E'}{E} \right]_{TE} & r_p &= \left[ \frac{E'}{E} \right]_{TM} \\ t_s &= \left[ \frac{E''}{E} \right]_{TE} & t_p &= \left[ \frac{E''}{E} \right]_{TM} \end{aligned}$$

حال در معادلات (۵۲.۲) و (۵۳.۲)،  $E''$  را حذف می‌کنیم و با به‌کاربردن رابطه  $n = c/u = ck/\omega$  روابط زیر را برای نسبت‌های دامنه‌های بازتاب به دامنه‌های فرودی به دست می‌آوریم:

$$r_s = \frac{\cos \theta - n \cos \phi}{\cos \theta + n \cos \phi} \quad ( ۵۴.۲ )$$

$$r_p = \frac{-n \cos \theta + \cos \phi}{n \cos \theta + \cos \phi} \quad ( ۵۵.۲ )$$

در اینجا:

$$n = \frac{n_2}{n_1}$$

نمارشکست نسبی دوماحیط است. دامنه‌های تراگسیل را می‌توان با حذف کردن  $E'$  در دو حالت یادشده به دست آورد.

برای تابش عمودی،  $\theta$  و  $\phi$  هر دو صفرند، و عبارتهای  $r_s$  و  $r_p$  هر دو به  $(1-n)/(1+n)$  ساده می‌شوند. علامت این کمیت بستگی دارد به این که  $n$  بزرگتر یا کوچکتر از یک باشد و بترتیب منفی یا مثبت است. مفهوم منفی بودن  $E'/E$  این

است که فاز موج بازتاب نسبت به موج فرودی ۱۸۰ درجه تغییر کرده است. بدین سان چنین تغییر فازی وقتی رخ می دهد که نور از محیط رقیق بر محیط غلیظ فرود می آید و هنگام عبور بازتاب جزئی پیدا می کند.

در اینجا باید یادآور شد که بعضی از مولفان جهت مثبت بردارهای  $\mathbf{E}'$  و  $\mathbf{H}'$  موج بازتاب را در حالت  $TM$  برخلاف آنچه که در شکل ۱۱.۲ (ب) آمده است انتخاب می کنند. این روش وضع نامطلوبی به وجود می آورد، که در آن بردارهای  $TE$  و  $TM$  برای تابش عمودی باید تعریف متفاوتی داشته باشند، در حالی که از لحاظ فیزیکی در عمل اختلافی بین این دو حالت وجود ندارد.

### معادلات فرنل

با به کار بردن قانون اشنل،  $n = \sin \theta / \sin \phi$  معادلات مربوط به دامنه های امواج بازتاب و شکست را می توان به صورت زیر نوشت:

$$r_s = -\frac{\sin(\theta - \phi)}{\sin(\theta + \phi)}$$

$$t_s = \frac{2 \cos \theta \sin \phi}{\sin(\theta + \phi)} \quad (56.2)$$

$$r_p = -\frac{\tan(\theta - \phi)}{\tan(\theta + \phi)} \quad (57.2)$$

$$t_p = \frac{2 \cos \theta \sin \phi}{\sin(\theta + \phi) \cos(\theta - \phi)}$$

معادلات بالا به نام معادلات فرنل شناخته شده اند. اثبات آنها به عنوان یک مسئله رها می شود.

راه سومی برای بیان نسبت های دامنه های نور بازتاب این است که متغیر  $\phi$  در معادلات (54.2) و (55.2) به کمک قانون اشنل حذف شود. نتیجه چنین می شود:

$$r_s = \frac{\cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \quad (58.2)$$

$$r_p = \frac{-n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \quad (59.2)$$

توان بازتاب بنا بر تعریف، کسری از انرژی نور فرودی است که بازتاب پیدا می‌کند و برای حالت‌های  $TE$  و  $TM$  بترتیب با حروف  $R_s$  و  $R_p$  نمایش داده می‌شود. چون انرژی متناسب با مربع قدر مطلق دامنه موج است، خواهیم داشت:

$$R_s = |r_s|^2 = \left| \frac{E'}{E} \right|_{TE}^2 \quad (۶۰.۲)$$

$$R_p = |r_p|^2 = \left| \frac{E'}{E} \right|_{TM}^2$$

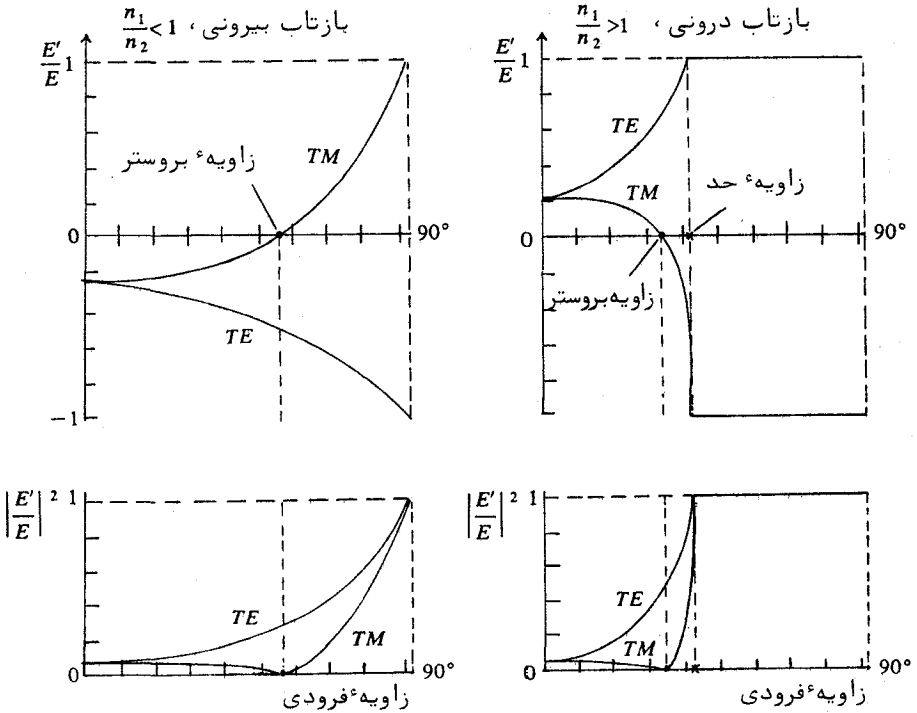
شکل ۱۲.۲ تغییرات  $E'/E$  و  $|E'/E|^2$  را با زاویه فرودی برای دو مورد که با استفاده از نظریه بخش پیش محاسبه شده است نشان می‌دهد. برای نوری که به‌طور عمودی فرودمی‌آید،  $(\theta = 0)$ ، دیده می‌شود که  $R_s$  و  $R_p$  باهم مساوی می‌شوند، یعنی:

$$R_s = R_p = \left[ \frac{n-1}{n+1} \right]^2 \quad (۶۱.۲)$$

از این رو توان بازتاب شیشه‌ای با نمارشکست ۱٫۵ که در هوا قرار دارد، برای نور فرودی عمودی برابر با  $r = 0.۰۴$  است.  $\left( \frac{0.۰۴}{1.5} \right)^2$  در یک دستگاه نوری، مانند دوربین عکاسی، که ممکن است حاوی چندین عدسی باشد، این ۴ درصد اتلاف که در اثر بازتاب در هر سطح جداگر پدید می‌آید می‌تواند کاهش قابل ملاحظه‌ای در دستگاه به‌وجود بیاورد. برای کاستن از مقدار این اتلاف، سطح عدسیها و عناصر نوری دیگر را با لایه‌های نابازتابنده می‌پوشانند، شرح این موضوع در فصل ۴ ارائه خواهد شد. همچنین برای نور فرودی خراشان ( $\theta \sim 90$  درجه)، توان بازتاب در هر دو نوع قطبیدگی برابر و مساوی یک است و به  $n$  بستگی ندارد. سطح صاف هر ماده برای نور فرودی کاملاً "مایل بازتابنده" خوبی است.

### بازتاب بیرونی و درونی

برای اینکه درباره بازتاب نور با مقادیر میانه  $\theta$  بحث کنیم، باید دو حالت ممکن را از یکدیگر تمیز دهیم. در حالت اول نمارشکست نسبی  $n_2/n_1 = n$  بزرگتر از یک است. این بازتاب بیرونی نامیده می‌شود. در حالت دوم، از یک کمتر است.



شکل ۱۲.۲ نمودار  $E'/E$  و  $|E'/E|^2$  برحسب زاویه فرودی برای (الف) بازتاب خارجی و (ب) بازتاب داخلی، (منحنیهای تقریبی برای شیشه با نمارشکست ۱٫۵).

این بازتاب را درونی می‌خوانند. در بازتاب بیرونی، موج فرودی از طرفی که نمارشکست آن کمتر است به صفحه مرزی نزدیک می‌شود، در حالی که در بازتاب درونی موج فرودی در محیطی است که نمارشکست آن بیشتر است.

در حالت بازتاب بیرونی،  $n > 1$ ، نسبت دامنه‌ها برای تمام مقادیر  $\theta$ ، طبق معادلات (۵۴.۲) تا (۵۹.۲)، حقیقی‌اند، بنابراین محاسبه توان بازتاب  $R$  کاملاً ساده است، ولی برای بازتاب درونی چون  $n < 1$  است، مقادیری از  $\theta$  وجود دارند که برای آنها  $\sin \theta > n$  یا  $\theta > \sin^{-1} n$  است. زاویه  $\sin^{-1} n$  را زاویه حد می‌نامند. بدین سان برای شیشه معمولی که نمارشکست آن نسبت به هوا ۱٫۵ است، زاویه حد چنین است:

$$\theta_{\text{critical}} = \sin^{-1} \frac{1}{1.5} \approx 41 \text{ درجه}$$

### بازتاب کلی درونی

هرگاه زاویه فرودی در یک بازتاب درونی از زاویه حد بیشتر شود، نسبت  $E'/E$  مختلط می‌شود. این مورد با مراجعه به معادلات ( ۵۸.۲ ) و ( ۵۹.۲ ) و توجه به اینکه برای  $\theta > \sin^{-1} n$  کمیت زیر رادیکال منفی است، روشن می‌شود. ضرایب بازتاب را برای این گستره از مقادیر  $\theta$ ، می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$r_s = \frac{\cos \theta - i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\cos \theta + i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}} \quad ( ۶۲.۲ )$$

$$r_p = \frac{-n^2 \cos \theta + i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{n^2 \cos \theta + i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}} \quad ( ۶۳.۲ )$$

با ضرب کردن هر یک از آنها در مزدوج خودش، بسادگی می‌توان آزمود که مربع قدر مطلق هر یک از نسبت‌های بالا برابر با یک است، مفهوم آن این است که  $R=1$ ؛ یعنی هرگاه زاویه فرودی درونی برابر یا بزرگتر از زاویه حد باشد، بازتاب کلی خواهیم داشت.

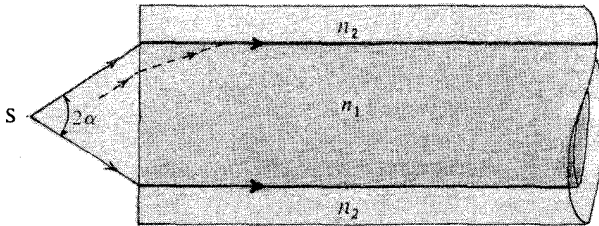
### نورشناخت تاری و موجبرهای نوری

یکی از کاربردهای متعدد عملی بازتاب کلی درونی، گذراندن نور از تارهای کوچک پیوسته ( نوربرها ) است. دسته‌ای از این تارها می‌توانند تصاویری را از خود عبور دهند. این تارها را می‌توان آن قدر نرم ساخت که تا حد معینی خمش را تحمل کنند. تاری که از استوانه دی‌الکتریک جامدی تشکیل شده است و درون محیطی با نمارشکست کمتر از خود قرار دارد را در نظر می‌گیریم. اگر نور در جهت کلی محور تار به آن نزدیک شود و زاویه فرودی روی دیواره تار مساوی یا بزرگتر از زاویه حد باشد، نور در تار محبوس خواهد شد. بنابراین تعریف، زاویه پذیرش برابر حداکثر

نیم زاویه راسی مخروط پرتوهایی است که پس از ورود از یک انتهای تار، در آن محبوس می‌شوند (شکل ۱۳.۲) بسادگی می‌توان نشان داد که این زاویه برابر است با:

$$\alpha = \sin^{-1} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

که در آن  $n_1$  و  $n_2$  بترتیب نمار شکست تار و ماده اطراف آن است ( به مسئله ۲۱.۲ نگاه کنید). نور تکفام از درون تارهای بسیار نازک یکنواخت که قطر آنها حدود چند میکرون است، با گرتۀ موج الکترومغناطیسی مشخص، یا با مد مشخص حرکت می‌کند. در این حالت ما موجبرهای نوری داریم. در این موجبرها اتلاف نور را می‌توان خیلی کم کرد. این وسیله در مخابرات اپتیکی ( با نور لیزر )، داده - پردازی و کاربردهای دیگر حائز اهمیت است.



شکل ۱۳.۲ ضریب هندسی زاویه پذیرش یک موجبر نوری. ( چشمه S در هوا  $n_0 = 1$ ، فرض شده است ).

### ۸.۲ زاویه بروستر

از معادله ( ۵۹.۲ )، که نسبت دامنه بازتاب در حالت  $TM$  را به دست می‌دهد، دیده می‌شود که برای زاویه فرودی خاص  $\theta$ ، که برای آن

$$\theta = \tan^{-1} n \quad ( ۶۴.۲ )$$

ضریب بازتاب صفر است. این زاویه را زاویه قطبش یا زاویه بروستر می‌نامند، مثلاً " برای شیشه با نمارشکست ۱٫۵ در بازتاب بیرونی از هوا به شیشه داریم:

$$\theta_{\text{Brewster}} = \tan^{-1} ۱٫۵ \approx ۵۷ \text{ درجه}$$

و برای بازتاب درونی از شیشه به هوا:

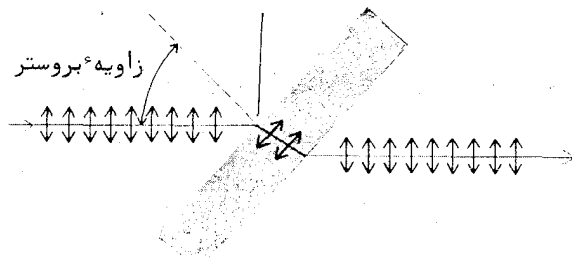
$$\theta_{\text{Brewster}} = \tan^{-1} \left( \frac{1}{1.5} \right) \approx 33 \text{ درجه}$$

در واقع، به علت وجود پاشندگی، زاویه بروستر تابعی از طول موج است. با این حال این تغییرات در قسمت دیدگانی بیناب خیلی کم است.

اگر نور ناقطبیده تحت زاویه بروستر بر سطحی فرود آید، نور بازتابی به طور خطی قطبیده و بردار الکتریکی آن عمود بر صفحه فرودی خواهد بود. نور تراگسیلی به طور جزئی قطبیده است. درست است که پرتو بازتابی کاملاً "قطبیده" است، ولی تنها بخش کوچکی از نور بازتاب می شود. مثلاً "برای شیشه‌ای با نمار شکست ۱.۵ که در هوا قرار دارد، حدود ۱۵ درصد مولفه  $TE$  بازتاب می شود. بنابراین تولید نور قطبیده با روش بازتاب تحت زاویه بروستر زیاد موثر نیست.

#### دریچه بروستر

فرض کنید پرتو نوری که در مد  $TM$  به طور خطی قطبیده است مطابق شکل ۱۴.۲، تحت زاویه بروستر روی یک تیغه متوازی‌السطوح شیشه‌ای فرود آید. در این صورت، نور از رخ اول بازتاب نمی شود، بازتاب داخلی از رخ دوم هم وجود ندارد (اثبات این گفته به عنوان مسئله داده می شود). در نتیجه تمام نور خارج می شود و به زبان دیگر دریچه کاملاً "شفاف" است. چنین دستگاههایی که به دریچه بروستر معروفند، در کاربردهای لیزری زیاد مورد استفاده قرار می گیرند.



شکل ۱۴.۲ دریچه بروستر. اگر نور مطابق شکل قطبیده باشد، بازتاب نخواهیم داشت.



## قطبنده یا انبوده تیغه‌ها

اگر نور ناقطبنده از یک دریچه بروسر عبور داده شود، نور خارج شده قطبیده‌حزئی است که درجه قطبیدگی آن کم است، با این حال می‌توان با به‌کاربردن چندین تیغه که برهم انبوده می‌شوند درجه قطبیدگی را افزایش داد. این وسیله، که به نام قطبنده یا انبوده تیغه‌ها نامیده می‌شود، بویژه برای ناحیه فروقرمزیناب مفید است.

## ۹.۲ موج ناپایا در بازتاب کلی

وقتی زاویه فرودی از زاویه حد بیشتر باشد، انرژی فرودی بازتاب کلی پیدا می‌کند، با این حال در آن سوی صفحه مرزی یک میدان موج الکترومغناطیسی وجود دارد. این میدان موج به موج ناپاینده موسوم است. با در نظر گرفتن تابع موج بردار الکتریکی موج تراگیلی، به وجود موج ناپایا پی می‌بریم:

$$\mathbf{E}_{\text{trans}} = \mathbf{E}'' e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

اگر محورهای مختصات را مطابق شکل ۱۵.۲ اختیار کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} &= k'' x \sin \phi - k'' y \cos \phi \\ &= k'' x \sin \phi - ik'' y \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n^2} - 1} \end{aligned} \quad (65.2)$$

که در گام آخر از قانون اشنل به صورت زیر استفاده کرده‌ایم:

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{n^2}} = i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n^2} - 1} \quad (66.2)$$

معادله بالا نشان می‌دهد که در بازتاب کلی درونی  $\cos \phi$  موهومی است، پس تابع موج بردار الکتریکی موج تراگیلی چنین قابل بیان است.

$$\mathbf{E}_{\text{trans}} = \mathbf{E}'' e^{-\alpha |y|} e^{i(k_1 x - \omega t)} \quad (67.2)$$

که در آن:

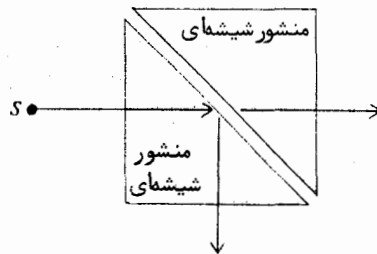
$$\alpha = k'' \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n^2} - 1}$$

۳

$$k_1 = \frac{k'' \sin \theta}{n}$$

در معادله ( ۶۷.۲ ) عامل  $e^{-\alpha|z|}$  نشان می‌دهد که هرچه از صفحه مرزی در ناحیه رقیقتر دور می‌شویم، دامنه موج ناپایا سرعت افت پیدا می‌کند. سازه‌نمایی مختلط  $e^{i(k_1 x - \omega t)}$  نشان می‌دهد که موج ناپایا را می‌توان برحسب صفحات همفازی که به موازات صفحه مرزی و با سرعت  $\omega/k_1$  پیش می‌روند توصیف کرد. بسادگی می‌توان نشان داد که این سرعت از سرعت فاز امواج تخت معمولی در محیط چگالتر، به نسبت  $1/\sin \theta$  برابر بیشتر است.

اینکه در واقع موج به داخل محیط رقیقتر نفوذ می‌کند را می‌توان با چندین روش به‌طور تجربی نشان داد. یکی از این روشها در شکل ۱۵.۲ نشان داده شده است. در این شکل رخهای بزرگ دومنشور ۴۵-۹۰-۴۵ درجه‌ای بدون اینکه باهم تماس داشته باشند روبه‌روی یکدیگر قرار داده شده‌اند. جزئی از نور چشمه S

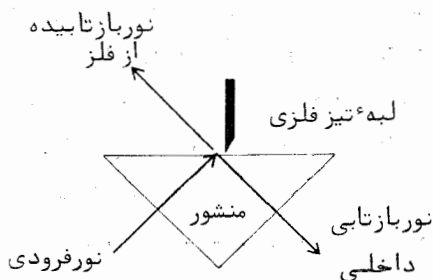


شکل ۱۵.۲ روشی برای نشان دادن نفوذ نور در محیط رقیق.

از دستگاه خارج می‌شود و مقدار آن به فاصله رخها از یکدیگر بستگی دارد. این روش را می‌توان در ساختن وسایلی چون جفتگرهای یا برون‌داد متغیر برای لیزر به‌کاربرد. در تجربه‌های دیگر، اولین بار رامان نشان داد که اگر لبه تیز یک قطعه فلزی به رخ منشور که بازتاب کلی انجام می‌دهد نزدیک شود، نور از منشور خارج و از لبه فلزی

بازتاب می‌شود ( شکل ۱۶۰۲ ).

اگر در محیط رقیقتر چیزی که موجب پیریشندگی شود وجود نداشته باشد، موج ناپاینده باید به محیط چگالتر بازگردد، زیرا بازتاب کلی انرژی نورانی یک واقعیت است. وقتی نور فرودی پرتوی بسیار باریک باشد، پرتوی که در عمل باز می‌تابد، نسبت به پرتو بازتابی که روش نورشناخت هندسی پیش‌بینی می‌کند، مقدار کمی جابجایی دارد<sup>۵</sup>.



شکل ۱۶۰۲ نمایش رامان مربوط به نفوذ نور در محیط رقیق.

### ۱۵۰۲ تغییرات فاز در بازتاب کلی درونی

از مقادیر مختلط ضرایب بازتاب در بازتاب کلی، معادلات (۶۲۰۲) و (۶۳۰۲)، تغییر فازی که به زاویه فرودی بستگی دارد استنباط می‌شود. اکنون به محاسبه این تغییر فاز می‌پردازیم.

چون قدر مطلق  $r_s$  و  $r_p$  هردو یک است، می‌توانیم بنویسیم:

$$r_s = e^{-i\delta_s} = \frac{ae^{-i\alpha}}{ae+i\alpha} \quad ( ۶۸۰۲ )$$

۵- این اثر به وسیله گوس Goos و هانش Haenchen در ۱۹۴۷ بررسی شد و به جابجایی گوس - هانش معروف است.

$$r_p = -e^{-i\delta_p} = -\frac{be^{-i\beta}}{be^{+i\beta}} \quad (۶۹.۲)$$

که در آنها  $\delta_s$  و  $\delta_p$  بترتیب تغییر فاز برای حالت‌های  $TE$  و  $TM$  هستند. اعداد مختلط  $ae^{-i\alpha}$  و  $-be^{-i\beta}$  مساوی صورت کسرها در معادلات (۶۲.۲) و (۶۳.۲) هستند. مزدوجهای مختلط آنها در مخرج کسرها ظاهر می‌شوند. بنابراین:

$$ae^{i\alpha} = \cos \theta + i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}$$

$$be^{i\beta} = n^2 \cos \theta + i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}$$

از معادله (۶۸.۲)، داریم  $\delta_s = 2\alpha$ ، بنابراین  $\tan \alpha = \tan(\delta_s/2)$ ، همین‌طور، از معادله (۶۹.۲) نتیجه می‌شود  $\tan \beta = \tan(\delta_p/2)$ . در این صورت برای تغییرات فازی که در بازتاب داخلی رخ می‌دهد، عبارتهای زیر را نتیجه می‌گیریم:

$$\tan \frac{\delta_s}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\cos \theta} \quad (۷۰.۲)$$

$$\tan \frac{\delta_p}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{n^2 \cos \theta} \quad (۷۱.۲)$$

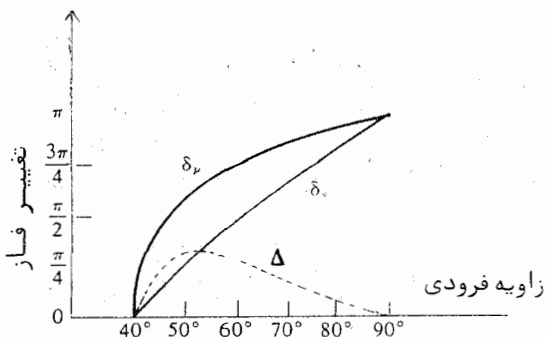
از این معادله‌ها اختلاف فاز نسبی را می‌توانیم بدست آوریم:

$$\Delta = \delta_p - \delta_s$$

به کمک اتحادهای مثلثاتی مناسب، دیده می‌شود که اختلاف فاز نسبی را می‌توان چنین بیان کرد:

$$\tan \frac{\Delta}{2} = \frac{\cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\sin^2 \theta} \quad (۷۲.۲)$$

نمودارهای  $\delta_p$  و  $\delta_s$  در شکل ۱۷.۲ نشان می‌دهند که چگونه تغییر فاز برحسب زاویه فرودی درونی تغییر می‌کند.



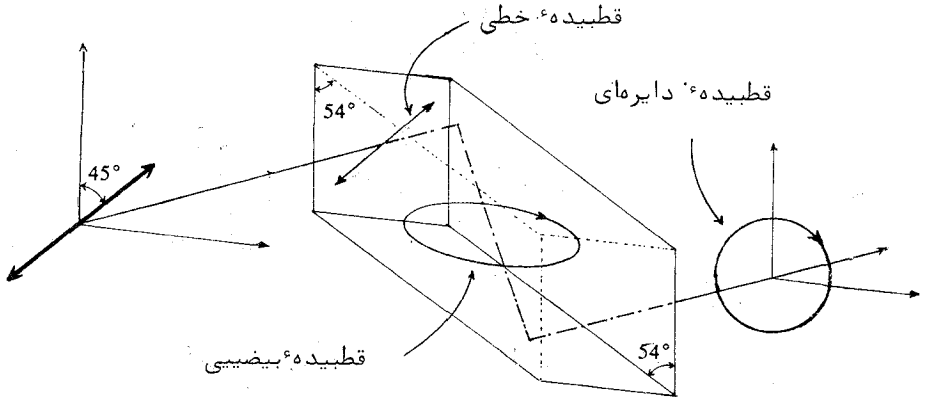
شکل ۱۷.۲ تغییرات فاز در بازتاب کلی درونی. (منحنیهای تقریبی برای شیشه‌ای با نماشکست ۱/۵).

### متوازی‌السطوح فرنل

یک روش تبدیل نور قطبیده خطی به نور قطبیده دایره‌ای، که به وسیله متوازی‌السطوح فرنل اندیشیده شده است، در شکل ۱۸.۲ دیده می‌شود. عنصر اصلی آن شیشه‌ای است به شکل متوازی‌السطوح. نور قطبیده خطی که قطبیدگی آن با رخ‌روئی متوازی‌السطوح زاویه  $45^\circ$  درجه‌ای می‌سازد، عمود بر رخ ورودی وارد شیشه می‌شود، نور فرودی دو بار بازتاب داخلی پیدا می‌کند و از رخ خروجی خارج می‌شود. در هر بازتاب داخلی اختلاف فازی بین مولفه‌های قطبیدگیهای  $TE$  و  $TM$  ایجاد می‌شود. این اختلاف فاز  $\Delta$  که از معادله  $(72.2)$ ، برای  $\theta = 54^\circ$  درجه (با شیشه‌ای با نماشکست ۱.۵)، محاسبه می‌شود، برابر  $45^\circ$  درجه است. بنابراین در دوبازتاب داخلی کلاً یک اختلاف فاز  $90^\circ$  درجه‌ای به‌وجود می‌آید و نور خروجی به‌طور دایره‌ای قطبیده است.

### ۱۱.۲ ماتریس بازتاب

اگر مولفه‌های  $TM$  را "افقی" و مولفه‌های  $TE$  را "عمود" بشناسیم، در این صورت در هر دو مورد بازتاب درونی و بیرونی می‌توانیم با تعریف یک



شکل ۱۸.۰۲ همروبر فرنل.

ماتریس بازتاب به صورت زیر، از روش محاسبه جونز استفاده کنیم.

$$\begin{bmatrix} -r_p & 0 \\ 0 & r_s \end{bmatrix}$$

پس بردار جونز نور بازتابیده چنین می شود:

$$\begin{bmatrix} -r_p & 0 \\ 0 & r_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} \quad (۷۲.۰۲)$$

که در آن  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$  بردار نور فرودی است. مقادیر  $r_p$  و  $r_s$  طبق معادلات (۵۸.۰۲) و (۵۹.۰۲) توابعی از زاویه فرودی اند. همین طور، ماتریس تراگسیل نیز به صورت زیر تعریف می شود:

ع- برای دی‌الکتریک‌های همسانگرد، مانند شیشه، عناصر غیر قطری این ماتریسها صفرند. برای مواد ناهمسانگرد مانند بلورها این عناصر ممکن است صفر نباشند.

$$\begin{bmatrix} t_p & 0 \\ 0 & t_s \end{bmatrix}$$

و بردار جونز نور تراگسیل شده چنین است:

$$\begin{bmatrix} t_p & 0 \\ 0 & t_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'' \\ B'' \end{bmatrix} \quad (۷۴.۰۲)$$

ولی در این میحث، بیشتر بازتاب مورد توجه ماست. برای مثال حالتی را در نظر بگیرید که نور به‌طور عمودی فرود می‌آید، در این صورت ماتریس بازتاب به‌صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} -(1-n)/(1+n) & 0 \\ 0 & (1-n)/(1+n) \end{bmatrix} = \frac{1-n}{1+n} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن  $n$  نمارشکست نسبی است. فرض کنید نور فرودی مثلاً "قطبیده" دایره‌ای راست باشد، بنابراین بردار جونز  $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$  خواهد بود. پس بردار جونز نور بازتابیده چنین است:

$$\frac{1-n}{1+n} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{1-n}{1+n} \begin{bmatrix} -1 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{n-1}{n+1} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

بدین‌سان نور بازتابیده، قطبیده دایره‌ای چپ است و دامنه آن به‌نسبت  $\frac{n-1}{n+1}$  تغییر کرده است. همین‌طور می‌توان نشان داد که اگر نور فرودی قطبیده دایره‌ای چپ باشد، نور بازتابیده قطبیده دایره‌ای راست خواهد بود. ایسن وارون شدن قطبیدگی دایره‌ای بستگی به‌اندازه  $n$  ندارد و مشروط براینکه زاویه فرودی کم باشد، در هر دو مورد بازتاب درونی و بیرونی رخ می‌دهد.

حال بازتاب نور فرودی خراشان را در نظر می‌گیریم. در اینجا مقادیرهای  $r_p$  و  $r_s$ ، هر دو یک‌اند ولی علامتهای آنها مخالف یکدیگرند. بنابراین ماتریس بازتاب چنین می‌شود:

$$\pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن علامت مثبت برای بازتاب درونی و علامت منفی برای بازتاب بیرونی

به کار برده می شود. اگر نور فرودی قطبیده دایره‌ای باشد، هنگام بازتاب، جهت چرخش عوض نمی شود، این برای بازتاب بیرونی و درونی هر دو صادق است. سرانجام، بازتاب کلی در نظر می گیریم. در اینجا همان طور که نشان داده ایم  $r_p = -e^{-\delta_p}$  و  $r_s = e^{-\delta_s}$  است. بدین سان فرایند بازتاب به صورت ساده زیر نوشته می شود:

$$\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\delta_p} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A e^{-i\delta_p} \\ B e^{-i\delta_s} \end{bmatrix} = e^{-i\delta_p} \begin{bmatrix} A \\ B e^{i\delta} \end{bmatrix} \quad (75.2)$$

که در آن  $\Delta$  اختلاف فاز نسبی است که از معادله (72.2) نتیجه می شود. در حالت کلی، نور بازتاب قطبیده بیضی است. (به مسئله ۲۰۹ نگاه کنید).

## مسایل

- ۱۰۲ امتحان کنید که اگر عملگر " دل " را روی تابع موج تخت سازگان  $f = e^{i(k \cdot r - \omega t)}$  به کار بریم، نتیجه آن  $\nabla f = ikf$  می شود.
- ۲۰۲ اندازه ریشه میانگین مربعی دامنه میدان الکتریکی تابش یک لامپ ۱۰۰ واتی در فاصله یک متری چقدر است؟
- ۳۰۲ حداکثر توان یک لیزر یاقوتی ۱۰۰ مگاوات است. اگر پرتو آن در لکه‌ای به قطر ۱۰ میکرون کانونی شود، تابندگی و دامنه میدان الکتریکی موج نور را در نقطه کانونی به دست آورید. نمارشکست  $n=1$  است.
- ۴۰۲ نشان دهید که میانگین شار پوئینتینگ از رابطه  $\frac{1}{2} \text{Re} (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*)$  به دست می آید، که در آن  $\mathbf{E}_0$  و  $\mathbf{H}_0$  دامنه‌های مختلط میدانهای موج نورند.

۵۰۲ بردار الکتریکی یک موج با عبارت حقیقی زیر داده می شود:

$$\mathbf{E} = E_0 [\hat{i} \cos(kz - \omega t) + \hat{j} b \cos(kz - \omega t + \phi)]$$

نشان دهید که این عبارت، معادل عبارت مختلط زیر است:

$$\mathbf{E} = E_0 (\hat{i} + \hat{j} b e^{i\phi}) e^{i(kz - \omega t)}$$



۶.۲ در مسئله ۵.۲ برای هر یک از موارد زیر، نوع قطبیدگی را به‌کمک نموداری ساده تعیین کنید.

$$b = 1, \phi = 0 \text{ (الف)}$$

$$b = 2, \phi = 0 \text{ (ب)}$$

$$b = -1, \phi = \pi/2 \text{ (پ)}$$

$$b = 1, \phi = \pi/4 \text{ (ت)}$$

۷.۲ بردارهای جونز امواجی که در مسئله ۶.۲ داده شده‌اند را بنویسید.

۸.۲ نوع قطبیدگی امواجی که بردار جونز آنها به‌صورت زیر است را شرح دهید:

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \right], \left[ \begin{matrix} i \\ -1 \end{matrix} \right], \left[ \begin{matrix} 1-i \\ 1+i \end{matrix} \right]$$

بردارهای جونز متعامد نسبت به هر یک از بردارهای بالا را به‌دست آورید و قطبیدگی آنها را نیز شرح دهید.

۹.۲ حالت کلی بردار جونز زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} A \\ Be^{i\Delta} \end{bmatrix}$$

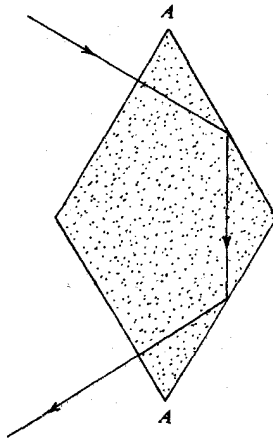
نشان دهید این بردار معروف نور قطبیده بیضی است که در آن زاویه محور بزرگ بیضی با محور  $x$  چنین است.

$$\frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2AB \cos \Delta}{A^2 - B^2} \right)$$

۱۰.۲ با استفاده از روش محاسبه جونز نشان دهید که با عبور دادن نور از یک قطبیده خطی و یک تیغه چارک، موجی تنها با ترتیب و زاویه معینی می‌توان نور قطبیده دایره‌ای راست تولید کرد.

۱۱.۲ یک قطبیده دایره‌ای که ماتریس جونز آن  $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$  است را در نظر بگیرید. امتحان کنید که این قطبیده، برای یک نوع نور قطبیده دایره‌ای کاملاً شفاف و برای قطبیدگی دایره‌ای متضاد آن کدر است.

- (تذکر: این با قطبنده‌ای که از یک قطبنده خطی و یک تیغه چارک موجی تشکیل می‌شود تفاوت دارد).
- ۱۲.۲ نور قطبیده خطی که بردار جونز آن  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  است (قطبیده افقی) ازدو قطبنده خطی پی‌درپی عبور داده می‌شود. محور تراگیل قطبنده اول تحت زاویه ۴۵ درجه، و محور تراگیل دومی قائم است. نشان دهید که نور خروجی در جهت قائم به‌طور خطی قطبیده است، یعنی صفحه قطبش ۹۰ درجه چرخیده است.
- ۱۳.۲ ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای متناظر را در یک قطبنده خطی که محور تراگیل آن تحت زاویه ۴۵ درجه است به‌دست آورید.
- ۱۴.۲ زاویه حد را برای بازتاب درونی در آب ( $n = 1.33$ ) و در الماس ( $n = 2.42$ ) به‌دست آورید.
- ۱۵.۲ زاویه بروستر مربوط به بازتاب خارجی را برای آب و الماس به‌دست آورید.
- ۱۶.۲ توان بازتاب را برای هر دو قطبیدگی  $TE$  و  $TM$  تحت زاویه فرودی ۴۵ درجه بر آب و الماس به‌دست آورید.
- ۱۷.۲ زاویه حد برای بازتاب کلی درونی در یک ماده، دقیقاً ۴۵ درجه است. زاویه بروستر برای بازتاب بیرونی چقدر است؟
- ۱۸.۲ شکل ۱۹.۲ متوازی‌السطوح مونی Mooney را برای ایجاد نورقطبیده دایره‌ای نشان می‌دهد. نشان دهید که اگر نمارشکست متوازی‌السطوح ۶۵/۱ باشد، زاویه راس  $A$  باید حدود ۶۰ درجه باشد.
- ۱۹.۲ یک پرتو نور مطابق شکل ۱۵.۲ در یک منشور شیشه‌ای ( $n = 1.5$ ) ۴۵-۹۰-۴۵ درجه‌ای بازتاب کلی پیدا می‌کند. طول موج نور ۵۰۰ نانومتر است. در چه فاصله‌ای از سطح، دامنه موج ناپایا  $1/e$  اندازه آن در آن سطح می‌شود؟ شدت موج ناپایا در فاصله یک میلیمتری از این سطح به چه نسبتی کاهش می‌یابد؟



شکل ۱۹.۲ متوازی‌السطوح مونی.

۲۰.۲ نشان دهید که زاویه پذیرش یک تار شیشه‌ای چنین است :

$$\alpha = \sin^{-1} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

که در آن  $n_1$  و  $n_2$  به ترتیب نماشکست تار و پوشش آن است و محیط خارجی نیز هوا است،  $n_0 = 1$  ( به شکل ۱۳.۲ نگاه کنید ).

۲۱.۲ رابطه زیر را که مربوط به اختلاف فاز در بازتاب کلی درونی است، و در

بخش ۱۰.۲ بررسی شد، اثبات کنید.

$$\tan \frac{\Delta}{2} = \frac{\cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\sin^2 \theta}$$

۲۲.۲ یک پرتو نور قطبیده دایره‌ای راست تحت زاویه ۴۵ درجه روی سطح یک

شیشه ( $n = 1.5$ ) فرودمی آید. با به کار بردن ماتریس بازتاب، قطبیدگی نور بازتابیده را برای بازتابهای درونی و بیرونی تعیین کنید.

۲۳.۲ پرتوی از نور ناقطبیده از یک درجه بروستر با نماشکست  $n$  می‌گذرد.

درجه قطبیدگی نور تراگسیلی را به دست آورید. مقدار عددی آن را برای  $n = 1.5$  حساب کنید.

## فصل سوم

همدوسی و تداخل

### ۱.۳ اصل برهم‌نهی خطی

اساس نظریهٔ تداخل یا درهم‌روی نور مبتنی بر اصل برهم‌نهی خطی میدان‌های الکترومغناطیسی است. طبق این اصل، میدان الکتریکی  $E$  که در نقطه‌ای از فضای تهی به‌وسیلهٔ چندین چشمه مشترکاً تولید می‌شود، برابر است با حاصل جمع برداری:

$$E = E_{(1)} + E_{(2)} + E_{(3)} + \dots \quad (1.3)$$

که در آن  $E_{(1)}$ ،  $E_{(2)}$ ،  $E_{(3)}$ ، ... هر یک میدانی است در آن نقطه که به‌وسیلهٔ چشمه‌های گوناگون به‌طور جداگانه تولید می‌شود. این اصل که برای میدان‌های مغناطیسی نیز صادق است، به‌این دلیل برقرار است که معادلات ماکسول در خلاء معادلات دیفرانسیلی خطی‌اند.

برای فضایی که در آن ماده وجود دارد، اصل برهم‌نهی خطی تنها به‌طور تقریبی صادق است. (این بدین معنی نیست که نشود میدانها را به مولفه‌هایی تجزیه کرد، بلکه معنی آن این است که برآیند کل میدان حاصل در ماده ممکن است با حاصل جمع میدان‌هایی که به وسیلهٔ هریک از چشمه‌ها بتنهايي تولید می‌شود

مساوی نباشد). در تداخل نور چشمه‌های بسیار قوی، مانند نور لیزر، انحرافهایی از خطی بودن به چشم می‌خورد که تحت عنوان پدیده‌های غیر خطی مورد بررسی قرار می‌گیرند.<sup>۱</sup>

دو موج سازگان را که به‌طور خطی قطبیده‌اند و بسامد هر دو مساوی  $\omega$  است در نظر بگیرید. پس میدانهای الکتریکی چنین خواهند بود:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(1)} &= \mathbf{E}_1 \exp i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_1) \\ \mathbf{E}_{(2)} &= \mathbf{E}_2 \exp i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

در اینجا مقادیر  $\phi_1$  و  $\phi_2$  برای هر اختلاف فازی که ممکن است میان چشمه‌های دو موج وجود داشته باشد به‌کاربرده شده‌اند. اگر اختلاف فاز  $\phi_1 - \phi_2$  ثابت باشد گفته می‌شود دو چشمه با هم همدوسند. امواج حاصل از این چشمه‌ها نیز در این حالت با هم همدوسند.

اکنون بحث خود را به امواج تکفامی که با هم همدوسند محدود می‌کنیم، و همدوسی جزئی و امواج ناتکفام را بعداً بررسی خواهیم کرد.

در بخش ۲.۲ دیدیم که تابندگی در یک نقطه با مربع دامنه میدان الکتریکی نور در آن نقطه متناسب است. بدین ترتیب برهم‌نهی دو موج تخت تکفام، از سازه ثابت تناسب که بگذریم، تابعی به نام تابع تابندگی به شکل زیر به دست می‌دهد:

$$\begin{aligned} I &= |\mathbf{E}|^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = (\mathbf{E}_{(1)} + \mathbf{E}_{(2)}) \cdot (\mathbf{E}_{(1)}^* + \mathbf{E}_{(2)}^*) \\ &= |\mathbf{E}_1|^2 + |\mathbf{E}_2|^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \cos \theta \\ &= I_1 + I_2 + 2E_1 \cdot E_2 \cos \theta \end{aligned} \quad (3.3)$$

که در آن:

$$\theta = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + \phi_1 - \phi_2 \quad (4.3)$$

جمله  $2E_1 \cdot E_2 \cos \theta$  را جمله تداخل می‌نامند و نشان می‌دهد که مقدار  $I$  بستگی به  $\theta$  دارد و ممکن است از  $I_1 + I_2$  بزرگتر یا کوچکتر باشد. چون  $\theta$  به  $\mathbf{r}$

۱- نورشناسی غیرخطی در بخش ۱۲.۶ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

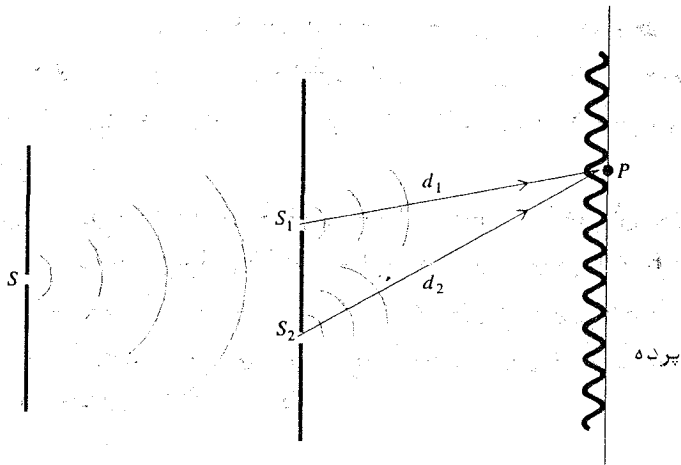
بستگی دارد، شدت نور به طور دوره‌ای در فضا تغییر می‌کند. این تغییرات به صورت فریزهای تداخلی آشنا که از ترکیب دو پرتو همدوس به وجود می‌آیند دیده می‌شود. اگر چشمه‌های دو موج با هم ناهمدوس باشند، کمیت  $\phi_1 - \phi_2$  به طور کاتوره‌ای با زمان تغییر می‌کند. در نتیجه مقدار میانگین  $\cos \theta$  صفر می‌شود و در هم‌روی انجام نمی‌گیرد، به همین دلیل است که با دو چشمه مجزای نور (معمولی) فریزهای تداخلی مشاهده نمی‌شوند.

وقتی دو موج مورد نظر قطبیده باشند، جمله تداخلی به قطبیدگی نیز بستگی دارد. بویژه اگر دو موج به طور متعام قطبیده باشند خواهیم داشت  $E_1 \cdot E_2 = 0$  و باز فریز تداخلی نخواهیم داشت. این نه تنها برای قطبیدگی خطی صحت دارد، بلکه برای امواج قطبیده دایره‌ای و بیضی‌بی نیز درست است. اثبات ادعای اخیر به عنوان یک مسئله به عهده خواننده گذاشته می‌شود.

### ۲۰۳ آزمایش یانگ

آزمایش کلاسیکی که تداخل نور را نشان می‌دهد، اولین بار در سال ۱۸۰۲، به وسیله توماس یانگ انجام شد. در آزمایش اصلی خورشید به عنوان چشمه نور به کار برده شد، ولی از هر چشمه درخشان دیگر، مانند رشته تنگستن، لامپ یا قوس الکتریکی نیز می‌توان استفاده کرد. نور از یک سوراخ کوچک  $S$  عبور داده می‌شود تا دو شکاف باریک  $S_1$  و  $S_2$  را مطابق شکل ۱۰۳ روشن کند. اگر پرده‌ای سفید در پشت شکافها قرار گیرد، گرتنه فریزهای تاریک و روشن که از درهم رفتن نور دو شکاف  $S_1$  و  $S_2$  به وجود می‌آیند دیده می‌شود. کلید موفقیت در آزمایش این است که برای روشن کردن شکافها از یک تک روزه  $S$  استفاده می‌شود. این، همدوسی نور شکافهای  $S_1$  و  $S_2$  را که برای آزمایش ضروری است فراهم می‌کند.

تحلیل مقدماتی آزمایش یانگ، به تعیین اختلاف فاز میان دو موجی که پس از پیمودن فواصل  $d_1$  و  $d_2$  به نقطه  $P$  می‌رسند، منجر می‌شود. فرض کنیم امواج کروی بوده و سازه‌های فازی آنها طبق بخش ۴.۱ به صورت  $e^{i(kr - \omega t)}$  باشند، پس اختلاف فاز در نقطه  $P$  برابر با  $k(d_2 - d_1)$  خواهد بود. برای فریزهای روشن، این اختلاف برابر است با  $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots, \pm 2n\pi$  که در آن  $n$  عددی درست است. جمله تداخل در معادله (۳.۳) در برابر هریک از این مقادیر بیشینه می‌شود. چون



شکل ۱۰.۳ آزمایش یانگ

است، می‌بینیم که معادله:  $k = 2\pi/\lambda$

$$k(d_2 - d_1) = \pm 2n\pi \quad (۵.۳)$$

با

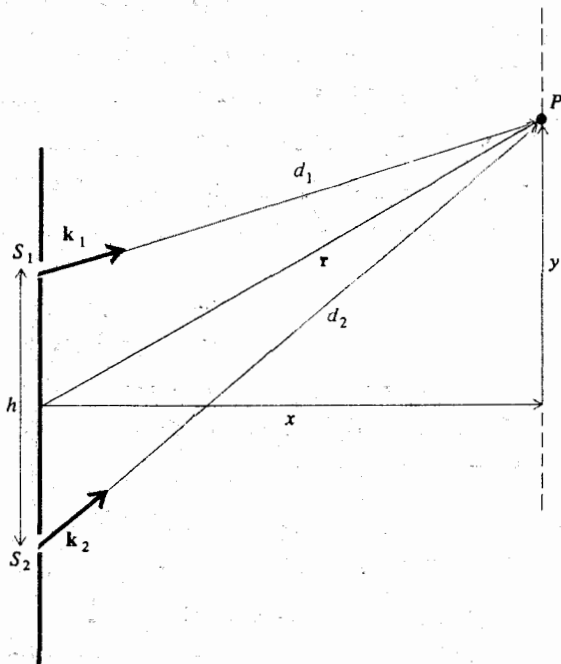
$$|d_2 - d_1| = n\lambda \quad (۶.۳)$$

یکی است، یعنی اختلاف راه مضرب درستی از طول موج است.

نتیجه بالا را می‌توان با کمیت‌های فیزیکی که در شکل ۲.۳ نشان داده شده‌اند ارتباط داد. در اینجا  $h$  جدایی شکافها و  $x$  فاصله صفحه شکافها از پرده است. مطابق شکل، فاصله روی پرده از محور کروی اندازه‌گیری می‌شود. بدین‌سان معادله ۶.۳ چنین خواهد شد:

$$\left[ x^2 + \left( y + \frac{h}{2} \right)^2 \right]^{1/2} - \left[ x^2 + \left( y - \frac{h}{2} \right)^2 \right]^{1/2} = n\lambda \quad (۷.۳)$$





شکل ۲۰۳ آرایش هندسی برای تحلیل تداخل دوشکافی.

با استفاده از بسط دو جمله‌ای، نتیجه می‌گیریم که عبارت تقریبی معادل، چنین خواهد بود:

$$\frac{yh}{x} = n\lambda \quad (۸۰۳)$$

این تقریب در صورتی برقرار است که  $y$  و  $h$  در برابر  $x$  کوچک باشند. جای فریزهای روشن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$y = 0, \pm \frac{\lambda x}{h}, \pm \frac{2\lambda x}{h}, \dots \quad (۹۰۳)$$

اگر شکافها با وسایلی مانند تاخیرانداز فازی، قطبنده و غیره پوشانده شوند، گرتة فریزها تغییر خواهد کرد. مثلاً اگر، با قراردادن یک تیغه نازک شیشه‌ای

جلوی یکی از شکافها، یک اختلاف فاز نسبی به اندازه  $180^\circ$  درجه تولید کنیم، گرتته کلا" به اندازه نصف جدایی فریزها جابجا می شود، به طوری که هر فریز روشن در محل قبلی فریز تاریک قرار می گیرد. تعیین ضخامت تیغه شیشه‌ای که در این مثال لازم است به عهده خواننده گذاشته می شود. نکته مهم دیگر اینکه، اگر دو قطبیده طوری جلوی دو شکاف قرار دهیم که مولفه‌های دو موج به طور متعامد قطبیده شوند، خواهیم داشت  $E_1 \cdot E_2 = 0$  از این رو فریزهای درهم روی به وجود نمی آیند.

### روشهای دیگر برای نشان دادن تداخل

برای نمایش درهم روی دو موج روشهای دیگری در شکل ۳.۳ نشان داده شده‌اند. در تمام این روشها، از بازتاب یا شکست نور استفاده می شود تا از یک چشمه اصلی نگی، دو موج هم‌دوس ایجاد شوند.

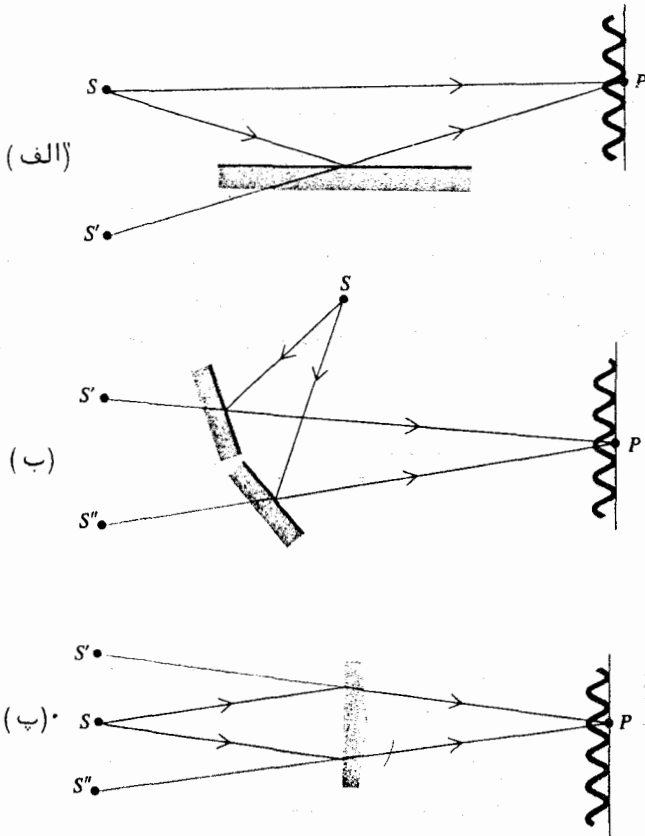
در آزمایش تک‌آینه‌ای لوید شکل ۳.۳ (الف) یک چشمه سوزنی نور نزدیک آینه قرار داده می شود. قسمتی از نور که از روی آینه باز می تابد همانند موجی است که از چشمه مجازی  $S'$  به وجود آمده باشد. بنابراین روی پرده، وضع شبیه به آزمایش ینگ خواهد بود. البته در محاسبه شدت نور در نقطه  $P$ ، باید تغییر فازی را که هنگام بازتاب رخ می دهد در نظر گرفت.

در آرایش دوآینه‌ای فرنل شکل ۳.۳ (ب) به کمک دو آینه، دو چشمه مجازی هم‌دوس  $S'$  و  $S''$  تولید می شوند.

در آرایش دومنشوری فرنل، از یک منشور شیشه‌ای برای به وجود آوردن دو چشمه هم‌دوس شکل ۳.۳ (پ) استفاده می شود. برای اینکه دو چشمه مجازی فاصله کمی از هم داشته باشند، زاویه راس دومنشوری باید نزدیک به  $180^\circ$  درجه باشد.

### گروه‌بندی روشهای تداخل

روشهای تولید تداخل را که در بالا به آنها اشاره شد می توان در یک گروه قرار داد و آن را تداخل به روش تقسیم جبهه موج نام نهاد. در این دسته، چشمه نوری به صورت نقطه یا خطی است که امواج را در جهت‌های مختلف گسیل می کند.

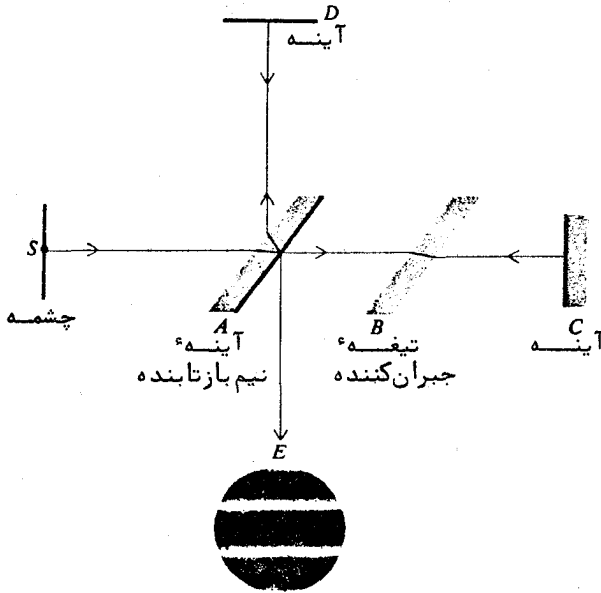


شکل ۳۰۳ آرایشهایی برای تولید فریزهای تداخلی با یک چشمه تکی، (الف) تک آینه لوید، (ب) دوآینه فرنل، (ب) دومنشور فرنل.

این امواج سرانجام به کمک آینه، منشور یا عدسی برای تولید فریزهای تداخلی روی هم آورده می‌شوند. دسته دوم، تداخل با روش تقسیم دامنه نامیده می‌شود. در این حالت حالت یک پرتو نور با بازتاب جزئی به دو یا چند پرتو تقسیم می‌شود. در این حالت به چشمه نقطه‌ای نیازی نیست، زیرا جبهه‌های پرتوهای بازتابیده و تراگیلیبده تناظر یک‌به‌یک دارند. تداخل سنج مایکلسون که در بخش بعد شرح داده می‌شود، این دسته از روشهای تداخل را نشان می‌دهد.

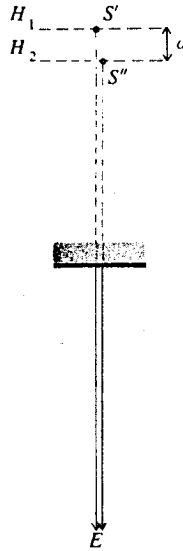
۳.۳ تداخل سنج مایکلسون

شاید مشهورترین و فراگیرترین دستگاههای تداخل سنجی، وسیله‌ای است که توسط مایکلسون در ۱۸۸۰/۱۲۵۹ ابداع شد. طرح اصلی آن در شکل ۴.۳ دیده می‌شود. نور از چشمه  $S$  روی تیغه شیشه‌ای  $A$  که به‌طور جزئی نقره‌اندود است می‌تابد، این تیغه پرتو را به دو پرتو تقسیم می‌کند، این دو پرتو از روی آینه‌های  $C$  و  $D$  مطابق شکل بازتاب می‌شوند. معمولاً یک تیغه جبران‌کننده در سر راه یکی از پرتوها قرار داده می‌شود تا راه‌های نوری هر دو شامل ضخامت یکسانی از شیشه باشند. در مواقعی که فریزهای نور سفید مطالعه می‌شوند، تیغه جبران‌کننده ضروری است.



شکل ۴.۳ مسیر نور در تداخل سنج مایکلسون.

گرفته تداخل در  $E$  مشاهده می‌شود. در اینجا به‌نظر می‌رسد که نور مطابق شکل ۵.۳ از دو صفحه مجازی  $H_1$  و  $H_2$  می‌آید. چشمه‌های نقطه‌ای مجازی و متناظر



شکل ۵.۳ چشمه‌های تخت مجازی در تداخل‌سنج مایکلسون.

$S'$  و  $S''$  در این صفحات باهم هم‌دوسند؛ اگر اختلاف راه میان دو پرتوی که به  $E$  می‌رسند، یعنی فاصله بین  $S_1'$  و  $S_2''$ ،  $d$  باشد در این صورت از معادلات (۳.۳) و (۴.۳) نتیجه می‌شود که تابندگی متناسب است با:

$$1 + \cos \theta = 1 + \cos kd = 1 + \cos \frac{2\pi d}{\lambda} \quad (10.3)$$

حال اگر آینه‌ها کمی نسبت به هم کج باشند، چشمه‌های مجازی تخت  $H_1$  و  $H_2$  کاملاً موازی نخواهند بود و اگر دیدبان چشم خود را در  $E$  قرار دهد، خطوطی را که به‌طور متناوب تاریک و روشنند در میدان دید می‌بیند. این فریزها، فریزهای محلی نامیده می‌شوند و ظاهراً از ناحیه  $H_1$  و  $H_2$  می‌آیند. از سوی دیگر اگر  $H_1$  و  $H_2$  موازی باشند، فریزها دایره‌ای خواهند بود و به‌نظر می‌رسند که از بینهایت می‌آیند.

در مواردی که از نور سفید استفاده می‌شود، اگر  $H_1$  و  $H_2$  یکدیگر را در میدان دید قطع کنند، چندین فریز رنگی محلی می‌توان مشاهده کرد. در این حالت فریز

مرکزی تاریک است زیرا یکی از پرتوها در تیغه  $A$  از داخل بازتاب پیدا می‌کند، در حالی که پرتو دیگر در  $A$  از خارج بازتاب می‌شود، بدین‌سان برای  $d=0$  دو پرتو در  $E$  با هم  $180^\circ$  درجه اختلاف فاز خواهند داشت.

یکی از کاربردهای فراوان تداخل‌سنج مایکلسون، تعیین نمارشکست گازها است. برای این منظور یک سلول اپتیکی تهی در یکی از راههای نوری تداخل‌سنج قرار می‌دهند. گازی که نمارشکست آن باید اندازه‌گیری شود را بتدریج وارد این سلول می‌کنند. این عمل مانند افزودن طول راه نوری است و باعث می‌شود که فریزهای تداخلی در میدان دید جابه‌جا شوند. تعداد فریزهایی که از یک نقطه می‌گذرند تغییر راه نوری را معین می‌کند و با داشتن آن می‌توان نمارشکست گاز را محاسبه کرد. تداخل‌سنج مایکلسون با یک دیگرگونی به تداخل‌سنج توپمن - گریمن Twyman-Green که در شکل ۶.۳ نشان داده شده است تبدیل می‌شود. این تداخل‌سنج برای آزمودن عناصر اپتیکی، مانند عدسی، آینه و منشور، به‌کار برده می‌شود. در این حالت از نور موازی استفاده می‌شود. عنصر مورد آزمایش در یکی از راههای نوری قرار داده می‌شود. عیوب آن عنصر نوری به‌صورت واپیچشهایی در گرتنه تداخل ظاهر می‌شود.

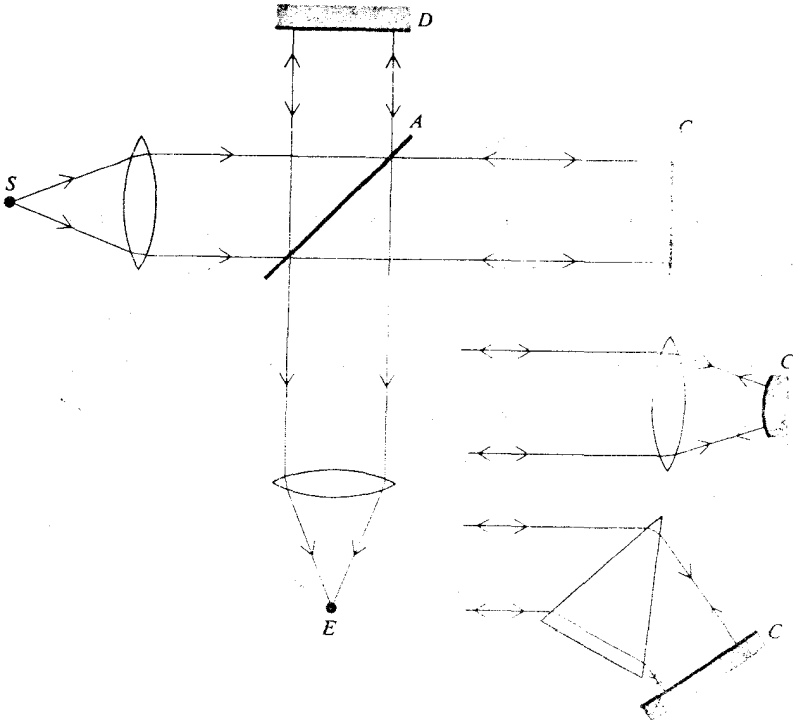
بحث کاملتری درباره انواع تداخل‌سنجها در منابع (۷) و (۴۰) یافت

می‌شود.

### ۴.۳ نظریه همدوسی پاری و نمایانی فریزها

در گفتار پیش فرض شد میدانهای اپتیکی کاملاً "همدوس، تکفام و دارای دامنه ثابت باشند. در عمل دامنه و فاز دو یا چند موج دزهمرونده به‌طور کاتوره‌ای با زمان تغییر می‌کنند. بنابراین شار لحظه‌ای نور در یک نقطه بتندی با زمان کم و زیاد می‌شود. پس بهتر است برای تعریف تابندگی، متوسط زمانی در نظر گرفته شود. درحالی که دو میدان  $E_1$  و  $E_2$  باشند، تابندگی  $I$  را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} I &= \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \rangle = \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{E}_1^* + \mathbf{E}_2^*) \rangle \\ &= \langle |\mathbf{E}_1|^2 + |\mathbf{E}_2|^2 + 2\text{Re}(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^*) \rangle \end{aligned} \quad (11.3)$$



شکل ۳ ۶ دیگرگونی تداخل سنج مایکلسون به وسیله توپمن - گرین .

که در آن براکتها نمایانگر میانگین زمانی اند .

$$f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad ( ۱۲.۳ )$$

در بحث زیر فرض می‌کنیم تمام مقادیر از لحاظ زمانی مانا باشند، یعنی مقدار متوسط زمانی آنها به مبداء زمان بستگی نداشته باشد. علاوه بر این فرض می‌کنیم قیادیدگی میدانهای ایتیکی یکسان باشد، یعنی در اینها از خاصیت برداری میدانها چاره‌رشی می‌کنیم. با این ساده‌سازیها معادله (۱۲.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$I = I_1 + I_2 + 2\text{Re}\langle E_1 E_2^* \rangle \quad (13.3)$$

که در آن:

$$I_1 = \langle |E_1|^2 \rangle \quad I_2 = \langle |E_2|^2 \rangle \quad (14.3)$$

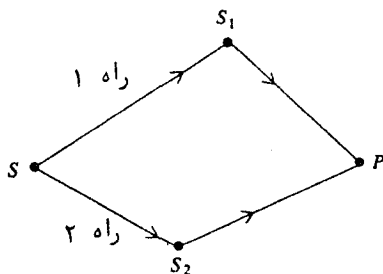
در آزمایشهای تداخلی معمولی، دو میدان  $E_1$  و  $E_2$  از یک چشمه تولید می‌شوند و تفاوت آنها در اختلاف راه نوری آنهاست. یک نمودار طرح‌واره ساده آن در شکل ۷.۳ دیده می‌شود.

فرض کنیم نور راه ۱ را در مدت  $t$  و راه ۲ را در مدت  $t + \tau$  ببینیم. پس جمله تداخلی در معادله (۱۳.۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$2\text{Re}\Gamma_{12}(\tau)$$

که در آن:

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E_1(t) E_2^*(t + \tau) \rangle \quad (15.3)$$



شکل ۷.۳ راههای نوری در یک آزمایش تداخل.

تابع  $\Gamma_{12}(\tau)$  را تابع همدوسی یا تابع همبستگی دو میدان  $E_1$  و  $E_2$  می‌نامند. تابع:

$$\Gamma_{11}(\tau) = \langle E_1(t) E_1^*(t + \tau) \rangle$$

را تابع خودبستگی یا تابع خوددوسی می‌نامند. از این تعریف می‌بینیم که



خواهد بود.  $\Gamma_{22}(0) = I_2$  و  $\Gamma_{11}(0) = I_1$ .

گاهی به کاربردن تابع همبستگی بهنجار که درجه همدوسی جزیی نیز نامیده می شود آسانتر است.

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (16.3)$$

در این صورت تابندگی به صورت زیر بیان می شود:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re} \gamma_{12}(\tau) \quad (17.3)$$

تابع  $\gamma_{12}(\tau)$  معمولاً "یک تابع مختلط دوره ای از  $\tau$  است. بنابراین گسترهء تداخل وقتی به وجود می آید که  $|\gamma_{12}(\tau)|$  مخالف صفر باشد. انواع گوناگون همدوسی زیر را برحسب  $|\gamma_{12}(\tau)|$  خواهیم داشت:

$$|\gamma_{12}| = 1 \quad (\text{همدوسی کامل})$$

$$0 < |\gamma_{12}| < 1 \quad (\text{همدوسی پاری})$$

$$|\gamma_{12}| = 0 \quad (\text{ناهمدوسی کامل})$$

شدت نور، در گرتای از فریزهای تداخلی، بین دو حد  $I_{\max}$  و  $I_{\min}$  تغییر می کند. از معادله (۱۷.۳) دیده می شود که این دوحد از عبارتهای زیر به دست می آیند:

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}| \quad I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}| \quad (18.3)$$

نمایانی فریزها با نسبت زیر تعریف می شود:

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (19.3)$$

پس نتیجه می شود:

$$\gamma = \frac{2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}|}{I_1 + I_2} \quad (20.3)$$

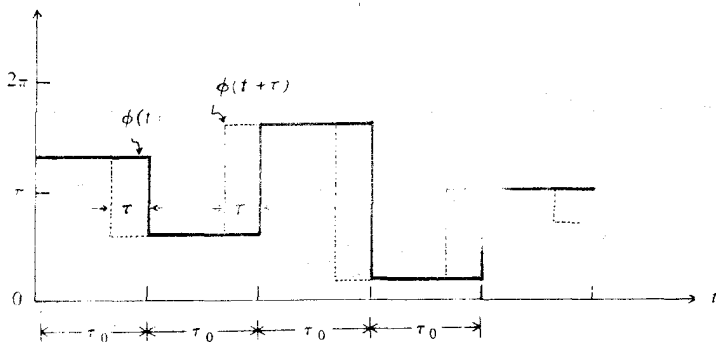
ویژه اگر  $I_1 = I_2$  در این صورت:

$$\gamma = |\gamma_{12}| \quad (21.3)$$

یعنی، نمایشی فریز با مدول درجه همدوسی پاری برابر است. برای همدوسی کامل ( $|\gamma_{12}| = 1$ ) فریزهای تداخلی بیشترین تضاد را که یک است، دارند، درحالی که برای ناهمدوسی کامل ( $|\gamma_{12}| = 0$ ) تضاد صفر است، یعنی فریزهای تداخلی وجود ندارند.

### ۵.۳ زمان همدوسی و طول همدوسی

برای اینکه ارتباط درجه همدوسی جزئی را با ویژگیهای چشمه بررسی کنیم، یک چشمه فرضی "شبه تکفام" را در نظر می‌گیریم که دارای خواص زیر است: نوسان و میدان حاصل از آن در مدت  $\tau_0$  به‌طور سینوسی تغییر می‌کند و سپس به‌طور ناگهانی تغییر فاز می‌دهند. این ترتیب به‌گونه‌ای مانند شکل ۸.۳ به‌طور پیاپی تکرار می‌شود.  $\tau_0$  را زمان همدوسی می‌نامیم. فرض می‌کنیم تغییر فازی که بعد از هر زمان همدوسی رخ می‌دهد به‌طور کاتوره‌ای بین صفر و  $360^\circ$  درجه توزیع شده باشد.



شکل ۸.۳ نمودار فاز  $\phi(t)$  ی یک چشمه شبه تکفام.

وابستگی زمانی این میدان شبه تکفام را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega t} e^{i\phi(t)} \quad (22.3)$$

که در آن زاویه فاز  $\phi(t)$  یک تابع پله ای کاتوره ای است و در شکل ۸.۳ نشان داده شده. این نوع میدان را می توان تقریبی برای میدان یک اتم تا زمان  $t = \tau_0$  و تغییر ناگهانی فاز را نتیجه برخورد اتمها با یکدیگر دانست.

فرض می کنیم پرتو نوری را که میدان آن با معادله (۲۲.۳) نمایش داده می شود، به دو پرتو تقسیم کرده و بعداً این دو پرتو را نزد هم آورده ایم تا تداخل ایجاد شود. درجه همدوسی پاری را می توان به صورت زیر ارزیابی کرد. عرض می شود

$$|E_1| = |E_2| = |E|$$

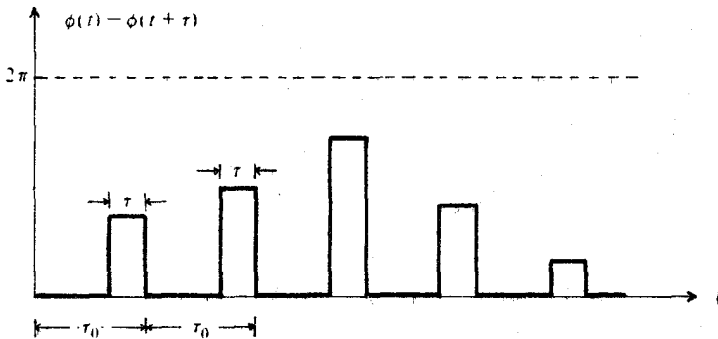
پس چون در اینجا خوددوسی مورد نظر است، زیرنوشتها را می اندازیم و می نویسیم:

$$\gamma(\tau) = \frac{\langle E(t) E^*(t + \tau) \rangle}{\langle |E|^2 \rangle} \quad (23.3)$$

از (۲۲.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= \langle e^{i\omega\tau} e^{i(\phi(t) - \phi(t + \tau))} \rangle \\ &= e^{i\omega\tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\phi(t) - \phi(t + \tau))} dt \end{aligned} \quad (24.3)$$

کمیت  $\phi(t) - \phi(t + \tau)$  را که نمودار آن در شکل ۹.۳ دیده می شود در نظر بگیرید. برای نخستین بازه زمان همدوسی،  $0 < t < \tau_0$ ، می بینیم که برای  $0 < t < \tau_0 - \tau$  کمیت  $\phi(t) - \phi(t + \tau)$  صفر است، ولی برای  $\tau_0 - \tau < t < \tau_0$ ، به طور کاتوره ای، مقداری بین صفر و  $\pi$  درجه اختیار می کند. این مطلب برای هر بازه زمان همدوسی بعدی نیز صادق است.



شکل ۹.۳ نمودار اختلاف فاز  $\phi(t) - \phi(t + \tau)$

مقدار انتگرال در معادله ( ۲۴.۳ ) باسانی به شرح زیر محاسبه می‌شود،  
 برای بازه زمانی نخست داریم:

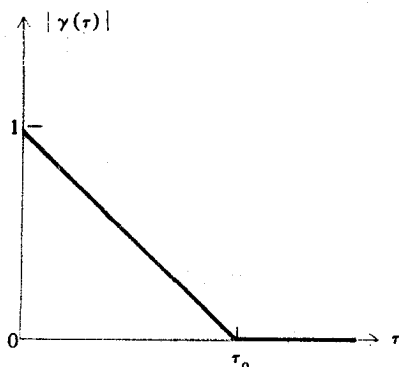
$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} e^{i[\phi(t) - \phi(t + \tau)]} dt &= \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0 - \tau} dt + \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau_0 - \tau}^{\tau_0} e^{i\Delta} dt \\ &= \frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0} + \frac{\tau}{\tau_0} e^{i\Delta} \end{aligned} \quad ( ۲۵.۳ )$$

که در آن  $\Delta$  اختلاف فاز کاتوره‌ای است.

برای همه بازه‌های زمانی بعدی همین نتیجه به دست می‌آید، با این تفاوت که  $\Delta$  برای هر بازه متفاوت است. چون  $\Delta$  کاتوره‌ای است، متوسط جملاتی که  $e^{i\Delta}$  دارند صفر می‌شود. جمله دیگر،  $(\tau_0 - \tau)/\tau_0$ ، برای همه بازه‌های زمانی یکی است و بنابراین برابر با مقدار متوسط انتگرال مورد نظر است. البته اگر  $\tau > \tau_0$ ، اختلاف فاز  $\phi(t) - \phi(t + \tau)$  همیشه کاتوره‌ای خواهد بود و در نتیجه مقدار متوسط انتگرال صفر خواهد شد.

از نتیجه بالا می‌بینیم که تابع خودبستگی بهنجار، برای یک چشمه ششم تکفام، به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) e^{i\omega\tau} & \tau < \tau_0 \\ &= 0 & \tau \geq \tau_0 \end{aligned} \quad ( ۲۶.۳ )$$



شکل ۱۰.۳ نمودار همدوسی یک چشمه شبه تکفام .

$$|\gamma(\tau)| = \begin{cases} 1 - \frac{\tau}{\tau_0} & \tau < \tau_0 \\ 0 & \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (27.3)$$

نموداری از  $|\gamma|$  در شکل ۱۰.۳ نشان داده شده است. در بخش قبل دیدیم که اگر دامنه‌های دو پرتو در یک آرایش تداخل با هم برابر باشند، این کمیت مساوی با نمایانی فریزها یعنی  $\gamma$  می‌شود. بدیهی است که اگر  $\tau$  از زمان همدوسی  $\tau_0$  بیشتر شود، نمایانی فریزها صفر می‌شود. پس برای اینکه فریزهای تداخلی به وجود آیند، اختلاف راه دو پرتو نباید از مقدار:

$$c\tau_0 = l_c$$

بیشتر باشد. کمیت  $l_c$  را طول همدوسی می‌نامند و اصولاً "طول یک قطار موج قطع نشده است."

در حالت واقعی اتمهای تابان، زمان میان برخوردها ثابت نیست و به‌طور کاتوره‌ای از یک برخورد به برخورد بعدی تغییر می‌کند. در نتیجه طول قطارهای موج نیز، به‌طور کاتوره‌ای مشابه تغییر می‌کند. در این حالت که بیشتر به واقعیت نزدیک است، می‌توانیم زمان همدوسی را مساوی مقدار متوسط تک‌تک زمانهای همدوسی تعریف کنیم و برای طول همدوسی هم تعریفی مشابه بپذیریم. در این صورت شکل واقعی

ریاضی درجه همدوسی و نمایانی فریزها بستگی به توزیع آماری دقیق طول قطارهای موج خواهد داشت. بهرحال اگر اختلاف راه نسبت به مقدار متوسط طول همدوسی کوچک باشد، نمایانی فریزها زیاد خواهد بود، (حدود یک). بعکس وقتی اختلاف راه از طول همدوسی متوسط بزرگتر می‌شود، نمایانی فریزها کم و به صفر نزدیک می‌شود.

برای مطالعه بیشتر در موضوع همدوسی، به منابع (۱) و (۵) مراجعه کنید.

### ۶.۳ تجزیه بینایی یک قطار موج پایاندار. همدوسی و پهنای خط

در عمل هیچ چشمه نوری، به‌طور کامل تکفام نیست. حتی برای سرسبزین چشمه‌ها باصطلاح تکفام، همیشه یک پهن‌شدگی در بسامد، در طیفین بسامدمتوسط وجود دارد. حال می‌خواهیم رابطه بین این پهن‌شدگی در بسامد، یا پهنای خط، را با همدوسی چشمه نوری بسامد متغیر و پهنای خط آن (۲۸.۳) استفاده می‌کنیم.

بنا به این قضیه که در اینجا بدون اثبات بیان می‌شود، تابع  $f(t)$  را می‌توان به‌صورت زیر با یک انتگرال نسبت به متغیر  $\omega$  نشان داد.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (28.3)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

توابع  $f(t)$  و  $g(\omega)$  را تبدیلیهای فوریه یکدیگر می‌نامند و می‌گویند یک جفت تبدیل فوریه تشکیل می‌دهند. در اینجا متغیرهای  $t$  و  $\omega$  بترتیب زمان و بسامدند. پس تابع  $g(\omega)$  یک تجزیه بسامدی از تابع وابسته به زمان  $f(t)$  است، یا به عبارت دیگر تابع  $g(\omega)$  معرف آن تابع در حوزه بسامد است.

اکنون حالت ویژه‌ای را که در آن تابع  $f(t)$  نشانگر یک قطار موج تکی با زمان دوام محدود  $\tau_0$  است در نظر می‌گیریم. تغییر زمانی این قطار موج با تابع زیر مشخص می‌شود:

$$f(t) = e^{-i\omega_0 t} \quad -\frac{\tau_0}{2} < t < \frac{\tau_0}{2} \quad \text{برای} \quad (29.3)$$

$f(t) = 0$  برای زمانهای دیگر  
با گرفتن تبدیل فوریه آن، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau_0/2}^{+\tau_0/2} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin [(\omega - \omega_0)\tau_0/2]}{\omega - \omega_0} \end{aligned} \quad (30.3)$$

بخش حقیقی تابع  $f(t)$  در شکل ۱۱.۳ نمایش داده شده است، نمودار بیناب توان:

$$G(\omega) = |g(\omega)|^2$$

نیز کشیده شده است. این تابع، برای یک قطار موج با پایان چنین است:

$$G(\omega) = |g(\omega)|^2 = \frac{2 \sin^2 [(\omega - \omega_0)\tau_0/2]}{\pi(\omega - \omega_0)^2} \quad (31.3)$$

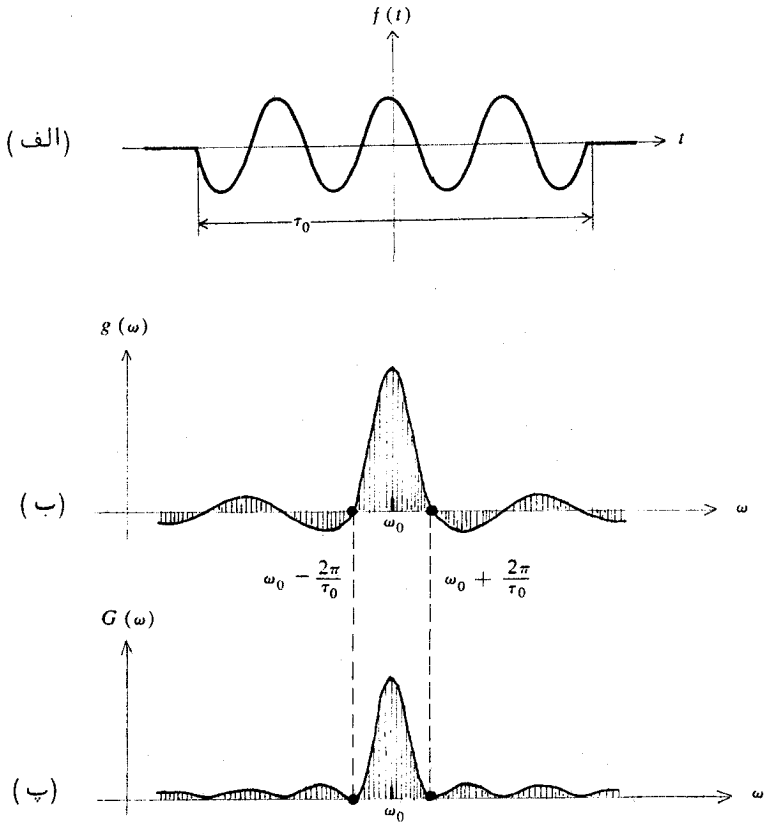
می بینیم که توزیع بینایی برای  $\omega = \omega_0$  حداکثر و برای  $\omega = \omega_0 \pm 2\pi/\tau_0$  صفر می شود. بیشینه و کمینه های ثانوی نیز رخ می دهند که روی نمودار دیده می شوند. بیشتر انرژی در ناحیه بین دو کمینه نخست در دو طرف بیشینه مرکزی در  $\omega_0$  جای دارد. بنابراین "پهنای" توزیع بسامدی،  $\Delta\omega$ ، برابر است با:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau_0} \quad (32.3)$$

یا:

$$\Delta\nu = \frac{1}{\tau_0} \quad (33.3)$$

حال اگر یک رشته قطار موج داشته باشیم که مدت دوام هر یک  $\tau_0$  باشد ولی در زمانهای کاتوره ای رخ دهند، در این صورت بیناب توان مانند بیناب توان



شکل ۱۱.۳ (الف) یک قطار موج پایاندار، (ب) تبدیل فوریه و (پ) بیناب توان آن.

تک تک یادشده در بالاست. از سوی دیگر اگر مدت دوام تپها با هم برابر نباشند، یعنی  $\tau_0$  از یک تپ به تپ دیگر تغییر کند، در این صورت می‌توانیم به یک مقدار متوسط  $\langle \tau_0 \rangle$  بیانیدشیم. شکل دقیق توزیع طیفی با آنچه که مربوط به یک تک‌تپ است متفاوت خواهد بود، ولی پهنای بیناب بسامدی مربوط تقریباً " $\langle \tau_0 \rangle^{-1}$ " است. حال به طور معکوس استدلال می‌کنیم، یعنی اگر چشمه بینایی دارای خطی با پهنای  $\Delta \nu$  باشد، در این صورت زمان همدوسی  $\langle \tau_0 \rangle$  از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$\langle \tau_0 \rangle = \frac{1}{\Delta \nu} \quad (۳۴.۳)$$

و طول همدوسی  $l_c$  مساوی خواهد بود با :

$$l_c = c \langle \tau_0 \rangle = \frac{c}{\Delta \nu} \quad (۳۵.۳)$$

با استفاده از  $\Delta \nu / \nu = |\Delta \lambda| / \lambda$  می‌توانیم طول همدوسی را بر حسب طول موج نیز بیان کنیم :

$$l_c = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} \quad (۳۶.۳)$$

که در آن  $\Delta \lambda$  پهنای خط بینایی به مقیاس طول موج است .

برای مثال، خطوط چشمه‌های بینایی معمولی، مانند لامپهای تخلیه در ناحیه دیدگانی ( $5000 \text{ \AA}$ )، دارای پهنایی حدود یک انگسترمانند. طول همدوسی مربوط، که از معادله (۳۶.۳) نتیجه می‌شود، حدود برابر طول موج یا تقریباً ۲ میلی‌متر است. اگر در یک آزمایش تداخل، اختلاف راه بیشتر از این فاصله باشد، نمایانی فریزها خیلی کم یا صفر می‌شود.

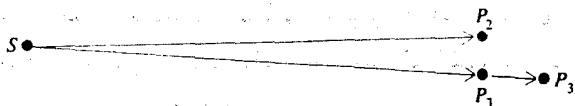
در آزمایش تداخلی که با نور سفید انجام می‌شود و فریزهای درهم‌روی با چشم مشاهده می‌شوند، باید حساسیت بینایی چشم را در نظر گرفت. این حساسیت برای  $5500$  انگسترمان بیشینه است و تقریباً در  $4000$  و  $7000$  انگسترمان صفر می‌شود. بنابراین برای چشم، پهنای بینایی نور سفید، پیرامون  $1500$  انگسترمان بوده و طول همدوسی آن در حدود ۳ یا ۴ طول موج است. این تقریباً برابر تعداد فریزهایی است که در دو طرف فریز صفر در تداخل سنج مایکلسون، با نور سفیدی ماننند نور لامپ تنگستن، می‌توان مشاهده کرد.

در فرین دیگر، برای نور یک لیزر گازی، نازکی پهنای خط در حدود  $10^3$  هرتز یا کمتر است. طول همدوسی متناظر با این پهنای خط برابر است با  $10^{14}/10^3 \approx 10^{11}$  یا  $10^{11}$  برابر طول موج، یعنی حدود ۵۰ کیلومتر. پس با لیزر، نه تنها پدیده‌های تداخلی را در فاصله‌های بسیار دور می‌توان ایجاد کرد، بلکه فریزهای تداخلی را با بدکاربردن دو لیزر مجزا به عنوان چشمه‌ها، می‌توان به وجود آورد. با این حال استفاده از دو لیزر باعث می‌شود که گرته فریزها ثابت نباشد و به‌طور کانونی جابه‌جا

شوند. گرتۀ فریزها در زمانی معادل با زمان همدوسی چشمه‌های لیزری پایدار می‌ماند. این مدت معمولاً حدود  $10^{-3}$  ثانیه است.

### ۷.۳ همدوسی فضایی

در بخش پیش مسئله همدوسی میان دو میدان که پس از پیمودن راه‌های نوری متفاوت به یک نقطه از فضا می‌رسند را بررسی کردیم. اکنون می‌خواهیم مسئله عمومی‌تر همدوسی میان دو میدان در دو نقطه مختلف از فضا را مورد بحث قرار دهیم. این مطلب در بررسی همدوسی میدانهای تابشی چشمه‌های پهن یا غیرنقطه‌ای اهمیت دارد.



شکل ۱۲.۳ نموداری برای نشان دادن همدوسی عرضی و طولی.

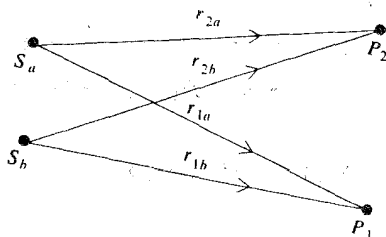
در آغاز یک چشمه نقطه‌ای شبه‌تکفام مثل  $S$  و سه نقطه دریافت کننده  $P_1, P_2, P_3$  را مطابق شکل ۱۲.۳ در نظر می‌گیریم. میدانهای دریافتی در این نقطه‌ها بر ترتیب  $E_1, E_2, E_3$  هستند. دو نقطه  $P_1$  و  $P_3$  با چشمه در یک راستایند و تنها فاصله آنها از  $S$  متفاوت است. بنابراین همدوسی میان میدانهای  $E_1$  و  $E_3$  مقیاسی از همدوسی فضایی طولی میدان است. از طرف دیگر نقاط دریافت کننده  $P_1$  و  $P_2$  از  $S$  هم فاصله‌اند. در این حالت همدوسی میان  $E_1$  و  $E_2$  مقیاسی از همدوسی فضایی عرضی میدان است.

بديهی است که همدوسی طولی به اندازه  $r_{13}$  در مقایسه با طول همدوسی چشمه بستگی دارد، یا به عبارت دیگر همدوسی طولی به  $r_{13} = r_{13}/c$  در مقایسه با زمان همدوسی  $\tau_0$  بستگی دارد، زیرا  $E_3$  همان  $E_1(t)$  است منتهی در لحظه  $t_{13}$  بعد. اگر  $\tau_0 \ll t_{13}$ ، بین  $E_1$  و  $E_3$  همدوسی بالاست، در صورتی که اگر  $t_{13} \gg \tau_0$ ، یا همدوسی وجود ندارد یا کم است.

و اما همدوسی عرضی، اگر  $S$  یک چشمه نقطه‌ای واقعی باشد، در این صورت

وابستگی میدانهای  $E_1$  و  $E_2$  به زمان دقیقاً "یکی است، یعنی با هم کاملاً" همدوسند. اگر واقعاً "نقطه‌ای نبوده و گسترده‌گی فضایی داشته باشد، میان  $E_2$  و  $E_1$  همدوسی پاری وجود خواهد داشت. اینک به بررسی رابطه بین همدوسی عرضی و اندازه چشمه می‌پردازیم.

چون یک چشمه پهن را می‌توان متشکل از چشمه‌های نقطه‌ای مستقل دانست، پیش از بحث در حالت کلی، بهتر است دو چشمه نقطه‌ای را مورد بررسی قرار دهیم. رابطه هندسی بین نقاط چشمه و دریافت در شکل ۱۳.۳ کشیده شده است. دو چشمه نقطه‌ای شبه‌تکفام  $S_a$  و  $S_b$  شبیه یکدیگرند با این تفاوت که فازهای آنها به‌طور کاتوره‌ای و ناوابسته به هم تغییر می‌کنند.



شکل ۱۳.۳ همدوسی عرضی دو چشمه.

داریم:

$$E_1 = E_{1a} + E_{1b}$$

$$E_2 = E_{2a} + E_{2b}$$

که در آنها  $E_{1a}$  سهم چشمه  $S_a$  در میدان در نقطه  $P_1$  است، همین‌طور برای  $E_{1b}$  و جز آن.

تابع همبستگی به‌نحار برای دو نقطه دریافتی چنین است:

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(\tau) &= \frac{\langle E_1(t)E_2^*(t+\tau) \rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} \\ &= \frac{\langle [E_{1a}(t) + E_{1b}(t)][E_{2a}^*(t+\tau) + E_{2b}^*(t+\tau)] \rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (27.3) \\ &= \frac{\langle E_{1a}(t)E_{2a}^*(t+\tau) \rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} + \frac{\langle E_{1b}(t)E_{2b}^*(t+\tau) \rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} \end{aligned}$$

در گام دوم از اینکه  $S_a$  و  $S_b$  ناهمدوسند و بنابراین جهت جملات  $\langle E_{1a}E_{2b}^* \rangle$  و  $\langle E_{1b}E_{2a}^* \rangle$  صفرند استفاده شده است.

اگر فرض شود که هر دو میدان از معادله (۲۲.۳) بخش ۵.۳ پیروی می‌کنند. برای تعیین دو مقدار متوسط زمانی در معادله بالا، می‌توان از روشی که در به دست آوردن معادله (۲۵.۳) به کار برده شد استفاده کرد. ولی باید زمانهای مختلفی که میدانها می‌گیرند تا از چشمه‌های خود به نقاط دریافت برسند در نظر گرفته شوند. وقتی این کار انجام شد، نتیجه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{1}{2}\gamma(\tau_a) + \frac{1}{2}\gamma(\tau_b) \quad (28.3)$$

که در آن:

$$\gamma(\tau) = e^{i\omega\tau} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right)$$

تابع خودبستگی هر یک از چشمه‌هاست، و داریم

$$\tau_a = \frac{r_{1a} - r_{2a}}{c} + \tau$$

$$\tau_b = \frac{r_{1b} - r_{2b}}{c} + \tau$$

بعد از محاسبات جبری، خواهیم داشت:

$$|\gamma_{12}(\tau)|^2 \approx \left( \frac{1 + \cos[\omega(\tau_b - \tau_a)]}{2} \right) \left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_0}\right) \left(1 - \frac{\tau_b}{\tau_0}\right) \quad (29.3)$$

در نتیجه‌گیری فوق فرض شده است که  $\tau_a - \tau_b$  از  $\tau_a$  و  $\tau_b$  کوچکتر است.

محاسبه بالا نشان می‌دهد که همدوسی میان میدانها در دو نقطه دریافت، نه تنها به زمان خوددوسی  $\tau_0$  چشمه‌ها بستگی دارد، بلکه به‌طور دوره‌ای به‌طریقی که جمله کسینوس در معادله ۳۹۰۳ تعیین می‌کند به کمیت  $\tau_b - \tau_a$  نیز وابسته است. به عبارت دیگر، همدوسی میان یک نقطه ثابت دریافت و هر نقطه دیگر، که با دو چشمه ناهمدوس روشن می‌شوند، یک وابستگی فضایی دوره‌ای از خود نشان می‌دهد که تا اندازه‌ای شبیه به یک گرته تداخل است، هرچند که روشنایی کل کاملاً یکنواخت است.

به‌عنوان مثال فرض کنید، نقطه  $P_1$  در شکل ۱۳۰۳ را طوری اختیار کنیم که نسبت به دو چشمه متقارن باشد به طوری که  $r_{1a} = r_{1b}$  پس داریم:

$$\tau_b - \tau_a = (r_{2a} - r_{2b})/c \quad \text{یا تقریباً "}$$

$$\tau_b - \tau_a \approx \frac{sl}{cr} \quad (40.3)$$

که در آن  $s$  فاصله بین دو چشمه،  $l$  فاصله بین دو نقطه دریافت و  $r$  فاصله متوسط چشمه‌ها از نقاط دریافت است. این نتیجه تقریبی با این فرض به دست آمده است که  $r$  از  $s$  و  $l$  خیلی بزرگتر است. آرایش هندسی مانند آزمایش تداخل یانگ است. در شکل ۱۴۰۳ تغییرات  $|\gamma_{12}|$  به صورت یک منحنی که دارای کمینه و بیشینه است نشان داده شده است. در مرکز که  $P_1$  و  $P_2$  روی هم قرار دارند همدوسی حداکثر است و در هر طرف خط مرکزی به فاصله  $l_t$ ، در نقطه‌ای که  $\cos[\omega(\tau_b - \tau_a)] = -1$  همدوسی صفر می‌شود، یعنی:

$$\omega(\tau_b - \tau_a) = \frac{\omega sl_t}{cr} = \pi \quad (41.3)$$

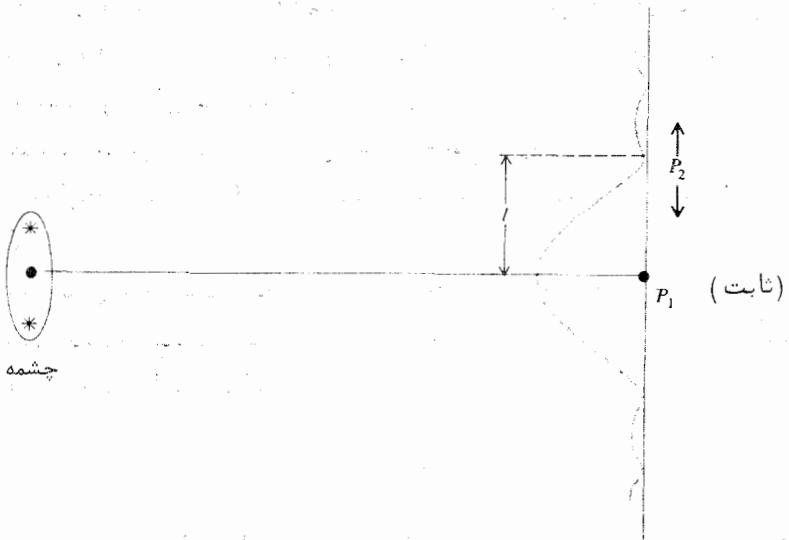
و چون  $\omega = 2\pi c/\lambda$ ، نتیجه می‌گیریم که:

$$l_t = \frac{r\lambda}{2s} \quad (42.3)$$

بر حسب فاصله زاویه‌ای  $\theta_s$  دو چشمه، که از نقطه دریافت  $P_1$  دیده می‌شود، داریم:

$$\theta_s \cong s/r$$

$$l_t = \frac{\lambda}{2\theta_s} \quad (43.3)$$



شکل ۱۴.۳ نمودار همدوسی عرضی یک چشمه پهن.

این تقریباً "پهنای ناحیه‌ای است که در آن همدوسی بین  $P_1$  و  $P_2$  زیاد است و آن را پهنای همدوسی عرضی می‌نامیم.

چشمه‌های پهن، قضیه وان‌سیتر - زرنیک

مسئله ریاضی محاسبه همدوسی بین دو نقطه، وقتی چشمه اصلی مانند سطح خورشید یا یک لامپ معمولی پهن باشد، نسبتاً پیچیده است. در این مورد قضیه مفیدی که آن را بدون اثبات می‌گذاریم (۵) به نام قضیه وان‌سیتر - زرنیک وجود دارد. طبق این قضیه درجه مختلط همدوسی بین یک نقطه ثابت  $P_1$  و یک نقطه متغیر  $P_2$  در صفحه‌ای که به وسیله یک چشمه پهن روشن می‌شود مساوی با دامنه مختلطی است که در  $P_2$ ، به وسیله یک موج کروی همگراشونده در  $P_1$  که از دهانه‌های همشکل و هم‌اندازه با چشمه می‌گذرد، به وجود می‌آید. این درست همان

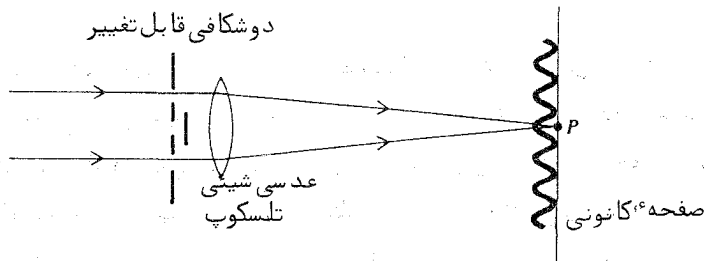
محاسبه‌ای است که برای تعیین گرتنه‌های پراش از دهانه‌های متفاوت انجام می‌شود. (این محاسبه در فصل پنجم ارائه خواهد شد). مثلاً، اگر چشمه دایره‌ای شکل باشد، در این صورت پهنای همدوسی عرضی برابر است با آنچه که از معادله<sup>۴</sup> (۴۳.۳) حاصل می‌شود که به جای  $\frac{1}{P}$  در عدد ۲۲٫۱ (حاصل از نظریه پراش) ضرب می‌شود. در فصل پنجم خواهیم دید که این عدد ریشه یک تابع بسل است. بنابراین برای یک چشمه دایره‌ای، پهنای همدوسی عرضی چنین است:

$$l_e = \frac{1.22\lambda}{\theta_s} \quad (44.3)$$

طبق نتیجه بالا، اگر در آزمایش تداخل یانگ از یک روزنه گرد و یک دوشکافی استفاده شود، برای اینکه فریزهای تداخلی به‌طور آشکار مشاهده شوند فاصله بین شکافها باید کمتر از پهنای همدوسی عرضی باشد. به عنوان یک مثال عددی، فرض کنید چشمه نور از روزنه‌ای با قطر یک میلی‌متر تشکیل شده و طول موج نور آن ۶۰۰ نانومتر باشد، در این صورت برای پهنای همدوسی عرضی در فاصله یک متری از چشمه، از معادله<sup>۴</sup> (۴۴.۳)، حدود ۷ میلی‌متر به دست می‌آید.

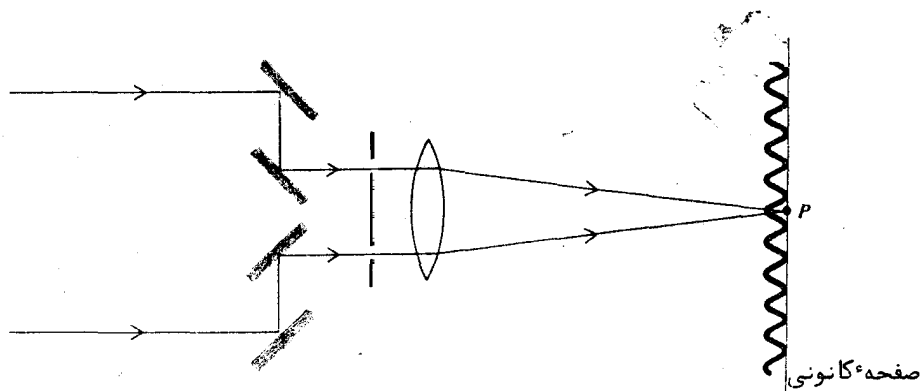
### اندازه‌گیری قطر ستارگان

چون فاصله ستاره‌ها از زمین زیاد است، قطر ظاهری آنها خیلی کم است و از یکصدم ثانیه کمانی هم تجاوز نمی‌کند. بنابراین پهنای همدوسی عرضی نور یک ستاره که از زمین رصد می‌شود، حدود چندین متر می‌باشد. یکی از روشهای تعیین قطر زاویه‌ای یک چشمه دور، استفاده از یک آرایش تداخلی دوشکافی است که در آن بتوان فاصله دوشکاف را، مطابق شکل ۱۵.۳، تغییر داد. ابتدا پهنای همدوسی عرضی،



شکل ۱۵.۳ روش تولید فریزهای تداخلی از یک چشمه دور.

که همان جدایی شکافها در زمان ناپدیدي فريزه‌هاي تداخلي است، اندازه‌گيري مي‌شود، سپس به کمک معادله  $(۴۴.۳)$  قطر زاويه‌اي چشمه محاسبه مي‌شود. مايکلسون اولين کسي بود که براي تعيين قطر ستاره‌ها از روش تداخل‌سنجي استفاده کرد. وي براي افزايش فاصلهء ميان شکافها، از چند آينه استفاده کرد، ( شکل ۱۶.۳ ). يکي از بزرگ‌ترين ستارگاني که قطر زاويه‌اي آن اندازه‌گيري شد ابط الجوزا "Betelgeuse" بود و براي آن  $۰.۴۷$  رده ثانيهء کماني به دست آمد. با داشتن فاصلهء اين ستاره از زمين، قطر خطي آن طبق اين اندازه‌گيري  $۲۸۰$  برابر خورشيد است.

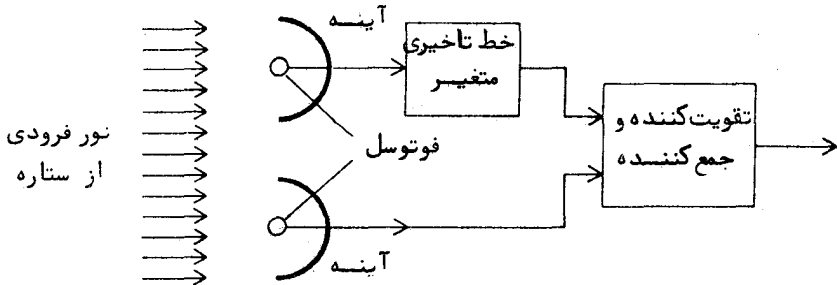


شکل ۱۶.۳ تداخل‌سنج اختري مايکلسون.

### ۸.۳ تداخل‌سنجي شدتي

يک روش تداخل‌سنجي، مبتني بر همبستگيهاي شدتي بين دو نقطه، به‌وسيلهء هانبري - براون "Hanbury-Brown" و تويس "Twiss" ابداع شده است. با اين روش که به تداخل‌سنجي شدتي مشهور است، مي‌توان قطر زاويه‌اي بعضي از ستارگان را که به علت کوچکي با روش مايکلسون قابل اندازه‌گيري نيست، تعيين کرد. در شکل ۱۷.۳، ويژگيهاي اساسي تداخل‌سنج هانبري - براون و تويس





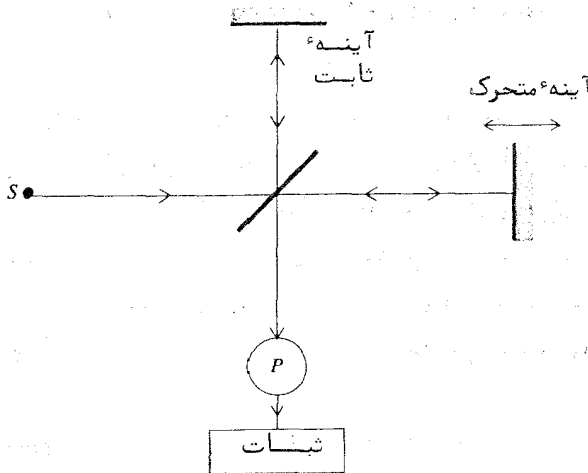
شکل ۱۷۰۳ تداخل‌سنجی شدتی هانیوری-براون و تویس.

نشان داده شده است. در این دستگاه به دو آینه احتیاج است و لازم نیست کیفیت نوری آنها خیلی خوب باشد، (در عمل از آینه‌های نورافکن استفاده می‌شود). نور روی فتوسلهایی که برونداد آنها با شدتهای لحظه‌ای  $|E_1|^2$  و  $|E_2|^2$  در دو آینه متناسب است، گانونی می‌شود. مطابق شکل، سیگنالهای فتوسلها وارد یک خط تاخیری و یک تقویت‌کننده و جمع‌کننده<sup>۱</sup> الکترونیکی می‌شود. برونداد با متوسط حاصل ضرب  $\langle |E_1|^2 |E_2|^2 \rangle$  متناسب است. کمیت اخیر را تابع هم‌دوسی مرتبه دوم<sup>۲</sup> دو میدان می‌نامند.

تابع هم‌دوسی مرتبه دوم نیز، مانند تابع معمولی (مرتبه اول) که بحث آن شد، تداخل پدید می‌آورد. اندازه‌گیری هم‌دوسی مرتبه دوم بین دو نقطه دریافت  $P_1$  و  $P_2$  در مورد یک چشمه پهن و دور، پهنای هم‌دوسی عرضی، و در نتیجه قطر زاویه‌ای چشمه را به دست می‌دهد. برتری عمده<sup>۳</sup> روش تداخل‌سنجی شدتی در این است که سوار کردن آینه‌ها به دقت چندانی نیاز ندارد و کیفیت اپتیکی آنها نیز زیاد مهم نیست. برای اطلاع بیشتر در این زمینه، خواننده می‌تواند به منابع (۱۵) و (۱۵) که در پایان کتاب آمده است مراجعه کند.

## ۹.۳ بیناب‌نمایی تبدیل فوریه‌ای

فرض کنید یک پرتو نور را با روشی مانند تداخل‌سنج مایکلسون، به دو پرتوی همدوس تقسیم کرده، بعد از طی راه‌های نوری متفاوت با هم همراه کنیم، (شکل ۱۸.۳) اگر نور تکفام نبوده بلکه دارای یک ترکیب بینایی که با تابع  $G(\omega)$  نشان داده می‌شود باشد، در این صورت، شدت در  $P$  به آن بیناب بخصوص بستگی دارد. با ترسیم شدت برحسب اختلاف راه نوری، بیناب توان  $G(\omega)$  نتیجه می‌شود. این روش یافتن بیناب را بیناب‌نمایی تبدیل فوریه‌ای می‌نامند.



شکل ۱۸.۳ آرایشی برای بیناب‌نمایی تبدیل فوریه‌ای.

در کاربرد فعلی، بهتر است به‌جای اینکه توزیع بیناب را برحسب بسامند زاویه‌ای  $\omega$  نشان دهیم، آن را برحسب عدد موج  $k$  بیان کنیم. چون  $\omega$  و  $k$  با یکدیگر متناسبند (در خلا  $\omega = ck$ )، به جای  $G(\omega)$  می‌توانیم  $G(k)$  را به‌کار ببریم. اکنون با مراجعه به معادله (۳.۳)، که شدت را در نقطه  $P$  برای نور تکفام معین می‌کند، می‌بینیم که شدت برای نور ناتکفام، از جمع‌زنی بر روی سرتاسر بیناب به‌دست می‌آید، یعنی:

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \int_0^{\infty} (1 + \cos kx) G(k) dk \\
 &= \int_0^{\infty} G(k) dk + \int_0^{\infty} G(k) \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} dk \\
 &= \frac{1}{2}I(0) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(k)e^{ikx} dk
 \end{aligned}$$

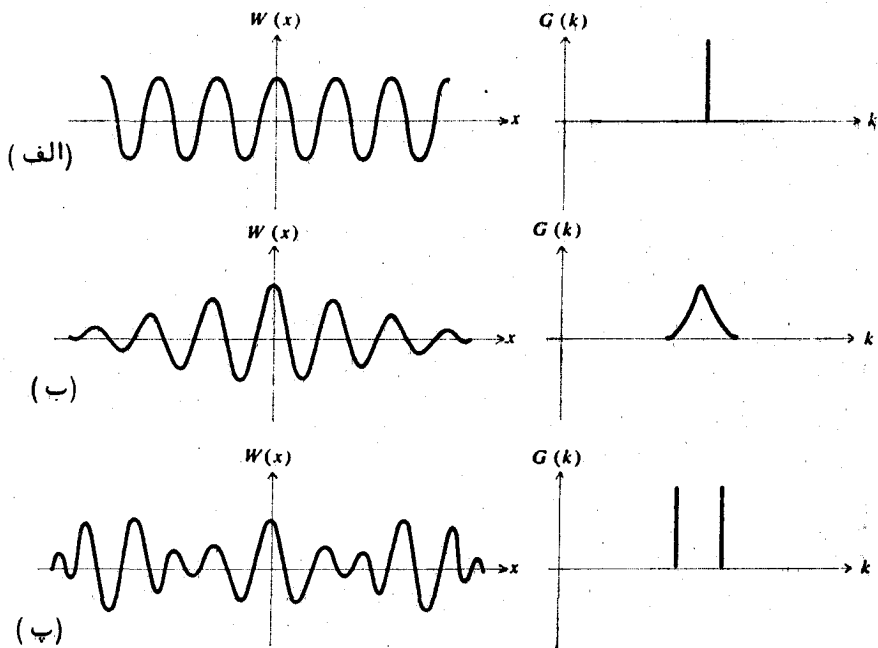
یا:

$$W(x) = 2I(x) - I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} G(k) dk \quad (۴۵.۳)$$

که در آن  $I(0)$  شدت مربوط به اختلاف راه صفر است. بنابراین  $W(x)$  و  $G(k)$  یک جفت تبدیل فوریه تشکیل می‌دهند، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$G(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(x)e^{-ikx} dx \quad (۴۶.۳)$$

یعنی، بیناب توان  $G(k)$  تبدیل فوریه تابع شدت  $W(x) = 2I(x) - I(0)$  است. این روش بیناب‌سنجی، بویژه برای بررسی جذب فروقرمز گازها که بینابهای بسیار پیچیده‌ای دارند، به‌کاربرده می‌شود. حسن دیگر این روش، استفاده موثر از نور موجود می‌باشد. این توانایی، روش تبدیل فوریه‌ای را برای بررسی چشمه‌های خیلی ضعیف فوق‌العاده ارزشمند می‌سازد. محاسبه عملی تبدیل فوریه تابع شدت اغلب به کمک کامپیوترهای سریع انجام می‌شود. چند نمونه از توابع شدت و بینابهای وابسته در شکل ۱۹.۳ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۹.۳، توابع شدت و بینابهای آنها. (الف) یک خط تکفام، (ب) یک خط پهن تکسی، (پ) دو خط نازک، (بینابهای مربوط به مقادیر مثبت  $k$  نشان داده شده‌اند).

### مسائل

۱۰۳. گرته تداخلی را که از به‌کاربردن سه شکاف همانند، به جای دو شکاف، در آزمایش ینگ حاصل می‌شود محاسبه کنید. (فرض کنید فاصله شکافها مساوی باشند). نموداری تقریبی رسم کنید.
۲۰۳. در یک آزمایش تداخل دو شکافی ینگ، فاصله پرده سفید تا شکافها ۲ متر و طول موج نور ۶۰۰ نانومتر است. اگر بخواهیم فاصله فریزها از یکدیگر یک میلی‌متر باشد، جدایی شکافها را به دست آورید.

- ۳۰۳ در مسئله ۲۰۳، یک تیغه نازک شیشه‌ای ( $n = 1.5$ ) به ضخامت ۰.۵ میلی‌متر را جلوی یکی از شکافها قرار می‌دهیم. جایجایی عرضی فریزی روی پرده چقدر خواهد بود؟
- ۴۰۳ در آزمایش درهم‌روی تک آینه‌ای لوید، زاویه فرودی  $\alpha - 90^\circ$  است، که در آن  $\alpha$  خیلی کوچک است. جدایی فریزها را بر حسب  $\alpha$  و طول موج  $\lambda$  به دست آورید، فرض کنید آینه در نیمه راه بین محل شکافها و پرده باشد.
- ۵۰۳ زاویه راس یک دومنشوری فرنل،  $2\alpha - 180^\circ$  است، که در آن  $\alpha$  خیلی کوچک است. نمارشکست آن  $n$ ، فاصله چشمه از دومنشوری  $D$  و فاصله دومنشوری از پرده  $D'$  است. با به کار بردن تقریبهای لازم، جدایی فریزها را به دست آورید.
- ۶۰۳ تداخل سنج مایکلسون را می‌توان برای اندازه‌گیری نمارشکست یک گاز به کار برد. به این طریق که گاز به تدریج به داخل سلولی شیشه‌ای با طول  $l$  که در یکی از راهها قرار گرفته و قبلاً تخلیه شده است وارد می‌شود و فریزهای تداخلی در میدان دید عبور می‌کند. نشان دهید که اختلاف راه نوری موثر بین وضعیتهایی که لوله پر از گاز و خالی است،  $2l(n - 1)$  است، که در آن  $n$  نمارشکست گاز است. همچنین نشان دهید که همزمان با پرکردن سلول، تعداد  $N = 2l(n - 1)/\lambda$  فریز در میدان دید عبور می‌کند. اگر گاز مورد نظر هوا ( $n = 1.0003$ ) و طول سلول ۱۰ سانتی‌متر باشد و از نور زرد سدیم ( $\lambda = 590$  نانومتر) استفاده شود، تعداد فریزهایی که عبور می‌کنند چند است.
- ۷۰۳ برای به دست آوردن نور تقریباً تک‌گام، نور سفید یک چشمه از یک صافی عبور داده می‌شود. اگر پهنای بینایی نوری که از صافی عبور می‌کند ۱۰ نانومتر باشد، طول همدوسی و زمان همدوسی آن را پیدا کنید. طول موج متوسط نور ۶۰۰ نانومتر است.

۸۰۳ پهنای خط نور لیزر هلیوم - نئون را که طول همدوسی آن ۵ کیلومتر است بر حسب هرتز و نانومتر به دست آورید. طول موج نور را ۶۳۳ - نانومتر فرض کنید.

۹۰۳ پهنای همدوسی عرضی نور آفتاب چقدر است؟ قطر ظاهری خورشید ۵ درجه و طول موج متوسط مؤثر ۶۰۰ نانومتر است.

۱۰۰۳ از یک روزنه گرد به قطر ۵ میلی متر به عنوان چشمه نور برای آزمایش تداخل دو شکافی یانگ استفاده می شود. در این آزمایش یک لامپ سدیم ( $\lambda = 590$  نانومتر) به کار برده می شود. اگر فاصله چشمه از دو شکافی ۵ متر باشد، حداکثر جدایی شکافها چقدر باشد تا فریزهای تداخلی در شرف ناپدید شدن باشند.

۱۱۰۳ یک لامپ تنگستن را که دارای رشته مستقیمی به قطر ۱ره میلی متر است، به عنوان چشمه در یک آزمایش تداخل به کار می بریم. این لامپ باید در چه فاصله ای از شکافها قرار گیرد، تا پهنای همدوسی عرضی لااقل یک میلی متر باشد؟ اگر از یک دو شکافی استفاده شود چرا باید شکافها موازی رشته لامپ باشند؟

۱۲۰۳ بیناب توان یک قطار موج میرا را محاسبه کنید:

$$f(t) = A \exp(-at - i\omega_0 t), \quad t \geq 0$$

$$f(t) = 0, \quad t < 0$$

۱۳۰۳ نشان دهید، بیناب توان یک تپ گاوسی:

$$f(t) = A \exp(-at^2 - i\omega_0 t)$$

خود نیز تابعی گاوسی است که بسامد مرکز آن  $\omega_0$  است.

## فصل چهارم

تداخل چند پرتوی

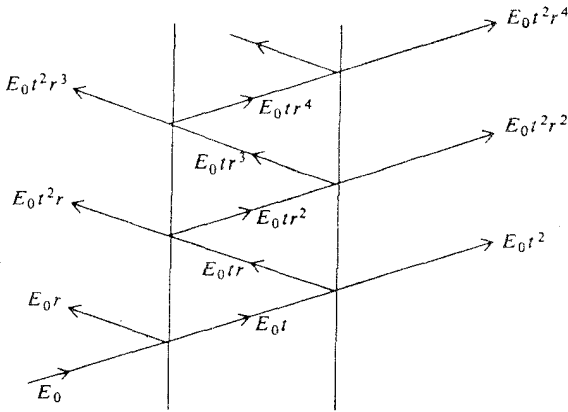
#### ۱.۴ تداخل چندپرتوی

تا اینجا بررسی ما درباره تداخل، به درهم روی دو پرتو مربوط بوده است. اکنون حالت عمومی تر تداخل پرتوهای متعدد را مورد بحث قرار می دهیم.

متداولترین روش برای تولید تعداد زیادی پرتوی هم دوس، روش تقسیم دامنه است. تقسیم دامنه با بازتابهای متعدد بین دو سطح موازی با بازتابندگی پستیاری صورت می گیرد. این دو سطح موازی ممکن است آینه های نیم شفاف، دو رخ یک لایه یا دو رخ یک تیغه شفاف باشند. شکل ۱.۴ وضع مورد نظر را روشن می سازد. در اینجا برای سادگی، صفحات یاد شده دو آینه نیم بازتابنده نازک یکسانند. از پرتوی اولیه روی صفحه اول، جزئی بازتاب پیدا می کند و جزئی دیگر عبور می کند. بخش تراکسیلیده، مطابق شکل، بارهنا میان دو صفحه به پس و پیش بازتاب پیدا می کند.

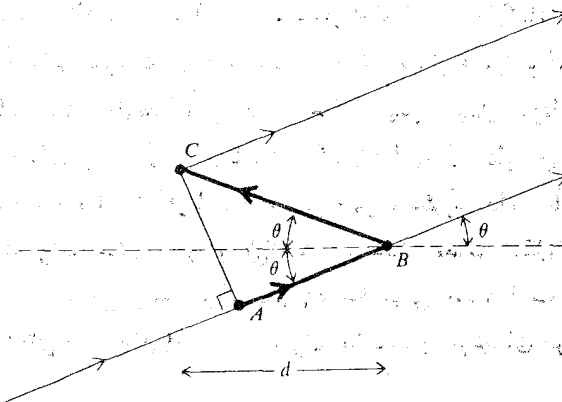
ضریب بازتاب را با  $r$  و ضریب تراکسیل را با  $t$  نشان می دهیم. بنابراین اگر در محیط میان دو صفحه بازتابنده جذبی صورت نگیرد، دامنه های پرتوهای که از بازتابهای پی در پی داخلی به وجود می آیند بترتیب، مطابق شکل، برابر با  $E_0 t$ ،  $E_0 t^2$ ،  $E_0 t^4$ ، ... می شوند، در اینجا  $E_0$  دامنه پرتوی اولیه است. در نتیجه دنباله  $E_0 t^2$ ،  $E_0 t^4$ ،  $E_0 t^6$ ، ... معرف دامنه های پرتوهای تراکسیلیده است.





شکل ۱.۴ مسیر پرتوهای نور در بازتابهای متعدد بین دو آینه موازی (برای سادگی، آینه‌ها بینهایت نازک فرض شده‌اند).

با مطالعه شکل ۲.۴، بسادگی می‌توان نشان داد که اختلاف راه هندسی بین دو پرتو تراگیلیده پایی برابر  $2d \cos \theta$  است، که در آن  $d$  فاصله میان دو صفحه بازتابنده و  $\theta$  زاویه بین هر پرتوی بازتابنده داخلی و خط عمود بر سطح است. پس اختلاف فاز بین هر دو پرتوی پایی از رابطه زیر به دست می‌آید:



شکل ۲.۴ نمایش اختلاف مسیر بین دو پرتوی متوالی.

$$\delta = 2kd \cos \theta = \frac{4\pi}{\lambda} d \cos \theta \quad ( ۱.۴ )$$

که در آن  $\lambda$  طول موج در محیط بین دو آینه است. این کمیت بر حسب طول موج در خلا  $\lambda_0$ ، چنین خواهد بود:

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} nd \cos \theta \quad ( ۲.۴ )$$

در این رابطه،  $n$  نمار شکست محیط میان صفحات بازتابنده است. اگر این اختلاف فاز را به صورت سازه  $e^{i\delta}$  در نظر بگیریم و دامنه‌های پرتوهای تراگسیلیده را جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$E_T = E_0 t^2 + E_0 t^2 r^2 e^{i\delta} + E_0 t^2 r^4 e^{2i\delta} + \dots$$

این یک سری هندسی با نسبت  $r^2 e^{i\delta}$  است، از این رو

$$E_T = \frac{E_0 t^2}{1 - r^2 e^{i\delta}}$$

بدین سان شدت  $I_T = |E_T|^2$  نور تراگسیلیده برابر می‌شود با:

$$I_T = I_0 \frac{|t|^4}{|1 - r^2 e^{i\delta}|^2} \quad ( ۳.۴ )$$

که در آن  $I_0 = |E_0|^2$  شدت پرتو فزودی است.

چون ممکن است تغییر فازی در بازتاب رخ دهد،  $r$  معمولاً "باید عددی مختلط باشد و می‌توانیم آن را به صورت:

$$r = |r| e^{i\delta_r/2} \quad ( ۴.۴ )$$

بنویسیم، که در آن  $\delta_r/2$  تغییر فاز در یک بازتاب است. همانگونه که قبلاً در بخش ۷.۲ نشان دادیم، برای یک دی‌الکتریک، بسته به این که نمارشکست چه باشد، تغییر فاز یا صفر است یا  $180^\circ$  درجه، ولی برای یک لایه فلزی، تغییر فاز هر مقداری می‌تواند باشد ( به بخش ۶.۶ نگاه کنید ).

اگر  $R$  توان بازتاب و  $T$  توان تراگسیل یک سطح باشد، رابطه آنها با  $r$  و  $t$

چنین خواهد بود:

$$R = |r|^2 = rr^* \quad (5.4)$$

$$T = |t|^2 = tt^*$$

که در آن علامت ستاره نشانگر مزدوج مختلط است. پس معادله<sup>۶</sup> (۳.۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$I_T = I_0 \frac{T^2}{|1 - Re^{i\Delta}|^2} \quad (6.4)$$

در اینجا، اختلاف فاز کل بین دوپرتوی پیاپی را با  $\Delta$  نمایش داده‌ایم:

$$\Delta = \delta + \delta_r \quad (7.4)$$

اکنون داریم:

$$\begin{aligned} |1 - Re^{i\Delta}|^2 &= (1 - Re^{i\Delta})(1 - Re^{-i\Delta}) = 1 - R(e^{i\Delta} + e^{-i\Delta}) + R^2 \\ &= 1 - 2R \cos \Delta + R^2 = (1 - R)^2 \left[ 1 + \frac{4R^2}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{\Delta}{2} \right] \end{aligned}$$

ازاین‌رو، فرمول شدت به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$I_T = I_0 \frac{T^2}{(1 - R)^2} \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\Delta}{2}} \quad (8.4)$$

جمله<sup>۷</sup> آخر:

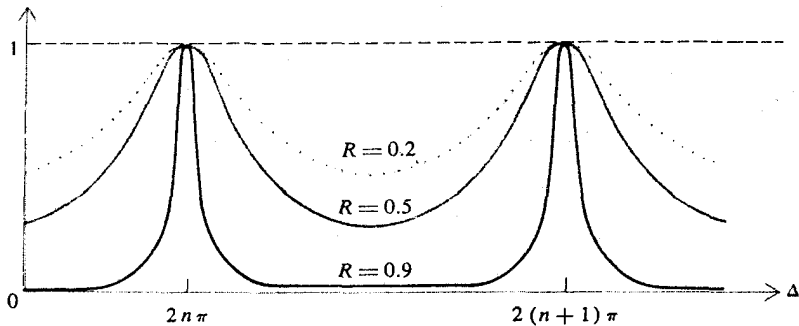
$$\frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\Delta}{2}}$$

به نام تابع ایری *Airy* شناخته می‌شود. کمیت:

$$F = \frac{4R}{(1 - R)^2} \quad (9.4)$$

را ضریب ظرافت می‌نامند و مقیاس باریکی فریزهای تداخلی است.

تغییرات کلی تابع ایری در شکل ۳.۴ نشان داده شده است. منحنیها برای مقادیر مختلف توان بازتاب  $R$  کشیده شده‌اند و توزیع شدت فریزها را در تداخل پرتوهای متعدد نشان می‌دهند.



شکل ۳.۴ نمودارهای تابع ایری با توزیع شدت فریزها در تداخل چندپرتوی.

اگر در تابع ایری شناسه سینوس،  $\Delta/2$  مضرب صحیحی از  $\pi$  باشد  $F$  هرچه باشد، تابع یادشده بیشینه، و برابر یک خواهد بود. اگر توان بازتاب  $R$  خیلی کوچک باشد،  $F$  نیز کوچک بوده و فریزهای تداخلی پهن و غیر قابل تشخیص خواهند بود. در صورتی که اگر  $R$  به یک نزدیک باشد، مقدار  $F$  بزرگ و فریزها نازک می شوند. شرط بیشینه فریز  $\Delta/2 = N\pi$  است، که در آن  $N$  عددی است صحیح، این شرط به کمک روابط (۲.۴) و (۷.۴) به:

$$2N\pi = \frac{4\pi}{\lambda_0} nd \cos \theta + \delta_r \quad (10.4)$$

تبدیل می شود، در این رابطه عدد صحیح  $N$  را ردیف تداخل می نامند. این عدد با اختلاف راه معادل بین دو پرتوی پی در پی، که بر حسب طول موج بیان شود، مساوی است.

در مبحث بالا دو سطح بازتابنده مشابه فرض شده بودند. در حالت کلی تر که ضرایب بازتاب دو سطح متفاوتند، یعنی  $r_1 = |r_1|e^{i\delta_1}$  و  $r_2 = |r_2|e^{i\delta_2}$  بسادگی می توان نشان داد که فرمولهای قبل در صورتی درستند که روابط زیر برقرار باشند:

$$\begin{aligned} T &= |t_1||t_2| = \sqrt{T_1 T_2} \\ R &= |r_1||r_2| = \sqrt{R_1 R_2} \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$\delta_r = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \quad (12.4)$$

مقادیر بیشینه و کمینه  $I_T$  با قراردادن  $\Delta$ ، بترتیب مساوی صفر و  $180^\circ$  درجه حاصل می‌شوند، و تراگسیلهای نسبی وابسته به آنها چنین‌اند:

$$\mathcal{F}_{\max} = \frac{I_{T(\max)}}{I_0} = \frac{T^2}{(1-R)^2} \quad (13.4)$$

$$\mathcal{F}_{\min} = \frac{I_{T(\min)}}{I_0} = \frac{T^2}{(1+R)^2} \quad (14.4)$$

اگر  $A$  کسری از انرژی باشد که در هر بازتاب جذب می‌شود، با در نظر گرفتن پایستگی انرژی، باید داشته باشیم:

$$A + R + T = 1$$

ولی اگر جذب وجود نداشته باشد،  $R + T = 1$  خواهد بود و طبق معادله (13.4)  $\mathcal{F}_{\max} = 1$  خواهد شد، بدین معنی که، حتی اگر  $R$  نزدیک به یک باشد بیشینه شدت فریزهای تراگسیلی، برابر شدت نور فرودی است. در عمل  $A$  هرگز صفر نیست، و بیشینه شدت فریزهای تراگسیلی همیشه کمی از واحد کمتر است، یعنی:

$$\mathcal{F}_{\max} = \left( \frac{1-A-R}{1-R} \right)^2 \quad (15.4)$$

#### ۲.۴ تداخل سنج فابری-پرو

در دستگاه تداخل سنجی که به وسیله فابری و پرو در ۱۸۹۹/۱۲۷۸ ابداع شد، از درهم‌روی پرتوهای متعدد استفاده می‌شود. این دستگاه برای اندازه‌گیری دقیق طول موج و بررسی ساخت ریز خطوط بیناب به کار برده می‌شود. تداخل سنج فابری-پرو اساساً شامل دو تیغه تخت<sup>۱</sup> اپتیکی نیم‌بازتابنده است که از شیشه یا کوارتز

۱- تداخل سنج کروی فابری - پرو اولین بار به وسیله کنه Connes معرفی شد و در آن سطوح بازتابنده کروی کاو به کار برده می‌شود.

تشکیل شده و سطوح بازتابنده آنها دقیقاً موازی هم قرار داده می شوند. اگر فاصله تیغهها را بتوان به طور مکانیکی تغییر داد، دستگاه تداخل سنج نامیده می شود، لیکن اگر فاصله تیغهها با فاصله گذار ثابت نگهداشته شود، آن را سنج می نامند. برای به دست آوردن فریزهای نازک، سطوح بازتابنده باید فوق العاده تخت و با یکدیگر موازی باشند. تیغه تخت اپتیکی معمولی، که تختی آن حدود  $\frac{1}{4}$  طول موج است برای به کار بردن در تداخل سنج فابری - پرو مناسب نیست. تختی تیغهها باید حدود  $\frac{1}{20}$  تا  $\frac{1}{100}$  طول موج باشد.

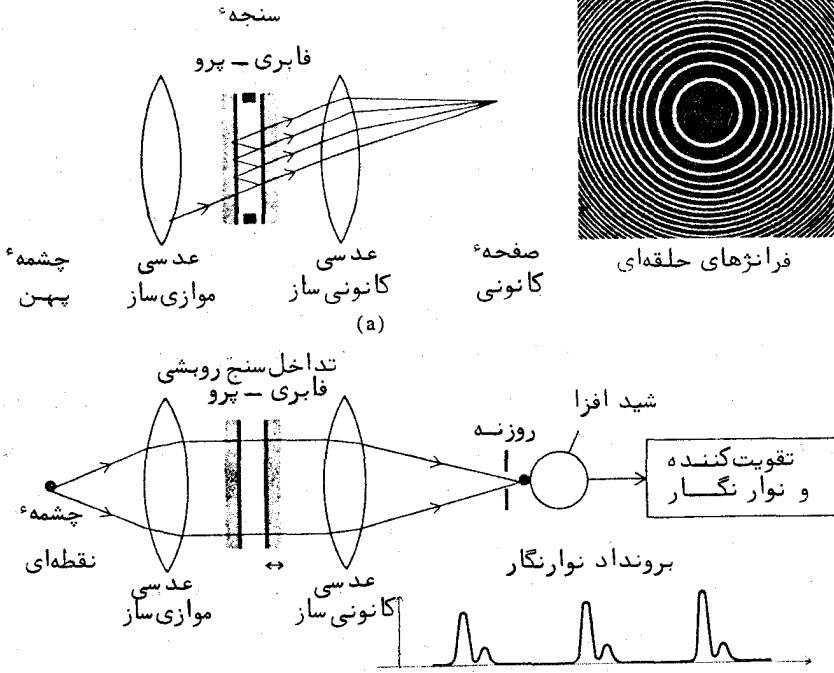
هنگام استفاده از تداخل سنج، مطابق شکل ۴.۴ (الف)، آن را بین یک عدسی موازی ساز و یک عدسی کانونی ساز قرار می دهند. اگر چشمه نور پهن باشد، در صفحه کانونی عدسی کانونی ساز، فریزهای دایره ای هم مرکز ظاهر می شوند، (شکل ۵.۴). این حلقهها را می توان یا با چشم دید و یا از آنها عکسبرداری کرد. هر حلقه به یک مقدار ثابت مربوط است و به این دلیل فریزهای دایره ای را فریزهای همشیب هم می نامند. یک روش دیگر به کار بردن تداخل سنج، موسوم به روش روبشی است که در آن به جای یک چشمه پهن، مطابق شکل ۴.۴ (ب)، از یک چشمه نقطه ای یا یک روزنه گرد استفاده می شود. چشمه طوری قرار داده می شود که تنها یک لکه، یعنی مرکز سیستم حلقه ای، روی صفحه کانونی خروجی ظاهر شود. روبش با تغییر دادن جدایی آینهها، به طور مکانیکی، یا به طور اپتیکی، مثلاً با تغییر دادن فشار هوا، انجام می شود. شدت در مرکز حلقه معمولاً با روش فتوالکترونیک نگاشته می شود. این نگاره، اساساً نمودار تغییرات تابع ایری  $(1 + F \sin^2 \Delta/2)^{-1}$  است، یا بهتر بگوییم، حاصل جمع چنین توابعی برای هر مولفه بسامدی است. یک چنین نگاره ای در شکل ۴.۴ (ب) نشان داده شده است.

بنا به تعریف، فاصله بین دو ردیف تداخلی پی در پی را گستره آزاد بینایی دستگاه تداخل سنج فابری - پرو می نامند. گستره آزاد بینایی بر حسب پارامتر  $\Delta$  متناظر است با

$$\Delta_{N+1} - \Delta_N = 2\pi$$

بدین سان، از معادلات (۲.۴) و (۷.۴) نتیجه می شود که:

$$\omega_{N+1} - \omega_N = \frac{\pi c}{nd \cos \theta}$$



شکل ۴.۴ (الف) آرایش سنجۀ فابری-پرو، (ب) آرایش تداخل سنج روبشی .

یا :

$$\nu_{N+1} - \nu_N = \frac{c}{2nd \cos \theta}$$

اگر  $\theta$  کوچک باشد، گستره آزاد بینایی بر حسب بسامد تقریباً برابر خواهد بود با :

$$\nu_{N+1} - \nu_N \cong \frac{c}{2nd} \quad ( ۱۶.۴ )$$

۳.۴ جداکنندگی دستگاههای فابری - پرو

بینایی را در نظر بگیرید که از دو بسامد نزدیک به هم  $\omega$  و  $\omega'$  تشکیل شده است، شکل ۶.۴ منحنی توزیع شدت از برهم نهادن دو دسته فریز به وجود آمده است. در اینجا دو مولفه هم شدت فرض شده اند. گرهه فریزی از جمع دو تابع ابری به دست می آید:

$$I_T = I_0 \left(1 + F \sin^2 \frac{\Delta}{2}\right)^{-1} + I_0 \left(1 + F \sin^2 \frac{\Delta'}{2}\right)^{-1} \quad (17.4)$$

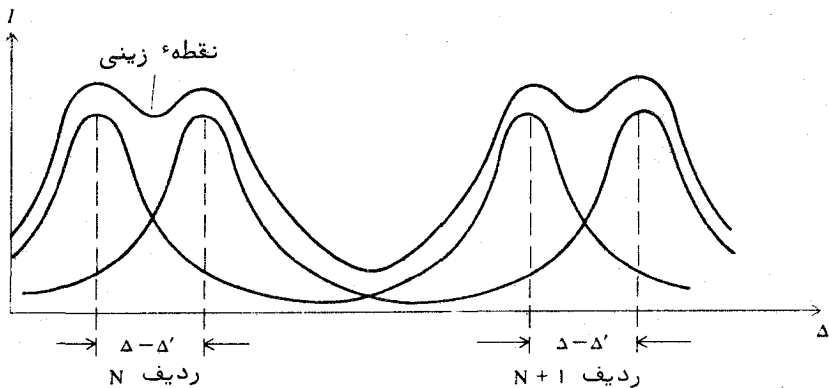
که در آن  $F$  به وسیله معادله ۹.۴ تعریف شده و:

$$\Delta \approx \delta_r + 2kd = \delta_r + \frac{2\omega d}{c}$$

و

$$\Delta' \approx \delta_r + 2k'd = \delta_r + \frac{2\omega' d}{c}$$

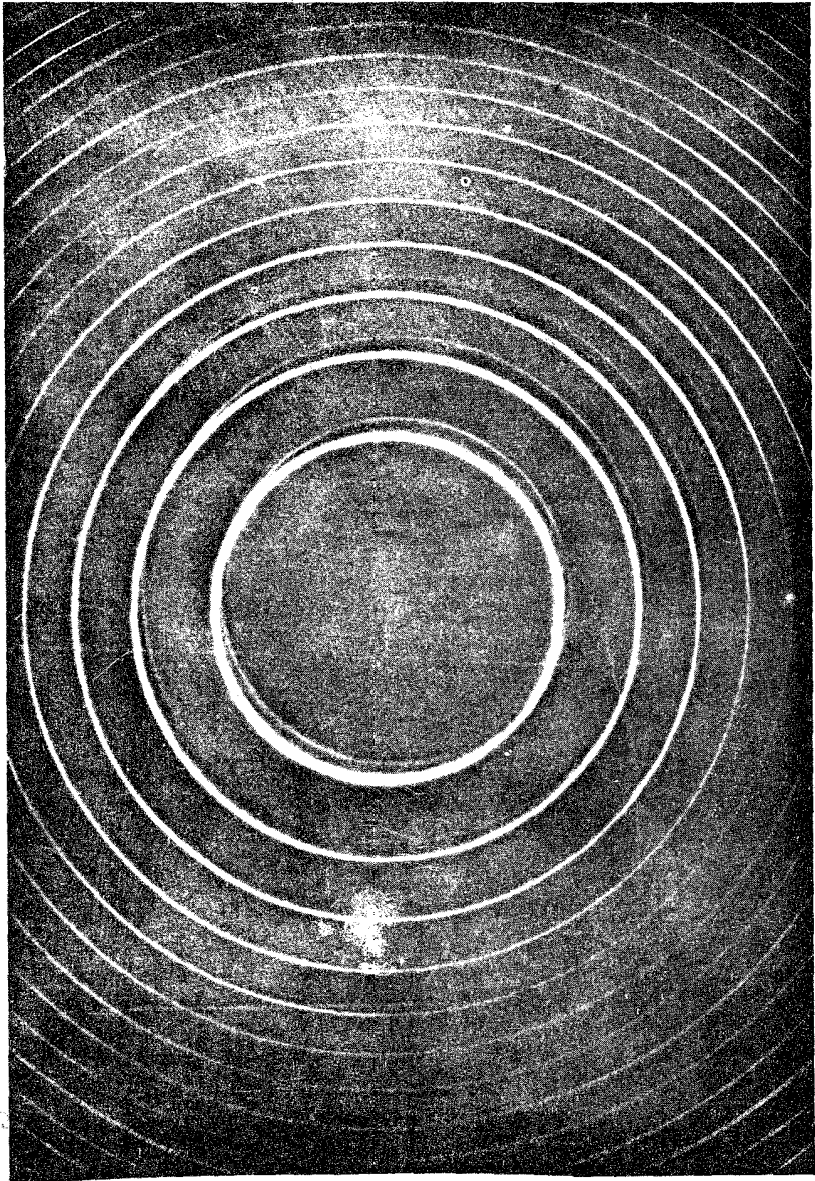
فرض می کنیم  $\theta$  کوچک است، پس  $\cos \theta \approx 1$



شکل ۶.۴ نمودار توزیع شدت برای دو خط تکفام در تداخل سنجی فابری- پرو.

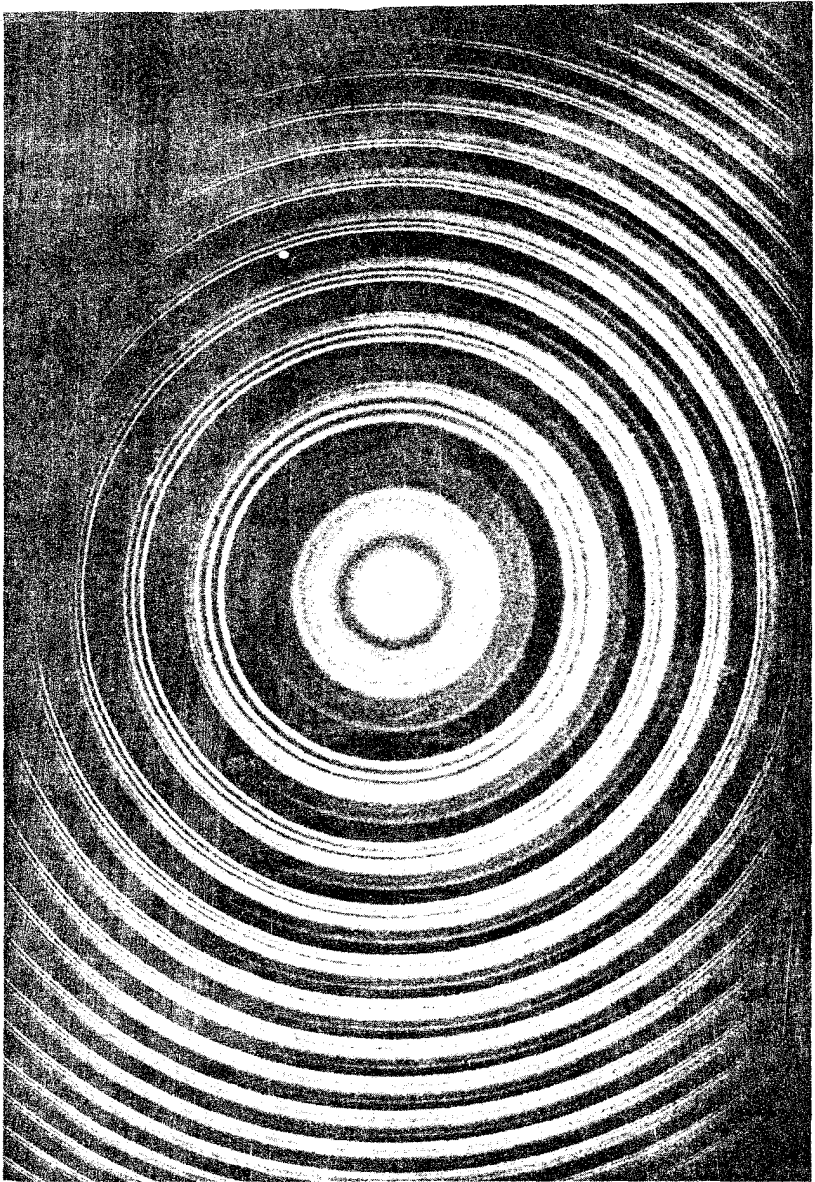
حال اگر در منحنی شدت یک فرورفتگی وجود داشته باشد، می توان گفت که بسامدهای  $\omega$  و  $\omega'$  از یکدیگر جدا شده اند. برای جداسازی در تداخل پرتوهای





( الف )

شکل ۵.۴ فریزهای تداخلی فابری-پرو (الف) چشمه تکفام (ب) چشمه ناتکفام.



متعدد معیار قراردادی مفیدی موسوم به معیار تایلور وجود دارد. طبق این معیار دو خط هم شدت هنگامی از هم جدا شده محسوب می‌شوند، که منحنیهای شدت آنها یکدیگر را در نقطهٔ نیم شدت قطع کنند، به طوری که در منحنی شدت کل، شدت نقطهٔ زینی با بیشینهٔ شدت هر یک از خطوط بتنهایی برابر باشد. بنابراین برای نقطهٔ زینی که در نیمه راه میان دو بسامد قرار دارد، می‌توانیم بنویسیم:

$$I = 2I_0 \left[ 1 + F \sin^2 \left( \frac{\Delta - \Delta'}{4} \right) \right]^{-1} = I_0$$

و از آن خواهیم داشت:

$$F \sin^2 \left( \frac{\Delta - \Delta'}{4} \right) = 1$$

حال اگر فرض کنیم کمیت  $\Delta - \Delta'$  کوچک باشد، به طوری که بتوانیم شناسهٔ سینوس را به جای خود سینوس قراردسیم، نتیجه می‌شود که:

$$|\Delta - \Delta'| = 4F^{-1/2} = 2 \left( \frac{1-R}{\sqrt{R}} \right) \quad (18.4)$$

سرانجام، پهنای فریز در نیمهٔ شدت، یا پهنای تفکیکی در یک تداخل سنج فابری-پرو که جدایی تیغه‌های آن  $d$  و توان بازتاب آن  $R$  است، برحسب بسامد زاویه‌ای چنین خواهد بود:

$$\delta\omega = |\omega - \omega'| = \frac{2c}{d} F^{-1/2} = \frac{c}{d} \left( \frac{1-R}{\sqrt{R}} \right) \quad (19.4)$$

کمیتی که در تداخل سنجی زیاد به کار برده می‌شود، نسبت گسترهٔ آزاد بینایی به پهنای فریز است که آن را **ظرافت بازتابی** می‌نامند و بر حسب کمیت‌های دیگر چنین بیان می‌شود:

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta_{N+1} - \Delta_N}{|\Delta - \Delta'|} = \frac{\pi}{2} \sqrt{F} = \pi \left( \frac{\sqrt{R}}{1-R} \right) \quad (20.4)$$

توان جداسازی RP هر وسیلهٔ بیناب سنجی، بنا بر تعریف، مساوی عکس جداکنندگی نسبی است، یعنی:

$$RP = \frac{\omega}{\delta\omega} = \frac{\nu}{\delta\nu} = \frac{\lambda}{|\delta\lambda|}$$

در اینجا مخرجها معرف کمترین کمیت‌های (پهنای فریزی) تفکیک‌پذیرند، که به ترتیب بر حسب بسامد زاویه‌ای، بسامد، یا طول موج اندازه‌گیری می‌شوند. از معادلات (۱۹۰۴) و (۲۰۰۴) می‌بینیم که توان جداسازی دستگاه فابری - پرو را می‌شود به صورت زیر نوشت:

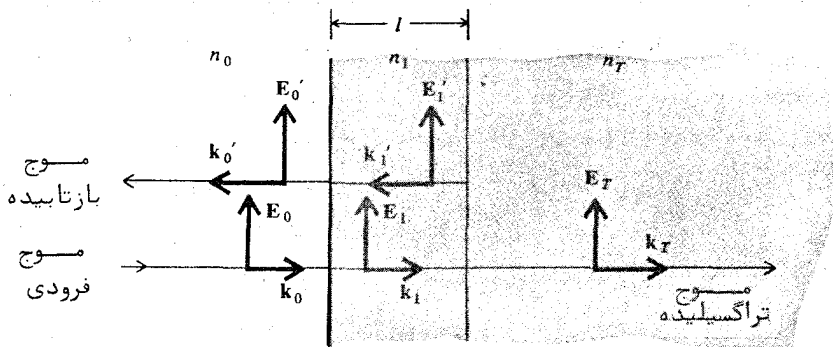
$$RP = N\mathcal{F} = N\pi \left( \frac{\sqrt{R}}{1-R} \right) \quad (21.4)$$

و بنابراین  $L$  ردیف تداخل و توان بازتاب مشخص می‌شود.

برای یک توان بازتاب معین، با افزایش ردیف تداخل می‌توانیم توان جداسازی را تا هر اندازه که بخواهیم افزایش دهیم. برای این منظور، کافی است جدایی آینه‌ها را زیاد کنیم، زیرا طبق معادله (۱۰۰۴) تقریباً  $N = 2nd/\lambda_0$  لیکن با این عمل، گستره آزاد بینایی کم می‌شود و بنابراین در عمل در هر کاربرد معین، حالت میانه‌ای برمی‌گزینند. اگر جدایی آینه‌ها از یکدیگر مقداری معین باشد، اصولاً با افزایش توان بازتاب و گرایش آن به واحد، توان جداسازی دستگاه را می‌توان به‌طور نامحدود افزایش داد. لیکن طبق گفتار بخش ۱۰۴، جذب نور در سطح بازتابنده، شدت فریزهای تراگسیلیده را می‌کاهد و در عمل محدودیت به‌وجود می‌آورد. از قدیم در دستگاههای فابری - پرو، نقره یا آلومینیم اندودن بازتابنده‌ها با روش تخییر در خلاء انجام می‌گرفته است. توان بازتاب این لایه‌های فلزی، به‌خاطر جذب محدود بوده و تنها در حدود ۸۰ تا ۹۰ درصد است. اخیراً "فیلمهای چندلایه‌ای دی‌الکتریک در تداخل‌سنج فابری - پرو به‌کاربرده شده است. با چنین فیلمهایی که در بخش بعد بررسی خواهند شد، توان بازتاب تا ۹۹ درصد نیز رسانیده شده است. توان جداسازی یک دستگاه فابری - پروی خوب، بسادگی می‌تواند در حدود یک‌میلیون باشد، و این، ۱۰ تا ۱۰۰ برابر یک بیناب‌نمای منشوری یا توری کوچک است. برای بحثی کاملتر درباره تداخل‌سنجی فابری - پرو و دیگر دستگاههای بیناب‌نمایی با جداسازی زیاد، به منابع (۵) و (۴۱) در پایان کتاب مراجعه کنید.

## ۴.۴ نظریهٔ فیلمهای چندلایه‌ای

فیلمهای چندلایه‌ای به طور گسترده در علم و صنعت برای به فرمان گرفتن نور به‌کاربرده می‌شود. با اندایش سطوح اپتیکی با فیلمهای نازک می‌توان — توان بازتاب و تراگسیل را به‌گونه‌ای دلخواه تنظیم کرد. این لایه‌ها، معمولاً " با روش تیخیر در خلاء روی شیشه یا فلز نشانده می‌شوند. لایهٔ بازتابنده که روی عدسیه‌ای دوربینها و دیگر وسائل اپتیکی اندوده می‌شود تنها یکی از کاربردهای متعدد این فیلمهای نازک به‌شمار می‌آید. کاربردهای دیگر، عبارتند از آینه‌های بازتابندهٔ گرما و عبوردهندهٔ گرما ( آینه‌های " گرم " و " سرد " )، آینه‌های یکطرفه، صافیهای اپتیکی و جز اینها.



شکل ۷.۴ بردارهای موج و میدانهای الکتریکی وابسته برای حالت فرود عمودی بر یک تک‌لایهٔ دی‌الکتریک.

نخست یک لایهٔ دی‌الکتریک تکی با نمارشکست  $n_1$  و ضخامت  $l$  را در نظر بگیرید که بین دو محیط با نمارهای شکست  $n_0$  و  $n_T$  قرار دارد، ( شکل ۷.۴ ). برای سادگی، نظریه را در مورد نوری که به طور عمودی فرود می‌آید بررسی می‌کنیم. انجام تغییرات برای حالت کلی فرود مایل ساده است. دامنهٔ بردار الکتریکی پرتوی فرودی  $E_0$ ، پرتوی بازتابیده  $E_0'$  و پرتوی تراگسیلیده  $E_T$  است. دامنهٔ میدان الکتریکی موجی که در فیلم پیش می‌رود را، مطابق شکل، با  $E_1$  و موجی که در درون بازتاب می‌شود

را با  $E_1'$  نمایش می‌دهیم ...  
طبق شرایط مرزی، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی روی هر رخ پیوسته‌اند،  
این شرایط به صورت زیر نوشته می‌شوند:

رخ دوم	رخ اول
$E_1 e^{ikt} + E_1' e^{-ikt} = E_T$	الکتریکی: $E_0 + E_0' = E_1 + E_1'$
$H_1 e^{ikt} - H_1' e^{-ikt} = H_T$	مغناطیسی: $H_0 - H_0' = H_1 - H_1'$
$n_1 E_1 e^{ikt} - n_1 E_1' e^{-ikt} = n_T E_T$	یـا: $n_0 E_0 - n_0 E_0' = n_1 E_1 - n_1 E_1'$

روابط میدانهای مغناطیسی از نظریه‌ای که در بخش ۷.۲ داده شد نتیجه می‌شوند.  
سازه‌های فازی  $e^{ikt}$  و  $e^{-ikt}$  از این نتیجه می‌شوند که موج فاصله  $l$  بین دو رخ را طی  
می‌کند.

اگر دامنه‌های  $E_1$  و  $E_1'$  را حذف کنیم خواهیم یافت:

$$1 + \frac{E_0'}{E_0} = (\cos kl - i \frac{n_T}{n_1} \sin kl) \frac{E_T}{E_0} \quad (22.2)$$

$$n_0 - n_0 \frac{E_0'}{E_0} = (-in_1 \sin kl + n_T \cos kl) \frac{E_T}{E_0}$$

یا به صورت ماتریس:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ n_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -n_0 \end{bmatrix} \frac{E_0'}{E_0} = \begin{bmatrix} \cos kl & -i \sin kl \\ -in_1 \sin kl & \cos kl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ n_T \end{bmatrix} \frac{E_T}{E_0} \quad (23.4)$$

که می‌توان آن را به صورت خلاصه زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ n_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -n_0 \end{bmatrix} r = M \begin{bmatrix} 1 \\ n_T \end{bmatrix} t \quad (24.4)$$

پیشتر، ضریب بازتاب:

$$r = \frac{E_0'}{E_0} \quad (25.4)$$

و ضریب تراگیل:

$$t = \frac{E_T}{E_0} \quad (26.4)$$

را معرفی کرده‌ایم.  $M$  ماتریس انتقال نامیده می‌شود و به صورت زیر است:

$$M = \begin{bmatrix} \cos kl & -\frac{i}{n_1} \sin kl \\ -in_1 \sin kl & \cos kl \end{bmatrix} \quad (27.4)$$

که در آن  $n_1$  نمار شکست است و  $k = 2\pi/\lambda = 2\pi n_1/\lambda_0$ .  
 حال فرض کنید  $N$  لایه با شماره‌های  $1, 2, 3, \dots, N$  داشته باشیم که نمارهای شکست آنها بترتیب  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_N$  و ضخامتهای آنها بترتیب  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_N$  باشند. با همان روشی که معادله (۲۲.۴) را به دست آوردیم می‌توانیم نشان دهیم که ضرایب بازتاب و تراگیل فیلم چندلایه‌ای به وسیله یک معادله ماتریسی مانند معادله بالا به یکدیگر مربوط می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ n_G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -n_0 \end{bmatrix} r = M_1 M_2 M_3 \cdots M_N \begin{bmatrix} 1 \\ n_T \end{bmatrix} t = M \begin{bmatrix} 1 \\ n_T \end{bmatrix} t \quad (28.4)$$

که در آن ماتریسهای انتقال لایه‌های گوناگون با  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_N$  نشان داده شده‌اند. هر ماتریس انتقال با مقادیر  $n, l$  و  $k$  ی مربوط به خود، به صورت معادله (۲۷.۴) است. ماتریس انتقال کل،  $M$ ، برابر حاصلضرب تک تک ماتریسهای انتقال است. اگر عناصر ماتریس  $M$  را با  $A, B, C, D$  نمایش دهیم:

$$M_1 M_2 M_3 \cdots M_N = M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (29.4)$$

در این صورت می‌توانیم معادله (۲۸.۴) را حل کرده و  $r$  و  $t$  را برحسب این عناصر محاسبه کنیم:

$$r = \frac{An_0 + Bn_T n_0 - C - Dn_T}{An_0 + Bn_T n_0 + C + Dn_T} \quad (30.4)$$

$$t = \frac{2n_0}{An_0 + Bn_T n_0 + C + Dn_T} \quad (31.4)$$

آنگاه توان بازتاب  $R$  و توان تراگسیل  $T$  بترتیب از  $R = |r|^2$  و  $T = |t|^2$  به دست می‌آیند.

### لایه‌های پادبازتابنده

ماتریس انتقال برای یک تک‌لایه با نمار شکست  $n_1$  و ضخامت  $l$  در معادله (۲۷.۴) داده شد. فرض کنید این لایه بر یک زیرلایه شیشه‌ای با نمار شکست  $n_T$  نشانه شود. در این صورت ضریب بازتاب این مجموعه در هوا، از معادله (۳۰.۴) و با قراردادن  $n_0 = 1$  حاصل می‌شود. نتیجه چنین است:

$$r = \frac{n_1(1 - n_T) \cos kl - i(n_T - n_1^2) \sin kl}{n_1(1 + n_T) \cos kl - i(n_T + n_1^2) \sin kl} \quad (32.4)$$

اگر ضخامت نوری لایه  $\frac{1}{4}$  طول موج باشد، در این صورت  $kl = \pi/2$ . بنابراین توان بازتاب برای این لایه چارک‌موجی چنین است:

$$R = |r|^2 = \frac{(n_T - n_1^2)^2}{(n_T + n_1^2)^2} \quad (33.4)$$

بویژه اگر داشته باشیم

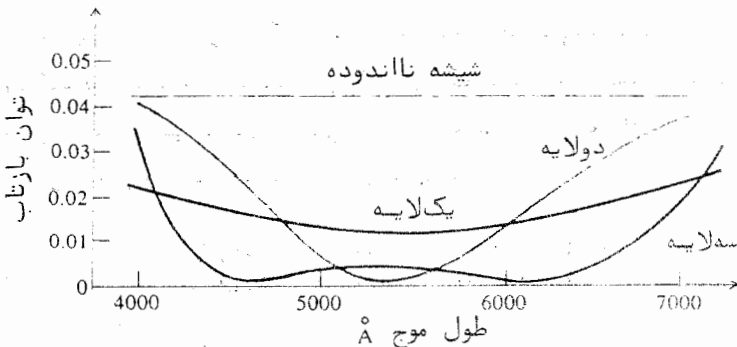
$$n_1 = \sqrt{n_T} \quad (34.4)$$

توان بازتاب صفر خواهد بود. معمولاً "فلرورمنیزیم با نمار شکست ۱٫۳۵ برای اندایش عدسیها به‌کاربرده می‌شود. گرچه برای شیشه معمولی،  $n_T = ۱٫۵$ ، شرط بالا دقیقاً برقرار نیست، با این حال توان بازتاب شیشه‌ای که با یک لایه چارک‌موجی فلرورمنیزیم اندوده می‌شود به حدود یک درصد کاهش می‌یابد. این مقدار،



یک چهارم توان بازتاب شیشه ناندوده است. در وسایل اپتیکی که اجزای زیادی دارند، مانند عدسیهای دوربینهای گران قیمت که پنج یا شش جزء، یعنی ده یا دوازده سطح بازتابنده دارند، این اندایش از هدر رفتن نور به گونه‌ای قابل ملاحظه جلوگیری می‌کند.

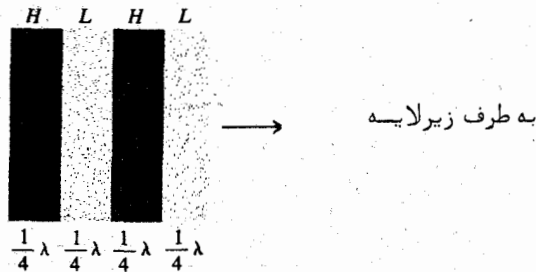
با به‌کاربردن دولایه از مواد انداینده که در بازار یافت می‌شوند، یکی با نمارشکست زیاد و دیگری با نمار شکست کم، در یک طول موج معین می‌توان توان بازتاب را به صفر رسانید. بدیهی است با به‌کاربردن لایه‌های بیشتر امکان کاستن توان بازتاب در گسترهٔ بینایی بیشتر وجود دارد. بدین‌سان با به‌کاربردن سه‌لایه مناسب می‌توان توان بازتاب را برای دو طول موج به صفر رسانید و برای سرتاسر بیناب دیدگانی مقدار آن را به طور متوسط کمتر از  $\frac{1}{4}$  درصد کرد. چند منحنی در این باره در شکل ۸.۴ نشان داده شده‌اند.



شکل ۸.۴ منحنیهای توان بازتاب بر حسب طول موج برای لایه‌های پادبازتابنده.

فیلمهای با توان بازتاب زیاد

برای اینکه در یک فیلم چندلایه‌ای به توان بازتاب زیاد دست یابیم، یک نبوده از موادی با نمار شکست زیاد  $n_H$  و کم  $n_L$  به طور یک‌درمیان به‌کار می‌بریم. ضخامت هر لایه مطابق شکل ۹.۴ یک چهارم طول موج است. ماتریسهای انتقال در این حالت همشکل هستند و حاصلضرب مربوط به دو لایهٔ مجاور چنین است:



شکل ۹.۴ انبوده چندلایه‌ای برای تولید توان بازتاب زیاد، انبوده با نبودن نوبه‌ای لایه‌های چارک‌موجی از موادی با نمارهای شکست زیاد و کم تشکیل می‌شود. ( توجه:  $\lambda$  طول موج در ماده است ).

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{-i}{n_L} \\ -in_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-i}{n_H} \\ -in_H & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-n_H}{n_L} & 0 \\ 0 & \frac{-n_L}{n_H} \end{bmatrix} \quad (35.4)$$

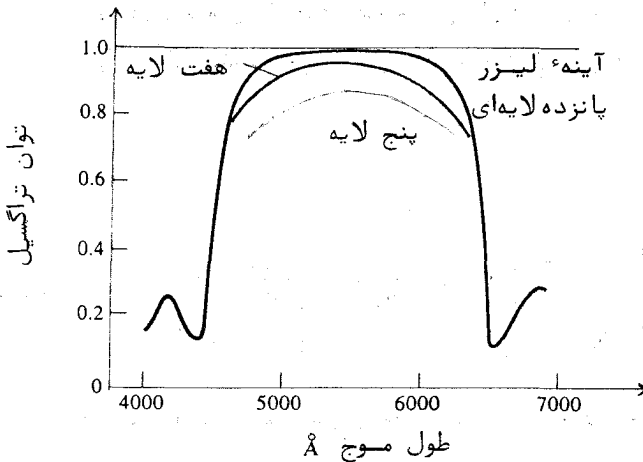
اگر انبوده  $2N$  لایه داشته باشد، در این صورت ماتریس انتقال فیلم چندلایه‌ای کامل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{-n_H}{n_L} & 0 \\ 0 & \frac{-n_L}{n_H} \end{bmatrix}^N = \begin{bmatrix} \left(\frac{-n_H}{n_L}\right)^N & 0 \\ 0 & \left(\frac{-n_L}{n_H}\right)^N \end{bmatrix} \quad (36.4)$$

برای سادگی فرض کنید  $n_0$  و  $n_T$  هر دو یک باشند، توان بازتاب یک انبوده چندلایه‌ای با بهره‌گیری از معادله (۳۵.۴) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$R = |r|^2 = \left[ \frac{(-n_H/n_L)^N - (-n_L/n_H)^N}{(-n_H/n_L)^N + (-n_L/n_H)^N} \right]^2 = \left[ \frac{(n_H/n_L)^{2N} - 1}{(n_H/n_L)^{2N} + 1} \right]^2 \quad (37.4)$$

بدین سان اگر  $N$  زیاد باشد، توان بازتاب به یک نزدیک می‌شود. برای مثال، توان بازتاب یک انبوده هشت لایه‌ای ( $N=4$ ) از سولفیت روی ( $n_H=3.2$ ) و فلرورمنیزیم ( $n_L=1.35$ )، حدود ۹۷٪ است، که از توان بازتاب نقره خالص در ناحیه دیدگانی بیناب بیشتر است. توان بازتاب یک انبوده ۱۶ لایه‌ای بیش از ۹۹۹٪ است. البته توان بازتاب تنها در یک طول موج بیشینه می‌شود، ولی می‌توان ناحیه بازتاب زیاد را با ترکیب ضخامت‌های گوناگون پهن کرد. چند منحنی تقریبی توان بازتاب بر حسب طول موج، برای فیلم‌های چندلایه‌ای که در کار با لیزر مورد استفاده قرار می‌گیرند، در شکل ۱۰.۴ دیده می‌شوند.

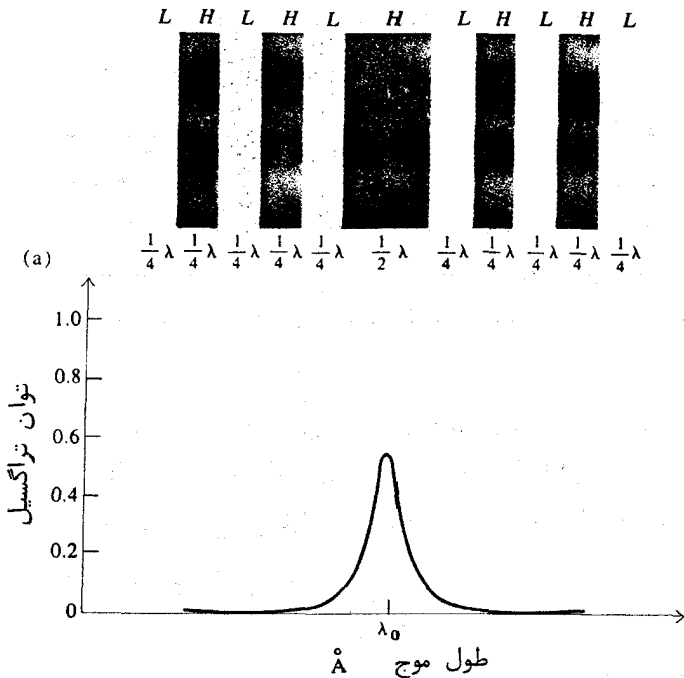


شکل ۱۰.۴ منحنی‌های توان بازتاب برای چند فیلم چندلایه‌ای با بازتاب زیاد.

### صافی تداخلی فابری - پرو

یک صافی از نوع فابری - پرو (برای یک طول موج معین  $\lambda_0$ ) از یک لایه دی‌الکتریک به ضخامت  $\frac{\lambda_0}{4}$  طول موج تشکیل می‌شود که هر دو طرف آن با سطوح بازتابنده جزئی محصور شده است. عملاً این، یک سنجه فابری - پرو است که فاصله‌گذار آن خیلی کوچک است. منحنی تراکسیل این صافی به صورت تابع ایبری، معادله (۸.۴) است و قله آن در طول موج  $\lambda_0$  قرار دارد. قله‌های ردیفه‌ای

بالاتر نیز در طول موجهای  $\frac{\lambda_0}{4}$  ،  $\frac{\lambda_0}{3}$  ،  $\frac{\lambda_0}{4}$  . . . . و جز اینها رخ می‌دهند. پهنای بینایی نوار تراگیسل، به توان بازتاب سطوح محصورکننده بستگی دارد. در آغاز در صافیهای فابری-پرو از فیلمهای نقره‌ای، برای ایجاد بازتابش لازم استفاده می‌شد. اما اکنون آنها را کلا" از فیلمهای دی‌الکتریک چندلایه‌ای می‌سازند. فیلمهای اخیر به خاطر توان بازتاب زیاد و جذب کم از فیلمهای فلزی قبلی بهترند. شکل ۱۱.۴ یک صافی تداخلی فابری - پروی چندلایه‌ای و یک منحنی تراگیسل را نشان می‌دهد.



شکل ۱۱.۴ صافی تداخلی فابری - پروی چندلایه‌ای.

## مسائل

۱۰۴ تیغه‌های یک تداخل‌سنج فابری - پرو با چنان ضخامتی از نقره اندوده شده‌اند که برای هر یک، توان بازتاب ۹۰٪، تراگسیل ۵۰٪ و جذب ۵۰٪ است. بیشترین و کمترین توان تراگسیل تداخل‌سنج را به دست آورید. ظرافت بازتابی و ضریب ظرافت چقدر است؟

۲۰۴ اگر جدایی تیغه‌های تداخل‌سنج مسئله ۱۰۴ یک سانتی‌متر و طول موج ۵۰۰ نانومتر باشد، توان جداسازی آن را به دست آورید.

۳۰۴ آینه‌های بازو اگر فابری - پرو در یک لیزر طوری اندوده شده‌اند که توان بازتاب آنها ۹۹٪ است، جدایی این آینه‌ها از یکدیگر یک متر است. پهنای فریز را برحسب طول موج و بسامد، برای طول موج ۶۳۳ نانومتر به دست آورید.

۴۰۴ در یک تداخل‌سنج فابری - پروی تخت - موازی اگر فریزی با شعاع ظفر وجود داشته باشد نشان دهید که شعاعهای فریزهای تداخلی، شکل ۵۰۴ (الف)، تقریباً با  $\sqrt{0}$ ،  $\sqrt{1}$ ،  $\sqrt{2}$ ، ...،  $\sqrt{N}$  - متناسبند، که در آن  $N$  عددی است صحیح. (راهنمایی: از معادله ۱۰۴ استفاده و فرض کنید  $\theta$  کوچک است. بسامد پرتوی که  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$  )

۵۰۴ یک پرتو نور سفید موازی به طور عمودی روی یک تیغه شیشه‌ای با نمارشکست  $n$  و ضخامت  $d$  فرود می‌آید، رابطهای برای توان تراگسیل به صورت تابعی از طول موج به دست آورید و نشان دهید قله‌هایی در طول موجهای:

$$\lambda_N = \frac{2nd}{N}$$

وجود دارند. در این رابطه  $\lambda_N$  طول موج در خلاء و  $N$  عدد درستی است. بدین ترتیب تابع تراگسیل به صورت دوره‌ای به عدد موج یا بسامد بستگی دارد و " بیناب راه‌راه " نامیده می‌شود.

۶.۴ با استفاده از نتیجه مسئله ۵.۴، برای تیغه‌ای با نمار شکست ۲.۵، بیشترین و کمترین توان تراگیل را در بیناب راه‌راه به دست آورید. اگر ضخامت تیغه یک میلی‌متر باشد، جدایی طول موجی دو خط متوالی را برای طول موج ۶۰۰ نانومتر در خلاء به دست آورید.

۷.۴ توان بازتاب یک لایه چارک‌موجی پادبازتابنده از فلورومیزیم ( $n = 1.35$ ) که روی یک شیشه اپتیکی با نمارشکست ۱.۵۲ نشانده شده، چقدر است؟

۸.۴ بیشترین توان بازتاب یک فیلم چندلایه‌ای با بازتاب بالا را که از هشت لایه (از هر کدام چهار عدد) با نمارهای شکست کم و زیاد شده، تهیه شده است به دست آورید.  $n_H = 2.8$  و  $n_L = 1.4$

۹.۴ نشان دهید ماتریس انتقال یک فیلم تک‌لایه‌ای به صورت زیر است:

$$M = \begin{bmatrix} \cos kl & -\frac{i}{n_1} \sin kl \\ -in_1 \sin kl & \cos kl \end{bmatrix}$$

۱۰.۴ نشان دهید ماتریس انتقال یک فیلم تک‌لایه‌ای برای نور فرودی مایل به صورت زیر است:

$$M = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\frac{i}{p} \sin \beta \\ -ip \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

که در آن

$$\beta = kl / \cos \theta$$

و

$$(TE \text{ قطبیدگی}) \quad p = n_1 \cos \theta$$

$$(TM \text{ قطبیدگی}) \quad p = \frac{n_1}{\cos \theta}$$

$\theta$  زاویه بین بردار موج در داخل فیلم و خط عمود بر سطح آن است.

# فصل پنجم

پراثش

## ۱۰۵ توصیف کلی پراش

اگر یک جسم کدر بین یک چشمه نقطه‌ای نور و یک پرده سفید قرار گیرد، سایه‌ای از جسم به وجود می‌آید که از تندی و تیزی پیش‌بینی شده در اپتیک هندسی برخوردار نیست. بررسی دقیق کنار سایه نشان می‌دهد که مقداری از نور به ناحیه تاریک سایه هندسی می‌رود، و نیز فریزهای تاریک در ناحیه روشن ظاهر می‌شوند. این "کندی" لبه سایه به پدیده دیگری مربوط است که پخش نور پس از عبور از یک روزنه خیلی کوچک و یا شکاف باریک، آن را به وجود می‌آورد. نامی که به‌طور گروهی به این پدیده‌ها، که از نورشناسی هندسی منحرف می‌شوند، داده می‌شود پراش است.

ویژگیهای اساسی پدیده‌های پراش را می‌تون به طور کیفی با اصل هویگنس تشریح کرد. این اصل، در قالب نخستین، انتشار نور را به این طریق قابل پیش‌بینی می‌داند که هر نقطه از جبهه موج مانند چشمه‌ای جدید یک موج ثانویه در تمام جهات پخش می‌کند و پوش همه امواج ثانویه، جبهه موج جدید را درست می‌کند.

ما پراش را مستقیماً با به‌کاربردن اصل هویگنس بررسی خواهیم کرد، بلکه



روشی که بیشتر کمی است پیش خواهیم گرفت. ما اصل هویگنس را در یک قالب دقیق ریاضی، به نام " فرمول فرنل-کیرشهوف " در خواهیم آورد. سپس این فرمول را در حالت‌های ویژه گوناگون مانند پراش نور توسط مانعها و روزنه‌ها به کار خواهیم برد.

### ۲.۵ نظریه بنیادی

قضیه گرین را یادآوری می‌کنیم. طبق این قضیه، اگر  $U$  و  $V$  دو تابع نرده‌ای - نقطه‌ای باشند که شرایط معمولی انتگرال پذیری و پیوستگی درباره آنها صدق کند، در این صورت تساوی زیر برقرار است:

$$\iint (V \operatorname{grad}_n U - U \operatorname{grad}_n V) d\mathcal{A} = \iiint (V \nabla^2 U - U \nabla^2 V) d\mathcal{V} \quad (1.5)$$

انتگرال سمت چپ، روی هر سطح بسته  $\mathcal{A}$  انجام می‌شود و انتگرال سمت راست حجم  $\mathcal{V}$  داخل این سطح را شامل می‌شود. منظور از "  $\operatorname{grad}_n$  "، مولفه عمودی شیب در سطح انتگرال‌گیری است.

بویژه اگر  $U$  و  $V$  هر دو، تابع موج باشند یا به گفته دیگر از معادلات معمولی موج پیروی کنند:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \nabla^2 V = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

و اگر وابستگی سازگان زمانی هر دوی آنها به شکل  $e^{+i\omega t}$  باشد، بسادگی می‌توان نشان داد که در قضیه گرین انتگرال حجم صفر است. پس قضیه یادشده به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\iint (V \operatorname{grad}_n U - U \operatorname{grad}_n V) d\mathcal{A} = 0 \quad (2.5)$$

۱- قضیه گرین را می‌توان به کمک قضیه واگرایی  $\iint \operatorname{grad}_n \mathbf{F} d\mathcal{A} = \iiint \nabla \cdot \mathbf{F} d\mathcal{V}$  و با قراردادن  $\mathbf{F} = U \nabla V - V \nabla U$  و به کار بردن اتحاد برداری زیر ثابت کرد:

$$\nabla \cdot (U \nabla V) = U \nabla^2 V + (\nabla U) \cdot (\nabla V)$$

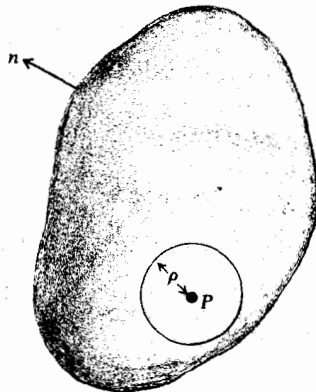
حالا فرض کنید  $V$  تابع موج:

$$V = V_0 \frac{e^{i(kr + \omega t)}}{r} \quad (۳۰۵)$$

باشد. این تابع خاص نشان دهنده امواج کروی است که به نقطه  $P$  ( $r=0$ ) همگرا می شوند. نقطه  $P$  را درون حجمی که سطح انتگرال گیری آن را احاطه کرده است می گیریم. چون  $V$  در نقطه  $P$  بینهایت می شود، باید این نقطه را از فرایند انتگرال گیری خارج کنیم. این کار، چنانکه در شکل ۱۰۵ دیده می شود، با روش معمولی کاستن انتگرالی که روی کره کوچکی به شعاع  $\rho$  و به مرکز  $P$  گرفته می شود انجام می گیرد. روی این کره کوچک  $r = \rho$  و  $\text{grad}_n = -\partial/\partial r$  پس می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} & \iint \left( \frac{e^{ikr}}{r} \text{grad}_n U - U \text{grad}_n \frac{e^{ikr}}{r} \right) d\mathcal{A} \\ & - \iint \left( \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - U \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} \right)_{r=\rho} \rho^2 d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (۴۰۵)$$

که در آن  $d\Omega$  عنصر زاویه فضایی روی کره ای به مرکز  $P$  و  $\rho^2 d\Omega$  عنصر سطح وابسته به آن است. سازه مشترک  $V_0 e^{i\omega t}$  حذف شده است.



شکل ۱۰۵ سطح انتگرال گیری برای اثبات قضیه انتگرالی کیرشهوف.

حال  $p$  را به سوی صفر گرایش می‌دهیم. در این صورت در حد که  $p$  به صفر

نزدیک می‌شود، انتگرالده در انتگرال دوم به مقدار  $U$  در نقطه  $P$ ، یعنی  $U_p$  می‌گراید. درستی این مطلب را می‌توان بسادگی با انجام عملیات یادشده آزمود. در نتیجه انتگرال دوم، همراه با علامت منفی‌اش، به مقدار زیر می‌گراید:

$$\iint U_p d\Omega = 4\pi U_p \quad (5.5)$$

بنابراین معادله ۴.۵، پس از مرتب کردن جملات، به شکل زیر درمی‌آید:

$$U_p = -\frac{1}{4\pi} \iint \left( U \operatorname{grad}_n \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \operatorname{grad}_n U \right) d\Omega \quad (6.5)$$

این معادله با نام قضیه انتگرالی کیرشهوف شناخته می‌شود و مقدار هر تابع موج نرده‌ای در هر نقطه  $P$  درون یک سطح بسته دلخواه را به مقدار تابع موج روی آن سطح مرتبط می‌سازد.

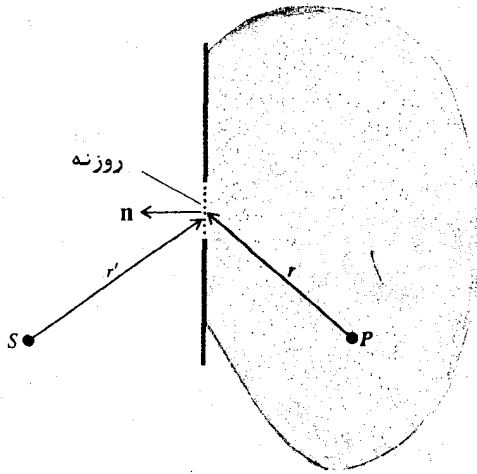
تابع موج  $U$ ، در کاربرد قضیه کیرشهوف برای بررسی پراش، آشننگی نوری نامیده می‌شود و چون کمیتهی است نرده‌ای، نمی‌تواند به طور دقیق نشان‌دهنده یک موج الکترومغناطیسی باشد. با اینحال، مجذور قدرمطلق  $U$  را در این "تقریب نرده‌ای" می‌توان مقدار تابندگی در یک نقطه به حساب آورد.

نظریه دقیقتر پراش، که در آن خاصیت برداری نور در نظر گرفته می‌شود، از حوصله این کتاب خارج است و چون ریاضیات آن پیچیده است، محاسبات تنها در چند حالت ساده انجام شده است (۵).

### فرمول فرنل-کیرشهوف

اکنون به استفاده از قضیه انتگرالی کیرشهوف در حل مسئله عمومی پراش می‌پردازیم. پراش به وسیله روزنه‌ای با شکل دلخواه که در یک دیواره کدر ایجاد شده است به وجود می‌آید. این دیواره، چشمه نور را از نقطه دریافت جدا می‌کند (شکل ۲.۵).

هدف ما این است که آشننگی نوری که از چشمه  $S$  به نقطه دریافت  $P$



شکل ۲۰۵ نمایش هندسی فرمول فرنل-کیرشهوف.

می‌رسد. را تعیین کنیم. برای به‌کاربردن انتگرال کیرشهوف، سطح انتگرال‌گیری را مطابق شکل طوری اختیار می‌کنیم که نقطه دریافت درون آن بوده و روزنه تیرستی از آن باشد.

دو فرض ساده‌ساز و بنیادی به‌کار می‌بریم:

(۱) تابع موج  $U$  و شیب آن، جز در خود روزنه، سهم ناچیزی در مقدار انتگرال دارند.

(۲)  $U$  و شیب آن در محل روزنه، همان مقادیری را دارند که در غیاب دیواره می‌داشتند.

با اینکه درستی این فرضها قابل بحث است، نتایج کم و بیش با مشاهدات تجربی وفق می‌دهند.

اگر  $r'$  نشان‌دهنده مکان نقطه‌ای از روزنه نسبت به چشمه  $S$  باشد، در این صورت تابع موج روی روزنه چنین نوشته می‌شود:

$$U = U_0 \frac{e^{i(kr' - \omega t)}}{r'} \quad ( ۲۰۵ )$$

که نمایانگر امواج کروی تکفامی است که از نقطه  $S$  برمی‌خیزند. پس قضیه انتگرالی کیرشهوف به صورت زیر درمی‌آید:

$$U_p = \frac{U_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \iint \left( \frac{e^{ikr}}{r} \text{grad}_n \frac{e^{ikr'}}{r'} - \frac{e^{ikr'}}{r'} \text{grad}_n \frac{e^{ikr}}{r} \right) d\mathcal{A} \quad (8.5)$$

که در آن انتگرال‌گیری تنها روی روزنه انجام می‌شود. عملیاتی که در انتگرالده نشان داده شده به صورت زیر انجام می‌شوند.

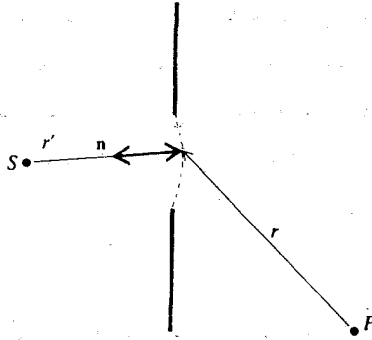
$$\text{grad}_n \frac{e^{ikr}}{r} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \left( \frac{ike^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right) \quad (9.5)$$

$$\text{grad}_n \frac{e^{ikr'}}{r'} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r'} \frac{e^{ikr'}}{r'} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') \left( \frac{ike^{ikr'}}{r'} - \frac{e^{ikr'}}{r'^2} \right) \quad (10.5)$$

که  $(\mathbf{n}, \mathbf{r})$  و  $(\mathbf{n}, \mathbf{r}')$  زوایای بین بردارها و بردار یکای عمود بر سطح انتگرال‌گیری را نشان می‌دهند. در حالت عادی،  $r$  و  $r'$  از طول موج تابش خیلی بزرگترند و چون  $k = 2\pi/\lambda$  پس در معادلات (9.5) و (10.5) جمله‌های دوم داخل ابروان در مقابل جمله‌های اول خیلی کوچک بوده و قابل چشم‌پوشی‌اند. در نتیجه معادله (8.5) چنین می‌شود:

$$U_p = -\frac{ikU_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \iint \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}')] d\mathcal{A} \quad (11.5)$$

این معادله فرمول انتگرالی فرنل-کیرشهوف نامیده می‌شود. در واقع ایمن فرمول اصل هویگنس را به صورت ریاضی بیان می‌کند. با به‌کاربردن آن برای یک حالت ویژه، مثلاً "برای یک روزنه دایره‌ای که مطابق شکل ۳.۵ نسبت به چشمه متقارن است، درستی این ادعا را می‌توان بسادگی نشان داد. سطح انتگرال‌گیری، یک کلاهک کروی فرض می‌شود که با روزنه محدود می‌شود. در این حالت  $r'$  ثابت است و  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') = -1$  و بنابراین فرمول فرنل-کیرشهوف به صورت زیر ساده می‌شود:



شکل ۳۰۵ نموداری برای به دست آوردن اصل هویگنس از رابطه انتگرالی فرنل-کیرشهوف.

$$U_p = -\frac{ik}{4\pi} \iint \frac{U_{\mathcal{A}} e^{i(kr-\omega t)}}{r} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + 1] d\mathcal{A} \quad (12.5)$$

که در آن:

$$U_{\mathcal{A}} = \frac{U_0 e^{ikr'}}{r'}$$

معادله (12.5) را می توان این گونه تعبیر کرد: دامنه مختلط موج اولیه فرودی در روزه است. هر عنصر  $d\mathcal{A}$  ی روزه از این موج اولیه یک موج کروی ثانویه به وجود می آورد.

$$\frac{U_{\mathcal{A}} e^{i(kr-\omega t)}}{r} d\mathcal{A}$$

با جمع کردن امواج ثانویه مربوط به تک تک عناصر، آشفتگی نوری کل به دست می آید. ولی در این جمع کردن باید سازه  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}')$  را که سازه میل نامیده می شود به حساب آورد. در حالت مورد بحث،  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') = -1$  و سازه میل به صورت  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + 1$  است. در جهت جلو،  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = 1$ ، پس سازه میل بیشترین مقدار خود را دارد که برابر ۲ است. در جهت عقب  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = -1$  و سازه میل صفر می شود. پس موج پس رونده به وسیله جبهه موج اولیه تولید نمی شود.

اصل هویگنس، به صورتی که پیشنهاد شده بود، سازه<sup>۶</sup> میل را در بر نداشت و بنابراین عدم وجود موج پس‌رونده را نمی‌توانست توجیه کند. وجود عامل  $i$  - نشان می‌دهد که فاز موج پراش یافته نسبت به موج فرودی اولیه ۹۰ درجه تغییر یافته است. اصل هویگنس به صورت نخست فاقد این ویژگی نیز بود.

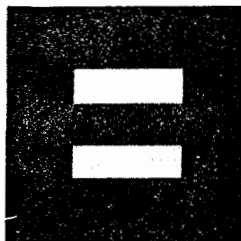
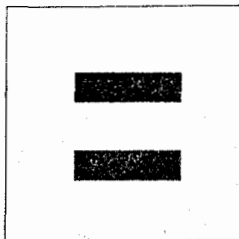
### روزنه‌های مکمل، اصل بابینه

روزنه<sup>۶</sup> پراشده<sup>۶</sup>  $\mathcal{A}$  که در نقطه<sup>۶</sup> معین  $P$  یک آشفستگی نوری  $U_p$  به وجود می‌آورد را در نظر بگیرید. سپس فرض کنید این روزنه به دو بخش  $\mathcal{A}_1$  و  $\mathcal{A}_2$  تقسیم شود، به طوری که  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ ، در این صورت دو روزنه<sup>۶</sup>  $\mathcal{A}_1$  و  $\mathcal{A}_2$  را مکمل یکدیگر می‌نامند. نمونه‌ای از روزنه‌های مکمل در شکل ۴۰۵ نشان داده شده است. از شکل فرمول فرنل-کیرشهوف واضح است:

$$U_p = U_{1p} + U_{2p} \quad ( ۱۳۰۵ )$$

که در آن  $U_{1p}$  آشفستگی نوری است که بتنهایی به وسیله<sup>۶</sup> روزنه<sup>۶</sup>  $\mathcal{A}_1$  در  $P$  به وجود می‌آید و  $U_{2p}$  آشفستگی‌ای است که بتنهایی به وسیله<sup>۶</sup> روزنه<sup>۶</sup>  $\mathcal{A}_2$  در آن نقطه تولید می‌شود. معادله<sup>۶</sup> بالا یک شکل از قضیه‌ای موسوم به اصل بابینه است.

اصل بابینه در موارد ویژه‌ای مفید است. برای مثال، اگر  $U_p = 0$  در این صورت،  $U_{1p} = -U_{2p}$ . در این حالت روزنه‌های مکمل آشفستگی‌های برابر تولید می‌کنند که ۱۸۰ درجه با هم اختلاف فاز دارند. چون شدت در نقطه<sup>۶</sup>  $P$  مساوی مجذور قدرمطلق آشفستگی نوری است، بنابراین شدت برای دو روزنه یکی است. به عنوان مثال یک باریکه<sup>۶</sup> نور موازی، مثل باریکه‌ای که از یک نورافکن می‌آید، به وسیله<sup>۶</sup> یک یا تعداد زیادی ذرات کوچک، مانند ذرات مه، پراکندگی پراشی پیدا می‌کند. اگر اندازه<sup>۶</sup> روزنه را اندازه<sup>۶</sup> خود باریکه بگیریم، شرط  $U_p = 0$  برای نقاطی برقرار است که به طور مستقیم در پرتو نباشند. پس طبق اصل بابینه، اگر باریکه<sup>۶</sup> نور به وسیله<sup>۶</sup> پرده‌ای حاوی یک یا چند سوراخ کوچک با توزیع کاتوره‌ای و هم اندازه با ذرات مه، پخش شود، همان گرته<sup>۶</sup> پراش نتیجه می‌شود.



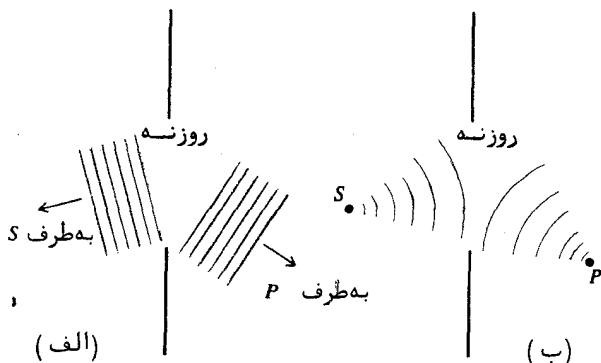
شکل ۴۰۵ روزنه‌های مکمل.

### ۳۰۵ پراش فرانیهوفری و فرنلی

در بررسی گسترده پراش، روش چنین است که دو حالت گوناگون در نظر گرفته می‌شود. یکی به نام پراش فرانیهوفری و دیگری پراش فرنلی. اگر کیفی سخن بگوییم، پراش فرانیهوفری زمانی روی می‌دهد که امواج فرودی و پراشده هر دو کم و بیش تخت باشند، و این زمانی رخ می‌دهد که فاصله چشمه از روزنه پراش و فاصله روزنه از نقطه دریافت، هر دو به اندازه‌ای زیاد باشند که خمیدگی جبهه موجهای فرودی و پراشده خیلی کم باشد، شکل ۵۰۵ (الف).

اگر چشمه یا نقطه دریافت به اندازه‌ای به روزنه پراش نزدیک باشد که نتوان خمیدگی جبهه موج را نادیده گرفت، آنگاه پراش فرنلی خواهیم داشت، شکل ۵۰۵ (ب). میان این دو حالت براستی مرز مشخصی وجود ندارد. با اینحال یک





شکل ۵.۵ پراش به وسیله یک روزنه، (الف) پراش فرانهوفری، (ب) پراش فرنلی.

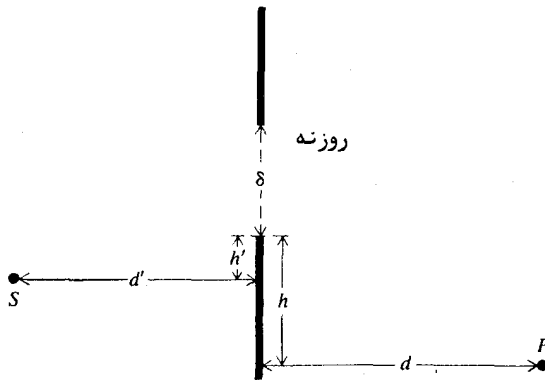
معیار کمی می‌توان به روش زیر به دست آورد. شکل ۶.۵ را که آرایش مسئله پراش را نشان می‌دهد، در نظر بگیرید. فاصله نقطه دریافت  $P$  و چشمه  $S$  از صفحه روزنه پراشده به ترتیب  $d$  و  $d'$  است. یک لبه روزنه به فاصله  $h$  از پای عمود از  $P$  بر صفحه روزنه قرار دارد. فاصله این لبه از پای عمود از  $S$  را  $h'$  و اندازه گشودگی روزنه را با  $\delta$  نمایش می‌دهیم. از روی شکل دیده می‌شود که تغییر کمیت  $r+r'$  از یک لبه روزنه به لبه دیگر، یعنی  $\Delta$  برابر است با:

$$\begin{aligned} \Delta &= \sqrt{d'^2 + (h' + \delta)^2} + \sqrt{d^2 + (h + \delta)^2} - \sqrt{d'^2 + h'^2} - \sqrt{d^2 + h^2} \\ &= \left(\frac{h'}{d'} + \frac{h}{d}\right) \delta + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d}\right) \delta^2 + \dots \end{aligned} \quad (14.5)$$

در بسط بالا جمله مربعی در اصل مقیاسی از خمیدگی جبهه موج است. اگر این جمله در مقایسه با طول موج نور خیلی کوچک باشد، یعنی داشته باشیم

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d}\right) \delta^2 \ll \lambda \quad (15.5)$$

موج روی روزنه کم‌وبیش تخت خواهد بود. این معیار پراش فرانهوفری است. پس اگر این شرط برقرار نباشد، خمیدگی جبهه موج زیاد بوده و پراش از نوع فرنلی خواهد



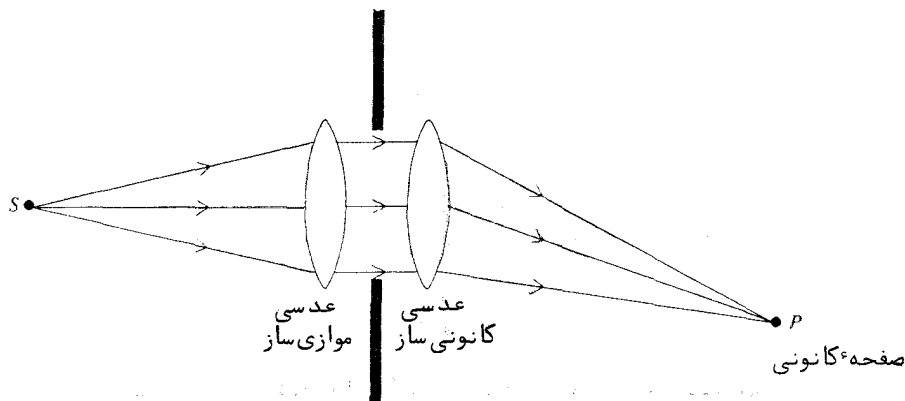
شکل ۶.۵ اندازه‌ها برای نشان دادن تفاوت میان پراش فرانیهوفری و پراش فرنیلی.

بود. ملاحظات مشابهی در پراش توسط یک جسم کدر یا مانع به کار می‌رود. در این حالت  $\delta$  اندازه خطی جسم است. ( توجه کنید که در اینجا اصل باینیه به‌کار می‌رود).

نمونه‌های پراش فرانیهوفری و فرنیلی به وسیله روزنه‌های گوناگون در بخشهای بعدی بررسی می‌شوند. چون معمولاً "ریاضیات پراش فرانیهوفری از پراش فرنیلی ساده‌تر است، از این‌رو پراش فرانیهوفری نخست مورد بحث قرار می‌گیرد.

#### ۴.۵ گرت‌های پراش فرانیهوفری

آرایش تجربی معمول برای مشاهده پراش فرانیهوفری در شکل ۷.۵ نشان داده شده است. در اینجا روزنه به کمک یک چشمه تکفام نقطه‌ای و یک عدسی موازی‌ساز هم‌دوسانه روشن می‌شود. چنانکه دیده می‌شود عدسی دومی پشت روزنه گذاشته شده است. از این‌رو جبهه‌های موج فرودی و پراشیده تخت‌اند و شرط فرانیهوفری بدرستی برقرار است. در به‌کار بردن فرمول فرنل-کیرشهوف، معادله (۱۱.۵)، برای محاسبه گرت‌های پراش، تقریبهای ساده‌ساز زیر را به‌کار می‌بریم:



شکل ۷.۵ آرایشی برای مشاهده پراش فرانیهوفی.

(۱) پخش زاویه‌ای نور پراشیده آن قدر کم است که سازه میلی

$[\cos(n, r) - \cos(n, r')]$  روی روزنه تغییر محسوسی نمی‌کند و می‌توان آن را از زیر انتگرال بیرون آورد.

(۲) کمیت  $e^{ikr}/r'$  کم و بیش ثابت است و می‌توان آن را نیز از زیر انتگرال خارج کرد.

(۳) تغییر سازه  $e^{ikr}/r$  روی روزنه بیشتر به قسمت نمایی آن مربوط می‌شود، از این رو می‌توان سازه  $1/r$  را با مقدار متوسط آن جایگزین و از زیر انتگرال خارج کرد.

سرانجام، فرمول فرنل-کیرشهوف به معادله بسیار ساده زیر تبدیل می‌شود:

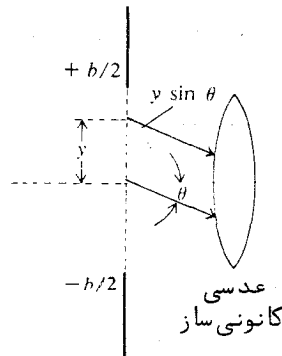
$$U_p = C \iint e^{ikr} d\mathcal{A} \quad (۱۶۰۵)$$

که در آن همه سازه‌های ثابت در ثابت  $C$  جمع‌آوری شده‌اند. فرمول بالا نشان می‌دهد که توزیع نور پراشیده تنها با انتگرال‌گیری از سازه فازی  $e^{ikr}$  روی روزنه به دست می‌آید.

تک‌شکاف

پراش به وسیله یک تک‌شکاف باریک در اینجا به عنوان یک مسئله تک‌بعدی بررسی می‌شود. فرض کنید طول شکاف  $L$  و پهنای آن  $b$  باشد، در این صورت مطابق شکل ۸۰۵ عنصر سطح  $d\mathcal{A} = L dy$ . گذشته از این می‌توانیم  $r$  را به صورت زیر بنویسیم:

$$r = r_0 + y \sin \theta \quad (17.5)$$



شکل ۸۰۵ تعریف متغیرها برای پراش فرانیهوفری توسط یک تک‌شکاف.

که در آن  $r_0$ ، اندازه  $r$  برای  $y=0$  و  $\theta$  زاویه نشان داده شده در شکل است. پس فرمول پراش (۱۶۰۵) به صورت زیر در می‌آید:

$$U = C e^{ikr_0} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{iky \sin \theta} L dy \quad (18.5)$$

$$= 2 C e^{ikr_0} L \frac{\sin(\frac{1}{2} kb \sin \theta)}{k \sin \theta} = C' \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)$$

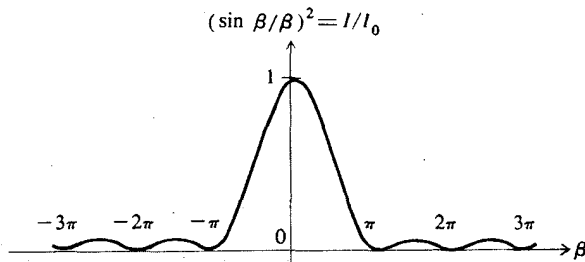
که در آن  $C' = e^{ikr_0} C b L$  و  $\beta = \frac{1}{2} kb \sin \theta$  "صرفاً" یک ثابت دیگر است. سپس در جهتی که به وسیله  $\beta$  معین می‌شود، دامنه کل نور پراشیده  $C' (\sin \beta / \beta)$  است.

این نور به وسیله عدسی دومی کانونی می‌شود. توزیع تابندگی در صفحه کانونی با عبارت زیر داده می‌شود:

$$I = |U|^2 = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad (19.5)$$

که در آن  $I_0 = |CLb|^2$  تابندگی برای  $\theta = 0$  است. توزیع تابندگی در شکل ۹.۵ کشیده شده است. بیشترین مقدار آن در  $\theta = 0$  روی می‌دهد و برای  $\beta = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$  مقدار آن صفر است. بیشینه‌های ثانویه، که اندازه آنها بتندی رو به کاهش است، بین این مقادیر صفر رخ می‌دهند. بدین‌سان گرته پراش در صفحه کانونی دارای یک نوار روشن میانی است و در هر طرف آن، نوارهای تاریک و روشن پی‌درپی قرار دارند. در جدول ۱۰.۵ مقادیر نسبی  $I$  برای سه بیشینه ثانویه نخست نوشته شده است. نخستین کمینه،  $\beta = \pi$ ، مربوط می‌شود به:

$$\sin \theta = \frac{2\pi}{kb} = \frac{\lambda}{b} \quad (20.5)$$



شکل ۹.۵ گرته پراش فرانیهویری از یک تک‌شکافی.

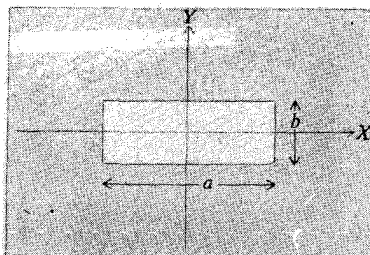
جدول ۱۰۵ مقادیر نسبی بیشینه‌های گردهای پراش از روزنه‌های مستطیلی  
و دایره‌ای

دایره‌ای	مستطیلی	
۱	۱	بیشینه <sup>۱</sup> میانی
۰٫۰۱۷۴	۰٫۰۴۹۶	نخستین بیشینه
۰٫۰۰۴۲	۰٫۰۱۶۸	دومین بیشینه
۰٫۰۰۱۶	۰٫۰۰۸۳	سومین بیشینه

از این رو برای یک طول موج معین، پهنای زاویه‌ای گرده<sup>۱</sup> پراش با عکس پهنای شکاف تغییر می‌کند، و دامنه<sup>۲</sup> بیشینه<sup>۳</sup> مرکزی با مساحت شکاف متناسب است. گرده<sup>۴</sup> پراش از شکافهای خیلی باریک، کم نور و پهن است و هرگاه شکاف باز شود، گرده<sup>۵</sup> باریکتر و روشنتر می‌شود.

روزنه<sup>۶</sup> مستطیلی

روش بررسی پراش از یک روزنه<sup>۷</sup> مستطیلی همانند پراش از یک تک‌شکاف است، با این تفاوت که در اینجا مطابق شکل ۱۰۰۵ باید در دو بعد  $x$  و  $y$  انتگرال گرفت. می‌توان نشان داد که توزیع تابندگی با حاصل ضرب توابع توزیع دو تک‌شکاف برابر است (به بخش ۶۰۵ نگاه کنید). نتیجه چنین است:

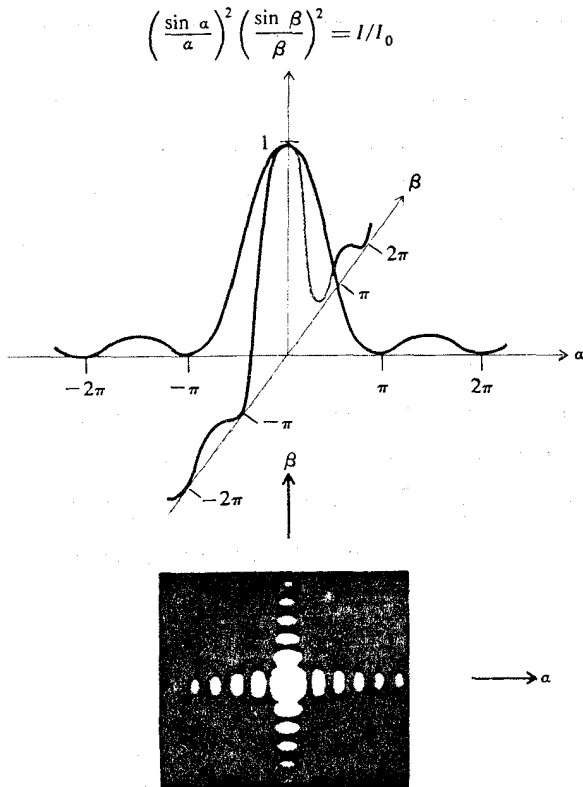


شکل ۱۰۰۵ روزنه<sup>۸</sup> مستطیلی.

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad ( ۲۱.۵ )$$

که در آن  $\alpha = \frac{1}{2}ka \sin \phi$  و  $\beta = \frac{1}{2}kb \sin \theta$  ابعاد روزنه  $a$  و  $b$  هستند و زوایای  $\phi$  و  $\theta$  جهت پرتوی پراشیده را معین می‌کنند. گرته پراش حاصل، ( شکل ۱۱.۵ )،

خطهایی با تابندگی صفر دارد که با  $\alpha = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$  و  $\beta = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$  معین می‌شوند. در اینجا نیز مانند گرته حاصل از یک شکاف، ابعاد گرته پراش بسا ابعاد روزنه رابطه معکوس دارند.



شکل ۱۱.۵ گرته پراش فرانیهوری از یک روزنه مستطیلی.

## روزنه دایره‌ای

برای محاسبه گرتنه پراش از یک روزنه دایره‌ای، مانند حالت تک‌شکافی،  $y$  را متغیر انتگرال‌گیری برمی‌گزینیم، اگر شعاع روزنه باشد، عنصر سطح را نواری به پهنای  $dy$  و طول  $2\sqrt{R^2 - y^2}$  اختیار می‌کنیم، (شکل ۱۲.۵). بنابراین توزیع دامنه گرتنه پراش برابر خواهد شد با:

$$U = C e^{ikr_0} \int_{-R}^{+R} e^{iky \sin \theta} 2\sqrt{R^2 - y^2} dy \quad (22.5)$$

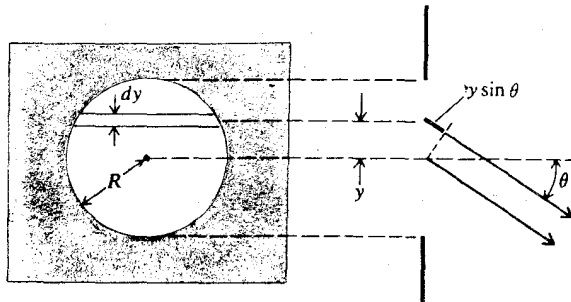
با معرفی کمیت‌های  $u = y/R$  و  $\rho = kR \sin \theta$ ، انتگرال معادله ۲۲.۵ چنین می‌شود:

$$\int_{-1}^{+1} e^{i\rho u} \sqrt{1 - u^2} du \quad (23.5)$$

این، یک انتگرال استاندارد است و مقدار آن برابر با  $\pi J_1(\rho)/\rho$  است که در آن  $J_1$  تابع بسل از نوع و مرتبه نخست است (۲۷). هرگاه  $\rho$  به سوی صفر گرایش کند، نسبت  $J_1(\rho)/\rho$  به  $\frac{1}{2}$  می‌گراید. بنابراین توزیع تابندگی به صورت زیر نوشته می‌شود:

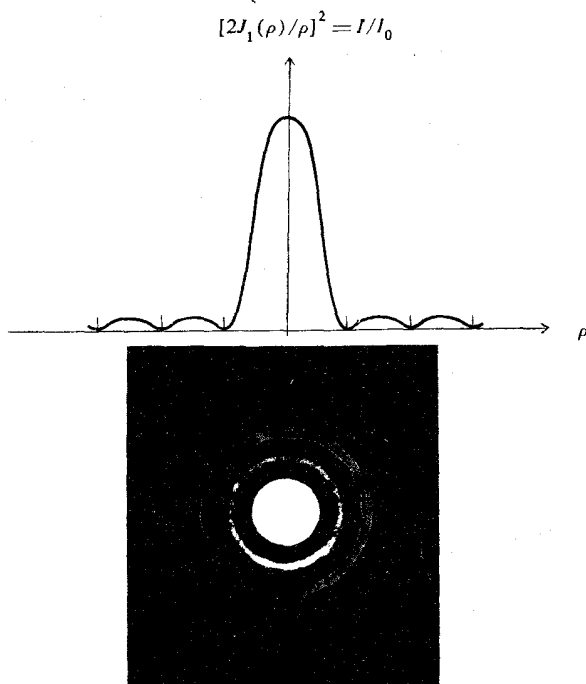
$$I = I_0 \left[ \frac{2J_1(\rho)}{\rho} \right]^2 \quad (24.5)$$

که در آن  $I_0 = (C\pi R^2)^2$  شدت برای  $\theta = 0$  است.



شکل ۱۲.۵ روزنه دایره‌ای.





شکل ۱۳.۵ گرتۀ پراش فرانیهوفری از یک روزنه دایره‌ای.

نموداری از تابع شدت در شکل ۱۳.۵ دیده می‌شود. گرتۀ پراش، تقارن دایره‌ای دارد و از یک قرص مرکزی روشن تشکیل می‌شود که گرد آن فریزهای دایره‌ای هم‌مرکز قرار دارند، و شدت آنها بتندی از یکی به دیگری کاهش می‌یابد. سطح روشن مرکزی، قرص ایری نام دارد و تا نخستین حلقه تاریک ادامه پیدا می‌کند. اندازه این حلقه با نخستین صفر تابع بسل یعنی  $\rho = 3.832$ ، تعیین می‌شود. بدین‌سان شعاع زاویه‌ای نخستین حلقه تاریک از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sin \theta = \frac{3.832}{kR} = \frac{1.22\lambda}{D} \approx \theta \quad (25.5)$$

که برای مقادیر کم  $\theta$  معتبر است. در اینجا  $D = 2R$  قطر روزنه است.

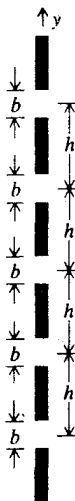
اندازه زاویه‌ای قرص ایری کمی بیشتر از مقدار  $\lambda/b$  مربوط به نوار روشن مرکزی گرته پراش از روزنه مستطیلی یا تک شکاف است. در جدول ۱۰۵ شدت چند بیشینه اول در گرته‌های پراش بوسیله روزنه‌های مستطیلی و دایره‌ای نوشته شده است.

### تفکیک یا جداسازی اپتیکی

تصویر یک چشمه نقطه‌ای دور که در صفحه کانونی عدسی یک دوربین نجومی و یا دوربین عکاسی درست می‌شود در واقع یک گرته پراش فرانیهوفری است و در آن گشودگی عدسی کار روزنه را انجام می‌دهد. بدین‌سان گرته یک چشمه مرکب، از برهم‌نهی چند قرص ایری درست می‌شود. پس تفکیک جزئیات در تصویر به اندازه هر یک از قرصهای ایری بستگی دارد. اگر  $D$  قطر عدسی باشد، در این صورت شعاع زاویه‌ای یک قرص ایری نزدیک به  $1.22 \lambda/D$  است. این تقریباً حداقل جدایی زاویه‌ای بین دو چشمه نقطه‌ای یکسان است که بزحمت از یکدیگر جدا دیده می‌شوند، زیرا برای این فاصله زاویه‌ای بیشینه مرکزی تصویر یکی از چشمه‌ها روی نخستین کمینه تصویر دیگری می‌افتد (شکل ۱۴۰۵). این شرط جداسازی نوری را معیار ریلی می‌خوانند. این معیار از معیار تایلور که در پیش از آن بحث شد، راحت‌تر است.



شکل ۱۴۰۵ معیار ریلی.



شکل ۱۷۰۵ روزنه چندشکافی یا توری پراش.

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{A}} e^{iky \sin \theta} dy &= \int_0^b + \int_h^{h+b} + \int_{2h}^{2h+b} + \dots + \int_{(N-1)h}^{(N-1)h+b} e^{iky \sin \theta} dy \\
 &= \frac{e^{ikb \sin \theta} - 1}{ik \sin \theta} \left[ 1 + e^{ikh \sin \theta} + \dots + e^{ik(N-1)h \sin \theta} \right] \\
 &= \frac{e^{ikb \sin \theta} - 1}{ik \sin \theta} \cdot \frac{1 - e^{ikN h \sin \theta}}{1 - e^{ikh \sin \theta}} \quad (29.5) \\
 &= b e^{i\beta} e^{i(N-1)\gamma} \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right) \left( \frac{\sin N\gamma}{\sin \gamma} \right)
 \end{aligned}$$

که در آن  $\beta = \frac{1}{2}kb \sin \theta$  و  $\gamma = \frac{1}{2}kh \sin \theta$ . تابع توزیع شدت چنین می‌شود:

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left( \frac{\sin N\gamma}{N \sin \gamma} \right)^2 \quad (30.5)$$

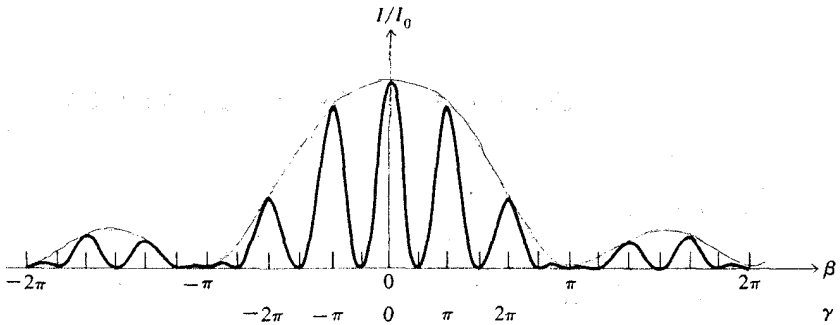
سازه  $N$  برای بهنجار کردن عبارت شدت، در آن وارد شده است. برای  $\theta = 0$  خواهد بود  $I = I_0$ .

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \gamma \quad (27.5)$$

عامل  $(\sin \beta / \beta)^2$  تابع توزیعی است که بیشتر برای یک تک‌شکافی به دست آمد. در اینجا این سازه، پوشی را تشکیل می‌دهد که فریزهای تداخلی مربوط به جمله  $\cos^2 \gamma$  را دربرمی‌گیرد، برای مثال نموداری در شکل ۱۶.۵ کشیده شده است. فریزهای روشن در  $\gamma = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$  روی می‌دهند. فاصله زاویه‌ای میان فریزها از  $\Delta\gamma = \pi$  به دست می‌آید و بتقریب بر حسب زاویه  $\theta$  چنین است:

$$\Delta\theta \approx \frac{2\pi}{kh} = \frac{\lambda}{h} \quad (28.5)$$

ناگفته نماند که این با نتیجه تحلیل آزمایش یانگ (معادله ۹.۳) یکی است.



شکل ۱۶.۵ گرتنه پراش فرانیهوفری از یک روزنه دوشکافی.

#### شکافهای چندگانه‌ای-توری‌های پراش

فرض کنید روزنه، یک توری باشد که از تعداد زیادی شکاف همسان و موازی به تعداد  $N$  و پهنای  $b$  تشکیل شده و جدایی آنها از یکدیگر  $h$  است (شکل ۱۷.۵). محاسبه انتگرال پراش به روشی مانند شکاف دوگانه انجام می‌شود.

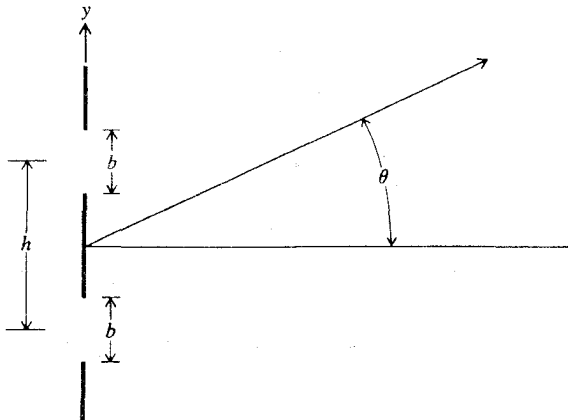
برای روزه<sup>۴</sup> مستطیلی حداقل جدایی زاویه‌ای، طبق معیار ریلی، درست  $\lambda/b$  است، که در آن  $b$  پهنای روزه است. در این حالت، شدت در نقطه<sup>۴</sup> زینسی  $8/\pi^2 = 0.81$  شدت بیشینه است. اثبات این مطلب به عنوان تمرین به خواننده گذاشته می‌شود.

### شکاف دوگانه

یک روزه<sup>۴</sup> پراشده را که شامل دو شکاف موازی است در نظر بگیرید. پهنای هر شکاف را  $b$  و فاصله آنها را از یکدیگر  $h$  فرض کنید، شکل ( ۱۵.۵ ) . در اینجا نیز مانند حالت تک‌شکافی، مسئله را به صورت یک بعدی بررسی می‌کنیم. انتگرال پراش مربوط به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{iky \sin \theta} dy &= \int_0^b e^{iky \sin \theta} dy + \int_h^{h+b} e^{iky \sin \theta} dy \\ &= \frac{1}{ik \sin \theta} \left( e^{ikb \sin \theta} - 1 + e^{ik(h+b) \sin \theta} - e^{ikh \sin \theta} \right) \quad ( ۲۶.۵ ) \\ &= \left( \frac{e^{ikb \sin \theta} - 1}{ik \sin \theta} \right) (1 + e^{ikh \sin \theta}) \\ &= 2b e^{i\beta} e^{i\gamma} \frac{\sin \beta}{\beta} \cos \gamma \end{aligned}$$

که در آن  $\beta = \frac{1}{2} kb \sin \theta$  و  $\gamma = \frac{1}{2} kh \sin \theta$ . تابع توزیع تابندگی مربوط چنین است:



شکل ۱۵.۵ روزه<sup>۴</sup> دو شکافی.

دوباره، سازه<sup>۲</sup> تک‌شکافی  $(\sin \beta/\beta)^2$ ، به صورت پوش‌گرت‌ه پراش نمایان می‌شود. بیشینه‌های اصلی در  $\gamma = n\pi$  که در آن  $n = 0, 1, 2, \dots$  روی می‌دهند، یعنی:

$$n\lambda = h \sin \theta \quad (31.5)$$

که فرمول توری است و همبستگی میان طول موج و زاویه پراش را به دست می‌دهد. عدد صحیح  $n$  را ردیف پراش می‌نامند.

بیشینه‌های ثانویه نزدیک به  $\gamma = 3\pi/2N, 5\pi/2N, \dots$  روی می‌دهند و کمینه‌ها با شدت صفر، همانگونه که نمودار در شکل ۱۸.۵ (الف) نشان می‌دهد، در  $\gamma = \pi/N, 2\pi/N, 3\pi/N, \dots$  قرار دارند. اگر شکافها خیلی باریک باشند سازه<sup>۲</sup>  $\sin \beta/\beta \approx 1$  می‌شود. بنابراین شدت چند بیشینه اصلی نخست، همه کم و بیش یکسان و برابر  $I_0$  می‌شود.

### توان جداسازی یک توری

پهنای زاویه‌ای فریز اصلی، یا فاصله میان بیشینه اصلی و کمینه مجاور آن، با مساوی قرار دادن  $N\gamma$  با  $\pi$  به دست می‌آید، یعنی:

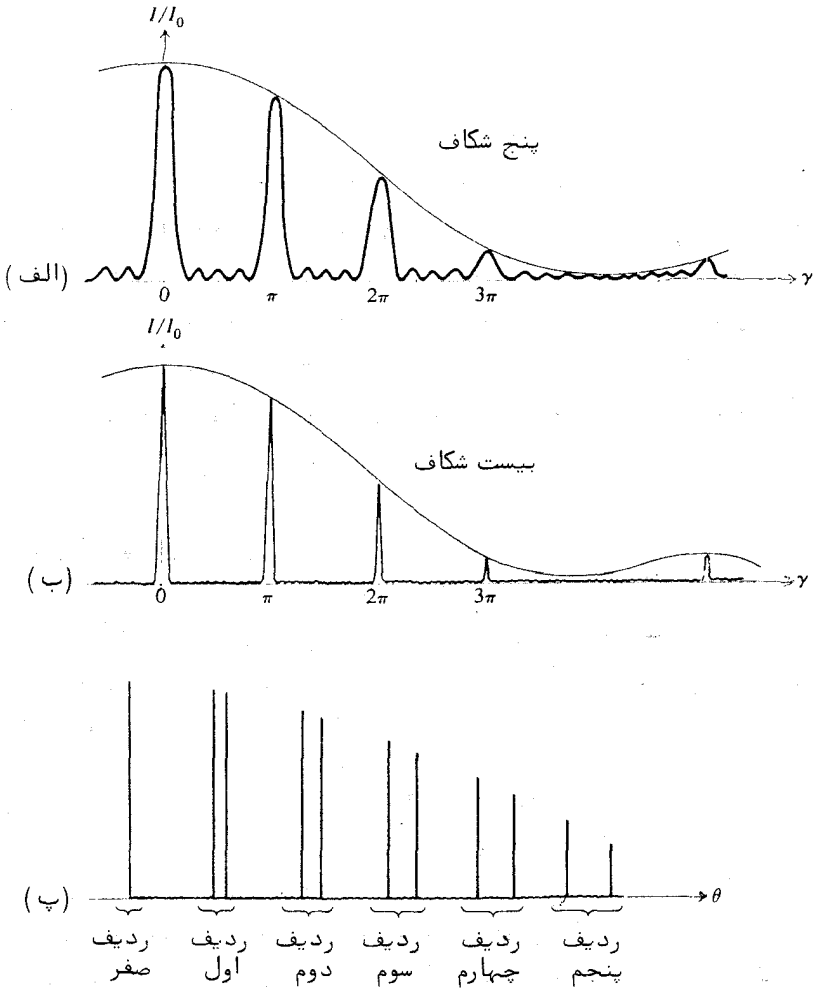
$$\Delta\gamma = \pi/N = \frac{1}{2}kh \cos \theta \quad \Delta\theta$$

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nh \cos \theta} \quad (32.5)$$

بدین‌سان اگر  $N$  خیلی زیاد باشد،  $\Delta\theta$  خیلی کوچک می‌شود و گرت‌ه پراش متشکل از تعدادی فریز باریک متناظر با ردیف‌های گوناگون  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$  خواهد بود، شکل ۱۸.۵ (ب) و (پ) از سوی دیگر، همبستگی  $\theta$  و طول موج (معادله ۳۱.۵) برای یک ردیف معین، با دیفرانسیل‌گیری نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$\Delta\theta = \frac{n \Delta\lambda}{h \cos \theta} \quad (33.5)$$

این فاصله زاویه‌ای میان دو خط بینایی است که اختلاف طول موج آنها  $\Delta\lambda$  است. ترکیب معادله‌های (۳۲.۵) و (۳۳.۵) توان جداسازی یک بیناب‌نمای توری را طبق



شکل ۱۸.۵ گرته پراش فرانیهوفری از یک روزنه چندشکافی. نمودارهای (الف) و (ب) مربوط به نور تکفام اند. نمودار (پ) گرته را برای یک توری پریخت که با نور دوفام روشن شده است نشان می‌دهد.

معیار ریلی به دست می‌دهد، یعنی:

$$RP = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nn \quad (۳۴.۵)$$

به عبارت دیگر، توان جداسازی برابر است با حاصل ضرب شماره شیارها  $N$  و شماره ردیف  $n$ .

توریهایی که در بیناب‌نمایی نوری به‌کاربرده می‌شوند با کشیدن تعداد زیادی شیار بر یک سطح شفاف (نوع تراگسیلی) یا یک سطح فلزی (نوع بازتابی) درست می‌شوند. پهنای یک توری معمولی حدود ۱۰ سانتی‌متر است که در هر میلی‌متر آن تقریباً ۶۰۰ خط کشیده می‌شود. بنابراین تعداد کل خطوط آن ۶۰۰۰۰ است و از لحاظ نظری توان جداسازی آن  $n = ۶۰۰۰۰$  است، که در آن  $n$  ردیف پراش است. در عمل در توریهای خوب، توان جداسازی به ۹۰ درصد مقیدار پیشگویی شده نظری می‌رسد.

اگر شیارها به شکلی مناسب زده شوند، معمولاً به شکل دندانه‌های اهره، بیشتر نور در یک ردیف بخصوص پراشیده می‌شود و کارایی توری افزایش می‌یابد. جدایی شیارها باید با دقت کسری از یک طول موج یکنواخت باشد، از این‌رو استواری دستگاه خط‌کشی باید خیلی زیاد باشد. توریهای روگرفتی دقیق با روش ریخته‌گری پلاستیکی ساخته می‌شوند، این توریها از توریهای نسخه اصلی بسیار ارزانترند.



توری بازتابی  
تخت



توری بازتابی  
کاو

شکل ۱۹.۵ توریهای بازتابی.

بیشتر توریهایی که در بیناب‌نمایی عملی به‌کاربرده می‌شوند، از نوع بازتابی‌اند. در این توریها شیارزنی بر یک سطح تخت یا کاو انجام می‌شود (شکل ۱۹.۵).



توریهای تخت به عدسی یا آینه‌های موازی‌ساز و کانونی‌ساز نیاز دارند. درحالی که توریهای کاو می‌توانند عمل موازی کردن و کانونی کردن و همین‌طور پاشاندن نور در طول موجهای گوناگون بیناب را بکنند. برای آگاهی بیشتر در زمینه توریها و کاربرد آنها، خواننده می‌تواند به منابع (۱۷) و (۳۵) مراجعه کند.

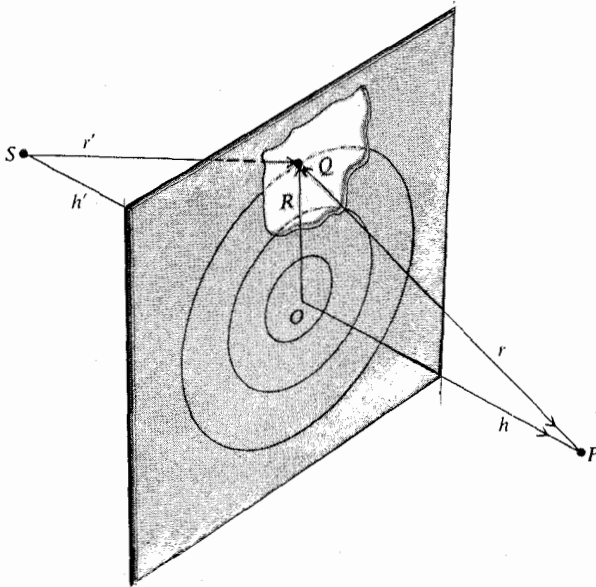
### ۵.۵ گرت‌های پراش فرنلی

برابر با معیاری که در بخش ۳.۵ از آن بحث شد، هرگاه چشمه نور یا پرده مشاهده، یا هر دوی آنها، به اندازه‌ای به روزنه پراشده نزدیک باشند که خمیدگی جبهه موج قابل چشم‌پوشی نباشد پراش از نوع فرنلی خواهد بود. ریاضیات پراش فرنلی، به علت تخت نبودن امواج، پیچیده‌تر از پراش فرانیهوری است لیکن مشاهده تجربی آن آسانتر است، زیرا برای این کار تنها به یک چشمه نور، یک پرده مشاهده و یک روزنه پراشده نیاز است. فریزهایی که در مرز سایه‌ها دیده می‌شوند و پیشتر از آنها یاد شد، در اثر پراش فرنلی به وجود می‌آیند. در این بخش تنها چند مورد ساده پراش فرنلی را که با روشهای ریاضی ساده می‌توان بررسی کرد مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

#### منطقه‌های فرنلی

یک روزنه تخت را که به وسیله یک چشمه نقطه‌ای  $S$  روشن شده در نظر بگیرید و فرض کنید خطی که  $S$  را به نقطه دریافت  $P$  وصل می‌کند، به صفحه روزنه عمود باشد، (شکل ۲۰.۵). جای برخورد خط  $SP$  با صفحه روزنه را  $O$ ، و فاصله هر نقطه  $Q$  روی روزنه را از  $O$  با  $R$  نمایش می‌دهیم پس فاصله  $PQS = r + r'$  را بر حسب  $R$  می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} r + r' &= (h^2 + R^2)^{1/2} + (h'^2 + R^2)^{1/2} \\ &= h + h' + \frac{1}{2} R^2 \left( \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} \right) + \dots \end{aligned} \quad (35.5)$$



شکل ۲۰.۵ منطقه‌های فرنلی در یک روزنه تخت .

که در آن  $h$  و  $h'$  بترتیب فاصله‌های  $OP$  و  $OS$  هستند. اکنون فرض کنید روزنه به ناحیه‌هایی که با دایره‌های هم‌مرکز محصور می‌شوند تقسیم شود، به طوری که  $r+r'$  از یک مرز به مرز بعدی، به اندازه یک‌دوم طول موج تغییر کند. این ناحیه‌ها را منطقه‌های فرنلی می‌نامند. از (۳۵.۵) نتیجه می‌گیریم که شعاع‌های دایره‌های پای‌درپی چنین‌اند:  $R_1 = \sqrt{\lambda L}$ ,  $R_2 = \sqrt{2\lambda L}$ ,  $\dots$ ,  $R_n = \sqrt{n\lambda L}$  ، که در آنها  $\lambda$  طول موج است و

$$L = \left( \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} \right)^{-1} \quad (36.5)$$

اگر  $R_n$  و  $R_{n+1}$  شعاع‌های دایره‌های درونی و بیرونی منطقه شماره  $n$  باشد، مساحت آن منطقه برابر خواهد بود با  $\pi R_{n+1}^2 - \pi R_n^2 = \pi R_1^2$  که به  $n$  بستگی ندارد. بنابراین مساحت‌های منطقه‌ها همه با هم برابرند.

شعاع‌های منطقه‌های فرنلی ردیف‌های پائین نوعاً "خیلی کوچکند. برای مثال

اگر  $h = h' = 50$  سانتی متر و  $\lambda = 600$  نانومتر باشد، در این صورت  $R_1 = (\lambda L)^{1/2}$  تقریباً برابر ۴ میلی متر می شود. همچنین، چون  $R_n$  با  $n^{1/2}$  متناسب است، می بینیم که شعاع منطقه صدم تنها حدود ۴ میلی متر می شود.

آشفتگی نوری در نقطه  $P$  را می توان برحسب سهم منطقه های مختلف فرنی،  $U_1, U_2, U_3, \dots$  ارزیابی کرد. چون از یک منطقه به منطقه بعدی، فاز میانگین درست ۱۸۰ درجه تغییر می کند، پس مجموع سهمها در دامنه  $|U_p|$  را می توان به صورت زیر نوشت:

$$|U_p| = |U_1| - |U_2| + |U_3| - \dots \quad (37.5)$$

برای مثال، یک روزه دایره ای به مرکز  $O$  را در نظر بگیرید و فرض کنید درست  $n$  منطقه کامل را دربر بگیرد. چون مساحتها با هم برابرند، بنابراین همه  $|U|$  ها تقریباً با هم برابر می شوند. حال اگر  $n$  جفت باشد، حاصل جمع نزدیک به صفر خواهد بود و گسرنه تقریباً برابر  $|U_1|$  می شود.

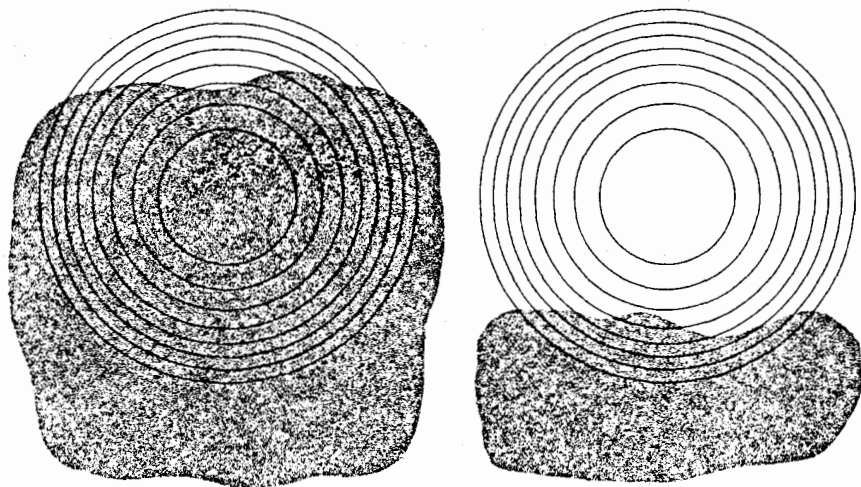
نگاهی به سازه میل و سازه فاصله شعاعی در فرمول فرنی - کیرشهوف، معادله (۱۱.۵)، نشان می دهد که با افزایش  $n$  اندازه  $|U_n|$  بکندی کاهش می یابد. در نتیجه هرگاه  $n \rightarrow \infty$ ، یعنی گشودگی روزه بسیار بزرگ باشد یا اصلاً روزه ای در کار نباشد، آشفتگی نوری در نقطه  $P$  تقریباً یک دوم سهم نخستین منطقه فرنی خواهد بود. برای اثبات این مطلب (لااقل به طور کیفی) جمله های معادله ۳۷.۵ را به صورت زیر گروه بندی می کنیم:

$$|U_p| = \frac{1}{2}|U_1| + \left(\frac{1}{2}|U_1| - |U_2| + \frac{1}{2}|U_3|\right) + \left(\frac{1}{2}|U_3| - |U_4| + \frac{1}{2}|U_5|\right) + \dots \quad (38.5)$$

اگر با زیاد شدن  $n$ ، کاهش خیلی آهسته باشد، اندازه هر  $|U_n|$  تقریباً برابر میانگین دو  $|U|$  ی مجاور است، به طوری که جمله های داخل ابروان تقریباً حذف می شوند. پس هرگاه روزه اصلاً وجود نداشته باشد، آشفتگی نوری در  $P$  برابر  $\frac{1}{2}|U_1|$  خواهد بود.

فرض کنید به جای روزه یک مانع دایره ای داشته باشیم، در این صورت منطقه بندی فرنی از لبه مانع شروع می شود و اندازه  $|U_p|$ ، مانند بالا، برابر

نصف سهم نخستین منطقه ناپوشیده خواهد بود. بهمین سبب در مرکز سایه یک جسم کدر دایره‌ای، یک لکه روشن نمایان می‌شود<sup>۲</sup>. تابندگی لکه روشن تقریباً مساوی حالتی است که مانع وجود نداشته باشد.



( ب )

( الف )

شکل ۲۱۰۵ نمای منطقه‌های فرنلی یک چشمه نقطه‌ای در پس یک مانع نامنظم. ( الف ) از بیرون سایه هندسی، ( ب ) از درون سایه هندسی.

نمای منطقه‌های فرنلی از دیدگاه نقطه دریافت  $m$  در حالتی که روزنه یک مانع یا یک دهانه نامنظم باشد، در شکل ۲۱۰۵ نشان داده شده است. در ناحیه روشن شده<sup>۳</sup> ( الف )، منطقه‌های بیرونی به طور جزئی پوشیده شده‌اند. پس در معادله<sup>۴</sup> ( ۳۷۰۵ ) جمله‌های مرتبه بالا، زودتر از حالتی که مانع وجود ندارد کاهش پیدا می‌کنند، ولی جمله‌های نخست باقی می‌مانند. در نتیجه اندازه  $|U_p|$  تغییر نمی‌کند. از سوی دیگر، در ( ب ) منطقه‌های مرکزی کاملاً پوشیده شده و منطقه‌های بیرونی به طور جزئی پوشیده شده‌اند. بنابراین جمله‌های مجموع در هر دو سر کاهش

۲- وجود چنین لکه‌ای اولین بار توسط پواسن در ۱۸۱۸ پیشگویی شد و سپس به‌طور تجربی به وسیله آراگو و فرنل تأیید شد.

پیدامی‌کنند و در نتیجه تقریباً "یکدیگر را خنثی می‌کنند. پس اگر  $P$  در ناحیه روشن باشد، وجود مانع، یا تغییر ناچیزی تولید می‌کند یا اثری ندارد، ولی اگر در ناحیه سایه باشد، آشفتگی نوری خیلی کم است. این کمابیش با نتیجه نورشناسی هندسی سازگار است. تنها در صورتی فریزهای پراشی اطراف سایه دیده می‌شوند که ناهمواری لبه مانع نسبت به شعاع نخستین منطقه فرنلی کوچک باشد.

### پولک منطقه‌ای

اگر روزنه‌ای طوری ساخته شود که منطقه‌های فرنلی یک‌درمیان، مثلاً شماره‌های جفت، تاریک باشند، جمله‌هایی که در جمع‌بندی می‌مانند هم علامت خواهند بود و داریم:

$$|U_p| = |U_1| + |U_3| + |U_5| + \dots \quad (39.5)$$

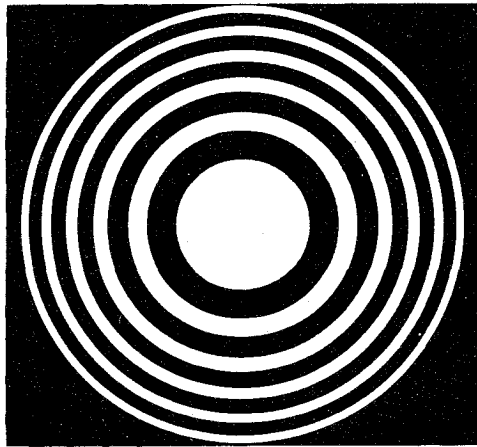
این روزنه را پولک منطقه‌ای می‌نامند. کار آن مانند یک عدسی است، زیرا  $|U_p|$  و در نتیجه تابندگی در  $P$ ، خیلی بیشتر از وقتی است که روزنه‌ای نباشد. فاصله کانونی معادل، همان  $L$  است که در (۳۶.۵) داده شد و از رابطه زیر نیز به دست می‌آید:

$$L = \frac{R_1^2}{\lambda} \quad (40.5)$$

پولکهای منطقه‌ای را می‌توان با عکسبرداری از شکل کشیده شده‌ای مانند ۲۲.۵ فراهم ساخت. فیلم عکاسی به دست آمده می‌تواند نور را کانونی کند و از اجسام دور تصویر بسازد. لیکن پولک منطقه‌ای دارای عیب رنگی شدید است، زیرا فاصله کانونی آن با عکس طول موج متناسب است.

### روزنه مستطیلی

پراش فرنلی از یک روزنه مستطیلی به کمک فرمول فرنل - کیرشهوف،



شکل ۲۲.۵ یک پولک منطقه‌ای.

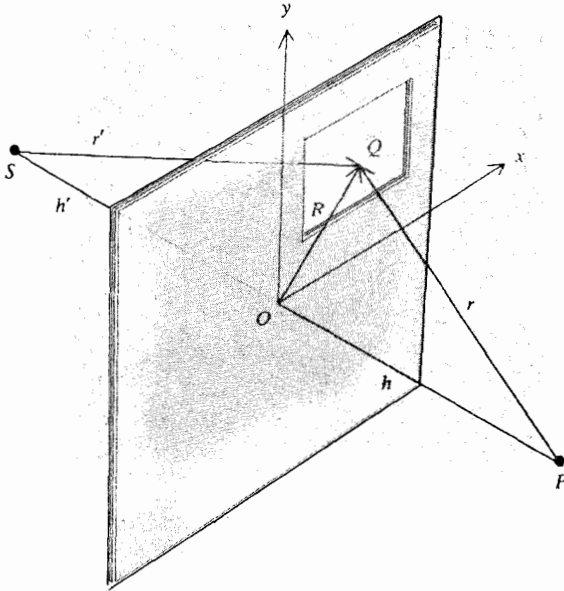
معادله (۱۱.۵)، بررسی می‌شود. مطابق شکل ۲۳.۵ از مختصات قائم  $x$  و  $y$  در صفحه روزنه استفاده می‌کنیم. پس  $R^2 = x^2 + y^2$  و بساتوجه به معادلات (۳۵.۵) و (۳۶.۵) رابطه تقریبی زیر به دست می‌آید:

$$r + r' = h + h' + \frac{1}{2L}(x^2 + y^2) \quad (۴۱.۵)$$

اکنون مانند پراش فرانیهوفی، فرض می‌کنیم سازه میل  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}')$  و سازه شعاعی  $1/r'$  نسبت به سازه نمایی  $e^{ik(r+r')}$  به قدری کم تغییر کنند که بتوان آنها را از انتگرالده خارج کرد. در آن صورت فرمول فرنل-کیرشهوف چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} U_D &= C \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} e^{ik(x^2+y^2)/2L} dx dy \\ &= C \int_{x_1}^{x_2} e^{ikx^2/2L} dx \int_{y_1}^{y_2} e^{iky^2/2L} dy \end{aligned} \quad (۴۲.۵)$$

که در آن  $C$  همه سازه‌های دیگر را در بر دارد. با تعریف متغیرهای بی بعد  $u$  و  $v$  به صورت:



شکل ۲۳.۵ نمایش هندسی یک روزنهء مستطیلی.

$$u = x \sqrt{\frac{k}{\pi L}} \quad v = y \sqrt{\frac{k}{\pi L}}$$

یا:

$$u = x \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} \quad v = y \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} \quad (۴۳.۵)$$

که در آنها تعریف  $L$  در معادلهء (۳۶.۵) داده شد و  $\lambda$  طول موج است، می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$U_p = U_1 \int_{u_1}^{u_2} e^{i\pi u^2/2} du \int_{v_1}^{v_2} e^{i\pi v^2/2} dv \quad (۴۴.۵)$$

کسه در آن  $U_1 = C\pi L/k$

انتگرالها در معادله (۴۴.۵) ، برحسب انتگرال زیر محاسبه می‌شوند :

$$\int_0^x e^{i\pi w^2/2} dw = C(s) + iS(s) \quad (45.5)$$

که در آن بخشهای حقیقی و موهومی به صورت زیرند :

$$C(s) = \int_0^s \cos(\pi w^2/2) dw$$

$$S(s) = \int_0^s \sin(\pi w^2/2) dw \quad (46.5)$$

این انتگرالها به انتگرالهای فرنل معروفند . سیاهه کوتاه‌ی از مقادیر عددی انتگرالهای فرنل در جدول ۲۰.۵ آورده شده و نمودار  $S(s)$  برحسب  $C(s)$  به نام ماریچ کرنو در شکل ۲۴.۵ ترسیم شده است .

ماریچ کرنو برای محاسبه نموداری انتگرالهای فرنل به کار می‌رود .

نقطه‌های  $s_1$  و  $s_2$  حدود انتگرالند که روی ماریچ مشخص شده‌اند و پاره خط مستقیمی که از  $s_1$  به  $s_2$  کشیده می‌شود ، شکل ۲۴.۵ (ب) ، مقدار انتگرال  $\int_{s_1}^{s_2} e^{i\pi w^2/2} dw$  را معین می‌سازد . طول پاره خط ، بزرگی انتگرال و تصویرهای آن روی محورهای  $C$  و  $S$  بترتیب بخشهای حقیقی و موهومی انتگرال را به دست می‌دهند . همچنین ، از معادله (۴۶.۵) می‌بینیم که  $(dC)^2 + (dS)^2 = (ds)^2$  ، پس بین نمایانگر یک عنصر کمان ماریچ کرنو است و طول کمان برابر با اختلاف بین دو حد ، یعنی  $s_2 - s_1$  ، است . این اختلاف با اندازه روزنه متناسب است ، یعنی برای بعد  $x$  داریم :

$$s_2 - s_1 = u_2 - u_1 = (x_2 - x_1) \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$$

و برای بعد  $y$  :

$$s_2 - s_1 = v_2 - v_1 = (y_2 - y_1) \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$$

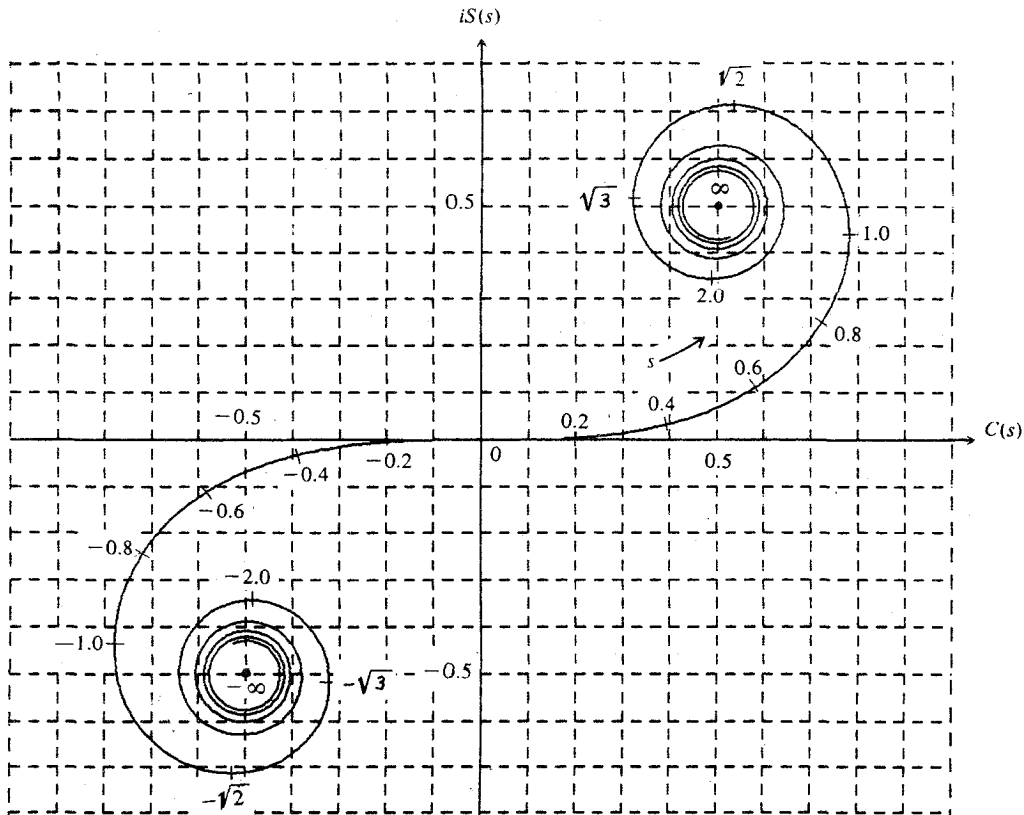
حالت حدی یک دهانه بینهایت بزرگ ، یعنی حالتی که برده پراشده اصلاً



## جدول ۲۰۵ انتگرالهای فرنل

$S(s)$	$C(s)$	$s$
۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰
۰/۰۰۴	۰/۲۰۰	۰/۲
۰/۰۳۳	۰/۳۹۸	۰/۴
۰/۱۱۱	۰/۵۸۱	۰/۶
۰/۲۴۹	۰/۷۲۳	۰/۸
۰/۴۳۸	۰/۷۸۰	۱/۰
۰/۶۲۳	۰/۷۱۵	۱/۲
۰/۷۱۴	۰/۵۴۳	۱/۴
۰/۶۳۸	۰/۳۶۶	۱/۶
۰/۴۵۱	۰/۳۳۴	۱/۸
۰/۳۴۳	۰/۴۸۸	۲/۰
۰/۶۱۹	۰/۴۵۷	۲/۵
۰/۴۹۶	۰/۶۰۶	۳/۰
۰/۴۱۵	۰/۵۳۳	۳/۵
۰/۴۲۰	۰/۴۹۸	۴/۰
۰/۵۰۰	۰/۵۰۰	$\infty$

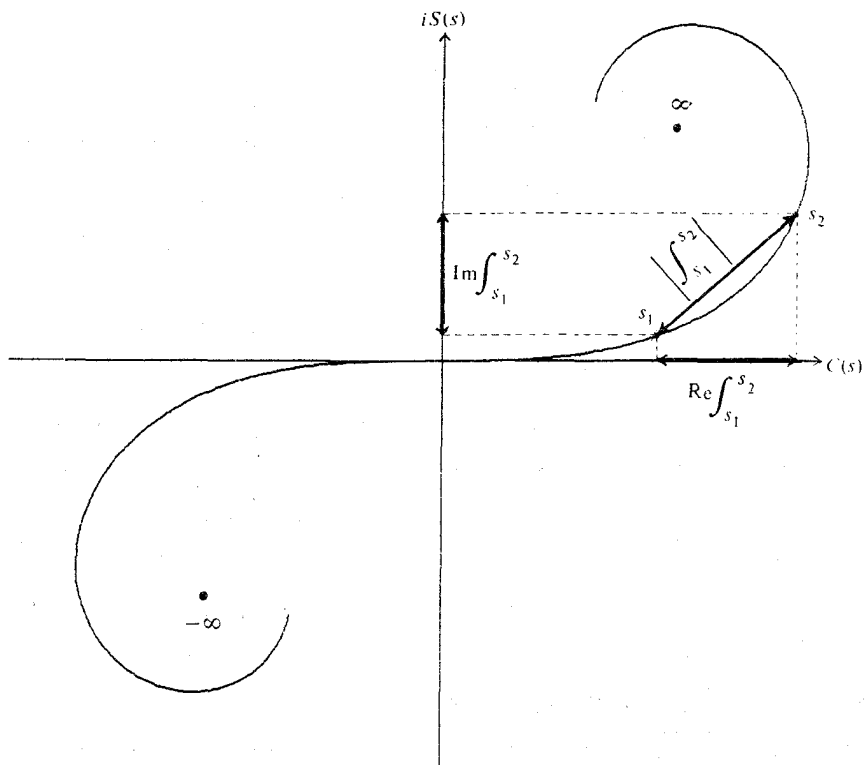
وجود ندارد، با قراردادن  $u_1 = v_1 = -\infty$  و  $u_2 = v_2 = +\infty$  به دست می‌آید. چون داریم  $C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2}$  و  $C(-\infty) = S(-\infty) = -\frac{1}{2}$  اگر مانعی وجود نداشته باشد، آشفتگی نوری برابر  $U_1(1+i)^2$  می‌شود. این آشفتگی مساوی با  $U_1$  برابر طول پاره خطی است که نقطه  $-\infty$  را به نقطه  $\infty$  روی مارپیچ کرنو وصل می‌کند، شکل ۲۴۰۵ (ب). با مساوی قراردادن آن با  $U_0$  حالت عمومی را می‌توانیم به صورت بهنجار بنویسیم:



شکل ۲۴۰۵ الف) ماریچ کرنو. مقیاس  $w$  روی منحنی مشخص شده است.

$$U_p = \frac{U_0}{(1+i)^2} [C(u) + iS(u)]_{u_1}^{u_2} [C(v) + iS(v)]_{v_1}^{v_2} \quad (47.5)$$

اگر بخواهیم دقیق باشیم، مقادیر خیلی بزرگ پارامترهای  $u$ ،  $v$  یا  $s$  با تقریبی که در معادله (۴۱.۵) بیان شد سازگار نیستند. لیکن در موارد عادی، بیشتر دهس به  $U_p$  به منطقه‌های فرنلی ردیف یائین مربوط می‌شود که متناظر با مقادیر کم پارامترهای نامبرده است، از این رو این تقریب هنوز صادق است.



شکل ۲۴.۵ (ب) محاسبه انتگرالهای فرنل به کمک ماریچج کرنو.

### شکاف و لبه راست

پراش فرنلی به وسیله یک شکاف دراز مانند حالت حدی روزنه مستطیلی است، یعنی در معادله (۴۷.۵)  $u_1 = -\infty$  و  $u_2 = +\infty$  قرار داده می‌شود. برای شکافی که لبه‌های آن با  $v_1$  و  $v_2$  معین می‌شوند، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$U_p = \frac{U_0}{1+i} [C(v) + iS(v)]_{v_1}^{v_2} \quad (48.5)$$

لبه راست نیز مانند یک حالت حدی شکاف دراز است که در آن  $v_1 = -\infty$  گرفته می‌شود. در نتیجه چنین خواهیم داشت:

$$U_p = \frac{U_0}{1+i} [C(v) + iS(v)]_{-v_2}^{v_2} \quad (49.5)$$

$$= \frac{U_0}{1+i} \left[ C(v_2) + iS(v_2) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right]$$

که تابعی است از یک متغیر  $v_2$ . این متغیر، مکان لبهء پراشده را معین می‌کند. اگر نقطهء دریافت  $P$  درست روی لبهء سایه هندسی باشد،  $v_2 = 0$  و بنابراین داریم:

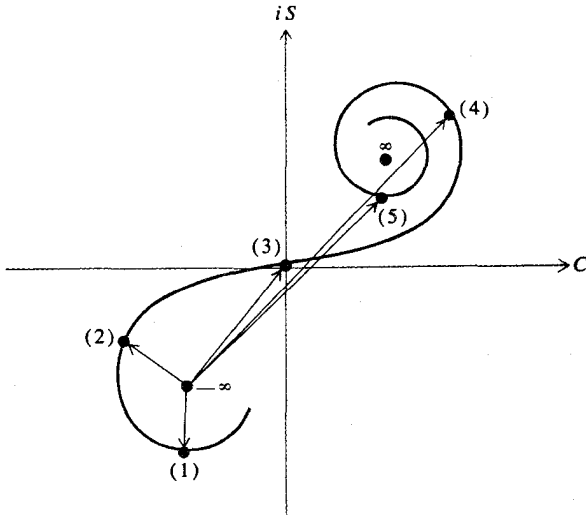
$$U_p = [U_0/(1+i)] (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = \frac{1}{2}U_0$$

چهارم مقدار مربوط به حالت ناپوشیده است. تغییرات  $I_p = |U_p|^2$  که از معادلهء (۴۹.۵) حاصل می‌شود در شکل (۲۵.۵) نشان داده شده است. در اینجا  $I_p$  برحسب  $v_2$  کشیده شده است. این عمل مانند آن است که نقطهء دریافت را ثابت نگاهداریم و محل لبهء پراشده را تغییر دهیم. نتیجه کم‌وبیش یک گرتسهء پراش است. از روی نمودار می‌توان دید که در منطقهء سایه ( $v_2 < 0$ ) وقتی  $v_2 \rightarrow -\infty$  تابندگی به طور تکنواخت و سریع کم می‌شود. از سوی دیگر تابندگی در منطقهء افروزانده ( $v_2 > 0$ ) وقتی  $v_2 \rightarrow +\infty$  با دامنه‌ای در حال کاهش، پیرامون مقدار  $U_0$ ، که مربوط به حالت بدون مانع است، نوسان می‌کند. بیشترین تابندگی در ناحیهء افروزانده در نقطهء  $v_2 \approx 1.25$  روی می‌دهد و  $I_p$  برای آن ۱.۳۷ برابر تابندگی موج بی مانع است. این به صورت یک فریز روشن بعد از سایهء هندسی دیده می‌شود.

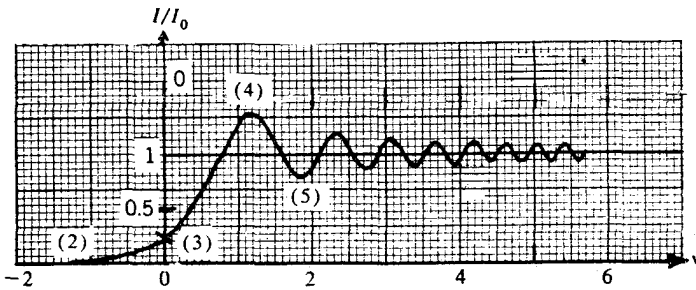
### ۶.۵ کاربردهای تبدیل فوریه در پراش

اکنون به بحث پراش فرانیهوفری باز می‌گردیم، و به بررسی مسئلهء کلی پراش بوسیلهء یک روزنه که نه تنها شکل دلخواه دارد بلکه مقدار تراکسیل آن دلخواه بوده و پس افتادگی فازی در سطح آن متغیر است، می‌پردازیم.

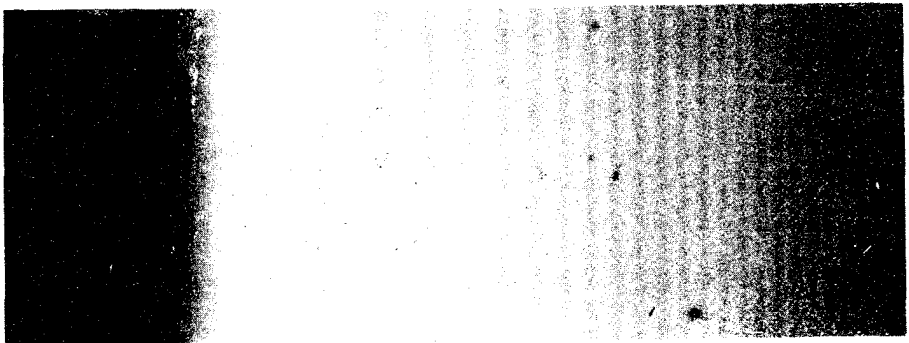
محورهای مختصات را مطابق شکل ۲۶.۵ اختیار می‌کنیم. روزنهء پراشده در صفحهء  $XY$  قرار دارد و گرتهء پراش در صفحهء  $XY$  که صفحهء کانونی عدسی کانونی‌ساز است نمایان می‌شود. طبق نورشناسی هندسی مقدماتی، همهء پرتوهایی که از روزنهء پراشده در یک جهت معین، با کسینوسهای هادی  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$ ، خارج



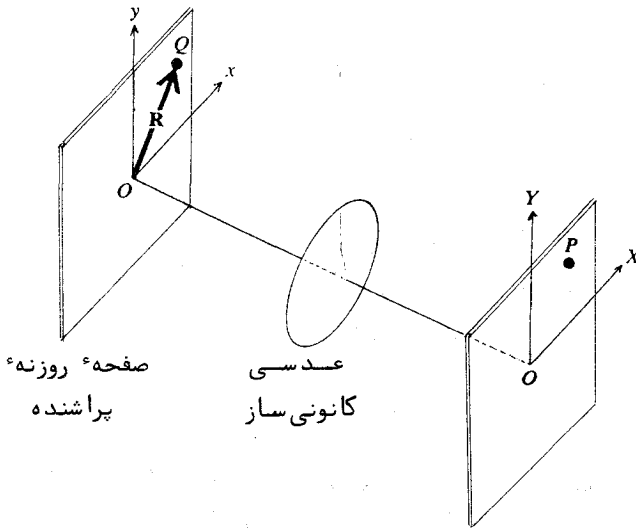
( الف )



( ب )



شکل ۲۵.۵ پراش فرنلی به وسیله یک لبه راست. ( الف ) نقاط روی مارپیچ کرنو،  
 ( ب ) نقطه‌های متناظر روی منحنی شدت.  $v = 0$  نمایانگر لبه سایه  
 هندسی است. درپائین تصویری از گرته پراش نشان داده شده است.



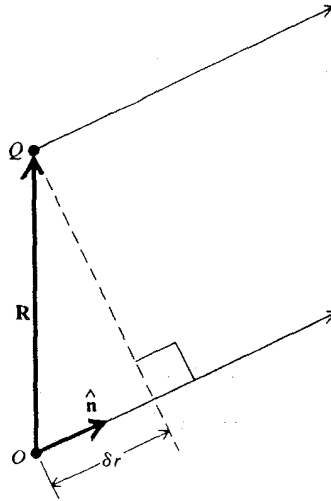
شکل ۲۶.۵ نمایش هندسی مسئله کلی پراش.

می‌شوند در یک نقطه مشترک کانونی می‌شوند. این کانون در نقطه  $P(X, Y)$  قرار دارد که در آن  $X \approx L\alpha$  و  $Y \approx L\beta$  و  $L$  فاصله کانونی عدسی است.  $\alpha$  و  $\beta$  کوچک و  $\gamma$  تقریباً برابر یک فرض شده‌اند.

اختلاف راه  $\delta r$  بین پرتویی که از نقطه  $Q(x, y)$  می‌آید و پرتویی که از مبدا  $O$  به موازات آن جدا می‌شود برابر است با  $\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  (شکل ۲۷.۵) که در آن  $\mathbf{R} = \hat{\mathbf{i}}x + \hat{\mathbf{j}}y$  بردار یکایی در جهت پرتو است. چون  $\hat{\mathbf{n}}$  را می‌توان به صورت  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{i}}\alpha + \hat{\mathbf{j}}\beta + \hat{\mathbf{k}}\gamma$  نوشت بنابراین داریم:

$$\delta r = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{n}} = x\alpha + y\beta = x \frac{X}{L} + y \frac{Y}{L} \quad (۵۰.۵)$$

پس انتگرال بنیادی پراش (معادله ۱۶.۵) که گرته پراش را در صفحه  $XY$  مشخص می‌کند، گذشته از یک ضریب ثابت، به صورت زیر قابل بیان است.



شکل ۲۷.۵ اختلاف راه بین دو پرتو نور موازی که از نقطه‌های  $O$  و  $Q$  در صفحه  $xy$  برمی‌خیزند.

$$U(X, Y) = \iint e^{ik\delta r} d\mathcal{A} = \iint e^{ik(xX + yY)/L} dx dy \quad (51.5)$$

این رابطه برای حالتی است که روزنه یکنواخت باشد.

برای یک روزنه یکنواخت مستطیلی، انتگرال دوگانه به حاصل ضرب دو انتگرال یگانه ساده می‌شود، که نتیجه آن در بخش ۴.۵ بیان شد.

برای روزنه غیر یکنواخت تابع  $g(x, y)$  را به نام تابع روزنه تعریف می‌کنیم. این تابع طوری است که  $g(x, y) dx dy$  دامنه موج پراشیده از عنصر سطح  $dx dy$  است. بدین‌سان به جای معادله (۵۱.۵)، رابطه کلی‌تر زیر را داریم:

$$U(X, Y) = \iint g(x, y) e^{i(uX + vY)} dx dy \quad (52.5)$$

در این جا از کمیتهای زیر استفاده کرده‌ایم :

$$\mu = \frac{kX}{L} \quad \text{و} \quad \nu = \frac{kY}{L} \quad ( ۵۳۰۵ )$$

$\mu$  و  $\nu$  گرچه مانند عدد موج دارای ابعاد عکس طولند ولی آنها را بسامدهای فضایی می‌نامند. حال معادله ( ۵۲۰۵ ) را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$U(\mu, \nu) = \iint g(x, y) e^{i(\mu x + \nu y)} dx dy \quad ( ۵۴۰۵ )$$

می‌بینیم که توابع  $U(\mu, \nu)$  و  $g(x, y)$  یک جفت تبدیل فوریه دویعدی را تشکیل می‌دهند. گرته پراش در این بحث عملاً " حل فوریه‌ای تابع روزنه است.

برای مثال، یک توری پراش را در نظر می‌گیریم. برای سادگی آن را به صورت یک مسئله تک‌بعدی بررسی می‌کنیم. تابع روزنه  $g(y)$  مطابق شکل ۲۸۰۵ یک تابع پله‌ای دوره‌ای است و با یک سری فوریه به صورت زیر نشان داده می‌شود :

$$g(y) = g_0 + g_1 \cos(\nu_0 y) + g_2 \cos(2\nu_0 y) + \dots \quad ( ۵۵۰۵ )$$

بسامد فضایی اصلی  $\nu_0$  از تناوب توری به دست می‌آید، یعنی

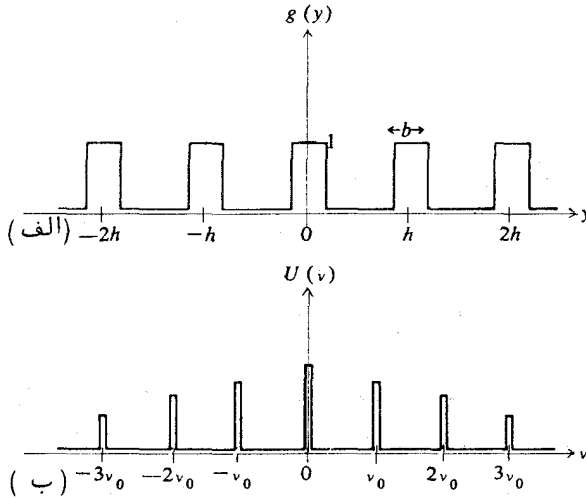
$$\nu_0 = \frac{2\pi}{h} \quad ( ۵۶۰۵ )$$

که در آن  $h$  جدایی خطوط توری است. بسامد فضایی اصلی در گرته پراش به صورت بیشینه ردیف اول نمایان می‌شود و دامنه آن با  $g_1$  متناسب است. بیشینه‌های ردیفهای بالاتر، با مولفه‌های فوریه‌ای بالاتر تابع روزنه  $g(y)$  متناظرند. بدین سان اگر تابع روزنه به جای یک تابع پله‌ای دوره‌ای، یک تابع کسینوسی  $g_0 + g_1 \cos(\nu_0 y)$  می‌بود، گرته پراش تنها از یک بیشینه مرکزی و دو بیشینه ردیف اول تشکیل می‌شد. ردیفهای دوم و ردیفهای بعدی ظاهر نمی‌شدند.

### پیرایش

پیرایش فرایندی است که در آن تابع روزنه تغییر داده می‌شود





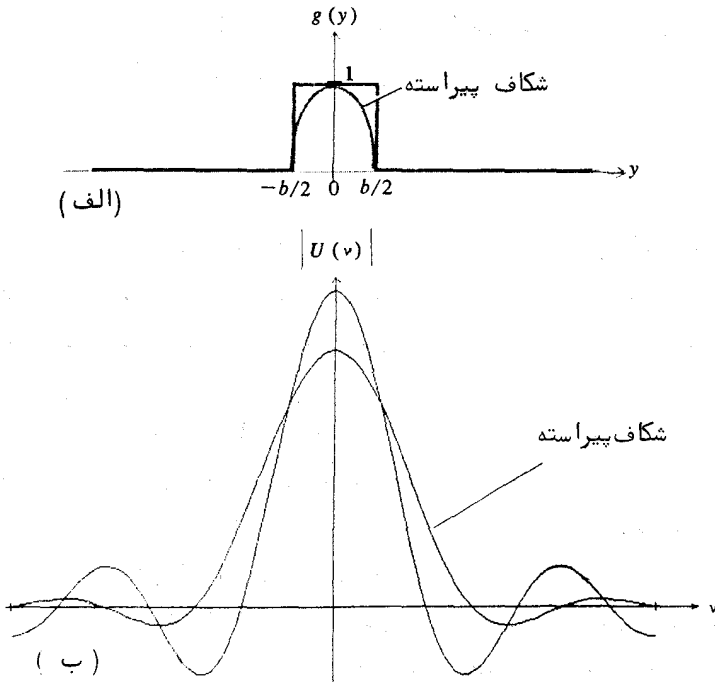
شکل ۲۸.۵ تابع روزنه یک توری و تبدیل فوریه آن.

تا توزیع انرژی در گرتۀ پیراش عوض شود. معمولاً برای کم کردن شدت بیشینه‌های ثانویه به‌کار می‌رود.

شاید با آوردن یک مثال ویژه، توضیح نظریه پیرایش آسانتر باشد. فرض کنید روزنه مورد نظر یک شکاف باشد، تابع روزنه در این حالت یک تابع پله‌ای است که برای فاصله  $-b/2 < y < b/2$ ،  $g(y) = 1$  و خارج از آن  $g(y) = 0$ ، (شکل ۲۹.۵). گرتۀ پیراش مربوط، برحسب بسامدهای فضایی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U(v) = \int_{-b/2}^{+b/2} e^{iv y} dy = b \frac{\sin(\frac{1}{2}vb)}{(\frac{1}{2}vb)} \quad (57.5)$$

که معادل حالت معمولی است و بحث آن پیش از این در بخش ۵.۵ گذشت. حال فرض کنید تابع روزنه را با پیرایش به گونه‌ای تغییر دهیم که تراکسیل روزنه تابعی کسینوسی باشد، به طوری که مطابق شکل ۲۹.۵ برای فاصله  $-b/2 < y < b/2$ ،  $g(y) = \cos(\pi y/b)$  و خارج از آن صفر باشد. این عمل را می‌توان مثلاً با یک شیشه اندوده که روی روزنه قرار می‌گیرد انجام داد.



شکل ۶.۵ (الف) توابع روزنه برای یک شکاف و یک شکاف پیراسته، (ب) تبدیلهای فوریه آنها.

گرته جدید پراش به کمک رابطه زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
 U(v) &= \int_{-b/2}^{+b/2} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{i v y} dy \\
 &= \cos(vb/2) \left( \frac{1}{v - \pi/b} - \frac{1}{v + \pi/b} \right)
 \end{aligned}
 \quad (58.5)$$

این دو گرته پراش در شکل با هم مقایسه شده‌اند. نتیجه پیرایش در این حالت این است که بیشینه‌های ثانویه، نسبت به بیشینه مانی کاهش اساسی یافته‌اند، به زبان دیگر، پیرایش بسامدهای فضایی بالا را سرکوب کرده است. با روشی مشابه، می‌توان دهانه دایره‌ای یک تلسکوپ را پیراست، تناز شدت نسبی حلقه‌هایی که گرد تصاویر ستارگان به‌وجود می‌آیند (بحث آن در بخش

۵.۵ گذشت) کاسته شود. این کار توانایی تلسکوپ را در جداسازی تصویر یک ستاره کم سو که نزدیک یک ستاره روشن قرار دارد افزایش می دهد.

### تصفیه فضایی

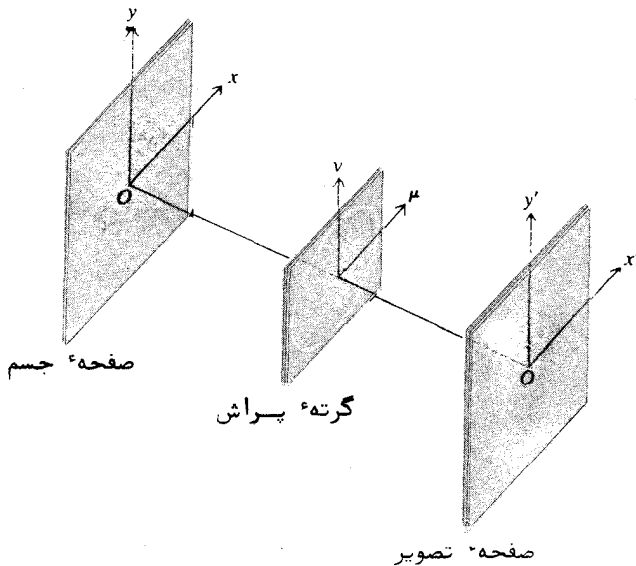
نموداری را که در شکل ۳۰.۵ نشان داده شده است در نظر بگیرید. صفحه<sup>۶</sup>  $xy$  نمایانگر محل جسمی است که همدوسانه روشن شده است<sup>۳</sup>. تصویر این جسم به وسیله<sup>۶</sup> یک دستگاه نوری، (که در شکل نشان داده نشده است)، در صفحه<sup>۶</sup>  $x'y'$  تشکیل می شود. گرته<sup>۶</sup> پراش  $U(\mu, \nu)$  مربوط به تابع جسم  $g(x, y)$  در صفحه<sup>۶</sup>  $\mu\nu$  ظاهر می شود. این صفحه همانند صفحه<sup>۶</sup>  $XY$  در شکل ۲۶.۵ است. از این رو  $U(\mu, \nu)$  طبق معادله<sup>۶</sup> (۵۴.۵) تبدیل فوریه<sup>۶</sup>  $g(x, y)$  است. تابع تصویری<sup>۶</sup>  $g'(x', y')$  که در صفحه<sup>۶</sup>  $x'y'$  نمایان می شود، به نوبه<sup>۶</sup> خود، تبدیل فوریه<sup>۶</sup>  $U(\mu, \nu)$  است. حال اگر کلیه<sup>۶</sup> بسامدهای فضایی در گستره<sup>۶</sup>  $\mu = \pm\infty$ ،  $\nu = \pm\infty$  بی کم و کاست از دستگاه نوری عبور داده شوند، در این صورت به واسطه<sup>۶</sup> خاصیت تبدیل فوریه، تابع تصویر  $g'(x'y')$  دقیقاً<sup>۶</sup> متناسب با تابع جسم  $g(x, y)$  خواهد بود، یعنی تصویر در واقع بازساخته<sup>۶</sup> کاملی از جسم است. ولی اندازه<sup>۶</sup> محدود دهانه در محل صفحه<sup>۶</sup>  $\mu\nu$ ، بسامدهای فضایی که از دستگاه نوری می گذرند را محدود می کند. از این گذشته نقائص عدسیها، عیوب اپتیکی و جز اینها تابع  $U(\mu, \nu)$  را دگرگون می کنند. همه<sup>۶</sup> این اثرها را می توان در یک تابع  $T(\mu, \nu)$  به نام تابع انتقال دستگاه نوری یکی کرد. این تابع به وسیله<sup>۶</sup> معادله<sup>۶</sup> زیر به طور ضمنی تعریف می شود:

$$U'(\mu, \nu) = T(\mu, \nu) U(\mu, \nu)$$

پس

$$g'(x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\mu, \nu) U(\mu, \nu) e^{-i(\mu x' + \nu y')} d\mu d\nu \quad (59.5)$$

۳- برای بحث درباره<sup>۶</sup> نظریه<sup>۶</sup> تصفیه<sup>۶</sup> فضایی با نور ناهمدوس به منبع (۱۰) مراجعه شود.



شکل ۳۰۵ نمایش هندسی مسئله کلی تشکیل تصویر در یک دستگاه نوری.

یعنی تابع تصویر، تبدیل فوریه حاصل ضرب  $T(\mu, \nu) \cdot U(\mu, \nu)$  است. حدود انتگرال گیری تنها به طور قراردادی  $\pm \infty$  اختیار شده است. حدود واقعی به وسیله شکل خاص تابع انتقال  $T(\mu, \nu)$  تعیین می شود.

تابع انتقال را با قرار دادن حایل و یاروزنه های گوناگون در صفحه  $\mu\nu$  می توان دگرگون کرد. این عمل را **تصفیه فضایی** می نامند. وضعیت کاملاً شبیه به تصفیه یک علامت الکتریکی به کمک یک شبکه الکتریکی ناکناست. تابع جسم علامت درونداد، و تابع تصویر علامت برونداد است. دستگاه نوری مانند یک صافی کار می کند، بعضی از بسامدهای فضایی را از خود عبور می دهد و برخی دیگر را حذف می کند.

برای مثال، فرض کنید جسم مورد نظر یک توری باشد، در این صورت تابع جسم یک تابع پله ای دوره ای خواهد بود. مسئله را به صورت یک مسئله تک بعدی در نظر می گیریم. بنابراین، تابع جسم  $f(y)$  و تبدیل فوریه آن  $U(\nu)$  همان است که در شکل ۲۸۰۵ نشان داده ایم. حال فرض کنید حایلی در صفحه  $\mu\nu$  تنها

بسامدهای فضایی بین  $-v_{\max}$  و  $+v_{\max}$  را از خود عبور دهد، یعنی صافی مورد نظر یک صافی پایین‌گذر باشد. از معادله  $(۵۳.۵)$  داریم  $v_{\max} = kb/f$  که در آن  $2b$  پهنای فیزیکی روزنه در صفحه  $\mu v$  است. در این حالت تابع انتقال  $T(v)$  یک تابع پله‌ای بوده و برای  $-v_{\max} < v < +v_{\max}$  برابر یک و خارج از آن صفر است. بنابراین تابع تصویر چنین است.

$$g'(y') = \int_{-v_{\max}}^{+v_{\max}} U(v) e^{-iv'y'} dv \quad (۶۰.۵)$$

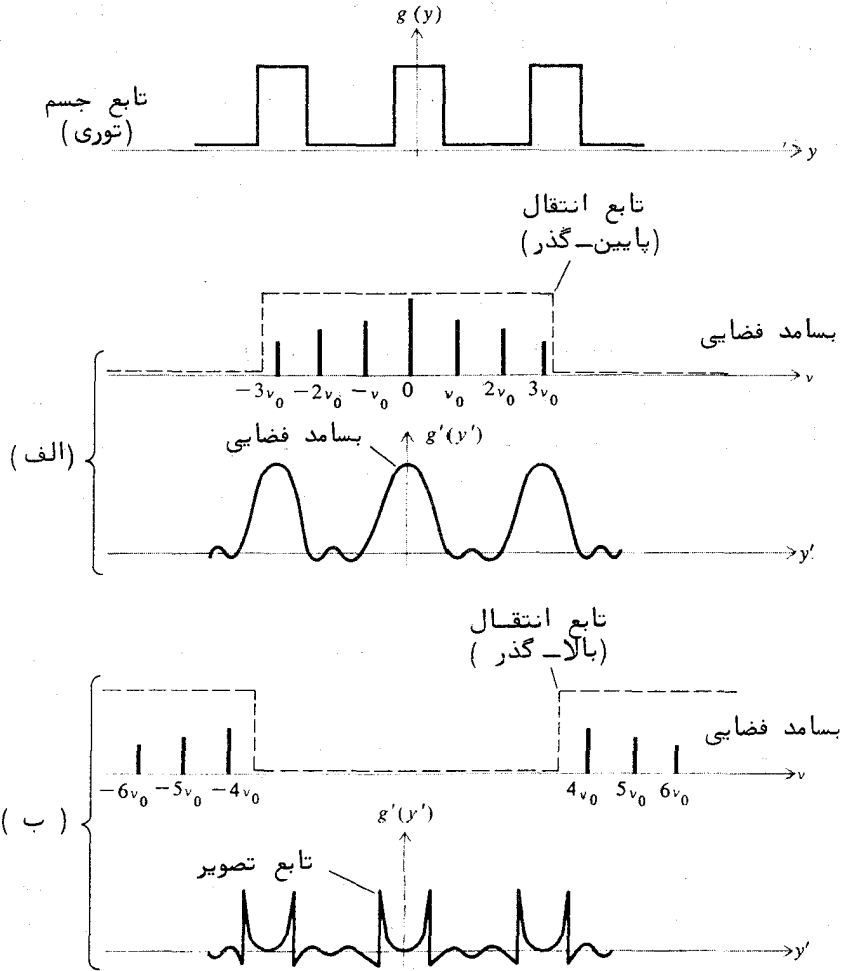
بدون اینکه وارد جزئیات محاسبه  $g'(y')$  شویم، در شکل ۳۱.۵ (الف)، نموداری از آن را برای یک مقدار دلخواه  $v_{\max}$  نشان می‌دهیم. تابع تصویر به جای اینکه مانند جسم، یک تابع پله‌ای با گوشه‌های تیز باشد، گوشه‌های آن پخ است و تغییرات دوره‌ای کمی نیز دارد.

با قرار دادن حایلی در صفحه  $\mu v$  که قسمت میانی گرته پراش را حذف کند یک صافی نوری بالاگذر به دست می‌آید. قسمت میانی گرته پراش به بسامدهای پایین مربوط می‌شود. نمودار تقریبی تابع تصویر حاصل در شکل ۳۱.۵ (ب) نشان داده شده است. در این حالت در صفحه تصویر، تنها لبه‌های پله‌های توری دیده می‌شوند. جزئیات مربوط به لبه، از بسامدهای فضایی بالا حاصل می‌شوند.

یک مثال عملی تصفیه فضایی، یک صافی فضایی با سوراخ سوزنی است که در کار با لیزر از آن استفاده می‌شود، و با آن گرته فریزی دروغینی که همیشه در پرتو برون‌دادی یک لیزر هلیوم - نئون وجود دارد را کاهش می‌دهند. برای این منظور با یک عدسی به فاصله کانونی کوتاه پرتو لیزر را کانونی می‌کنند. یک سوراخ سوزنی که به عنوان صافی به کار برده می‌شود در کانون قرار می‌دهند که بسامدهای فضایی بالا را از پرتو خارج می‌سازد و بدین‌سان کیفیت پرتو برون‌دادی لیزر را بهبودی می‌بخشد. با به‌کاربردن یک عدسی دوم، می‌توان لیزر را دوباره موازی ساخت.

### تضاد فاز و توربهای فازی

روش تضاد فاز به وسیله زرنیک، فیزیکدان آلمانی ابداع شد این روش



شکل ۳۱.۵ تصفیه فضایی، (الف) تصفیه پایین‌گذر، (ب) تصفیه بالاگذر.

برای نمایان کردن جسم شفاف که نمار شکست آن کمی با محیط شفاف اطراف متفاوت است به‌کار برده می‌شود. روش تضاد فاز بویژه در مشاهدات میکروسکوپی موجودات زنده و جز اینها مفید است. اساساً این روش، استفاده از نوع خاصی صافی فضایی است.

برای ساده کردن نظریه تضاد فازی، موردی که اصطلاحاً "توری فازی" خوانده می‌شود را بررسی می‌کنیم. این توری از نوارهایی که به طور نوبه‌ای نمارشکست آنها کم و زیاد و همه آنها کاملاً شفافند تشکیل شده است. این توری به‌طور همدوس روشن می‌شود و جسم را تشکیل می‌دهد. به این ترتیب تابع جسم صورت نمایی زیر را خواهد داشت:

$$g(y) = e^{i\phi(y)} \quad (۶۱.۵)$$

که در آن سازه فاز  $\phi(y)$  مطابق شکل ۳۲.۵ (الف) یک تابع پله‌ای دوره‌ای است. "بلندی" پله اختلاف فاز نوری بین دو نوار است، یعنی  $\Delta\phi = kz \Delta n$ ، که در آن  $z$  ضخامت و  $\Delta n$  اختلاف بین دو نمار شکست است. اگر فرض کنیم ایسن اختلاف فاز خیلی کم باشد، در این صورت با تقریب خوبی می‌توانیم بنویسیم:

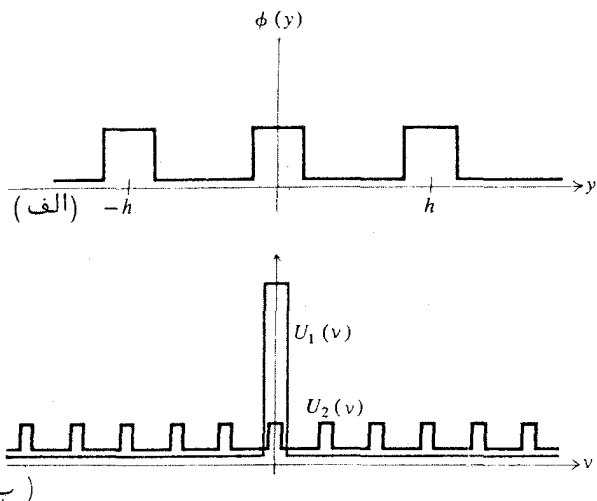
$$g(y) = 1 + i\phi(y) \quad (۶۲.۵)$$

تبدیل فوریه این تابع چنین است:

$$\begin{aligned} U(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} [1 + i\phi(y)] e^{i\nu y} dy = \int_{-b/2}^{+b/2} e^{i\nu y} dy + i \int_{-b/2}^{+b/2} \phi(y) e^{i\nu y} dy \\ &= U_1(\nu) + iU_2(\nu) \end{aligned} \quad (۶۳.۵)$$

در اینجا  $U_1(\nu)$  نمایانگر گرتنه پراش روزه‌ه مربوط به کل جسم است. این تابع تقریباً همه‌جا، بجز برای  $\nu \approx 0$ ، صفر است، یعنی  $U_1(\nu)$  تنها حاوی بسامدهای فضایی پایین است. از سوی دیگر  $U_2(\nu)$  نمایانگر گرتنه پراش تابع پله‌ای دوره‌ای  $\phi(y)$  است. نمودار این دو تابع در شکل ۳۲.۵ (ب) کشیده شده است.

به خاطر وجود عامل  $i$  در  $U_1 + iU_2$ ، دو مولفه  $U_1$  و  $iU_2$ ، ۹۰ درجه با یکدیگر اختلاف فاز دارند. شگ‌سرد روش تضاد فاز قرار دادن یک صافی فضایی در صفحه  $\mu\nu$  است. این صافی باید این ویژگی را دارا باشد که فاز  $iU_2$  را ۹۰ درجه تغییر دهد. در عمل، این کار مطابق شکل ۳۳.۵ به کمک وسیله‌ای به نام تیغه‌ه فاز انجام می‌شود. تیغه‌ه فاز یک تیغه‌ه شیشه‌ای شفاف است که ضخامت نوری بخش کوچکی از آن یک چهارم طول موج بیشتر از بقیه آن است.

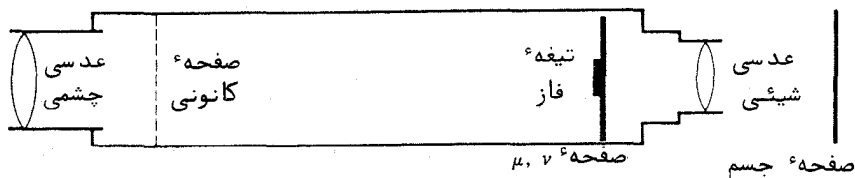


شکل ۳۲.۵ (الف) تابع فاز یک توری فازی دوره‌ای، (ب) تبدیل‌های فوریه روزنه  $U_1$  و توری  $U_2$ .

این بخش کوچک در قسمت مرکزی صفحه  $\mu\nu$ ، یعنی ناحیه بسامدهای پایین، قرار دارد. با به‌کاربردن تیغه فاز، تابع  $U_1 + iU_2$  به  $U_1 + U_2$  تبدیل می‌شود. تابع تصویر جدید، از تبدیل فوریه  $U(\nu)$  جدید به دست می‌آید، یعنی:

$$g'(y') = \int U_1(\nu)e^{-i\nu y'} d\nu + \int U_2(\nu)e^{-i\nu y'} d\nu \quad (64.5)$$

$$= g_1(y') + g_2(y')$$



شکل ۳۳.۵ آرایش فیزیکی عناصر اپتیکی در میکروسکپ تضاد فازی.



تابع نخست،  $g_1$ ، درست تابع تصویر روزنه<sup>۱</sup> مربوط به کل جسم است و زمینه‌ای یکنواخت را نشان می‌دهد. تابع دوم،  $g_2$ ، تابع تصویر یک توری معمولی است که به طور یک در میان دارای نوارهای شفاف و کدر است، یعنی توری نمایان شده و در صفحه<sup>۲</sup> تصویر به صورت نوارهای تاریک و روشن قابل مشاهده است. هر چند تحلیل بالا برای یک توری دوره‌ای بوده است، استدلال مشابهی را برای یک جسم شفاف با شکلی دلخواه می‌توان به کار برد.

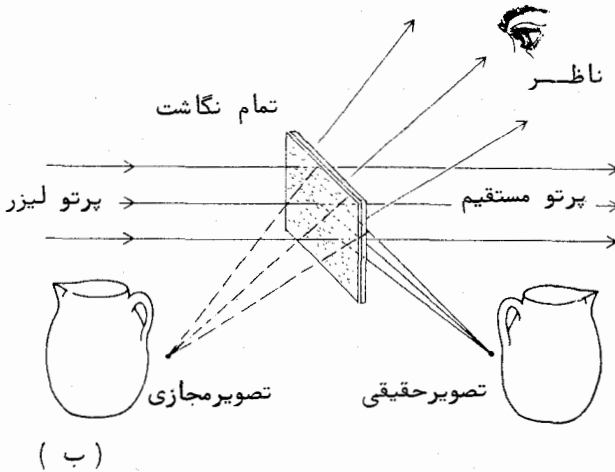
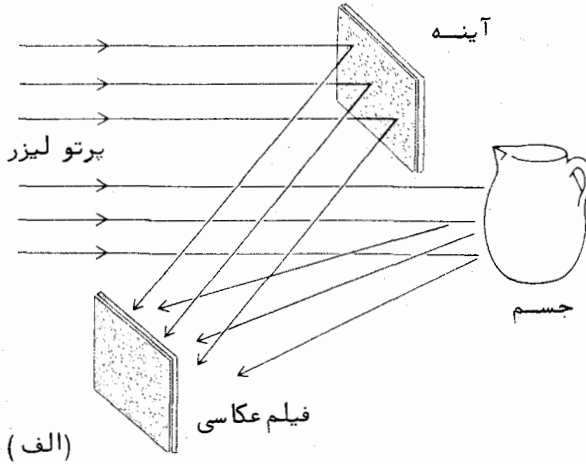
روش تضاد فاز نوری در مخابرات الکتريکی نیز مانسته<sup>۳</sup> نزدیکی دارد. یک علامت الکتريکی که از لحاظ فاز مدوله شده است، با اعمال یک جابجایی فزایی ۹۰ درجه‌ای در بسامد حامل، به یک علامت الکتريکی که از لحاظ دامنه مدوله است تبدیل می‌شود. این، کم‌وبیش همان عملی است که تیغه<sup>۴</sup> فاز در روش تضاد فاز انجام می‌دهد. نتیجه<sup>۵</sup> کلی این است که مدولاسیون فاز در جسم، به مدولاسیون دامنه در تصویر تبدیل می‌شود.

### ۷.۵ بازسازی جبهه<sup>۶</sup> موج به وسیله<sup>۷</sup> پراش. هولوگرافی (تمام نگاری)

برای ساختن یک تصویر، روش جالب و بدیعی به نام روش بازسازی جبهه<sup>۸</sup> موج، بتازگی در مبحث نورشناسی اهمیت ویژه پیدا کرده است. گرچه فکر بنیادی آن نخست در سال ۱۹۴۷ به وسیله<sup>۹</sup> گابور ارائه شده بود (۴۷)، ولی تا فراهم آمدن نور بس همدوس لیزر به آن توجهی نشده بود.

در این روش، برای بازسازی کامل میدان موجی که از جسم گسیل می‌شود، از یک پرده پراش ویژه، به نام هولوگرام یا تمام‌نگاشت استفاده می‌شود. برای ساختن تمام‌نگاشت پرتو برون‌داد لیزر را به دو پرتو تقسیم می‌کنند که یکی از آن— دو، جسم را روشن می‌کند. پرتو دیگر، به نام پرتو شاهد، به کمک یک آینه روی یک فیلم عکاسی ریزدانه بازتاب می‌شود. پرتو شاهد و نور لیزر بازتابیده از جسم، هر دو همزمان به فیلم می‌تابند، شکل ۳۴.۵ (الف). گزته<sup>۱۰</sup> تداخلی پیچیده<sup>۱۱</sup> حاصل، روی فیلم ثبت می‌شود و تمام‌نگاشت را به وجود می‌آورد. تمام‌نگاشت همه<sup>۱۲</sup> اطلاعات لازم برای بازسازی میدان موج جسم را بر خود دارد.

برای مشاهده<sup>۱۳</sup> تصویر، تمام‌نگاشت را مطابق شکل ۳۴.۵ (ب) با یک



شکل ۳۴.۵ (الف) آرایشی برای تهیه یک تمام نگاشت. (ب) استفاده از تمام نگاشت برای به وجود آوردن تصویرهای حقیقی و مجازی.

پرتو لیزر روشن می سازند. بخشی از میدان موج پراشیده، یک واگیره دقیق سه بعدی از موج اصلی بازتابیده از جسم است. بیننده ای که به تمام نگاشت نگاه می کند، تصویر را با عمق می بیند و با حرکت دادن سر می تواند دید سه بعدی منظره را تغییر دهد.

برای ساده شدن بررسی نظریه تمام نگاری، فرض می‌کنیم پرتو شاهد یک دسته پرتو موازی باشد، یعنی جبهه‌های موج تخت باشند، گرچه در عمل چنین فرضی ضرورت ندارد. همچنین فرض می‌کنیم  $x$  و  $y$  مختصات در صفحه عکاسی باشند و  $U(x,y)$  نمایانگر دامنه مختلط جبهه موج بازتابیده در صفحه  $xy$  باشد. چون  $U(x,y)$  یک عدد مختلط است، می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم:

$$U(x,y) = a(x,y)e^{i\phi(x,y)} \quad (65.5)$$

که در آن  $a(x,y)$  حقیقی است. همین‌طور فرض می‌کنیم  $U_0(x,y)$  نمایانگر دامنه مختلط پرتو شاهد باشد. چون این موج تخت است، می‌توانیم بنویسیم:

$$U_0(x,y) = a_0 e^{i(\mu x + \nu y)} \quad (66.5)$$

که در آن  $a_0$  یک ثابت و  $\mu$  و  $\nu$  بسامدهای فضایی پرتو شاهد در صفحه  $xy$  هستند. این بسامدها از روابط زیر به دست می‌آیند

$$\mu = k \sin \alpha \quad \nu = k \sin \beta \quad (67.5)$$

که در آنها  $k$  عدد موج نور لیزر است، و  $\alpha$  و  $\beta$  جهت پرتو شاهد را مشخص می‌کنند. بنابراین تابندگی  $I(x,y)$ ، که به وسیله فیلم عکاسی ثبت می‌شود، با عبارت زیر داده می‌شود.

$$\begin{aligned} I(x,y) &= \|U + U_0\|^2 = a^2 + a_0^2 + aa_0 e^{i[\phi(x,y) - \mu x - \nu y]} + aa_0 e^{-i[\phi(x,y) - \mu x - \nu y]} \\ &= a^2 + a_0^2 + 2aa_0 \cos [\phi(x,y) - \mu x - \nu y] \end{aligned} \quad (68.5)$$

این، در حقیقت یک گره تداخل است و حاوی اطلاعاتی به صورت مدولاسیون دامنه و فاز بسامدهای فضایی پرتو شاهد است. وضعیت کمی مانند گذاشتن اطلاعات روی موج حامل یک فرستنده رادیویی با مدوله کردن دامنه یا فاز است. وقتی فیلم تمام نگاهت ظاهر می‌شود و با یک پرتو  $U_0$  مانند پرتو شاهد روشن می‌شود، موج تراگسیلی،  $U_T$ ، با حاصل ضرب  $U_0$  و توان تراگسیل

تمام نگاشت در نقطه  $(x, y)$  متناسب است. توان تراگیل با  $I(x, y)$  متناسب است. بنابراین، گذشته از یک ضریب ثابت تناسب که از آن چشم می‌پوشیم، داریم:

$$U_T(x, y) = U_0 I = a_0(a^2 + a_0^2)e^{i(\mu x + \nu y)} + a_0^2 a e^{i\phi} + a_0^2 a e^{-i(\phi - 2\mu x - 2\nu y)}$$

$$= (a^2 + a_0^2)U_0 + a_0^2 U + a^2 U^{-1} U_0^{-2} \quad (۶۹.۰۵)$$

تمام نگاشت کم‌وبیش مانند یک توری پراش است، و یک پرتو مستقیم و دو پرتو پراش ردیف نخست در دو طرف پرتو مستقیم تولید می‌کند، شکل ۳۴.۰۵ (ب). جمله  $(a^2 + a_0^2)U_0$  در معادله (۶۹.۰۵)، پرتو مستقیم را تشکیل می‌دهد. جمله  $a_0^2 U$  نمایانگر یکی از پرتوهای پراشیده است. چون این جمله با  $U$  متناسب است پس پرتو مربوط به آن همان پرتوی است که نور بازتابیده از جسم را بازسازی می‌کند و تصویر مجازی را تشکیل می‌دهد. جمله آخر نمایانگر پرتو پراشیده دیگری است و به ایجاد تصویر حقیقی منجر می‌شود.

در اینجا سعی نمی‌کنیم مطالب بالا را بتفصیل اثبات کنیم. درستی آنها را می‌توان برای حالت ساده‌ای که در آن جسم یک خط روشن روی یک زمینه تاریک است، آزمود. در این حالت تمام نگاشت در حقیقت به صورت یک توری دوره‌ای ساده در می‌آید. ردیف صفر نور پراشیده پرتو مستقیم است و دو ردیف نخست در طرفین، تصویرهای مجازی و حقیقی را درست می‌کنند.

در تمام‌نگاری، اگر تمام‌نگاشت یک فیلم عکاسی مثبت یا منفی باشد، در هر دو حالت، بیننده تصویر را مثبت خواهد دید زیرا میدان موجی که از تمام‌نگاشت مثبت به وجود می‌آید ۱۸۰ درجه با آنکه از منفی به وجود می‌آید اختلاف فاز دارد و چون چشم نسبت به اختلاف فاز حساس نیست، چیزی که به وسیله بیننده دیده می‌شود در هر دو حالت یکی است.

در سالهای اخیر پیشرفتهای مهمی در زمینه تمام‌نگاری به وجود آمده است. هولوگرافی تمام‌رنگی امروزه میسر است. در آن به جای یک لیزر، از نور سه لیزر با طول موجهای متفاوت استفاده می‌شود، و روی فیلم سیاه-سفید ثبت می‌شود. اصول تمام‌نگاری در اکوستیک نیز به‌کار برده شده است، به طوری که با به‌کار بردن امواج صوتی در محیطهایی که از نظر نوری گذرند تصویرسازی می‌شود. استفاده از کموجها برای تمام‌نگاری از فاصله دور، یکی دیگر از این پیشرفتهاست.

## تداخل سنجی تمام‌نگاشتی

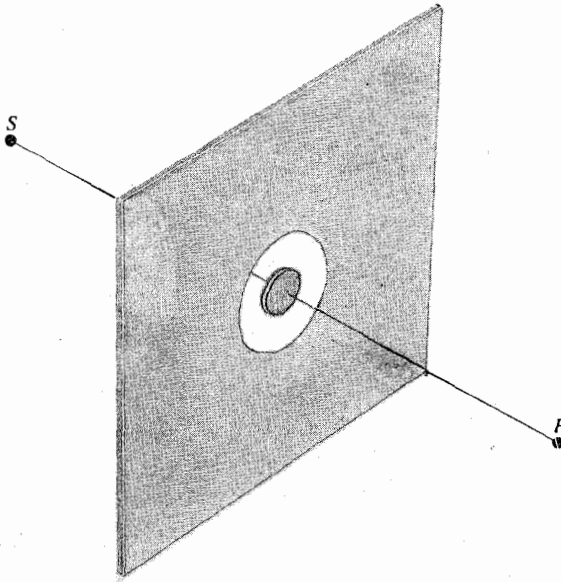
یکی از مهمترین کاربردهای تمام‌نگاری در تداخل‌سنجی است. در این کاربرد سطح مورد آزمایش، به جای این که صاف و بس صیقلی باشد، همانگونه که در تداخل‌سنج مایکلسن و تویمن-گرین لازم است، می‌تواند نامنظم و پخش‌کننده باشد. در تداخل‌سنجی تمام‌نگاشتی با نوردهی دوگانه، دو عکس جداگانه روی یک فیلم ثبت می‌شود. اگر در بازه زمانی بین دو عکسبرداری روی سطح مورد مطالعه تغییر شکلی یا حرکتی رخ دهد، این حرکت، روی تصویر بازسازی شده و به صورت فریزهای تداخلی آشکار می‌شود. در هولوگرافی دوتیپی، دو نوردهی با نور لیزری شدید و کوتاه‌مدت که از یک لیزر تپی قوی خارج می‌شود، انجام می‌گیرد. بازه زمانی بین تپها کوتاه است، به طوری که فریزهای تمام‌نگاشتی می‌توانند حرکت گرتنه‌های ارتعاشی و غیره را نشان دهند. این روش بویژه برای آزمونهای ناپیرانگر مفید است. برای آگاهی بیشتر در زمینه تمام‌نگاری، به خواننده توصیه می‌شود به منابعی چون (۳۸) مراجعه کند.

## مسائل

- ۱۰۵ در یک آزمایش پراش، از نور یک چشمه نقطه‌ای (سوراخ سوزنی) به طول موج ۶۰۰ نانومتر استفاده می‌شود. فاصله چشمه از روزنه پراشده ۱۰ متر و قطر روزنه گرد یک میلی‌متر است. اگر فاصله پرده بررسی تا روزنه یک سانتی‌متر یا دو متر باشد، در هر یک از دو حالت تعیین کنید پراش از نوع فرنیلی است یا فرانهوفری.
- ۲۰۵ یک دسته پرتو موازی از یک لیزر هلیوم - نئون ( $\lambda = 633$  نانومتر) به طور عمودی روی یک شکاف باریک به عرض ۰.۵ میلی‌متر فرود می‌آید. یک عدسی با فاصله کانونی ۵۰ سانتی‌متر درست پشت شکاف قرار دارد و نور پراشیده را روی پرده‌ای در صفحه کانونی خود کانونی می‌کند، فاصله مرکز گرتنه پراش (بیشینه میانی) را از نخستین کمینه و نخستین بیشینه ثانویه به دست آورید.

- ۳۰۵ اگر در آزمایش پراش بالا نور سفید به کار برده شود، برای چه طول موجی، چهارمین بیشینه روی سومین بیشینه نور قرمز ( $\lambda = 650$  نانومتر) می افتد؟
- ۴۰۵ در گرتۀ پراش از یک تک شکافی، وقتی از بیشینه میانگی دور می شویم شدت فریزهای روشن کم می شود. به طور تقریب شدت کدام یک از فریزهای روشن ۵ درصد شدت فریز میانی است؟ (فرض کنید پراش فرانهوفری است).
- ۵۰۵ نشان دهید که بیشینه های ثانویه گرتۀ پراش از یک تک شکافی، در نقاطی که برای آنها  $\beta = \tan \beta$  است رخ می دهند. ثابت کنید که سه جواب اول این معادله تقریباً چنین اند  $\pi 3.47$ ،  $\pi 2.46$ ،  $\pi 1.43$ . علاوه بر این نشان دهید برای مقادیر بزرگ  $n$  جوابها به  $(n + \frac{1}{2})\pi$  نزدیک می شوند، که در آن  $n$  عدد صحیح است.
- ۶۰۵ در پراش فرانهوفری حاصل از یک روزنه مستطیلی، مقدار  $I/I_0$  را برای نخستین بیشینه که برای آن  $\alpha = \beta$ ، به دست آورید.
- ۷۰۵ قطر دهانه یک دوربین نجومی که بتواند یک دستگاه دوستاره ای که فاصله خطی آنها از یکدیگر ۱۰۰ میلیون کیلومتر و فاصله آنها از زمین ۱۰ سال نوری است را از یکدیگر جدا سازد به دست آورید (طول موج نور را ۵۰۰ نانومتر اختیار کنید).
- ۸۰۵ در گرتۀ پراش فرانهوفری حاصل از یک شکاف دوگانه، چهارمین بیشینه ثانویه ناپدید شده است، نسبت پهنای شکاف به جدایی شکافها چقدر است؟
- ۹۰۵ نشان دهید، هرگاه پهنای هر یک از شکافهای یک دوشکافی برابر فاصله آنها از یکدیگر باشد (یعنی  $h = b$ )، گرتۀ پراش فرانهوفری حاصل، همانند گرتۀ پراش از یک تک شکافی به پهنای  $2b$  خواهد بود.

- ۱۰۰۵ (الف) از یک توری برای جداسازی خطوط  $D$  سدیم (۵۸۹۰ و ۵۸۹۶ نانومتر) در ردیف نخست استفاده می‌شود. تعداد شیارهای لازم چقدر باید باشد؟ (ب) اگر فاصله کانونی عدسی کانونی‌ساز ۲۰ سانتی‌متر و پهنای کل توری ۲ سانتی‌متر باشد، فاصله خطی میان دو خط  $D$  در صفحه کانونی چقدر خواهد بود؟
- ۱۱۰۵ یک توری ۱۰۰ خط دارد. نسبت شدت بیشینه اولیه به نخستین بیشینه ثانویه چقدر است؟
- ۱۲۰۵ نشان دهید که تعداد بیشینه‌هایی که در زیر پوش پراش میانی یک شکاف دوگانه قرار می‌گیرند  $1 - \frac{2h}{b}$  است، که در آن  $h$  جدایی شکافها و  $b$  پهنای شکاف است.
- ۱۳۰۵ یک توری در هر میلی‌متر ۱۰۰۰ خط دارد. پهنای آن چقدر باید باشد تا ساختار مدی یک پرتو لیزر هلیوم - نئون با طول موج ۶۳۳ نانومتر را تفکیک کند؟ اختلاف بسامدی میان مدها ۴۵۰ مگاهرتز است.
- ۱۴۰۵ یک توری در هر میلی‌متر ۱۲۰۰ خط دارد و پهنای آن ۵ سانتی‌متر است. اگر طول موج نور ۵۰۰ نانومتر باشد و از توری در ردیف نخست استفاده شود، کوتاهترین فاصله طول موجی که به وسیله این توری قابل تفکیک است چقدر است؟
- ۱۵۰۵ یک چشمه نقطه‌ای  $S$  در فاصله یک‌متری از یک روزنه گرد به شعاع یک میلی‌متر قرار دارد. میان این روزنه مطابق شکل ۳۵.۵ یک مانع کدر دایره‌ای که شعاع آن ۵ ره میلی‌متر است قرار دارد. اگر نقطه دریافت در یک متری روزنه باشد، تابندگی را در این نقطه با حالتی که روزنه‌ای وجود نداشته باشد مقایسه کنید (طول موج نور را ۵۰۰ نانومتر اختیار کنید).
- ۱۶۰۵ یک تلسکوپ رادیویی برای ارسادیک چشمه نقطه‌ای دور در طول موج ۲۰ سانتی‌متر به‌کار برده می‌شود. همین که ماه از جلوی چشمه می‌گذرد، به وسیله نوارنگار تلسکوپ یک گرته پراش فرنی کشیده می‌شود.



شکل ۳۵.۵ ابعاد روزنه پراش برای مسئله ۱۵.۵.

بازه زمانی میان نخستین بیشینه و نخستین کمینه چقدر است؟  
( فرض کنید لبه قرص ماه راست باشد ).

۱۷.۵ با به کار بردن معادله (۱۲.۵) نشان دهید اندازه  $U_p$  که به وسیله نخستین منطقه فرنی بتنهایی به وجود می آید، دو برابر حالتی است که روزنه وجود نداشته باشد.

۱۸.۵ در مسئله ۱۵.۵، اگر روزنه یک مربع باز  $۲ \times ۲$  میلی متر باشد، شدت نور را در نقطه دریافت  $P$  محاسبه نمایند.

۱۹.۵ با استفاده از مارپیچ کرنو، نمودار گرته پراش فرنی را (الف) برای یک شکاف، و (ب) برای یک نوار مکمل کدر بکشید. دقت کنید که چگونه اصل باینه در اینجا برقرار است. (پهنای معادل را  $\Delta v = 3$  اختیار کنید). (پ) اگر پهنای واقعی شکاف یک میلی متر بوده و نور



فرودی موازی و طول موج آن ۵۰۰ نانومتر باشد، فاصله نقطه  
دریافت  $P$  از پرده چقدر باشد تا  $\Delta v = 3$  شود؟

۲۰.۵

جسمی به شکل یک نوار سفید به پهنای  $b$  است، با تکبندی گرفتن  
مسئله، تابع بسامد فضایی  $U(v)$  را برای حالتی که نوار با نور  
همدوس روشن می شود به دست آورید.

۲۱.۵

در مسئله ۲۰.۵، اگر روزنه  $\mu v$  به  $\pm v_{\max}$ ، که در آن  $v_{\max}$   
مربوط به دومین صفر تابع  $U(v)$  است، محدود باشد، تابع تصویر  
 $g'(y')$  را به صورت یک انتگرال بیان کنید.

۲۲.۵

یک تمام نگاشت ساده به طریق زیر تهیه می شود:  
جسم یک نوار باریک سفید است و در فاصله  $d$  از صفحه عکاسی  
قرار دارد. طول موج نور لیزر  $\lambda$  است. صفحه به طور عمودی با  
پرتو شاهد روشن می شود. نشان دهید گره های که روی تمام نگاشت  
حاصل می شود، یک توری تکبندی است که جدایی شیارهای آن  
در جهت  $y$  تغییر می کند. هرگاه  $\lambda = 6328$  انگسترم و  $d = 10$   
سانتی متر باشد، مقادیر عددی این جدایی را برای  $10$  و  $10.015$   
سانتی متر محاسبه کنید.

۲۳.۵

با مراجعه به مسئله ۲۲.۵، به طور مفصل نشان دهید، اگر  
تمام نگاشت با نور تکفام روشن شود، دو پرتو پراشیده وجود خواهند  
داشت که یکی تصویر حقیقی و دیگری تصویر مجازی نوار را می سازد.  
به نظر می رسد که یک پرتو از یک خط  $0$  مربوط به جسم اصلی واگرا  
می شود، و دیگری به طرف خط  $0'$  مربوط به تصویر حقیقی همگرا  
می شود. زاویه های پراش را برای مقادیر مختلف  $y$  در مسئله ۲۲.۵ به  
دست آورید. آیا پرتو پراشیده ردیف دوم (یا ردیف بالاتر)  
وجود دارد؟

۲۴.۵

در یک شکاف پیراسته، تابع تراگیل برای  $b/2 < y < b/2$  برابر  
 $g(y) = [\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi y/b)]$  و خارج از آن صفر است. گره پراش  
از آن را محاسبه کنید. شدت نسبی نخستین بیشینه ثانویه را

## فصل ششم

نورشناسی جامدات

## ۱۰۶ نگرشهای کلی

بررسی انتشار نور در ماده، بویژه در مواد جامد، یکی از بخشهای مهم و جالب نورشناسی است. پدیدههای نوری متعدد و گوناگونی که به وسیله جامدات ظاهر می‌شوند، شامل پدیده‌هایی چون درآشامی‌گزینشی، پاشندگی، شکست دوگانه، قطبش و پدیده‌های الکترواپتیکی و مغناطونوری است. بسیاری از ویژگیهای نوری جامدات را می‌توان با به‌کاربردن نظریه کلاسیک الکترومغناطیس درک کرد. در این فصل برای بررسی انتشار نور در جامدات نظریه ماکروسکوپی ماکسول را به‌کار می‌بریم. چون بررسی نظری-کوانتومی ویژگیهای نوری جامدات از حوصله این کتاب خارج است، مبداء ویژگیهای میکروسکوپی آنها را با روش کلاسیکی بررسی خواهیم کرد. این پدیده‌ها طوری به کمک نظریه کلاسیک تشریح می‌شوند که بینش فیزیکی شایان توجهی در اختیار بگذارند و به فراهم‌کردن یک زمینه اولیه برای بررسیهای بعدی کمک کنند.

## ۲.۶ میدانهای ماکروسکوپی و معادلات ماکسول

حالت الکترومغناطیسی ماده در یک نقطه به کمک چهار کمیت توصیف می شود:

- (۱) چگالی حجمی بار الکتریکی  $\rho$
- (۲) چگالی حجمی دوقطبیهای الکتریکی، به نام قطبیدگی  $P$
- (۳) چگالی حجمی دوقطبیهای مغناطیسی، به نام مغناطیدگی  $M$
- (۴) جریان الکتریکی بر واحد سطح، به نام چگالی جریان  $J$

همه این کمیتها به عنوان میانگین ماکروسکوپی در نظر گرفته می شوند، تا خسرده تغییرات مربوط به ساختمان اتمی ماده هموار شود. این کمیتها با معادلات ماکسول به میانگین ماکروسکوپی میدانهای  $E$  و  $H$  بستگی پیدا می کنند:

$$\nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial M}{\partial t} \quad (1.6)$$

$$\nabla \times H = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} + J \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot E = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot P + \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot H = -\nabla \cdot M \quad (4.6)$$

اگر کمیت  $\epsilon_0 E + P$  را که به نام جابجایی الکتریکی موسوم است باختصار با  $D$  و  $\mu_0(H + M)$  را که القایش مغناطیسی نامیده می شود با  $B$  نمایش دهیم، معادلات ماکسول به صورت کوتاهتر زیر نوشته می شوند:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (5.6)$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + J \quad (6.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (۷.۶)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۸.۶)$$

پاسخ الکترونیهای رسانشی به میدان الکتریکی، با معادله جریان (قانون اهم) معین می‌شود:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

که در آن  $\sigma$  رسانندگی است. رابطه ساختمندی

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

پاسخ گروهی بارهای مقید را به میدان الکتریکی توصیف می‌کند و رابطه مغناطیسی متناظر با آن چنین است:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

راه دیگری برای نشان دادن پاسخ بارهای مقید چنین است.

$$\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (۹.۶)$$

که تناسب بین قطبیدگی و میدان الکتریکی وارد را به دست می‌دهد. ضریب تناسب:

$$\chi = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1$$

را پذیرفتاری الکتریکی می‌نامند و در بررسی نورشناختی ماده مهمترین پارامتر است.

برای محیطهای همسانگرد، مانند شیشه،  $\chi$  یک کمیت نرده‌ای بوده و مقدار آن برای هر جهتی که میدان الکتریکی به‌کار برده شود یکی است. برای محیطهای ناهمسانگرد، مانند بسیاری از بلورها، بزرگی قطبیدگی با جهت میدان کاربسته تغییر می‌کند، در نتیجه  $\chi$  باید به صورت یک تانسور بیان شود. در بخشهای بعد خواهیم دید که بسیاری از ویژگیهای نوری یک بلور در تانسور  $\chi$ ی آن خلاصه می‌شوند.

## ۳.۶ معادله کلی موج

ما در بررسی که از نورشناسی حالت جامد خواهیم داشت، تنها با محیطهای غیر مغناطیسی که از لحاظ الکتریکی خنثی هستند سروکار داریم. از این رو  $M$  و  $\rho$  هر دو صفرند و معادلات ماکسول که با روابط (۱.۶) تا (۴.۶) نشان داده شدند، به صورت زیر در می‌آیند:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (10.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (11.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (12.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (13.6)$$

برای به دست آوردن معادله کلی موج مربوط به میدان  $\mathbf{E}$ ، کافی است از معادله (۱۰.۶) تا و از معادله (۱۱.۶) نسبت به زمان مشتق بگیریم و  $\mathbf{H}$  را حذف کنیم. نتیجه چنین است:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (14.6)$$

دو جمله طرف راست معادله بالا را جملات چشمه می‌نامند. آنها بترتیب در اثر وجود بارهای قطبشی و بارهای رسانشی در محیط ناشی می‌شوند. وقتی جملات چشمه در معادله موج در نظر گرفته می‌شوند، اثر چشمه‌ها روی انتشار نور با حل این معادله آشکار می‌شود. برای محیطهای نارسانا، جمله  $\mu_0 \partial^2 \mathbf{P} / \partial t^2$  قطبش مهم بوده و بسیاری از پدیده‌های نوری را تشریح می‌کند، از آن جمله‌اند پدیده‌های پاشندگی، درآشامی، شکست دوگانه، فعالیت نوری و جز اینها. در مورد فلزات، جمله رسانش  $-\mu_0 \partial \mathbf{J} / \partial t$  مهم است، و جوابهای معادله موج، کدري زياد و

بالا بودن توان بازتاب فلزات را تشریح می‌کنند. در مورد نیم‌رساناها هر دو جمله چشمه را باید در نظر گرفت. نتیجه، یک معادله موج پیچیده است و تعبیر جوابهای آن دشوار. با وجود این بیشتر ویژگیهای نوری نیم‌رساناها را می‌توان با نظریه کلاسیک به طور کیفی تشریح کرد. بررسی دقیق نورشناسی نیم‌رساناها باید در انتظار به‌کاربردن نظریه کوانتومی باشد.

#### ۴۰۶ انتشار نور در دی‌الکتریکهای همسانگرد. پاشندگی

در یک محیط نارسای همسانگرد، الکترونها همواره در بند اتمهای محیطند و جهت برتری وجود ندارد. هر وقت از یک دی‌الکتریک همسانگرد ساده چون شیشه سخن می‌رود، منظور همین است. فرض کنید هر الکترون با بار  $-e$ ، در یک دی‌الکتریک به اندازه  $r$  از محل ترازمندی خود جابه‌جا شود، در این صورت قطبیدگی ماکروسکوپی محیط  $P$ ، برابر است با:

$$P = -Ner \quad (15.6)$$

که در آن  $N$  تعداد الکترونها در یکای حجم است. اگر جابجایی الکترون ناشی از به‌کاربردن میدان الکتریکی ایستای  $E$  باشد و الکترون با ثابت نیروی  $K$  به طور کشسان به محل ترازمندی خود مقید باشد، معادله نیرویی که به آن وارد می‌شود چنین است:

$$-eE = Kr \quad (16.6)$$

بنابراین قطبیدگی ایستا، از همبستگی زیر به دست می‌آید:

$$P = \frac{Ne^2}{K} E \quad (17.6)$$

ولی، اگر میدان  $E$  با زمان تغییر کند، معادله بالا درست نیست. برای به دست آوردن قطبیدگی واقعی باید حرکت واقعی الکترون را در نظر گرفت. برای این منظور فرض می‌کنیم الکترونها مقید، نوسانگرهای سازگان کلاسیک می‌باشند. معادله دیفرانسیل حرکت چنین است:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} + K\mathbf{r} = -e\mathbf{E} \quad (18.6)$$

جمله  $m\gamma (d\mathbf{r}/dt)$  نشان دهنده<sup>۶</sup> یک نیروی میرا است که با سرعت الکترون متناسب است و ثابت تناسب  $m\gamma$  است.<sup>۱</sup>

حال فرض کنید که میدان الکتریکی به شکل مرسوم  $e^{-i\omega t}$  به طور سازگام با زمان تغییر کند. با فرض اینکه حرکت الکترون به همین صورت به زمان بستگی داشته باشد، معادله<sup>۶</sup> (۱۸.۶) چنین خواهد شد:

$$(-m\omega^2 - i\omega m\gamma + K)\mathbf{r} = -e\mathbf{E} \quad (19.6)$$

در نتیجه، با به کار بردن معادله<sup>۶</sup> (۱۵.۶)، قطبیدگی چنین می شود:

$$\mathbf{P} = \frac{Ne^2}{-m\omega^2 - i\omega m\gamma + K} \mathbf{E} \quad (20.6)$$

این معادله وقتی  $\omega = 0$  شود به معادله<sup>۶</sup> قطبیدگی حالت ایستا (۱۷.۶) ساده می شود. بدین ترتیب برای یک دامنه<sup>۶</sup> میدان الکتریکی معین، اندازه<sup>۶</sup> قطبیدگی بسامد تغییر می کند و چون جمله ای موهومی در مخرج است، فاز  $\mathbf{P}$  نسبت به میدان الکتریکی نیز به بسامد بستگی دارد.

معادله<sup>۶</sup> (۲۰.۶) را معمولاً<sup>۱۱</sup> به صورت زیر می نویسند:

$$\mathbf{P} = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \mathbf{E} \quad (21.6)$$

که در آن:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (22.6)$$

بسامد بازآوایی مؤثر الکترونهای مقید است.

۱- در اینجا از نیروی مغناطیسی  $e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  چشم پوشی شده است. برای امواج الکترومغناطیسی این نیرو معمولاً<sup>۱۱</sup> از نیروی الکتریکی  $e\mathbf{E}$  خیلی کمتر است.



رابطه قطبش ( ۲۱۰۶ ) مانند رابطه دامنه یک نوسانگر سازگان واداشته است. براستی باید چنین باشد، زیرا در واقع جابجایی کشان الکترونهاى مقید است که قطبیدگی را به وجود می‌آورد. بنابراین باید انتظار داشته باشیم که یک نوع پدیدده بازآوایی نوری با بسامدهای نوری پیرامون بسامد بازآوایی  $\omega_0$  به دست آوریم. همانگونه که اینک می‌بینیم این پدیده بازآوایی، به صورت تغییراتی ناگهانی در نمارشکست محیط و همچنین درآشامی شدید نور در بسامد بازآوایی یا نزدیک به آن، بروز می‌کند.

برای اینکه نشان دهیم چگونه قطبش روی انتشار نور اثر می‌گذارد، به معادله کلی موج ( ۱۴۰۶ ) باز می‌گردیم. برای یک دی‌الکتریک، جمله رسانش وجود ندارد. قطبش از معادله ( ۲۱۰۶ ) به دست می‌آید، پس داریم:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{-\mu_0 N e^2}{m} \left( \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad ( ۲۲۰۶ )$$

همچنین با توجه به رابطه خطی بین  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{P}$ ، از معادله ( ۱۲۰۶ ) نتیجه می‌شود که  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ . بنابراین  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E}$  و بعد از مرتب‌کردن جملات و به‌کاربردن همبستگی  $1/c^2 = \mu_0 \epsilon_0$ ، معادله موج به صورت ساده‌تر زیر درمی‌آید:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \left( 1 + \frac{N e^2}{m \epsilon_0} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad ( ۲۴۰۶ )$$

پاسخی را به شکل زیر جستجو می‌کنیم:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathcal{X}z - \omega t)} \quad ( ۲۵۰۶ )$$

این پاسخ آزمایشی معرف باصطلاح موجهای تخت سازگان همگن است. با جایگذاری مستقیم، نتیجه می‌گیریم که رابطه ( ۲۵۰۶ ) در صورتی یک پاسخ ممکن است که داشته باشیم:

$$\mathcal{X}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + \frac{N e^2}{m \epsilon_0} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right) \quad ( ۲۶۰۶ )$$

وجود جملهٔ موهومی در مخرج نشان می‌دهد که عدد موج  $\mathcal{K}$  یک عدد مختلط است. اکنون مفهوم فیزیکی این مطلب را جویا می‌شویم.  $\mathcal{K}$  را برحسب بخشهای حقیقی و موهومی آن بیان می‌کنیم:

$$\mathcal{K} = k + i\alpha \quad (27.6)$$

این مانند آن است که یک نمارشکست مختلط در نظر گرفته شود:

$$\mathcal{N} = n + i\kappa \quad (28.6)$$

که در آن:

$$\mathcal{K} = \frac{\omega}{c} \mathcal{N} \quad (29.6)$$

پس جواب آزمایشی (۲۵.۶)، را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(kz - \omega t)} \quad (30.6)$$

سازهٔ  $e^{-\alpha z}$  نشان می‌دهد که دامنهٔ موج به صورت نمایی با افزایش فاصله کم می‌شود، یعنی وقتی موج در محیط پیشروی می‌کند، انرژی آن به وسیلهٔ محیط جذب می‌شود. چون انرژی موج در یک نقطه متناسب با  $|\mathbf{E}|^2$  است، بنابراین تغییرات انرژی با فاصله به صورت  $e^{-2\alpha z}$  است. از این رو  $2\alpha$  ضریب درآشامی محیط است. بخش موهومی نمارشکست مختلط، یعنی  $\kappa$ ، را نمار خاموشی می‌نامند. دو عدد  $\alpha$  و  $\kappa$  طبق معادلهٔ زیر به یکدیگر بستگی دارند:

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \kappa \quad (31.6)$$

سازهٔ فازی  $e^{i(kz - \omega t)}$  موج سازگانی را نشان می‌دهد که سرعت فاز آن چنین است:

$$u = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \quad (32.6)$$

از معادلات (۲۶.۶) و (۲۹.۶) داریم:

$$\mathcal{N}^2 = (n + i\kappa)^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left( \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right) \quad ( ۳۳.۶ )$$

با مساوی قرار دادن بخشهای حقیقی و موهومی، معادلات زیر به دست می آیند:

$$n^2 - \kappa^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left( \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \right) \quad ( ۳۴.۶ )$$

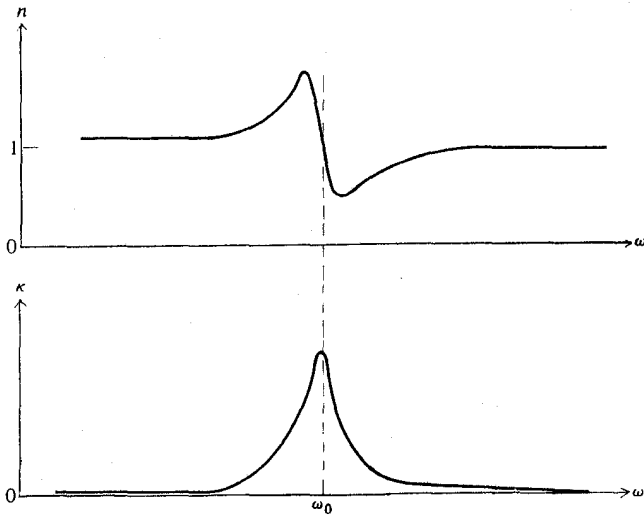
$$2n\kappa = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left( \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \right) \quad ( ۳۵.۶ )$$

که از آنها پارامترهای نوری  $n$  و  $\kappa$  قابل دستیابی اند.

شکل ۱.۶، طرز وابستگی کلی  $n$  و  $\kappa$  را به بسامد نشان می دهد. شدت درآشامی در بسامد بازآوایی  $\omega_0$  بیشترین مقدار را دارد. نمارشکست برای بسامدهای کم از یک بیشتر است و وقتی به بسامد بازآوایی نزدیک می شویم با بسامد افزایش می یابد. این پاشندگی " عادی " است و بیشتر مواد شفاف در ناحیه دیدگانی بیناب، این گونه عمل می کنند و بسامدهای بازآوایی اصلی آنها در ناحیه فرابنفش قرار دارند. ولی در بسامد بازآوایی یا پیرامون آن، پاشندگی " غیر عادی " می شود، به طوری که با زیاد شدن بسامد نمارشکست کاهش می یابد.

اگر ماده در بسامد بازآوایی خیلی کدر نباشد، پاشندگی غیر عادی را می توان با آزمایش در آن مشاهده کرد. برای مثال بعضی از رنگها در ناحیه دیدگانی بیناب نوارهای جذبی دارند و در این نوارها پاشندگی غیر عادی از خود نشان می دهند. منشورهایی که از این مواد ساخته می شوند، بیناب وارونه به وجود می آورند، یعنی طول موجهای بلند بیشتر از طول موجهای کوتاه شکسته می شوند.

در بحث بالا به طور ضمنی فرض شد که الکترونها، همه به طور همانند مقیدند. از این رو بسامدهای بازآوایی همه آنها یکی بود. برای به حساب آوردن اینکه الکترونها گوناگون ممکن است به طور متفاوت مقید باشند، فرض می کنیم بسامد

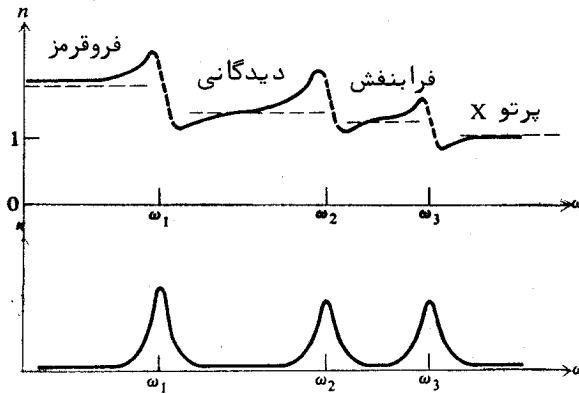


شکل ۱.۶ نمودارهای نمارشکست و نمار خاموشی بر حسب بسامد، پیرامون یک تک خط بازآوایی.

بازآوایی وابسته به یک کسر  $f_1$  آنها  $\omega_1$ ، و بسامد مربوط به یک کسر  $f_2$  آنها  $\omega_2$  و جز اینها باشد. رابطه حاصل برای مربع نمارشکست مختلط به صورت زیر نوشته می شود:

$$\mathcal{N}^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_j \left( \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right) \quad (۳۶.۶)$$

جمع زنی روی انواع گوناگون الکترون که با زیرنوشته  $z$  مشخص شده اند انجام می گیرد. کسرهای  $f_j$  را قدرتهای نوسانگر می نامند. ثابتهای میرایی وابسته به بسامدهای گوناگون با  $\gamma_j$  نمایش داده شده اند. شکل ۲.۰۶ نمودار وابستگی کلی بخشهای حقیقی و موهومی  $\mathcal{N}$  را طبق معادله (۳۶.۶) نشان می دهد. منظور از ارائه این نمودار این است که به طور کیفی تغییرات بخشهای حقیقی و موهومی نمارشکست را برای یک ماده مانند شیشه، که در ناحیه دیدگانی بیناب شفاف است،



شکل ۴.۶ نمار شکست و نمارخاموشی برای یک ماده فرضی با نوارهای جذبی در نواحی فروقرمز، دیدگانی و فرابنفش بیناب.

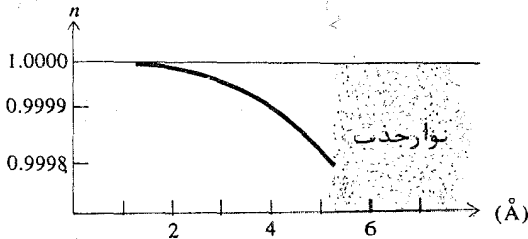
و در نواحی فروقرمز و فرابنفش بیناب نوارهای جذبی دارد، نشان دهیم. در حد، برای بسامد صفر، مربع نمار شکست به مقدار  $1 + (Ne^2/m\epsilon_0) \sum f_j/\omega_j^2$  نزدیک می‌شود. این درست همان ضریب دی‌الکتریک ایستای محیط است.

برای بسامدهای بالا، این نظریه پیش‌بینی می‌کند که نمارشکست باید از یک کمتر شود و با بینهایت شدن  $\omega$ ، از زیر به یک نزدیک شود. این اثر به طور تجربی مشاهده می‌شود، و برای نمونه وضع برای کوارتز در شکل ۳.۶ نشان داده شده است. در اینجا نتیجه اندازه‌گیری نمارشکست کوارتز بر حسب تابعی از طول موج در ناحیه پرتو ایکس کشیده شده است.

اگر ثابتهای میرایی  $\gamma_j$  به اندازه‌های کوچک باشند که در معادله ۳.۶- جمله‌های  $\gamma_j\omega$  در مقایسه با کمیت‌های  $\omega^2 - \omega_j^2$  قابل چشم‌پوشی باشند، در این صورت نمارشکست حقیقی می‌شود و مربع آن چنین خواهد بود:

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_j \left( \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2} \right) \quad (۳۷.۶)$$

برای بسیاری از مواد شفاف، ممکن است با روش آروینی برازش خم، رابطه‌ای از نوع بالا که با داده‌های تجربی بخوبی وفق دهد به دست آورد. هرگاه این رابطه،



شکل ۳.۶ نتایج اندازه‌گیری نمارشکست کوارتز در ناحیه پرتو ایکس.

به جای بسامد، بر حسب طول موج بیان شود به آن فرمول سلمایر گویند.

#### ۵.۶ انتشار نور در محیطهای رسانا

برای بررسی اثر رسانش بر انتشار نور در یک محیط، می‌توانیم از روشی مانند آنکه برای مطالعه اثر قطبش در بخش پیش به‌کاربردیم استفاده کنیم. تفاوت این است که اکنون در معادله کلی موج، به جای جمله قطبش، جمله رسانش مورد توجه است. در اینجا نیز به خاطر لختی الکترونهاى رسانشی، نمی‌توان بسادگی تساوی  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ ، که در آن  $\sigma$  رسانندگی ایستاست، را برای چگالی جریان اختیار کرد، بلکه باید حرکت الکترونها را در میدان الکتریکی متناوب موج نور در نظر گرفت.

چون الکترونهاى رسانشی مقید نیستند، نیروی بازگرداننده کشان که در مورد قطبش وجود داشت وجود ندارد. بنابراین، شکل معادله دیفرانسیلی حرکت الکترون چنین است:

$$m \frac{dv}{dt} + m\tau^{-1}v = -eE \quad ( ۳۸.۶ )$$

که در آن  $v$  سرعت الکترون است. ثابت اتلاف اصطکاکی به صورت  $m\tau^{-1}$  بیان شده است. چنانکه اکنون خواهیم دید، این ثابت به رسانندگی ایستا بستگی دارد. چون چگالی جریان برابر است با:

$$\mathbf{J} = -Ne\mathbf{v} \quad (۳۹.۰۶)$$

که در آن  $N$  تعداد الکترونهاى رسانشى در يکای حجم است، پس معادله (۳۸.۰۶) را می توان برحسب  $\mathbf{J}$  به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} + \tau^{-1}\mathbf{J} = \frac{Ne^2}{m}\mathbf{E} \quad (۴۰.۰۶)$$

افت یک جریان گذرا توسط معادله همگن وابسته به دست می آید:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} + \tau^{-1}\mathbf{J} = 0 \quad (۴۱.۰۶)$$

که جواب آن چنین است  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 e^{-t/\tau}$ . بدین سان، یک جریان گذرا در یک زمان  $\tau$  به  $e^{-1}$  برابر اندازه نخست خود افت می کند. این زمان را **زمان واهلش** می نامند. برای یک میدان الکتریکی ایستا، معادله (۴۰.۰۶) به صورت زیر درمی آید:

$$\tau^{-1}\mathbf{J} = \frac{Ne^2}{m}\mathbf{E} \quad (۴۲.۰۶)$$

بنابراین رسانندگی ایستا،  $\sigma$ ، برابر می شود با:

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m}\tau \quad (۴۳.۰۶)$$

اکنون فرض کنید در معادله (۴۰.۰۶) یک وابستگی زمانی سازگان  $e^{-i\omega t}$  بین میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  و جریان  $\mathbf{J}$  ی ناشی از آن موجود باشد، در این صورت:

$$(-i\omega + \tau^{-1})\mathbf{J} = \frac{Ne^2}{m}\mathbf{E} = \tau^{-1}\sigma\mathbf{E} \quad (۴۴.۰۶)$$

و اگر  $\mathbf{J}$  را به دست آوریم چنین خواهیم داشت:

$$\mathbf{J} = \frac{\sigma}{1 - i\omega\tau}\mathbf{E} \quad (۴۵.۰۶)$$

هرگاه  $\omega = 0$ ، معادله بالا به  $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$  ساده می شود، که برای حالت ایستا

درست است .

با استفاده از عبارت پویای  $J$  ، می بینیم که معادلهء کلی موج ( ۱۴۰۶ ) به معادلهء زیر ساده می شود :

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{\mu_0 \sigma}{1 - i\omega\tau} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad ( ۴۶۰۶ )$$

به عنوان پاسخی آزمایشی ، جواب را به صورت یک موج تخت همگن اختیار می کنیم :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathcal{K}z - \omega t)} \quad ( ۴۷۰۶ )$$

که در آن ، همچون معادلهء ( ۲۶۰۶ ) ،  $\mathcal{K}$  مختلط فرض می شود . بسادگی می توان دریافت که  $\mathcal{K}$  باید از همبستگی زیر تبعیت کند :

$$\mathcal{K}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{i\omega\mu_0\sigma}{1 - i\omega\tau} \quad ( ۴۸۰۶ )$$

برای بسامدهای بسیار کم ، معادلهء بالا به صورت تقریبی زیر در می آید :

$$\mathcal{K}^2 \approx i\omega\mu_0\sigma \quad ( ۴۹۰۶ )$$

به طوری که  $\mathcal{K} \approx \sqrt{i\omega\mu_0\sigma} = (1+i) \sqrt{\omega\mu_0\sigma/2}$  خواهد شد . در این حالت بخشهای حقیقی و موهومی  $\mathcal{K} = k + i\alpha$  با هم برابر و عبارتند از :

$$k \approx \alpha \approx \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_0}{2}} \quad ( ۵۰۰۶ )$$

همین طور بخشهای حقیقی و موهومی  $\mathcal{N} = n + i\kappa$  برابر یکدیگر و عبارتند از :

$$n \approx \kappa \approx \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon_0}} \quad ( ۵۱۰۶ )$$

بنا به تعریف ، " عمق پوست " یک فلز ،  $\delta$  ، فاصله ای است که دامنهء یک موج الکترومغناطیسی به  $e^{-1}$  مقدار آن روی سطح کاهش می یابد . پس :



$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_0}} = \sqrt{\frac{\lambda_0}{c\pi\sigma\mu_0}} \quad (52.6)$$

که در آن  $\lambda_0$  طول موج در خلأ است. این رابطه، علت اینکه رساناهای خوب خیلی کدر هم هستند را آشکار می‌سازد. اگر رسانندگی  $\sigma$  زیاد باشد، ضریب درآشایی  $\alpha$  زیاد، و بهمان نسبت عمق پوست کم می‌شود. برای مثال، عمق پوست در مس  $\sigma = 5.8 \times 10^7$  mho/m (برای کهموجهای یک میلی‌متری حدود  $10^{-4}$  میلی‌متر) است.

به عبارت دقیقتر  $\mathcal{N}$  در معادله (۴۸.۶) باز می‌گردیم. صورت دیگر این معادله برحسب نمارشکست مختلط، که در معادله (۲۹.۶) تعریف شد، چنین است:

$$\mathcal{N}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\tau^{-1}} \quad (53.6)$$

در اینجا بسامد پلاسما را برای فلزات مطرح ساخته‌ایم، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

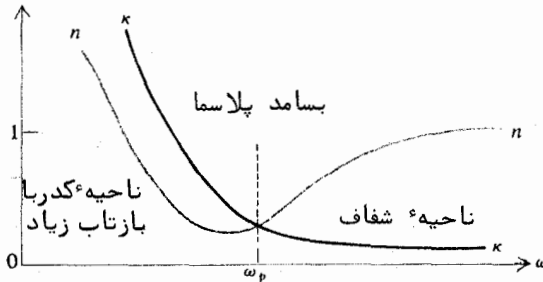
$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0\sigma c^2}{\tau}} \quad (54.6)$$

با مساوی قرار دادن بخشهای حقیقی و موهومی معادله (۵۳.۶) می‌یابیم:

$$n^2 - \kappa^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \tau^{-2}} \quad (55.6)$$

$$2n\kappa = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \tau^{-2}} \left( \frac{1}{\omega\tau} \right) \quad (56.6)$$

که از آنها می‌توان "ثابت‌های" نوری  $n$  و  $\kappa$  را به دست آورد. حل صریح جبری دو معادله بالا بسیار پر دردسر است، از این رو معمولاً این معادلات به صورت عددی حل می‌شوند. طبق نظریه بالا، ثابت‌های  $n$  و  $\kappa$  کلاً "با بسامد پلاسما  $\omega_p$ ، زمان واهلش  $\tau$  و بسامد امواج نوری  $\omega$  تعیین می‌شوند.



شکل ۴.۶ نمارشکست و نمار خاموشی یک فلز بر حسب بسامد .

زمان واهلش نوعی فلزات ، که از طریق اندازه گیری رسانندگی به دست آمده ، حدود  $10^{-13}$  ثانیه است که با بسامدهای ناحیه فروقرمز بیناب برابری می کند . از سوی دیگر ، بسامدهای پلاسمای فلزات نوعاً حدود  $10^{15}$  بر ثانیه است ، که با ناحیه های دیدگانی و فرابنفش نزدیک ، مطابقت دارد . شکل ۴.۶ طرز تغییرات  $n$  و  $\kappa$  را بر حسب  $\omega$  ، طبق معادلات ( ۵۵.۶ ) و ( ۵۶.۶ ) نشان می دهد . همان گونه که در شکل دیده می شود ، نمارشکست  $n$  ، برای گستره وسیعی از بسامدها در ناحیه بسامد پلاسما ، از یک کمتر است . ضریب خاموشی  $\kappa$  برای بسامدهای کم ( طول موجهای بلند ) خیلی زیاد است و با زیاد شدن بسامد به طور تکنواخت کاهش پیدا می کند و سرانجام برای بسامدهای بالاتر از بسامد پلاسما ، مقدار آن بسیار کم می شود . پس ، فلز در بسامدهای بالا شفاف می شود . توافق کیفی با این پیشگوییهای نظریه کلاسیکی ، در فلزات قلیایی و بعضی از رساناهای خوب مانند نقره ، طلا و مس حاصل شده است .

برای رساناهای ضعیف و نیم رساناها ، الکترونها آزاد و الکترونها مقید هر دو در این ویژگیهای نوری شرکت می کنند . بنابراین ، نظریه کلاسیک ، معادله های از نوع معادله زیر برای نمار شکست مختلط ارائه می دهد :

$$N^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\tau^{-1}} + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_j \left( \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right) \quad ( ۵۷.۶ )$$

اتفاقاً "نظریه" کوانتومی نیز رابطه مشابهی در این مورد به دست می دهد و علاوه بر این، مقادیر پارامترهای گوناگون  $f_z$  و  $\gamma_z$  و جز اینها را پیشگویی می کند. با اینحال محاسبات نظری پیچیده، و اندازه گیریهای تجربی نیز دشوار است. نورشناسی نیم رساناها یکی از رشته هایی است که امروزه پژوهشهای تجربی و نظری در آن بسیار پر تحرک است.

### ۶.۶ بازتاب و شکست در مرز یک محیط درآشامنده

فرض کنید یک موج تخت بر مرز یک محیط با نمارشکست مختلط زیر فرود آید:

$$\mathcal{N} = n + ik \quad ( ۵۸.۰۶ )$$

بردار مختلط انتشار موج شکست را چنین نمایش می دهیم:

$$\mathcal{K} = \mathbf{k} + i\alpha \quad ( ۵۹.۰۶ )$$

برای سادگی حالتی را در نظر می گیریم که محیط نخست نادرآشامنده باشد. بدون در نظر گرفتن دامنه ها، امواج گوناگون را به صورتهای زیر نمایش می دهیم:

$$e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad ( \text{موج فرودی} )$$

$$e^{i(\mathbf{k}'_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad ( \text{موج بازتابیده} )$$

$$e^{i(\mathcal{K} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = e^{-\alpha \cdot \mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad ( \text{موج شکسته} )$$

همان گونه که در بخش ۲.۶ درباره بازتاب و شکست روی یک دی الکتریک بحث شد، لزوم وجود نسبت ثابتی میان میدانها در صفحه مرزی، به معادلات زیر منجر می شود:

$$\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}'_0 \cdot \mathbf{r} \quad ( \text{در مرز} ) \quad ( ۶۰.۰۶ )$$

$$\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} = \mathcal{H} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{k} + i\alpha) \cdot \mathbf{r} \quad (\text{در مرز}) \quad (۶۱.۶)$$

معادله نخست، قانون معمولی بازتاب را به دست می دهد. معادله دوم، بعد از برابر قرار دادن بخشهای حقیقی و موهومی دوطرف، به صورت زیر درمی آید:

$$\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (۶۲.۶)$$

$$0 = \alpha \cdot \mathbf{r} \quad (۶۳.۶)$$

این نتیجه بدین معنی است که معمولاً "  $\mathbf{k}$  و  $\alpha$  جهت های متفاوتی دارند. در این حالت گفته می شود موج ناهمگن است. بویژه  $\alpha \cdot \mathbf{r} = 0$ ، یعنی  $\alpha$ ، که جهت صفحات با دامنه ثابت را مشخص می کند، همواره بر صفحه مرزی عمود است. از سوی دیگر، صفحات با فاز ثابت با بردار  $\mathbf{k}$ ، که هر جهتی را می تواند بگیرد، مشخص می شوند. این بردارها در شکل ۵.۶ نشان داده شده اند. مطابق این شکل موجها در جهت بردار  $\mathbf{k}$  پیش می روند، ولی دامنه های آنها به طور نمایی با فاصله از صفحه مرزی کاهش می یابند.

اگر زاویه تابش را با  $\theta$  و زاویه شکست را با  $\phi$  نشان دهیم، معادله (۶۲.۶) چنین می شود:

$$k_0 \sin \theta = k \sin \phi \quad (۶۴.۶)$$

چنین می نماید که به کمک این معادله، که تنها با یکی گرفتن فازها روی صفحه مرزی به دست آمده است، بتوان با دانستن  $k$  برای یک زاویه فرودی معین، زاویه شکست را تعیین کرد. لیکن، همانگونه که خواهیم دید، برای امواج ناهمگن  $k$  ثابت نیست، بلکه خود تابعی از زاویه  $\phi$  ی میان دو بردار  $\mathbf{k}$  و  $\alpha$  است.

برای به دست آوردن رابطه لازم، باید به معادله موج باز گردیم. معادله یاد شده را می توان بر حسب نماشکست مختلط چنین نوشت:

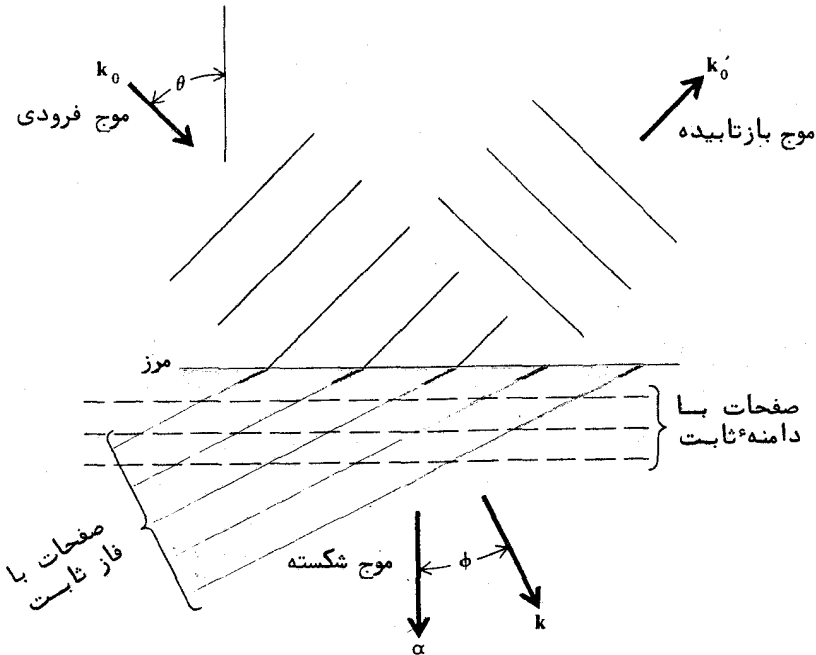
$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\mathcal{N}^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (۶۵.۵)$$

برای امواج تحت سازگان داریم  $\nabla \rightarrow i\mathcal{K}$  و  $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$  به طوری که:

$$\mathcal{K} \cdot \mathcal{K} = \frac{\mathcal{N}^2 \omega^2}{c^2} = \mathcal{N}^2 k_0^2 \quad ( ۶۶.۶ )$$

که در آن  $k_0 = \omega/c$ . اگر بردار مختلط موج بر حسب بخشهای حقیقی و موهومی نوشته شود، خواهیم داشت:

$$(\mathbf{k} + i\alpha) \cdot (\mathbf{k} + i\alpha) = (n + i\kappa)^2 k_0^2 \quad ( ۶۷.۶ )$$



شکل ۵.۶ بخشهای حقیقی و موهومی بردار موج در یک محیط درآشامنده برای فرود مایل نسبت به صفحه مرزی.

با مساوی قراردادن بخشهای حقیقی و موهومی، داریم:

$$k^2 - \alpha^2 = (n^2 - \kappa^2)k_0^2 \quad (۶۸.۰۶)$$

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\alpha} = k\alpha \cos \phi = n\kappa k_0^2 \quad (۶۹.۰۶)$$

می‌توان نشان داد که بعد از مقداری عملیات جبری، نتایج بالا به معادله زیر منجر می‌شوند:

$$k \cos \phi + i\alpha = k_0 \sqrt{\mathcal{N}^2 - \sin^2 \theta} \quad (۷۰.۰۶)$$

برای فرود عمودی ( $\theta = 0$ ) این فرمول به  $k + i\alpha = k_0 \mathcal{N}$  ساده می‌شود، که مربوط به امواج همگن است که پیشتر از آن بحث شد.

اکنون قانون شکست را بر حسب نمازشکست مختلط به روش صوری محض

بیان می‌کنیم:

$$\mathcal{N} = \frac{\sin \theta}{\sin \phi} \quad (۷۱.۰۶)$$

در اینجا زاویه  $\phi$  یک عدد مختلط است. این کمیت تعبیر فیزیکی ساده‌ای ندارد، بلکه می‌توان آن را به وسیله معادله بالا تعریف کرد. ولی اتفاقاً  $\phi$  برای ساده سازی معادلات بازتاب و شکست در یک محیط درآشامنده بسیار مفید است. از تعریف  $\phi$  در بالا، داریم:

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\mathcal{N}^2}} \quad (۷۲.۰۶)$$

این، همراه با معادله (۷۰.۰۶)، فرمول دیگری برای نمازشکست مختلط به دست می‌دهد:

$$\mathcal{N} = \frac{k \cos \phi + i\alpha}{k_0 \cos \phi} \quad (۷۳.۰۶)$$

اکنون آمادگی آن را داریم که به یافتن توان بازتاب بپردازیم. می‌دانیم که دامنه‌های میدانهای الکتریکی و مغناطیسی به صورت زیر به یکدیگر بستگی دارند:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \omega} \mathbf{k}_0 \times \mathbf{E} \quad (74.6) \quad (\text{فرودی})$$

$$\mathbf{E}', \mathbf{H}' = \frac{1}{\mu_0 \omega} \mathbf{k}' \times \mathbf{E}' \quad (75.6) \quad (\text{بازتابیده})$$

$$\mathbf{E}'', \mathbf{H}'' = \frac{1}{\mu_0 \omega} \mathcal{N} \times \mathbf{E}'' = \frac{1}{\mu_0 \omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}'' + i\alpha \times \mathbf{E}'') \quad (76.6) \quad (\text{شکسته})$$

ضریب بازتاب را برای حالت الکتریکی عرضی ( $TE$ ) به دست خواهیم آورد. برای مورد مغناطیسی عرضی ( $TM$ ) روش مشابهی را می‌توان به کاربرد. این بردارها، همانهایی هستند که در شکل ۱۱.۲ دیده می‌شوند و تنها  $k$  ها متفاوتند. شرایط مرزی که پیوستگی مولفه‌های مماسی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را برای قطبیدگی  $TE$  نشان می‌دهند، عبارتند از:

$$E + E' = E'' \quad (77.6)$$

$$-H \cos \theta + H' \cos \theta = H''_{\text{tangential}} \quad (78.6)$$

با به کاربردن معادلات (۷۴.۶) تا (۷۶.۶) در معادله دوم، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} -k_0 E \cos \theta + k_0 E' \cos \theta &= -(k E'' \cos \phi + i\alpha E'') \\ &= -\mathcal{N} k_0 E'' \cos \phi \end{aligned} \quad (79.6)$$

در گام آخر، از معادله (۷۳.۶) استفاده شده است. اکنون  $E''$  را از معادلات (۷۹.۶) و (۷۷.۶) حذف می‌کنیم و نتیجه پایانی را به دست می‌آوریم:

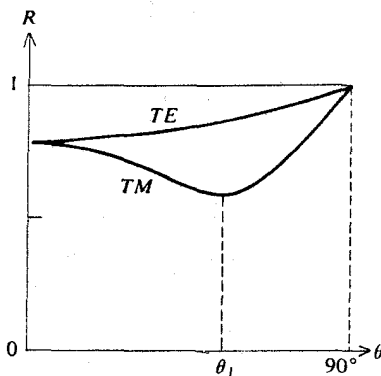
$$r_s = \frac{\cos \theta - \mathcal{N} \cos \phi}{\cos \theta + \mathcal{N} \cos \phi} \quad (TE \text{ قطبیدگی}) \quad (80.6)$$

این معادله که نسبت دامنه موج بازتابیده به دامنه موج فرودی را تعیین می‌کند، با معادله ( ۵۴.۲ ) که مربوط به مورد دی‌الکتریک بود شباهت دارد، تنها تفاوت در این است که در اینجا  $\mathcal{N}$  و  $\phi$  مختلطند. برای قطبیدگی  $TM$  نیز معادله وابسته با مورد دی‌الکتریک آن یکی است، یعنی:

$$r_p = \frac{-\mathcal{N} \cos \theta + \cos \phi}{\mathcal{N} \cos \theta + \cos \phi} \quad ( \text{قطبیدگی } TM ) \quad ( ۸۱.۶ )$$

یافتن این معادله به خواننده واگذار می‌شود. با دانستن دامنه امواج بازتابیده می‌توان به کمک شرایط مرزی، دامنه امواج شکسته را به دست آورد.

تغییرات کلی توان بازتاب، طبق نظریه بالا، در نمودار ۶.۶ دیده می‌شود. در این نمودار  $R_s = |r_s|^2$  و  $R_p = |r_p|^2$  بر حسب  $\theta$  برای یک فلز نوعی کشیده شده‌اند. برای قطبیدگی  $TE$ ، توان بازتاب از مقدار مربوط به فرود عمودی، به طور تکنواخت زیاد می‌شود و برای زاویه فرودی ۹۰ درجه به یک می‌رسد. از سوی دیگر، برای قطبیدگی  $TM$  توان بازتاب در یک زاویه  $\theta_1$  از یک کمینه کم عمق می‌گذرد. مقدار این زاویه به ثابتهای نوری بستگی دارد و آن را زاویه فرودی اصلی می‌نامند و متناظر با زاویه بروستر در دی‌الکتریک‌هاست.



شکل ۶.۶ توان بازتاب یک فلز نوعی بر حسب زاویه فرودی.



اگر نور قطبیده خطی، که قطبیدگی آن نه  $TE$  خالص و نه  $TM$  خالص است، از روی یک فلز بازتابیده شود، نور بازتابیده معمولاً "قطبیده بیضی‌ای خواهد بود و شدت و قطبیدگی آن را می‌توان به کمک نظریه بالا محاسبه کرد. این محاسبه مستلزم دانستن نمارشکست مختلط  $\mathcal{N}$  است. بر عکس با اندازه‌گیری مناسب شدت و قطبیدگی نور بازتابیده، تعیین  $\mathcal{N}$  امکان‌پذیر است. این روش را بیضی‌سنجی می‌نامند. برای آگاهی بیشتر، خواننده می‌تواند به منبع (۵) مراجعه کنید.

### فروود عمودی

در حالت فروود عمودی معادلات (۸۰.۶) و (۸۱.۶) هر دو یک نتیجه را به دست می‌دهند، یعنی:

$$r_s = r_p = \frac{1 - \mathcal{N}}{1 + \mathcal{N}} = \frac{1 - n - ik}{1 + n + ik} \quad (۸۲.۶)$$

پس توان بازتاب عمودی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$R = \left| \frac{1 - \mathcal{N}}{1 + \mathcal{N}} \right|^2 = \frac{(1 - n)^2 + \kappa^2}{(1 + n)^2 + \kappa^2} \quad (۸۳.۶)$$

هرگاه  $\kappa$  به صفر بگراید، و نمارشکست حقیقی شود، این معادله به رابطه‌ای که برای دی‌الکتریکها به دست آمد (بخش ۷.۲) ساده می‌شود. از سوی دیگر، مقدار ضریب خاموشی  $\kappa$  برای فلزات بزرگ است. در نتیجه توان بازتاب آنها زیاد است و وقتی  $\kappa$  بینهایت شود، به یک نزدیک می‌شود.

در بخش پیش (معادله ۵۱.۶)، نشان دادیم که در حد بسامدهای کم،  $n$  و  $\kappa$  هر دو برای فلزات افزایش می‌یابند و به  $\sqrt{\sigma/2\omega\epsilon_0}$  نزدیک می‌شوند. در این حالت بسادگی با معادله (۸۳.۶) می‌توان نشان داد که توان بازتاب از رابطه تقریبی زیر به دست می‌آید:

$$R \approx 1 - \frac{2}{n} \approx 1 - \sqrt{\frac{8\omega\epsilon_0}{\sigma}} \quad (۸۴.۶)$$

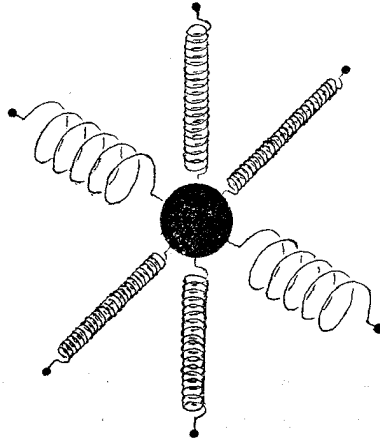
این رابطه را فرمول هاگن - روینسر می نامند و درستی آن بتجربه در مورد چند فلز در فروقرمز دور تأیید شده است. این فرمول در مورد یک فلز معین، پیشگویی می کند که کمیت  $(1 - R)^2$  با بسامد یا عکس طول موج متناسب است. همه رساناهای خوب مانند مس، نقره، طلا و جز اینها، در فروقرمز نزدیک (حدود یک یا دو میکرون)، بازتابنده های خوبی هستند و در فروقرمز دور (حدود ۲۰ میکرون - رون)، بازتابانتر می شوند، به طوری که در این ناحیه توان بازتاب خیلی نزدیک به یک است.

### ۷.۶ انتشار نور در بلورها

مبنای تشخیص حالت بلورین ماده، تا آنجا که به خواص نوری مربوط می شود، بر این پایه است که بلورها معمولاً از لحاظ الکتریکی ناهمسانگردند، یعنی قطبیدگی که به وسیله یک میدان الکتریکی معین در بلور به وجود می آید، تنها ضریب ثابتی از میدان نیست، بلکه به طریقی به جهت میدان در رابطه با شبکه بلور بستگی دارد. یکی از نتایج آن این است که سرعت انتشار یک موج نوری در یک بلور تابعی از جهت انتشار و قطبیدگی آن نور است.

خواهیم دید که معمولاً برای یک جهت معین انتشار، دو مقدار ممکن برای سرعت فاز وجود دارد. این دو مقدار به قطبیدگیهای متعام امواج نور وابسته اند. گفته می شود بلورها دارای ویژگی شکست دوگانه یا دوشکستی هستند. در حقیقت همه بلورها این ویژگی شکست دوگانه را از خود نشان نمی دهند، و وجود این ویژگی در بلورها بستگی به تقارن آنها دارد. بلورهایی که تقارن مکعبی دارند، مانند کلرور سدیم، هرگز شکست دوگانه از خود نشان نمی دهند و از لحاظ نوری همسانگردند. همه بلورهای غیر مکعبی، دارای ویژگی شکست دوگانه اند.

برای نشان دادن قطبش پذیری ناهمسانگرد یک بلور، الگویی در شکل ۷.۶ نشان داده شده است. در این شکل الکترون به این طریق مقید تصور شده است که به تعدادی فنر فرضی متصل است. سفتی فنرها، در جهتهای مختلف جابجایی الکترون از محل تراز مندیث در شبکه بلور، متفاوت است، بنابراین، جابجایی الکترون در اثر یک میدان خارجی  $E$ ، هم به جهت و هم به بزرگی میدان بستگی دارد. این درباره قطبیدگی برآیند  $P$  نیز صادق است.



شکل ۷.۶ الگویی برای نمایش پیوند ناهمسانگرد یک الکترون در یک بلور.

وابستگی  $\mathbf{P}$  به  $\mathbf{E}$  به صورت زیر به کمک یک تانسور قابل بیان است:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (۸۵.۰۶)$$

که آن را معمولاً "به صورت کوتاه زیر می‌نویسند:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (۸۶.۰۶)$$

که در آن  $\chi$  تانسور پذیرفتاری است:

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \quad (۸۷.۰۶)$$

بردار جابجایی وابسته،  $\mathbf{D}$ ، چنین است  $\mathbf{D} = \epsilon_0(\mathbf{I} + \chi)\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E}$  که در آن،  $\mathbf{I}$  ماتریس یکاست:

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و :

$$\epsilon = \epsilon_0(\mathbf{1} + \chi) \quad ( ۸۸.۰۶ )$$

را تانسور دی‌الکتریک می‌نامند .

برای بلورهای معمولی نادرآشامنده، تانسور  $\chi$  تقارن دارد و همواره یک دسته محورهای مختصاتی وجود دارند، به نام محورهای اصلی که نسبت به آنها تانسور  $\chi$  شکل قطری زیر را به خود می‌گیرد :

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \quad ( ۸۹.۰۶ )$$

در این ماتریس،  $\chi$  ها را پذیرفتاری اصلی، و مقادیر  $K_{11} = 1 + \chi_{11}$  ، ... و جزاینها را ثابتهای اصلی دی‌الکتریک می‌نامند .

نگاهی به معادله (۸۶.۰۶) ، نشان می‌دهد که معادله کلی موج ( ۱۴.۰۶ ) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \chi \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad ( ۹۰.۰۶ )$$

بنابراین، اگر بردار انتشار  $\mathbf{k}$  از معادله زیر تبعیت کند، امواج تخت تکفام معمولی با شکل  $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$  می‌توانند در بلور وجود داشته باشند :

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi \mathbf{E} \quad ( ۹۱.۰۶ )$$

معادله بالا بر حسب مولفه‌های آن به سه معادله زیر تبدیل می‌شود :

$$\left(-k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_x + k_x k_y E_y + k_x k_z E_z = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{11} E_x$$

$$k_y k_x E_x + \left(-k_x^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_y + k_y k_z E_z = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{22} E_y \quad (92.6)$$

$$k_z k_x E_x + k_z k_y E_y + \left(-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_z = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{33} E_z$$

برای تعبیر فیزیکی این معادلات، فرض کنید موج در سوی یکی از محورهای اصلی، مانند محور  $x$  پیش برود. در این حالت  $k_x = k$ ،  $k_y = k_z = 0$  و سه معادله بالا به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} E_x &= -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{11} E_x \\ \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_y &= -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{22} E_y \\ \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_z &= -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{33} E_z \end{aligned} \quad (93.6)$$

معادله نخست نشان می‌دهد که چون  $\omega$  و  $\chi_{11}$  هیچکدام صفر نیستند، باید داشته باشیم  $E_x = 0$ ، یعنی میدان  $E$  نسبت به محور  $x$  که جهت انتشار است، عرضی است. در معادله دوم، اگر  $E_y \neq 0$ ، در این صورت:

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi_{22}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{K_{22}} \quad (94.6)$$

همین طور در معادله سوم اگر  $E_z \neq 0$ ، خواهیم داشت:

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi_{33}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{K_{33}} \quad (95.6)$$

حال چون  $\omega/k$  سرعت فاز موج است، برای سرعت فاز ممکن است دو مقدار داشته باشیم. اگر بردار  $E$  در جهت محور  $y$  باشد، سرعت فاز برابر  $c/\sqrt{K_{22}}$ ، و چنانچه بردار  $E$  در جهت محور  $z$  باشد سرعت فاز برابر  $c/\sqrt{K_{33}}$  خواهد بود.

به طور کلی می‌توانیم نشان دهیم که برای هر جهت بردار انتشار  $k$ ، دو مقدار ممکن برای بزرگی  $k$  وجود دارد و بنابراین دو مقدار ممکن نیز برای سرعت

فاز در دست است. برای این منظوره نمازشکست اصلی  $n_1$ ،  $n_2$  و  $n_3$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} n_1 &= \sqrt{1 + \chi_{11}} = \sqrt{K_{11}} \\ n_2 &= \sqrt{1 + \chi_{22}} = \sqrt{K_{22}} \\ n_3 &= \sqrt{1 + \chi_{33}} = \sqrt{K_{33}} \end{aligned} \quad ( ۹۶.۶ )$$

حال در معادله ( ۹۲.۶ )، برای اینکه برای  $E_x$ ،  $E_y$  و  $E_z$  جوابهای غیربدهی وجود داشته باشند، باید دترمینان ضرائب صفر باشد، یعنی:

$$\begin{vmatrix} (n_1\omega/c)^2 - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & (n_2\omega/c)^2 - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & (n_3\omega/c)^2 - k_x^2 - k_y^2 \end{vmatrix} = 0 \quad ( ۹۷.۶ )$$

که در آن از معادلات ( ۹۶.۶ ) استفاده شده است. معادله بالا را می‌توان به صورت یک سطح سه بعدی در فضای  $k$  نمایش داد. شکل سطح  $k$  یا سطح بردار موج، در شکل ۸.۶ نشان داده شده است. برای اینکه ببینیم این سطح چگونه ساخته می‌شود، یکی از صفحات مختصات مانند صفحه  $xy$  را در نظر می‌گیریم. در این صفحه  $k_z = 0$  و دترمینان فوق به حاصل ضرب دو سازه ساده می‌شود:

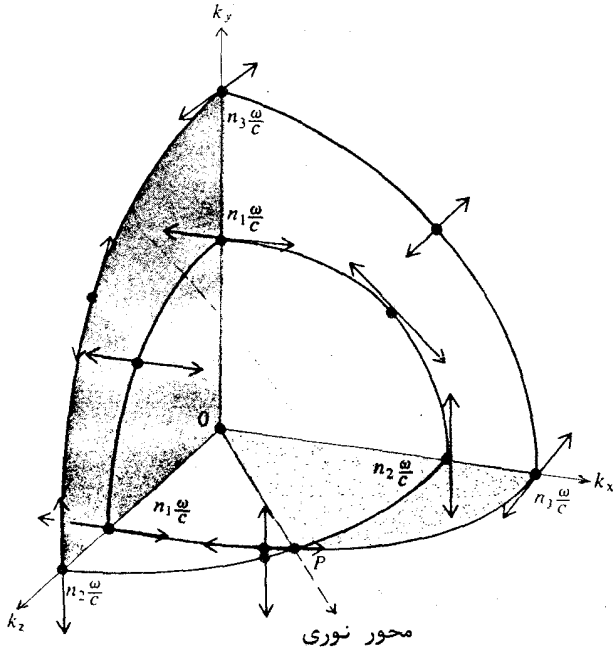
$$\left[ \left( \frac{n_3\omega}{c} \right)^2 - k_x^2 - k_y^2 \right] \left\{ \left[ \left( \frac{n_1\omega}{c} \right)^2 - k_y^2 \right] \left[ \left( \frac{n_2\omega}{c} \right)^2 - k_x^2 \right] - k_x^2 k_y^2 \right\} = 0 \quad ( ۹۸.۶ )$$

چون حاصل ضرب باید صفر باشد، بنابراین یک یا هر دو سازه باید صفر باشند. اگر سازه اول صفر باشد، معادله یک دایره به دست می‌آید:

$$k_x^2 + k_y^2 = \left( \frac{n_3\omega}{c} \right)^2 \quad ( ۹۹.۶ )$$

و اگر سازه دوم صفر باشد، معادله یک بیضی نتیجه می‌شود:

$$\frac{k_x^2}{(n_2\omega/c)^2} + \frac{k_y^2}{(n_1\omega/c)^2} = 1 \quad ( ۱۰۰.۶ )$$



شکل ۸.۶ سطح بردار موج.

برای صفحات  $xz$  و  $yz$  نیز معادلات مشابهی به دست می‌آیند. چنانکه دیده می‌شود، محل برخورد سطح  $k$  با هر یک از صفحات مختصات شامل یک دایره و یک بیضی است. سطح  $k$  دو رویه‌ای است، یعنی از یک رویهٔ درونی و یک رویهٔ بیرونی تشکیل می‌شود. به این ترتیب برای هر جهت بردار موج  $k$ ، دو مقدار ممکن برای عدد موج  $k$  وجود دارد. در نتیجه دو مقدار ممکن نیز برای سرعت فاز وجود خواهد داشت. نشان دادیم، برای موجی که در سوی محور  $x$  پیش می‌رود، دوسرعت فاز به دو جهت متعامد قطبیدگی مربوط می‌شوند. این مطلب برای هر سوی انتشار دیگر نیز برقرار است، یعنی دو سرعت فاز همواره به دو قطبیدگی متعامد مربوط می‌شوند (۵). حال همانگونه که می‌دانیم یک موج نور با قطبیدگی دلخواه را می‌توان به دو موج با قطبیدگیهای متعامد تجزیه کرد. پس هرگاه نور ناقطبیده یا نوری با قطبیدگی دلخواه در یک بلور منتشر شود، می‌توان آن را متشکل از مجموع دو موج مستقل دانست که به طور متعامد قطبیده‌اند و با سرعتهای فاز متفاوت پیش می‌روند.

ماهیت سطح  $k$  طوری است که رویه‌های درونی و بیرونی آن مطابق شکل ۸.۰۶ در یک نقطه  $P$  یکدیگر را قطع می‌کنند. این نقطه جهتی را که دو مقدار  $k$  با هم برابرند معین می‌کند. این جهت بنا به تعریف محور نوری بلور نامیده می‌شود. هرگاه انتشار نور در سوی یک محور نوری صورت گیرد، سرعت‌های فـساز دو موج قطبیده متعامد مساوی می‌شوند.

در حالت کلی، که در شکل ۸.۰۶ و ۹.۰۶ (الف) نشان داده شده است، سه نمارشکست اصلی  $n_1$ ،  $n_2$  و  $n_3$  همه متفاوتند. از مقطعها بسادگی دیده می‌شود که در این حالت دو محور نوری وجود دارند و بلور را دو محوری می‌نامند. برای بسیاری از بلورها دو عدد از نمارشکستهای اصلی با هم برابرند و در این صورت، تنها یک محور نوری وجود دارد و بلور را تک محوری می‌نامند. در یک بلور تک محوری، سطح  $k$  از یک کره و یک بیضیوار چرخشی که محور آن با محور نوری بلور یکی است به وجود می‌آید، شکل ۹.۰۶ (ب) و (پ). اگر هر سه نمارشکست با هم برابر باشند، در این صورت سطح  $k$  به یک کره ساده می‌شود، و بلور در هیچ جهتی ویژگی شکست دوگانه ندارد و از لحاظ نوری همسانگرد است.

با در نظر گرفتن اینکه نمارشکستها و مولفه‌های تانسور  $\chi$  به وسیله معادلات (۹۶.۰۶) به هم بستگی دارند، می‌توانیم با آسانی بلورها را طبق تانسور  $\chi$  به روش زیر دسته‌بندی کنیم:

$$\chi = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad \chi_{11} = \chi_{22} = \chi_{33} = a \quad \text{همسانگرد}$$

$$n = \sqrt{1+a}$$

مکعبی

$$\chi = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \quad \chi_{11} = \chi_{22} = a, \chi_{33} = b \quad \text{تک محوری}$$

$$n_o = \sqrt{1+a}$$

$$n_e = \sqrt{1+b}$$

سه گوش  
چهارگوش  
شش گوش

$$\chi = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad \chi_{11} = a \quad \chi_{22} = b \quad \chi_{33} = c \quad \text{دو محوری}$$

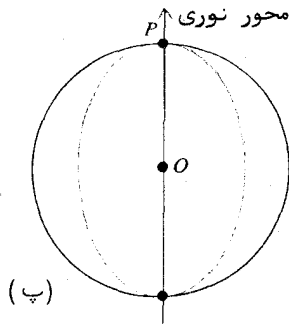
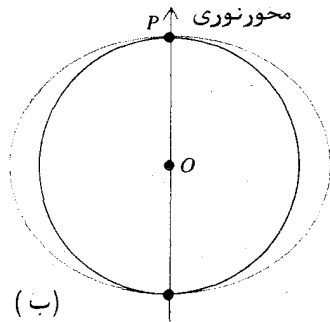
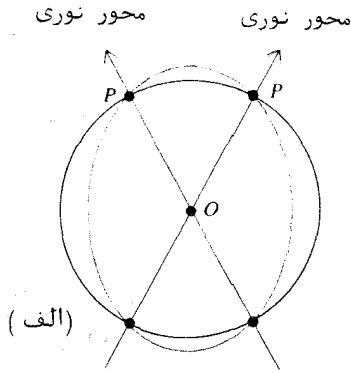
$$n_1 = \sqrt{1+a}$$

$$n_2 = \sqrt{1+b}$$

$$n_3 = \sqrt{1+c}$$

سه خواب  
تک خواب  
راست لوزی





شکل ۹.۶ مقاطع سطوح بردار موج در صفحه  $xz$  (الف) در بلورهای دو محوری، (ب) در بلورهای تک محوری مثبت، (پ) در بلورهای تک محوری منفی.

در یک بلور تک محوری، نمار شکست مربوط به دو جمله برابر،  $\chi_{11} = \chi_{22}$ ، نمارشکست عادی  $n_0$  و نمارشکست دیگر، که مربوط به  $\chi_{33}$  است، نمارشکست غیر عادی  $n_E$  نامیده می‌شود. اگر  $n_0 < n_E$ ، بلور را مثبت و در صورتی که  $n_0 > n_E$ ، آن را بلور منفی می‌نامند. در جدول ۱۰۶ چند نمونه بلور همراه با نمارشکستهای آنها نوشته شده است.

## ۲ سطح سرعت فاز

با توجه به اینکه عدد موج  $k$  با رابطه  $k = \omega/v$  به مقدار سرعت فاز  $v$  بستگی دارد، می‌توانیم این همبستگی را به صورت برداری زیر بنویسیم:

$$k = v \frac{\omega}{v^2} \quad (101.6)$$

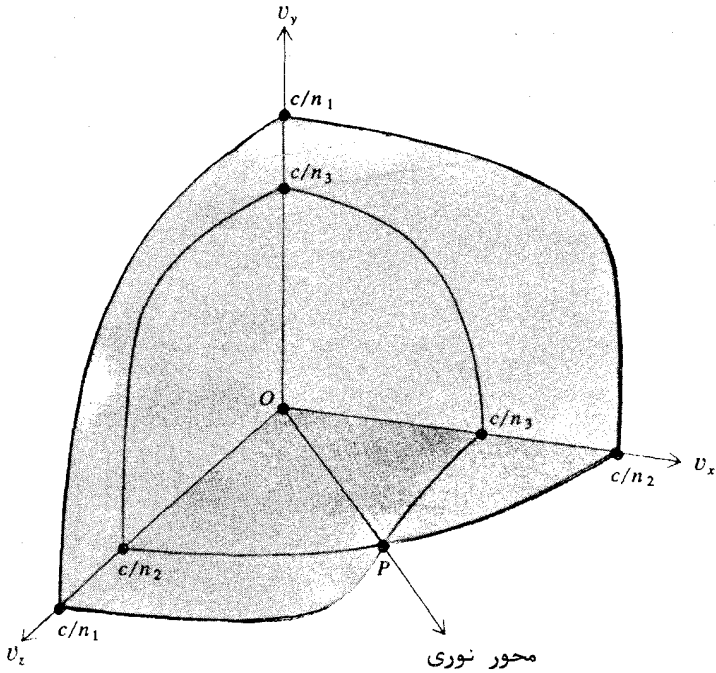
که بر حسب مولفه‌های مربوط، معادل با سه معادله نرده‌ای زیر است:

$$k_x = v_x \frac{\omega}{v^2} \quad k_y = v_y \frac{\omega}{v^2} \quad k_z = v_z \frac{\omega}{v^2} \quad (102.6)$$

مقادیر بالا را در معادله (۹۷.۶)، یعنی معادله سطح  $k$  قرار می‌دهیم، پس از حذف  $\omega^2$  و ضرب کردن در  $v^4$ ، نتیجه می‌شود که:

$$\begin{vmatrix} n_1^2 v^4 / c^2 - v_y^2 - v_z^2 & v_x v_y & v_x v_z \\ v_y v_x & n_2^2 v^4 / c^2 - v_x^2 - v_z^2 & v_y v_z \\ v_z v_x & v_z v_y & n_3^2 v^4 / c^2 - v_x^2 - v_y^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (103.6)$$

این معادله تعریف ریاضی یک سطح سه بعدی است که می‌توان آن را **سطح وارون  $k$**  دانست و سطح سرعت فاز خوانده می‌شود. این سطح دورویهای است و برای سرعت فاز موج تختی که در جهتی معین در بلور انتشار می‌یابد، دو مقدار ممکن پیشگویی می‌کند. در شکل ۱۰۶ نمودار کلی سطح سرعت فاز دیده می‌شود. محل برخورد ۲- در این بخش، از نمادگذاری که در بخشهای دیگر کتاب به‌کاربرده شده است اندکی منحرف می‌شویم، و برای سرعت فاز از حرف  $v$  به جای « استفاده می‌کنیم و سرعت پرتو را با « نشان می‌دهیم.



شکل ۱۰.۶ سطح سرعت فاز،

صفحات مختصات با این سطح، دایره و خاکیهای درجه چهارم هستند. بنابراین برای صفحه  $xy$  دو معادله محل تقاطع عبارتند از:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \frac{c^2}{n_3^2} \quad (104.6)$$

$$\frac{v_x^2}{n_2^2} + \frac{v_y^2}{n_1^2} = \frac{v^4}{c^2} \quad (105.6)$$

رابطه‌های مشابهی برای دیگر صفحات مختصات به دست می‌آیند.

## جدول ۱۰۶ چند بلور معمولی

$n$	بلورهای ( مکعبی ) همسانگرد
۱,۵۴۴	کلرور سدیم
۲,۴۱۷	الماس
۱,۳۹۲	فلوریت

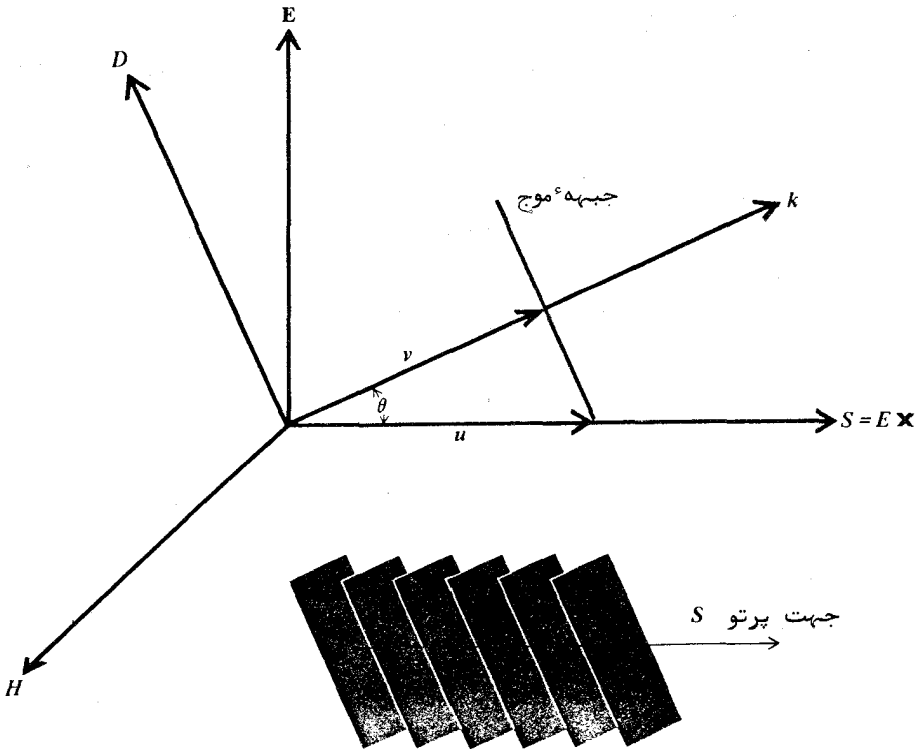
$n_E$	$n_O$	بلورهای تک محوری مثبت
۱,۳۱۰	۱,۳۰۹	یخ
۱,۵۵۳	۱,۵۴۴	دَر کوهی
۱,۹۶۸	۱,۹۲۳	زیرکُن
۲,۹۰۳	۲,۶۱۶	روتیل

$n_E$	$n_O$	بلورهای تک محوری منفی
۱,۵۹۰	۱,۵۹۸	یاقوت کبود
۱,۳۳۶	۱,۵۸۷	نیترات سدیم
۱,۴۸۶	۱,۶۵۸	کلسیت
۱,۶۳۸	۱,۶۶۹	تورمالین

$n_3$	$n_2$	$n_1$	بلورهای دو محوری
۱,۵۳۰	۱,۵۲۳	۱,۵۲۰	سنگ گچ-ژیپس
۱,۵۳۰	۱,۵۲۶	۱,۵۲۲	فلدسپار
۱,۵۸۸	۱,۵۸۲	۱,۵۵۲	سنگ طلق
۱,۶۲۷	۱,۶۲۰	۱,۶۱۹	یاقوت زرد

بردار پوئین تینگ و سرعت فاز

با اینکه بردار انتشار  $\mathbf{k}$  جهت صفحات با فاز ثابت را برای امواج نوری در بلور مشخص می‌کند، جهت واقعی شارش انرژی،  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ ، معمولاً با جهت  $\mathbf{k}$  یکی نیست، زیرا همان‌گونه که از معادله ۹۱.۶ آشکار است، در محیط‌های ناهمسانگرد معمولاً  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{k}$  بر یکدیگر عمود نیستند. از سوی دیگر چون از معادله نخست ماکسول داریم  $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mu_0 \omega \mathbf{H}$ ، میدان مغناطیسی  $\mathbf{H}$  بر  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{k}$  هر دو عمود است. وضع این بردارها نسبت به یکدیگر در شکل ۱۱.۶ نشان داده شده است. سه بردار  $\mathbf{E}$ ،  $\mathbf{k}$  و  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  بر  $\mathbf{H}$  عمودند و نیز  $\mathbf{E}$  بر  $\mathbf{S}$  عمود است.



شکل ۱۱.۶ روابط میان میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی، بردار پوئین تینگ، بردار موج، بردار سرعت پرتو و بردار سرعت فاز برای امواج تخت در یک بلور.

یک باریکه با پرتو نور را در یک بلور در نظر بگیرید. صفحات با فاز ثابت بر  $k$  عمودند ولی درجهت پرتو  $S$  پیش می‌روند. بدین‌سان همانطور که در شکل نشان داده شده است نسبت به جهت پیشروی خود مایلند. اگر  $\theta$  نشان‌دهنده زاویه بین  $k$  و  $S$  باشد، سطوح با فاز ثابت با سرعت  $u$  که سرعت پرتو نامیده می‌شود و مقدار آن از رابطه زیر به دست می‌آید. درجهت پرتو پیش می‌روند:

$$u = \frac{v}{\cos \theta} \quad (106.6)$$

که در آن  $v$  سرعت فاز (درجهت  $k$ ) است. بدیهی است که سرعت پرتو بیشتر از سرعت فاز است مگر آنکه  $\theta = 0$  باشد که در این صورت سرعت‌های پرتو و فاز برابر و  $S$  و  $k$  نیز همسو خواهند بود. این حالت هنگامی روی می‌دهد که جهت انتشار در جهت یکی از محورهای اصلی بلور باشند.

### سطح سرعت پرتو

این سطح، بزرگی سرعت پرتو را برای هرجهت پرتو به دست می‌دهد. برای به دست آوردن معادله سطح پرتو، معادله موج (۹۱.۶) را برحسب بردار جایجایی می‌نویسیم. پس برای امواج تخت سازگان درون بلور داریم:

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\frac{\omega^2}{c^2 \epsilon_0} \mathbf{D}$$

که نشان می‌دهد  $\mathbf{D}$  بر بردار موج  $\mathbf{k}$  عمود است. با بسط حاصل ضرب سه‌گانه خواهیم داشت:

$$\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{c^2 \epsilon_0} \mathbf{D}$$

سپس دو طرف معادله بالا را در  $\mathbf{D}$  ضرب داخلی می‌کنیم. چون  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0$  بنابراین داریم:

$$k^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{\omega^2}{c^2 \epsilon_0} \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}$$

و چون  $v = \omega/k$  نتیجه می‌شود که:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = ED \cos \theta = \frac{v^2}{c^2 \epsilon_0} D^2$$

و با استفاده از رابطه (۱۰۶.۶) خواهیم داشت :

$$\frac{D}{E} \cos \theta = \epsilon_0 \frac{c^2}{u^2}$$

بردار  $D$  را بر حسب تصویرهایش در راستاهای  $E$  و  $u$  می نویسیم :

$$D = E \frac{D}{E} \cos \theta + u \frac{u \cdot D}{u^2}$$

که با استفاده از معادله قبلی چنین می شود :

$$D = \epsilon_0 E \frac{c^2}{u^2} + u \frac{u \cdot D}{u^2}$$

حال اگر محورهای مختصات، محورهای اصلی بلور باشند مولفه های  $E$  و  $D$  این چنین به هم مربوط می شوند :

$$\epsilon_0 E_x = \frac{D_x}{\epsilon_{11}} = \frac{D_x}{n_1^2}$$

زوابط مشابهی نیز برای مولفه های دیگر می توان نوشت. بدین سان با نوشتن مولفه ها و مرتب کردن عبارات معادله قبلی سه معادله نرده ای زیر به دست می آید :

$$D_x \left( \frac{c^2}{n_1^2} - u_y^2 - u_z^2 \right) + D_y u_x u_y + D_z u_x u_z = 0$$

$$D_x u_y u_x + D_y \left( \frac{c^2}{n_2^2} - u_x^2 - u_z^2 \right) + D_z u_y u_z = 0$$

$$D_x u_z u_x + D_y u_y u_z + D_z \left( \frac{c^2}{n_3^2} - u_x^2 - u_y^2 \right) = 0$$

برای اینکه پاسخ غیر بدیهی وجود داشته باشد، باید دترمینان ضرایب صفر باشد :

$$\begin{vmatrix} c^2/n_1^2 - u_y^2 - u_z^2 & u_x u_y & u_x u_z \\ u_y u_x & c^2/n_2^2 - u_x^2 - u_z^2 & u_y u_z \\ u_z u_x & u_z u_y & c^2/n_3^2 - u_x^2 - u_y^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (107.6)$$

این معادله<sup>۶</sup> سطح سرعت پرتو است. با قرار دادن  $u_z = 0$  معادلات محل برخورد این سطح با صفحه<sup>۶</sup>  $xy$  به دست می‌آید. نتیجه یک دایره:

$$u_x^2 + u_y^2 = \frac{c^2}{n_3^2} \quad (108.6)$$

و یک بیضی است:

$$n_2^2 u_x^2 + n_1^2 u_y^2 = c^2 \quad (109.6)$$

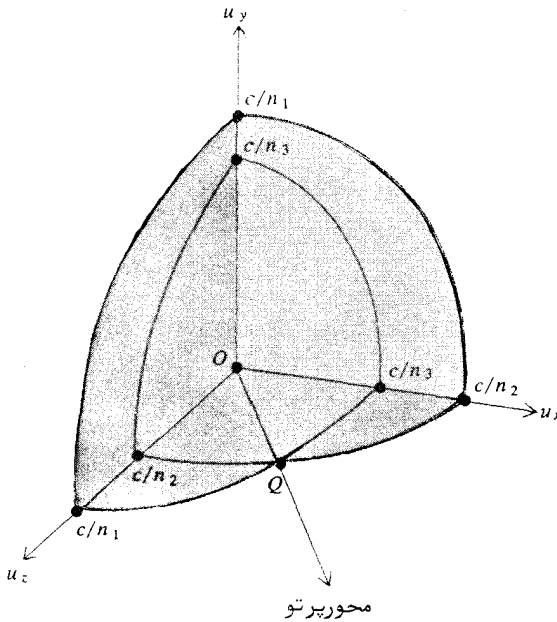
معادلات مربوط به دیگر صفحات مختصات با جایگشت چرخه‌ای به دست می‌آیند، و در هر حالت محلهای برخورد، یک بیضی و یک دایره‌اند. بسادگی می‌توان نشان داد که محلهای برخورد سطح سرعت پرتو و سطح سرعت فاز با محورهای مختصات یکی است. سطح سرعت پرتو در شکل ۱۲۰۶ نشان داده شده است و همانند سطح سرعت فاز، این سطح نیز دو رویه دارد، یکی درونی و دیگری بیرونی، که مربوط به دو مقدار ممکن  $n$  برای یک جهت پرتو است. دو رویه یکدیگر را در نقطه<sup>۶</sup>  $Q$  قطع می‌کنند. این نقطه مشخص‌کننده<sup>۶</sup> جهتی است که سرعتهای پرتو با هم برابرند، و آن را محور پرتو می‌نامند.

در بلورهای دو محوری، دو محور پرتو وجود دارند. این محورها با محورهای نوری بلور متفاوتند. از سوی دیگر، برای یک بلور تک محوری، رویه‌های سطح سرعت پرتو از یک کره و یک بیضیوار چرخشی (کره‌وار) به وجود می‌آیند. این دو سطح در دو انتهای یک قطر ویژه<sup>۶</sup> کره بر هم مماسند. این قطر، محور پرتو را مشخص می‌کند و در بلورهای تک محوری بر محور نوری بلور منطبق است.

### ۸.۶ شکست دوگانه در یک صفحه<sup>۶</sup> مرزی

موج تختی را که بر سطح یک بلور فرود می‌آید در نظر بگیرید و بردارهای انتشار موج فرودی و موج شکسته را به ترتیب با  $\mathbf{k}_0$  و  $\mathbf{k}$  و زوایای تابش و شکست را با  $\theta$  و  $\phi$  نشان دهید. بر اساس دلایسل بخش ۲.۶، که در آن شکست نور در صفحه<sup>۶</sup> مرزی یک دی‌الکتریک بررسی می‌شد، معادله<sup>۶</sup> زیر قانون شکست نور را در بر دارد:



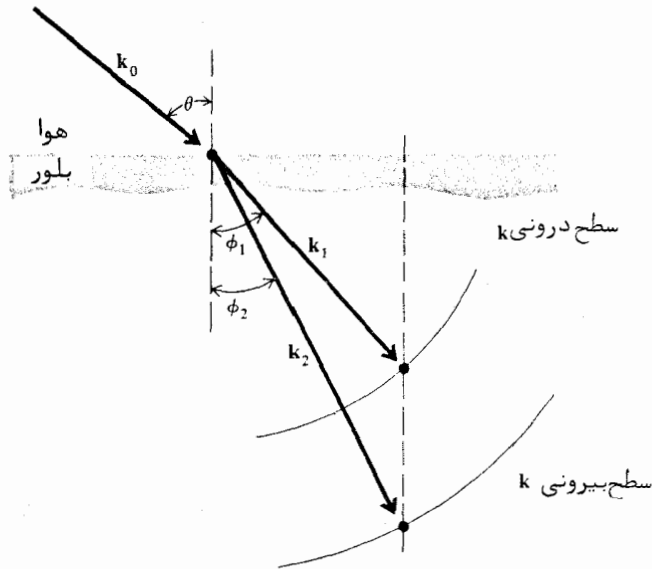


شکل ۱۲.۶ سطح سرعت پرتو.

$$\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad ( ۱۱۰.۶ ) \quad ( \text{در صفحه مرزی} )$$

چون این معادله صرفاً " وجود یک شرط مرزی نامشخص را بیان می‌کند، عیناً " برای شکست روی صفحه مرزی یک بلور نیز برقرار است. این معادله به طور ضمنی می‌رساند که تصاویر بردارهای انتشار روی صفحه مرزی برای امواج فرودی و شکسته باید برابر باشند. حال می‌دانیم برای یک جهت انتشار معین در بلور، دو بردار انتشار وجود دارند. به خاطر ماهیت دورویه‌ای سطح  $\mathbf{k}$ ، برای یک مقدار مشخص تصویر بردار انتشار در یک جهت بخصوص، دو بردار انتشار وجود دارند. در نتیجه مطابق شکل ۱۳.۶ موج فرودی روی یک بلور، شکست دوگانه پیدا می‌کند. با استفاده از معادله ( ۱۱۰.۶ ) می‌توانیم برای دو موج شکسته بنویسیم:

$$k_0 \sin \theta = k_1 \sin \phi_1 \quad k_0 \sin \theta = k_2 \sin \phi_2 \quad ( ۱۱۱.۶ )$$



شکل ۱۳.۰۶ بردارهای موج برای شکست دوگانه در صفحه مرزی یک بلور.

در دید نخست، ممکن است به نظر آید که معادلات بالا بیانی از قانون اشنل برای شکست دوگانه است. لیکن این طور نیست، زیرا  $k_1$  و  $k_2$  معمولاً ثابت نیستند و با جهت بردارهای  $k_1$  و  $k_2$  تغییر می‌کنند. یعنی نسبت  $\sin \theta / \sin \phi$  که در شکست نور در صفحه مرزی یک محیط همسانگرد همیشه ثابت است، در اینجا ثابت نیست. پس در اینجا تعیین  $\phi$  با دانستن اندازه  $\theta$ ، کار ساده‌ای نیست. از شکل ۱۳.۰۶ چنین برمی‌آید که یک روش برای به دست آوردن  $\phi$ ، روش ترسیمی باشد.

برای بلورهای تک محوری، همانگونه که دیدیم، یکی از رویه‌های سطح  $k$  یک کره است و عدد موج متناظر آن،  $k$ ، برای همه جهات موج در بلور ثابت است و قانون اشنل برقرار است. این موج را موج عادی می‌نامند و برای آن داریم:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \phi} = n_0 \quad (112.6)$$

که در آن  $n_0$  نمار شکست عادی است. لیکن برای موج دیگر، سطح  $k$  یک کره‌وار است و قانون اشنل برقرار نیست. این موج، موج غیر عادی نامیده می‌شود. برای بلورهای تک محوری مثبت، نمارشکست غیر عادی  $n_E$  از  $n_0$  بزرگتر است، و برای بلورهای منفی از آن کوچکتر، از این رو برای بلورهای مثبت  $\phi_E \leq \phi_0$  و برای بلورهای منفی  $\phi_E \geq \phi_0$ . چند نمونه از شکست دوگانه در شکل ۱۴.۶ نشان داده شده‌اند. در همه این حالتها، قطبیدگیهای دو موج متعامدند و جهت‌های بردارهای موج در شکل مشخص شده‌اند. جهت پرتو، مربوط به هر بردار موج  $k$ ، با کشیدن خطی عمود بر سطح  $k$  در انتهای بردار  $k$  به دست می‌آید. اثبات این مطلب در منبع (۵) یافت می‌شود.

### منشورهای قطبان

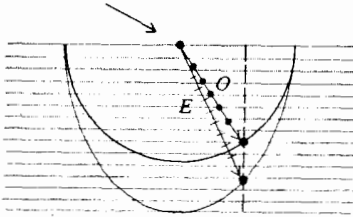
فرض کنید موجی از درون یک بلور تک محوری بر یک صفحه مرزی فرود آید. حالت ویژه‌ای را که در آن محور نوری مانند شکل ۱۴.۶ (ب) بر صفحه تابش عمود است در نظر بگیرید. مقطع سطح  $k$  از دو دایره تشکیل می‌شود و بنابراین قانون اشنل هم برای موج عادی برقرار است و هم برای موج غیرعادی. برای سادگی فرض کنید محیط بیرونی هوا ( $n = 1$ ) باشد، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$n_0 \sin \phi_0 = \sin \theta \quad (113.6)$$

$$n_E \sin \phi_E = \sin \theta \quad (114.6)$$

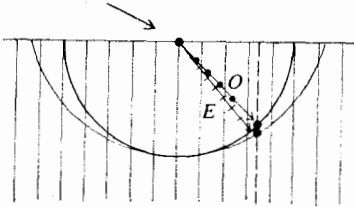
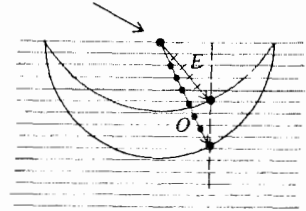
که در آن  $\theta$  زاویه فرودی درونی، و  $\phi_0$  و  $\phi_E$  بترتیب زوایای شکست موج عادی و موج غیرعادی‌اند. بردار  $E$  ی موج عادی بر محور نوری عمود است، در حالی که بردار  $E$  ی موج غیرعادی با آن محور موازی است، شکل ۱۵.۶ (الف).

تک محوری مثبت

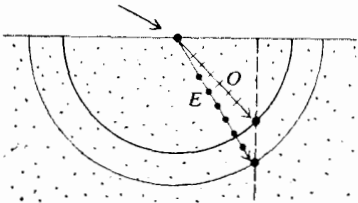
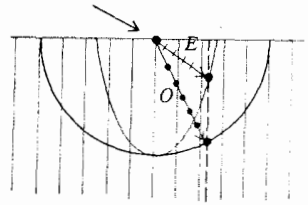


(الف)

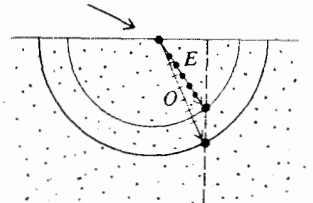
تک محوری منفی



(ب)



(پ)

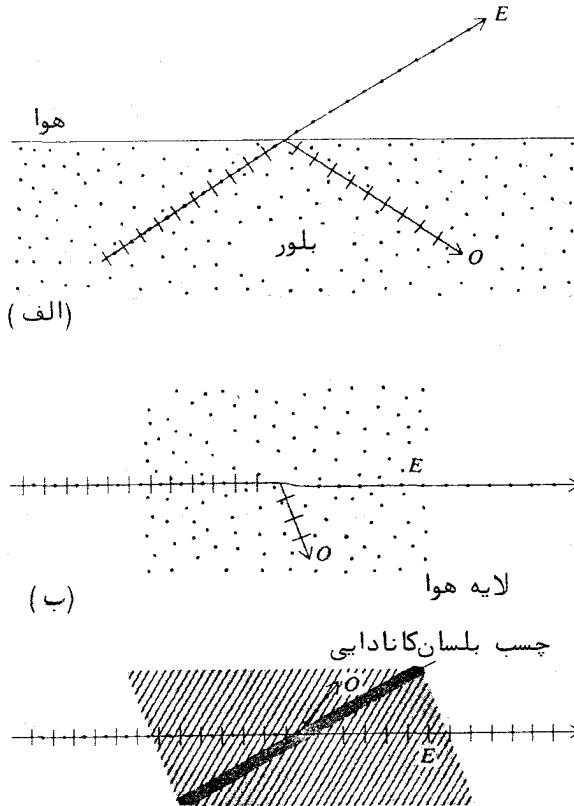


شکل ۱۴.۶ بردارهای موج برای شکست دوگانه در بلورهای تک محوری. (الف) محور نوری موازی صفحه مرزی و صفحه تابش است. (ب) محور نوری عمود بر صفحه مرزی و موازی صفحه تابش است. (پ) محور نوری موازی صفحه مرزی و عمود بر صفحه تابش است.

حال فرض کنید یک بلور تک محوری منفی مانند کلسیت داشته باشیم و زاویه فرودی درونی  $\theta$  طوری است که:

$$n_E < \frac{1}{\sin \theta} < n_o \quad (115.6)$$

در این حالت برای موج عادی بازتاب کلی درونی رخ می‌دهد، در حالی که برای موج غیر عادی چنین اتفاقی روی نمی‌دهد. بنابراین مطابق شکل ۱۵.۶ (الف)



شکل ۱۵۰۶ (الف) جدا شدن پرتوهای غیرعادی و عادی در صفحه مرزی یک بلور در حالت شکست درونی (ب) ساختار منشور قطبان گلن ، (پ) منشور نیکول.

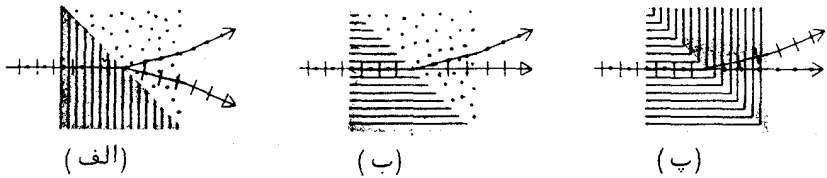
موج شکسته کلا " قطبیده است. اساس تولید نور قطبیده به روش شکست دوگانه بر این پایه است.

یکی از رایج ترین قطبنده های منشوری، منشور قطبان گلن " Glan " است که در شکل (ب) نشان داده شده است. این قطبنده از دو منشور همانند از جنس کلسیت تشکیل می شود و طوری برش داده می شود که محور نوری آن موازی یالهای

منشور باشد. رخهای بزرگ دو منشور مطابق شکل مقابل یکدیگر قرار داده می‌شوند. فضای میان دو منشور می‌تواند از هوا یا هر ماده شفاف دیگر پر شود. اگر از هوا استفاده شود، زاویه راس منشور باید حدود ۳۸٫۵ درجه باشد.

یک نوع قدیمی‌تر منشور قطبان، منشور نیکول " Nicol " است، که به شکل متوازی‌الاضلاع ساخته می‌شود و تقریباً همشکل بلور طبیعی کلسیت است، شکل ۱۵٫۶ (پ). منشور نیکول از منشور گلن نامرغوبتر است و بیشتر جنبه تاریخی دارد.

در ساخت یکی دیگر از انواع قطبنده‌ها، که برای تبدیل نور فرودی به دو پرتو واگرا با قطبیدگیهای متعامد به‌کار می‌رود، از شکست دوگانه استفاده می‌شود. برای انجام این‌کار سه روش در شکل ۱۶٫۶ ارائه شده که خود گویای مطلب است.

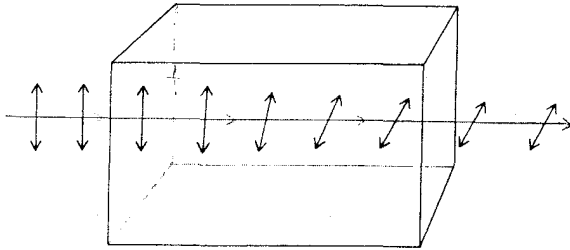


شکل ۱۶٫۶ سه نوع منشور برای تبدیل نور ناقطبیده به دو پرتو واگرا با قطبیدگیهای متعامد. (الف) منشور ولاستون " Wollaston "، (ب) منشور روشون " Rochon "، (پ) منشور سنارمونت " Senarmont " همه این منشورها از بلور تک محوری مثبت (کوارتز) ساخته می‌شوند.

### ۹.۶ فعالیت نوری

بعضی از اجسام می‌توانند صفحه قطبیدگی نوری را که از آنها عبور می‌کند بچرخانند. این پدیده فعالیت نوری خوانده می‌شود. هرگاه یک پرتو نور قطبیده خطی از یک محیط فعال نوری عبور داده شود، (شکل ۱۷٫۶)، صفحه قطبیدگی نوری که از محیط خارج می‌شود به اندازه زاویه‌ای که با طول مسیر در محیط متناسب است، بچرخانیده می‌شود. مقدار چرخش در واحد طول مسیـر را

چرخانندگی ویژه می‌نامند. اگر چرخش صفحه قطبیدگی به طرف راست باشد، جسم را راستگردان، و اگر چرخش به طرف چپ باشد آن را چپگردان می‌نامند. کلرات سدیم و شنگرف و بعضی از قندها نمونه‌هایی از اجسامی‌اند که فعالیت نوری دارند. کوارتز همجوئیده از لحاظ نوری همسانگرد است، ولی کوارتز بلورین هم فعالیت نوری دارد و هم ویژگی شکست دوگانه.



شکل ۱۷.۶ چرخش صفحه قطبیدگی توسط یک محیط فعال نوری. مورد چپگردان نشان داده شده است.

کوارتز به دو صورت بلورین در طبیعت یافت می‌شود، راستگردان و چپگردان چرخانندگی ویژه هر یک از دو نوع کوارتز برای نوری که در راستای محور نوری بلور پیش می‌رود و برای طول موجهای گوناگون در جدول ۲.۶ نوشته شده است. دیده می‌شود که اندازه فعالیت نوری کوارتز با طول موج تغییر می‌کند. این تغییرات با طول موج را پاشندگی چرخشی می‌نامند.

فعالیت نوری را می‌توان با این فرض ساده که سرعت انتشار نور قطبیده دایره‌ای راست در محیط با نور قطبیده دایره‌ای چپ متفاوت است تشریح کرد. برای نشان دادن درستی این فرض از نمادگذاری برداری جونز، که در بخش ۵.۲ به کار بردیم، استفاده می‌کنیم. فرض کنید  $n_L$  و  $n_R$  بترتیب نمارشکستهای محیط برای نور قطبیده دایره‌ای راست و چپ باشند. عدد موج مربوط به آنها بترتیب چنین‌اند

$$k_L = n_L \omega / c \quad \text{و} \quad k_R = n_R \omega / c$$

و عبارتهای:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{i(k_x z - \omega t)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{i(k_x z - \omega t)}$$

## جدول ۲.۶ فعالیت نوری کوارتز

طول موج (انگسترم)      چرخانندگی ویژه (درجه بر میلی‌متر)

۴۹	۴۰۰۰
۳۷	۴۵۰۰
۳۱	۵۰۰۰
۲۶	۵۵۰۰
۲۲	۶۰۰۰
۱۷	۶۵۰۰

نشان دهنده این دو موج در محیط‌اند.

حال فرض کنید یک پرتو نور قطبیده خطی، فاصله  $l$  را در محیط پیماید و قطبیدگی اولیه در جهت افقی باشد. بردار جونز اولیه به تفکیک مولفه‌های دایره‌ای راست و چپ، چنین است:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

دامنه مختلط موج نور پس از پیمودن فاصله  $l$  در محیط چنین است:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{ik_x l} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{ik_x l} \\ & = \frac{1}{2} e^{i(k_x + k_y)l/2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{i(k_x - k_y)l/2} + \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{-i(k_x - k_y)l/2} \right\} \end{aligned} \quad (116.6)$$

با معرفی مقادیر  $\psi$  و  $\theta$  به ترتیب زیر:

$$\psi = \frac{1}{2}(k_R + k_L)l \quad (117.6)$$



$$\theta = \frac{1}{2}(k_R - k_L)l \quad (118.06)$$

می‌توانیم دامنهٔ مختلط را به صورت زیر بیان کنیم:

$$\begin{aligned} e^{i\psi} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{i\theta} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{-i\theta} \right\} \\ = e^{i\psi} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \frac{1}{2}i(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \end{bmatrix} \\ = e^{i\psi} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (119.06)$$

این عبارت، یک موج قطبیده تخت را نشان می‌دهد که جهت قطبیدگی آن نسبت به جهت نخست به اندازه زاویه  $\theta$  چرخیده است. از معادله (۱۱۸.۰۶) داریم:

$$\theta = (n_R - n_L) \frac{\omega l}{2c} = (n_R - n_L) \frac{\pi l}{\lambda} \quad (120.06)$$

که در آن  $\lambda$  طول موج در خلاء است. بنابراین چرخانندگی ویژه  $\delta$ ، برحسب طول موج، از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\delta = (n_R - n_L) \frac{\pi}{\lambda} \quad (121.06)$$

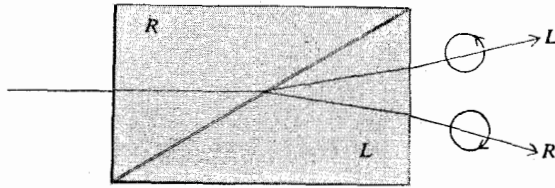
به عنوان مثالی عددی، نمارشکستهای راست و چپ برای انتشار در راستای محور نوری کوارتز راستگردان در جدول زیر نوشته شده‌اند:

$n_R - n_L$	$n_L$	$n_R$	$\lambda$ (انگسترم)
۰٫۰۰۰۰۱۱	۱٫۵۵۸۲۱	۱٫۵۵۸۱۰	۳۹۶۰
۰٫۰۰۰۰۰۷	۱٫۵۴۴۲۷	۱٫۵۴۴۲۰	۵۸۹۵
۰٫۰۰۰۰۰۶	۱٫۵۳۹۲۰	۱٫۵۳۹۱۴	۷۶۰۰

برای کوارتز چپگردان ترتیب این مقادیر عوض می‌شود.

برای تبدیل نور ناقطبیده به دو پرتو نور قطبیده دایره‌ای که در دو جهت مخالف می‌چرخند، روشی بوسیلهٔ فرنل ابداع شده است. در این روش دو منشور

از کوارتز راستگردان و چپگردان به گونه‌ای که در شکل دیده می‌شود، نسبت به هم قرار داده می‌شوند. نمار شکست نسبی در مرز مشترک دو منشور برای نور قطبیده<sup>۱</sup> راست بزرگتر از یک است و برای نور قطبیده<sup>۲</sup> چپ کوچکتر. بنابراین پرتو، مطابق شکل ۱۸.۰۶، در صفحه<sup>۳</sup> مرزی به دو بخش تقسیم و به صورت دو پرتو واگرا از منشور خارج می‌شود.



شکل ۱۸.۰۶ منشور فرنل برای تبدیل نور قطبیده به دو پرتو واگرا با قطبیدگیهای دایره‌ای مخالف.

### تانسور پذیرفتاری یک محیط فعال نوری

سادگی می‌توان نشان داد که اگر تانسور پذیرفتاری عناصر غیر قطری موهومی همیوغ داشته باشد، یعنی:

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & i\chi_{12} & 0 \\ -i\chi_{12} & \chi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \quad (122.6)$$

که در آن  $\chi_{12}$  حقیقی است، در این صورت محیط از نظر نوری فعال خواهد بود. برای اثبات، مولفه‌های معادله<sup>۴</sup> موج (۹۱.۰۶) را برای تانسور پذیرفتاری بالا می‌نویسیم. برای سادگی موجی را در نظر می‌گیریم که در جهت  $z$  پیش می‌رود، در این صورت داریم:

$$-k^2 E_x + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = -\frac{\omega^2}{c^2} (\chi_{11} E_x + i\chi_{12} E_y) \quad (123.6)$$

$$-k^2 E_y + \frac{\omega^2}{c^2} E_y = -\frac{\omega^2}{c^2} (-i\chi_{12} E_x + \chi_{11} E_y) \quad (124.6)$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} E_z = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{33} E_z \quad (125.6)$$

از معادله آخر نتیجه می‌شود که  $E_z = 0$ ، یعنی موج عرضی است. بسیاری از جوابهای غیر بدیهی در دو معادله نخست دترمینان ضرایب آنها باید صفر شود، یعنی:

$$\begin{vmatrix} -k^2 + (\omega^2/c^2)(1 + \chi_{11}) & i(\omega^2/c^2)\chi_{12} \\ -i(\omega^2/c^2)\chi_{12} & -k^2 + (\omega^2/c^2)(1 + \chi_{11}) \end{vmatrix} = 0 \quad (126.6)$$

که از آن  $k$  به دست می‌آید:

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi_{11} \pm \chi_{12}} \quad (127.6)$$

حال اگر عبارت  $k$  را در یکی از معادلات (۱۲۳.۶) یا (۱۲۴.۶) قرار دهیم، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$E_x = \pm i E_y \quad (128.6)$$

که در آن علامت جبری بالایی متناظر با علامت بالایی در معادله (۱۲۷.۶) است و همین‌طور برای علامت پایینی. نتیجه بالا این معنی را می‌دهد که دو مقدار  $k$  در معادله (۱۲۷.۶) متناظر با نور قطبیده دایره‌ای راست و چپ هستند. بنابراین نمارشکستها برای نور قطبیده دایره‌ای راست و چپ بترتیب چنین‌اند:

$$n_R = \sqrt{1 + \chi_{11} + \chi_{12}} \quad (129.6)$$

$$n_L = \sqrt{1 + \chi_{11} - \chi_{12}} \quad (130.6)$$

پس اختلاف بین  $n_R$  و  $n_L$  به طور تقریبی از رابطه زیر به دست می آید:

$$n_R - n_L \approx \frac{\chi_{12}}{\sqrt{1 + \chi_{11}}} = \frac{\chi_{12}}{n_0} \quad (131.6)$$

که در آن  $n_0$  نمارشکست عادی است. بنابراین چرخانندگی ویژه، از معادله (۱۳۱.۶)، چنین است:

$$\delta = \frac{\chi_{12}\pi}{n_0\lambda} \quad (132.6)$$

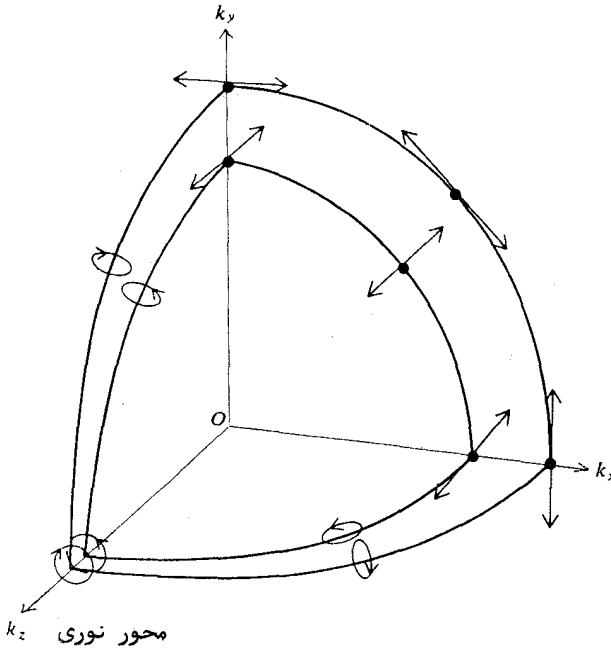
نتیجه ما نشان می دهد که چرخانندگی ویژه با مولفه موهومی  $\chi_{12}$  تانسور پذیرفتاری متناسب است.

### سطح k کوارتز

بلور کوارتز هم از نظر نوری فعال است و هم دارای ویژگی شکست دوگانه است. بدین ترتیب تانسور پذیرفتاری کوارتز به جای اینکه شکل ساده تانسور یک بلور تک محوری را داشته باشد، به صورت معادله (۱۳۲.۶) است. پس معادله صحیح سطح  $k$  ی کوارتز به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} (n_1\omega/c)^2 - k_x^2 - k_z^2 & k_x k_y + i\chi_{12}(\omega/c)^2 & k_x k_z \\ k_y k_x - i\chi_{12}(\omega/c)^2 & (n_1/c)^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & (n_3\omega/c)^2 - k_x^2 - k_y^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (133.6)$$

نمودار این سطح در شکل ۱۹.۶ نشان داده شده است. دو رویه سطح  $k$ ، دیگر به قطبیدگیهای خطی متعامد مربوط نمی شوند، بلکه به قطبیدگیهای بیضی متعامد مربوط می شوند. نوع قطبیدگی برای جهت های گوناگون انتشار در شکل مشخص شده است. در اینجا، برخلاف وضعی که در بلور تک محوری معمولی وجود دارد،



شکل ۱۹.۶ سطح بردار موج در کوارتز.

در راستای محور نوری، سطوح درونی و بیرونی یکدیگر را قطع نمی‌کنند و از هم فاصله دارند. این جدایی به مقدار  $\chi_{12}$  بستگی دارد و بنابراین مقیاسی است از چرخانندگی نوری.

### ۱۰۰۶ چرخش فاراده‌ای در جامدات

اگر یک دی‌الکتریک همسانگرد در یک میدان مغناطیسی قرار داده شود، و یک پرتو نور قطبیده خطی در جهت میدان وارد آن شود، چرخشی در صفحه قطبیدگی نور خروجی دیده می‌شود، به‌زبان دیگر، وجود میدان باعث می‌شود که دی‌الکتریک از لحاظ نوری فعال شود. این پدیده در سال ۱۸۴۵ به وسیله مایکل فاراده کشف شد. اندازه چرخش صفحه قطبیدگی نور،  $\theta$ ، با القایش مغناطیسی

$B$  و طول طی شده  $l$  در محیط متناسب است. بنابراین می توان نوشت:

$$\theta = VBl \quad ( ۱۳۴.۰۶ )$$

که در آن  $V$  ثابت است و آن را ثابت ورده می نامند. برای مثال، ثابت مزبور برای چند ماده گوناگون و برای نور زرد  $۵۸۹۰$  انگسترمی در جدول ۳.۶ نوشته شده است.

جدول ۳.۶ مقادیر ثابت ورده برای چند ماده برگزیده

ماده	$V$ (دقیقه زاویه‌ای برارستد بر سانتی متر)
فلوریت	۰.۰۰۰۰۹
الماس	۰.۰۱۲
شیشه	
کرون	۰.۰۱۵ - ۰.۰۲۵
فلینت	۰.۰۳۰ - ۰.۰۵۰
کلور سدیم	۰.۰۳۶

برای اینکه پدیده فاراده را شرح دهیم، باید معادله حرکت الکترونهای مقید را با بودن میدان مغناطیسی ایستای  $B$  و میدان الکتریکی نوسان کننده  $E$  ی موج نوری در نظر بگیریم. معادله دیفرانسیل حرکت عبارتست از:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + K\mathbf{r} = -eE - e \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \times \mathbf{B} \quad ( ۱۳۵.۰۶ )$$

که در آن، مانند بحثی که در نظریه پاشندگی در محیط دی الکتریک (بخش ۴.۰۶) - داشتیم،  $\mathbf{r}$  جابجایی الکترون از محل ترازمندی و  $K$  ثابت نیروی کشان است. برای سادگی از نیروی ناشی از میدان مغناطیسی موج نوری و همچنین از اثر میرایی چشم پوشی کرده ایم. این اثرهای کوچک، برای فهم نظریه بنیادی اثر فاراده،

اهمیت ویژه‌ای ندارند.

فرض می‌کنیم وابستگی میدان نوری  $\mathbf{E}$  به زمان شکل معمولی سازگان  $e^{-i\omega t}$  را داشته باشد. حل ویژه مورد نظر ما حالت پایایی است که برای آن جابجایی  $\mathbf{r}$  همان وابستگی زمانی سازگانی را دارد که موج نور دارد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$-m\omega^2 \mathbf{r} + K\mathbf{r} = -e\mathbf{E} + i\omega e\mathbf{r} \times \mathbf{B} \quad (136.6)$$

ولی قطبیدگی  $\mathbf{p}$  ی محیط برابر  $-Ne\mathbf{r}$  است، پس معادله بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$(-m\omega^2 + K)\mathbf{P} = Ne^2\mathbf{E} + i\omega e\mathbf{P} \times \mathbf{B} \quad (137.6)$$

اکنون با نوشتن این معادله بر حسب مولفه‌های  $\mathbf{P}$  می‌توان آن را حل کرد و مولفه‌های  $\mathbf{P}$  را به دست آورد. نتیجه به صورت معمولی زیر قابل بیان است:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (138.6)$$

که در آن  $\chi$  تانسور پذیرفتاری " مؤثر " است. شکل آن دقیقاً مانند تانسور محیطی است که از لحاظ نوری فعال است، یعنی:

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & +i\chi_{12} & 0 \\ -i\chi_{12} & \chi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \quad (139.6)$$

که در آن:

$$\chi_{11} = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left[ \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2\omega_c^2} \right] \quad (140.6)$$

$$\chi_{33} = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] \quad (141.6)$$

$$\chi_{12} = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left[ \frac{\omega\omega_c}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2\omega_c^2} \right] \quad (142.6)$$

برای به دست آوردن نتایج بالا، میدان مغناطیسی  $B$  موازی محور  $z$  فرض شده و از نمادهای اختصاری زیر استفاده شده است:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (\text{بسامد بازآوایی}) \quad (143.6)$$

$$\omega_c = \frac{eB}{m} \quad (\text{بسامد سیکلوترونی}) \quad (144.6)$$

سرانجام، با بازگشت به معادله (۱۳۲.۶)، می بینیم که چرخانندگی ویژه، که توسط میدان مغناطیسی القا می شود، از معادله تقریبی زیر به دست می آید:

$$\delta \approx \frac{\pi N e^2}{\lambda m \epsilon_0} \left[ \frac{\omega \omega_c}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right] = \frac{\pi N e^3}{\lambda m^2 \epsilon_0} \left[ \frac{\omega B}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right] \quad (145.6)$$

که در آن فرض شده است که  $\omega \omega_c \ll |\omega_0^2 - \omega^2|$

### ۱۱.۶ دیگر پدیده های مغناطوپتیکی و الکتروپتیکی

طبق نظریه ای که در بخش پیش پرورانده شد، یک ماده در میدان مغناطیسی ایستا هم ویژگی شکست دوگانه پیدا می کند و هم از لحاظ نوری فعال می شود، زیرا  $\chi_{33}$  و  $\chi_{11}$  متفاوتند. ولی این شکست دوگانه بجز برای بسامدهایی که نزدیک به بسامد بازآوایی اند خیلی ناچیز است. شکست دوگانه القا شده مغناطیسی، در بخارهای اتمی در بسامدهای نوری نزدیک به بسامدهای بازآوایی اتمهای بخار، مشاهده شده است. این پدیده را اثر **واگ** "Voigt effect" می نامند.

#### اثر الکتروپتیکی کر

هرگاه ماده ای که از لحاظ نوری همسانگرد است در یک میدان الکتریکی قوی قرار گیرد، ویژگی شکست دوگانه پیدا می کند. این اثر در ۱۸۷۵ به وسیله کر کشف شد و آن را **اثر الکتروپتیکی کر** می خوانند. پدیده یاد شده هم در جامدات



( شیشه ) و هم در مایعات دیده می‌شود. علت وجودی اثر الکترواینتیکی کرا را همراستا شدن مولکولها در اثر میدان الکتریکی می‌دانند. بنابراین ماده از لحاظ نوری مانند یک بلور تک محوری که محور نوری آن در راستای میدان الکتریکی قرار داشته باشد، عمل می‌کند. بزرگی این اثر با مربع قدرت میدان الکتریکی متناسب است. ثابت  $K$  ی کر با معادله زیر تعریف می‌شود:

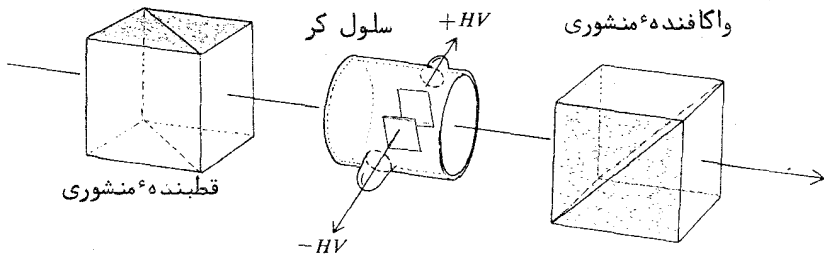
$$n_{\parallel} - n_{\perp} = KE^2\lambda_0 \quad ( ۱۴۶۰۶ )$$

که در آن  $n_{\parallel}$  نماشکست در جهت میدان به‌کار برده شده  $E$ ،  $n_{\perp}$  نماشکست در جهت عمود بر آن و  $\lambda_0$  طول موج نور در خلأ است. در جدول ۴۰۶ ثابت کر برای چند مایع نوشته شده است.

### جدول ۴۰۶ مقادیر ثابت کر

$K$ (cm/V <sup>2</sup> )	ماده
$۰۷ \times ۱۰^{-۱۲}$	بنزن
$۳٫۵ \times ۱۰^{-۱۲}$	دی‌سولفیت کربن
$۲۰ \times ۱۰^{-۱۰}$	نیترو تولوئن
$۴٫۴ \times ۱۰^{-۱۰}$	نیترو بنزن

اثر الکترواینتیکی کر در ساخت نوعی بستاور و مدوله‌ساز سریع نوری به نام " سلول کر " به‌کار برده می‌شود. این وسیله که در شکل ۲۰۰۶ نشان داده شده است، از دو صفحه رسانای موازی تشکیل می‌شود که در یک مایع مناسب فرو برده شده است، ( معمولاً از نیتروبنزن که ثابت کر آن زیاد است استفاده می‌شود). هرگاه مطابق شکل ۲۰۰۶ قطبیده و واکافنده نسبت به یکدیگر چلیپا باشند و تحت زاویه  $۴۵^{\circ}$  درجه نسبت به محور الکتریکی سلول کر قرار داشته باشد، نوری تراگسیلیده نمی‌شود مگر وقتی که میدان الکتریکی برقرار شود. تراگسیل نسبی برحسب تابعی از ولتاژ مصرفی در شکل ۲۲۰۶ نشان داده شده است.



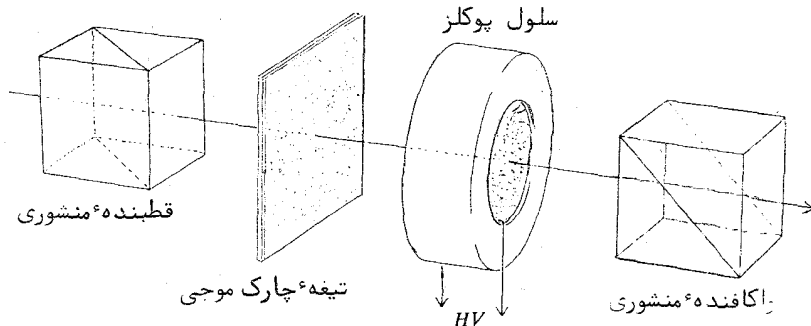
شکل ۲۰.۶ آرایشی برای به کار بردن سلول کر به عنوان یک مدوله ساز نوری. (توجه: سلول کر را معمولاً طوری قرار می دهند که بردار الکتریکی نور ورودی میل کر ۴۵ درجه ای با میدان الکتریکی درون سلول داشته باشد).

#### اثر کوتون - موتون

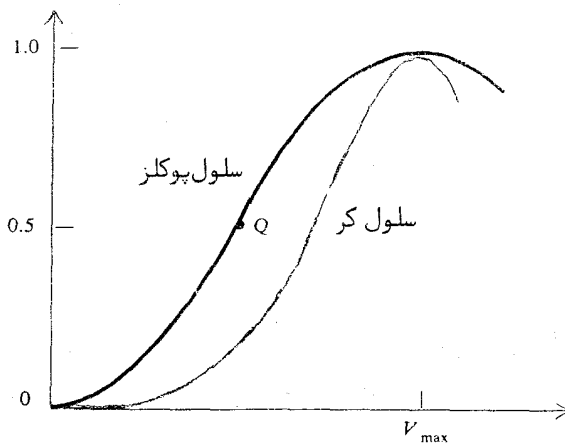
اثر کوتون - موتون همتای مغناطیسی اثر الکترواپتیکی کر است که در مایعات دیده می شود و علت آن را همراستا شدن ملکولها به وسیله میدان مغناطیسی می دانند. مانند اثر کر، این اثر نیز با مربع میدان کاربسته متناسب است.

#### اثر پوکلز

برخی از بلورهای دوشکستی وقتی در یک میدان الکتریکی قرار می گیرند، نمارشکستهای آنها تغییر می کنند. این پدیده را اثر پوکلز می نامند و مستقیماً با قدرت میدانی که به کار برده می شود متناسب است. این اثر در ساختن بستاورهای نوری و مدوله سازهای نوری کاربرد دارد. سلولهای پوکلز اغلب از ADP ( آمونیم دی هیدروژن فسفات) یا KDP ( پتاسیم دی هیدروژن فسفات) ساخته می شوند. برای ساختن مدوله ساز، بلور را میان الکترودها گذاشته و الکترودها طوری قرار داده می شوند که نور همسو با میدان الکتریکی از بلور عبور کند، ( شکل ۲۱.۰۶)، در شکل ۲۲.۰۶ منحنی تراکسیل نسبی بر حسب ولتاژ نشان داده شده است.



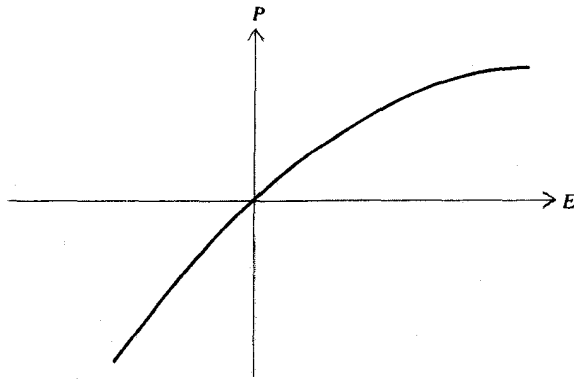
شکل ۲۱.۶ آرایشی برای به‌کاربردن سلول پوکلز به عنوان یک مدوله‌ساز نوری. تیغۀ چارک موجی برای ایجاد "بایاس اپتیکی" به‌کار برده می‌شود.



شکل ۲۲.۶ منحنیهای تراگسیل سلول کر و سلول پوکلز. اگر مطابق شکل ۲۱.۶ تیغۀ چارک موجی به‌کار برده شود، نقطه‌ای که در آن با سلول پوکلز کار می‌شود نقطه  $Q$  خواهد بود.

## ۱۲.۶ نورشناسی غیر خطی

هرگاه یک موج نور در یک محیط اپتیکی پیش برود، میدان الکترومغناطیسی نوسانی آن، یک نیروی قطبان بر تمام الکترونهاى محیط وارد می‌سازد. چون الکترونهاى درونی آنها سخت در بند هستند، بیشتر قطبش روی الکترونهاى بیرونی یا ظرفیتی اعمال می‌شود. میدانهای تابشی چشمه‌های نور معمولی خیلی کمتر از میدانهایی هستند که الکترونها را به آنها مقید می‌سازند. از این رو این تابشها تنها باعث پربشیدگی خفیفی می‌شوند و قطبیدگی به وجود می‌آورند که با میدان الکتریکی نور متناسب است. لیکن، اگر میدان تابشی کم و بیش هم اندازه میدانهای اتمی ( $\sim 10^8 \text{ V/cm}$ ) باشد، آنوقت رابطه میان قطبیدگی و میدان تابشی دیگر به صورت ساده خطی نیست (شکل ۲۳.۶).



شکل ۲۳.۶ منحنی قطبیدگی بر حسب میدان الکتریکی برای یک دی‌الکتریک غیر خطی.

میدانهای نوری لازم برای نمایاندن خاصیت غیر خطی با چشمه‌های لیزری حاصل می‌شوند. پدیده‌های نوری غیر خطی که مشاهده شده‌اند عبارتند از ایجاد هارمونیکهای نوری، تولید بسامدهای ترکیبی، یکسوسازی نوری و بسیاری دیگر (۳) و (۴۲).

در یک محیط همسانگرد، چون جهت قطبیدگی و میدان الکتریکی یکی است،

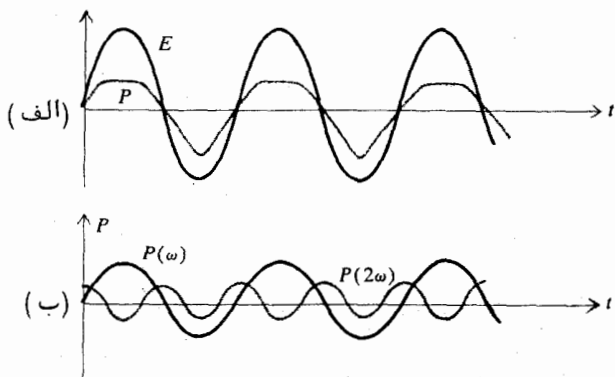
رابطه کلی میان قطبیدگی  $P$  و میدان الکتریکی  $E$  به صورت یک رشته ساده که تنها شامل بزرگی این کمیتهاست بیان می شود، یعنی:

$$P = \epsilon_0(\chi E + \chi^{(2)}E^2 + \chi^{(3)}E^3 + \dots) \quad (147.6)$$

در این بسط،  $\chi$  پذیرفتاری خطی یا معمولی است و همواره از ضرایب غیر خطی  $\chi^{(2)}$  و  $\chi^{(3)}$  و جز اینها خیلی بیشتر است. اگر میدانی که به کار برده می شود به صورت  $E_0 e^{-i\omega t}$  باشد، قطبیدگی القاییده برابر می شود با:

$$P = \epsilon_0(\chi E_0 e^{-i\omega t} + \chi^{(2)} E_0^2 e^{-i2\omega t} + \chi^{(3)} E_0^3 e^{-i3\omega t} \dots) \quad (148.6)$$

آن بخش از قطبیدگی که مربوط به جمله های دوم و بالاتر است، هارمونیکهای نوری را تولید می کند، شدت این جمله ها، با زیاد شدن مرتبه، بتندی کاهش می یابد (شکل ۲۴.۶). اگر رابطه کلی میان  $P$  و  $E$  طوری باشد که در اثر معکوس شدن جهت  $E$ ، جهت  $P$  نیز معکوس شود، یعنی  $P(E)$  تابعی فرد باشد، در این صورت جمله های زوج همگی صفر می شوند و هارمونیکهای زوج به وجود نمی آیند. این وضعیت در واقع در محیطهای همسانگرد برقرار است.



شکل ۲۴.۶ (الف) نمودارهای میدان الکتریکی و قطبیدگی به عنوان توابعی از زمان برای مورد غیرخطی، (ب) تجزیه قطبیدگی به هارمونیکهای اصلی و دوم آن. (یک جمله پایای مستقیم dc نیز وجود دارد که نشان داده نشده است).

برای محیطهای بلورین،  $\mathbf{P}$  و  $\mathbf{E}$  لزوماً موازی نیستند، و بنابراین قطبیدگی باید به صورت بسطی از نوع زیر بیان شود:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\chi\mathbf{E} + \chi^{(2)}\mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)}\mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots) \quad (149.6)$$

که در آن  $\chi$  تانسور پذیرفتاری معمولی است. ضرایب  $\chi^{(2)}$ ،  $\chi^{(3)}$  و جز اینها، تانسورهای مرتبه‌های بالاترند. بسط بالا را بیشتر به صورت حاصل جمع دو جمله می‌نویسند:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^L + \mathbf{P}^{NL} \quad (150.6)$$

که در آن قطبیدگی خطی عبارت است از:

$$\mathbf{P}^L = \epsilon_0\chi\mathbf{E} \quad (151.6)$$

جمله باقیمانده، قطبیدگی غیر خطی است:

$$\mathbf{P}^{NL} = \epsilon_0\chi^{(2)}\mathbf{E}\mathbf{E} + \epsilon_0\chi^{(3)}\mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots \quad (152.6)$$

اگر میدان به کار برده شده  $\mathbf{E}$ ، یک موج نوری با بسامد زاویه‌ای  $\omega$  باشد، قطبش هارمونیک دوم  $\mathbf{P}(2\omega)$  از جمله  $\epsilon_0\chi^{(2)}\mathbf{E}\mathbf{E}$  حاصل می‌شود و مولفه‌های آن عبارتند از:

$$P_i(2\omega) = \sum_j \sum_k \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k \quad (153.6)$$

مقدار نور هارمونیک دوم، به طور حساس به شکل تانسور  $\chi^{(2)}$  بستگی دارد. برای اینکه این تانسور صفر نشود، نباید بلور تقارن معکوس داشته باشد. این ویژگی یکی از شرایط لازم برای پیزوالکتریک بودن یک بلور است. بدین‌سان بلورهایی که خاصیت پیزوالکتریکی دارند، مانند کوآرتز و KDP، برای تولید هارمونیک دوم نور نیز مفیدند.

موج تختی را در نظر بگیرید که بسامد زاویه‌ای آن  $\omega$  است، و فرض کنید این موج درون بلوری که تقارن لازم را برای تولید هارمونیک دوم  $2\omega$  دارد پیش برود. تغییرات فضا-زمانی میدان الکترومغناطیسی موج اصلی به صورت  $e^{i(k_1z - \omega t)}$

است، در حالی که این تغییرات برای هارمونیک دوم  $e^{i(k_2z - 2\omega t)}$  است. فرض کنید بلور به صورت بره‌ای به ضخامت  $l$  باشد. پس دامنه هارمونیک درخ خروجی بلور با افزودن سهم یک یک عناصر بلور با ضخامت‌های  $dz$  به دست می‌آید، یعنی:

$$\begin{aligned} E(2\omega, l) &\propto \int_0^l E^2(\omega, z) dz \\ &\propto \int_0^l e^{2i(k_1z - \omega(t-\tau))} dz \end{aligned} \quad (154.6)$$

در اینجا  $\tau$  زمانی است که موج هارمونیک دوم فاصله  $z$  تا  $l$  را می‌پیماید، این زمان برابر است با:

$$\tau = \frac{k_2(l-z)}{2\omega} \quad (155.6)$$

پس از محاسبه انتگرال و به توان دوم رساندن اندازه مطلق آن، شدت هارمونیک دوم چنین به دست می‌آید:

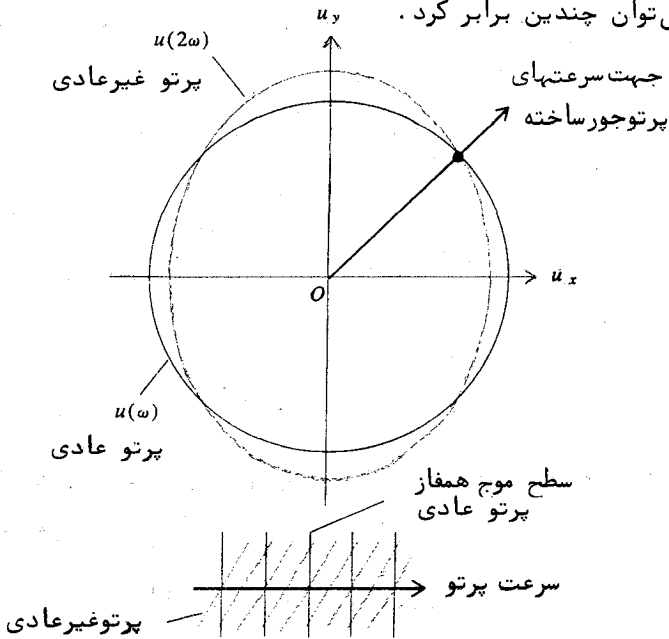
$$|E(2\omega)|^2 \propto \left[ \frac{\sin(k_1 - \frac{1}{2}k_2)l}{k_1 - \frac{1}{2}k_2} \right]^2 \quad (156.6)$$

نتیجه بالا نشان می‌دهد که اگر  $k_1 = \frac{1}{2}k_2$  باشد، شدت نور هارمونیک دوم با توان دوم کلفتی بره متناسب خواهد بود. در غیر این صورت بلوری که کلفتی آن برابر مقدار زیر باشد بیشترین شدت را به دست می‌دهد.

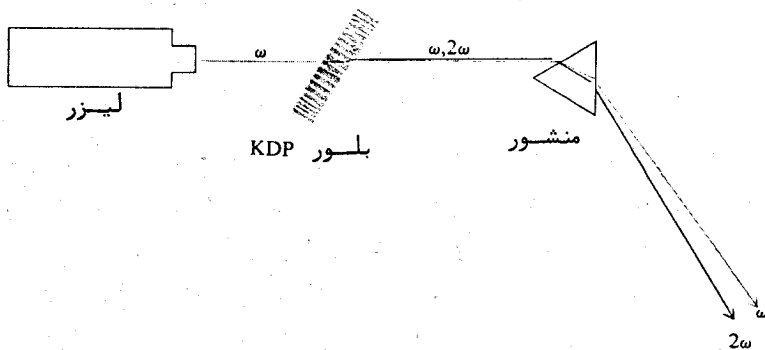
$$l_c = \frac{\pi}{2k_1 - k_2} \quad (157.6)$$

این کلفتی را "طول برهم‌کنش" می‌نامند. این طول برای بلورهای نوعی به دلیل وجود پاشندگی، تنها بین  $10\lambda_0$  تا  $20\lambda_0$  است. لیکن با روش جورسازی سرعت می‌توان آن را افزایش داد. در این روش از ویژگی دورویه‌ای بودن سطح  $k$  یا سطح سرعت بلورهای دوشکستی استفاده می‌شود. در واقع چون انرژی در امتداد پرتو پیمایش می‌رود، سطح سرعت پرتو است که در این کاربرد حائز اهمیت است. برای نشان دادن روش جورسازی سرعت، یک بلور تک محوری را در نظر بگیرید. چنانکه در شکل ۲۵۰۶ تشریح شده است، با انتخاب جهت مناسبی برای پرتو، می‌توان سرعت پرتو

پایه (مربوط به یک پرتو عادی) را برابر با هارمونیک دوم (مربوط به پرتو غیر عادی) کرد. با این عمل جورسازی سرعت، بازده تولید هارمونیک دوم نور در بلور را می‌توان چندین برابر کرد.



شکل ۲۵.۵ کاربرد سطوح سرعت پرتو برای جورسازی سرعت در تولید هارمونیک‌های اپتیکی.



شکل ۲۶.۶ آرایش طرح‌وار برای دو برابر کردن بسامد اپتیکی. جهت بلور KDP برای جورسازی سرعت میزان شده است.



۱.۶ نشان دهید اگر بخش موهومی نمارشکست مختلط  $\kappa$  از بخش حقیقی آن  $n$  خیلی کوچکتر باشد در این صورت، برای موردی بایک بسامد بازآوانی  $\omega_0$  تکی، معادلات تقریبی زیر برقرارند:

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \left( \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

$$\kappa = \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \left( \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right)$$

۲.۶ با استفاده از نتایج بالا، نشان دهید که مقادیرهای بیشینه و کمینه  $n$  در بسامدهای نیم‌بیشینه  $\kappa$  رخ می‌دهند. (به شکل ۱.۶ نگاه کنید).

۳.۶ معادله نیمه‌آروینی سلمایرا برای نمارشکست یک محیط نادرآشامنده به عنوان تابعی از طول موج به دست آورید:

$$n^2 = 1 + \frac{A_1\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{A_2\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} + \dots$$

۴.۶ بسامد پلاسما یک فلز فرضی  $\omega_p = 10^{15} \text{ s}^{-1}$  و زمان واهلش آن  $\tau = 10^{-13}$  ثانیه است. بخشهای حقیقی و موهومی نمارشکست را برای  $\omega = \omega_p$ ،  $\omega = 2\omega_p$  و  $\omega = \omega_p/2$  به دست آورید.

۵.۶ توان بازتاب یک فلز برای فرود عمودی نور ۸۰ درصد و نمارخاموشی آن مساوی ۴ است. بخش حقیقی  $n$  نمارشکست مختلط را به دست آورید.

۶.۶ رسانندگی نقره  $6.8 \times 10^7 \text{ mho/m}$  است. با فرض اینکه حاملهای بار، الکترونهاي آزاد با چگالی  $1.5 \times 10^{28}$  بر مترمکعب باشند، کمیتهای زیر را به دست آورید: (الف) بسامد پلاسما، (ب) زمان واهلش، (پ) بخشهای حقیقی و موهومی نمارشکست (ت) توان بازتاب برای طول موج یک میکرونی.

۷.۶ نشان دهید تغییر فازی که در بازتاب فرود عمودی نور رخ می‌دهد برابر است با:

$$\tan^{-1} \left( \frac{2\kappa}{n^2 + \kappa^2 - 1} \right)$$

( توجه: در به‌کار بستن نتیجه بالا باید شاخه صحیح تابع  $\arctan$  را اختیار کرد. برای این منظور باید لازم دانست که وقتی  $\kappa \rightarrow 0$  تغییر فاز برای  $n > 1$ ،  $180^\circ$  درجه و برای  $n < 1$  صفر باشد).

۸.۶ توان بازتاب عمودی و تغییر فاز در بازتاب را برای آلومینیم در طول موج  $500$  نانومتر به دست آورید.  $n = 1.5$  و  $\kappa = 3.2$ .

۹.۶ گامهایی که به یافتن ضریب بازتاب برای قطبیدگی  $TM$  در سطح مرزی یک محیط درآشامنده منتهی می‌شوند را برشمارید و نشان دهید که طبق بحث بخش ۶.۶.

$$r_p = \frac{-\mathcal{N} \cos \theta + \cos \phi}{\mathcal{N} \cos \theta + \cos \phi}$$

۱۰.۶ نشان دهید اگر یک نمارشکست مؤثر به صورت زیر تعریف شود:

$$n_{\text{eff}} = \frac{\sin \theta}{\sin \phi}$$

در این صورت، برای یک محیط درآشامنده با نمارشکست مختلط

$\mathcal{N} = n + i\kappa$  معادله زیر برای فرود مایل برقرار است:

$$(n_{\text{eff}}^2 - n^2 + \kappa^2)(n_{\text{eff}}^2 - \sin^2 \theta) = n^2 \kappa^2$$

۱۱.۶ یک بلور تک محوری با نمارشکستهای  $n_o$  و  $n_e$  به گونه‌ای بریده شده که محور نوریش بر سطح آن عمود است. نشان دهید برای پرتو نوری که از خارج تحت زاویه فرودی  $\theta$  بر بلور فرود می‌آید، زاویه شکست پرتو غیر عادی  $\phi_E$  از رابطه زیر پیروی می‌کند.

$$\tan \phi_E = \frac{n_o}{n_e} \frac{\sin \theta}{\sqrt{n_e^2 - \sin^2 \theta}}$$

۱۲.۶ معادله فرنل برای سطح سرعت فاز:

$$\frac{v_x^2}{c^2 - c^2/n_1^2} + \frac{v_y^2}{v^2 - c^2/n_2^2} + \frac{v_z^2}{v^2 - c^2/n_3^2} = 0$$

را به دست آورید.

۱۳.۶ می‌خواهیم، با کوارتز یک منشور قطبیده از نوع گلن بسازیم. زاویه‌ای را که تحت آن رخ قطری باید بریده شود به دست آورید.

۱۴.۶ یک منشور ۳۰ درجه‌ای از کوارتز ساخته شده است. محور نوری آن موازی پال زاویه راس منشور است. باریکه نوری با طول موج ۵۸۹۰ انگسترم طوری روی آن فرود می‌آید که تقریباً "انحراف کمینه" حاصل شود. زاویه بین پرتو  $E$  و پرتو  $O$  را به دست آورید.

۱۵.۶ یک منشور فرنل مطابق شکل ۱۸.۶ از کوارتز ساخته شده است. منشورهای آن ۷۰-۲۰-۹۰ درجه‌ای اند. زاویه میان پرتوهای قطبیده دایره‌ای راست و چپ خروجی را برای نور زرد سدیم به دست آورید.

۱۶.۶ با مراجعه به معادله (۱۳۳.۶)، رابطه میان مقدار  $\chi_{12}$  و چرخانندگی ویژه کوارتز را تعیین کنید.

۱۷.۶ یک پرتو نور قطبیده خطی وارد یک میله شیشه‌ای به طول ۲۵ سانتی-متر و قطر یک سانتی‌متر می‌شود. ۲۵۰ دور سیم مسی پوشش‌دار در یک لایه سرتاسری به دور این میله پیچیده شده است. اگر ثابت ورده شیشه  $55 \text{ min/Oe/cm}$  باشد و شدت جریان ۵ آمپر از سیم بیچ عبور داده شود، مقدار چرخش صفحه قطبیدگی نور را به دست آورید. (برای سادگی فرض کنید میدان مغناطیسی یکنواخت است، یعنی از آثار لبه‌ای چشم‌پوشی کنید).

## فصل هفتم

تابش گرمایی و  
کوانتومهای نور

## ۱.۷ تابش گرمایی

انرژی الکترومغناطیسی که از سطح یک جسم گرم گسیل می‌شود را تابش گرمایی می‌نامند. این تابش، بیناب پیوسته‌ای از بسامدهایی که گستره وسیعی را می‌پوشانند تشکیل می‌دهد. توزیع بینایی و اندازه انرژی تابیده به دمای سطح جسم تابنده بستگی دارد.

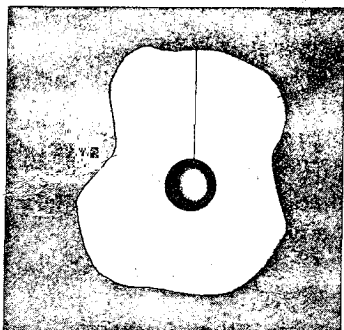
اندازه‌گیریهای دقیق نشان می‌دهند که در این توزیع بینایی، در یک دمای معین بسامد (یا طول موج) معینی وجود دارد که برای آن توان تابش بیشینه است، هر چند که این بیشینه خیلی پهن است. از آن گذشته بسامد مربوط به بیشینه، با دمای مطلق جسم تناسب مستقیم دارد. این قاعده به قانون وین "Wien's law" مشهور است. برای مثال در دمای اتاق، بیشینه تابش در ناحیه فروقمرز دور بیناب رخ می‌دهد، و تابش دیدنی محسوسی گسیل نمی‌شود. لیکن برای دماهای بالاتر بیشینه به بسامدهای بالاتر جابه‌جا می‌شود. بدین‌سان تقریباً برای دمای ۵۰۰ درجه سانتی‌گراد و بالاتر، جسم افروخته دیده می‌شود.

آهنگ تابش انرژی توسط یک جسم گرم نیز وابستگی مشخصی به دما دارد. اندازه‌گیری نشان می‌دهد که توان کل تابش با توان چهارم دمای مطلق افزایش

می یابد. این را قانون استفان - بولتزمن " Stefan-Boltzmann law " می نامند. این قانون و قانون وین را می توان تعبیری آروینی درباره تابش گرمایی دانست. منظور از این فصل این است که این قوانین را با به کار بردن نظریه بنیادی به دست آوریم، و در این رهگذر روابط کمی دیگری را که به تابش اجسام گرم مربوط می شوند بیابیم.

### ۲.۷ قانون کیرشهوف . تابش جسم سیاه

یک وضعیت فرضی را در نظر بگیرید که در آن یک جسم تکی طوری در یک کاواک توخالی قرار داده شده باشد که از دیوارهای آن از نظر گرمایی جدا باشد، مثلاً با یک نخ نارسا آویزان شده باشد، ( شکل ۱۰۷ ). اگر دمای دیوارهای کاواک ثابت نگاه داشته شود، کاواک از تابش گرمایی پر می شود و مقداری از آن به وسیله جسم جذب می شود. جسم نیز تابش گرمایی گسیل می کند. هرگاه آهنگ گسیل تابش توسط جسم با آهنگ جذب تابش به وسیله آن برابر شوند، ترازمندی گرمایی برقرار شده است. در این صورت دمای جسم با دمای دیوارهای کاواک مساوی است.



شکل ۱۰۷ جسمی در یک کاواک. جسم با کاواک از راه تابش گرما تبادل می کند، و هرگاه دمای جسم با دمای دیوارهای کاواک برابر شود، ترازمندی گرمایی روی می دهد.

فرض کنید تابندگی تابش گرمایی در کاواک، یعنی کل توان تابشی فرودی بر واحد سطح جسم  $I$  باشد. کسری از توان فرودی که جسم درمی‌آشامد را با حرف  $b$ ، و توان تابشی یا توانی که از واحد سطح آن گسیل می‌شود را با  $H$  نشان دهید. پس در ترازمندی گرمایی داریم:

$$H = bI \quad (107)$$

اکنون فرض کنید به جای یک جسم، اجسام زیادی با  $b$  های گوناگون در کاواک وجود داشته باشند. اگر آنها را با زیرنوشتهای ۱، ۲، ... مشخص کنیم، دراین‌صورت برای ترازمندی گرمایی هر یک از اجسام داریم  $H_1 = b_1 I$ ،  $H_2 = b_2 I$ ، ... نتیجه می‌شود که:

$$I = \frac{H_1}{b_1} = \frac{H_2}{b_2} = \dots \quad (207)$$

پس در یک دمای معین، نسبت توان گسیلیده به کسر توان درآشامیده برای همه اجسام یکی بوده و مساوی تابندگی در داخل کاواک است. این قاعده به قانون کیرشهوف "Kirchhoff's law" مشهور است. طبق این قانون، درآشامنده‌های خوب، گسیلنده‌های خوبی نیز هستند و بعکس. این مطلب بسادگی قابل نمایش است. برای این منظور یک لکه کوچک دوده روی یک میله شیشه‌ای می‌گذاریم و میله را حرارت می‌دهیم تا افروخته شود، خواهیم دید لکه دوده روشنتر از بقیه میله است.

یک درآشامنده کامل، جسم سیاه خوانده می‌شود و برای آن  $b = 1$  و  $H$  مربوط به آن بیشترین مقدار ممکن را دارد، یعنی:

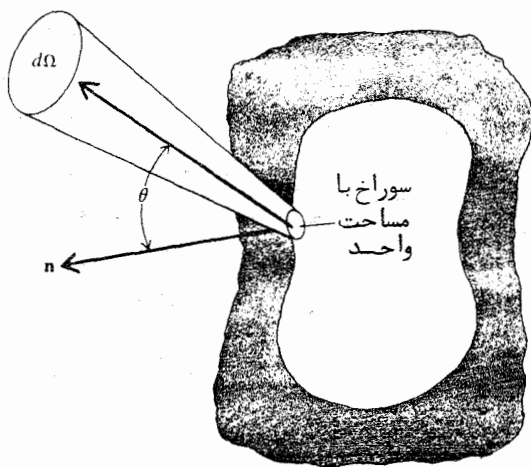
$$H_{\max} = I \quad (307)$$

بدین‌سان جسم سیاه بهترین گسیلنده تابش گرمایی است و توان تابشی که از واحد سطح آن گسیلیده می‌شود با تابندگی درون کاواک برابر است. به همین دلیل تابش جسم سیاه را تابش کاواکی نیز می‌نامند. در عمل با ایجاد یک سوراخ کوچک در سطح بسته یک کاواک، می‌توان یک جسم سیاه به‌وجود آورد. اگر دمای دیواره‌های کاواک ثابت نگاهداشته شود، تابش گرمایی که از سوراخ خارج می‌شود با تابش جسم سیاه یکی است.

اینک آهنگ گسیل تابش از یک سوراخ در یک کاواک را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید  $u$  چگالی انرژی تابش گرمایی در کلیه بسامدها در درون کاواک باشد. چگالی بینایی  $u_\nu$  بنا به تعریف چگالی انرژی در واحد بازه بسامدی در بسامد  $\nu$  است و چگالی انرژی برحسب آن چنین است:

$$u = \int_0^{\infty} u_\nu d\nu \quad (۷۰۴)$$

این تابش با سرعت  $c$  در تمام جهات روان است و بدین‌سان در هر جهت کسر  $d\Omega/4\pi$  از آن در عنصر زاویه فضایی  $d\Omega$  انتشار می‌یابد. سوراخی با مساحت واحد بر سطح کاواک در نظر بگیرید. مقدار انرژی تابشی که در واحد زمان در جهت  $\theta$ ، نسبت به عمود بر صفحه سوراخ، از آن خارج می‌شود  $d\Omega/4\pi \cos \theta uc$  است (شکل ۲۰۷).



شکل ۲۰۷ تابش خروجی از یک سوراخ در کاواک. بردار یکنای  $n$  بر سوراخ عمود است و تابش درون یک زاویه فضایی  $d\Omega$  پخش می‌شود.

اکنون مقدار کل انرژی تابشی را که از سوراخ خارج شده و در تمام جهات ممکن، درون یک زاویه فضایی  $2\pi$ ، یعنی یک نیم کره پخش می‌شود، محاسبه



می‌کنیم. عنصر زاویه فضای چنین است  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  و حدود تغییرات انتگرال از  $\theta = 0$  تا  $90^\circ$  درجه و از  $\phi = 0$  تا  $360^\circ$  درجه است. بدین ترتیب تمام تابشی که از واحد سطح در واحد زمان گسیل می‌شود برابر است با:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} uc \cos \theta \sin \theta \frac{d\theta d\phi}{4\pi} = \frac{uc}{4}$$

پس توان تابشی جسم سیاه چنین است:

$$I = \frac{uc}{4} \quad (5.7)$$

توان بینایی وابسته، با به‌کاربردن چگالی انرژی بینایی  $u_\nu$  از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$I_\nu = \frac{u_\nu c}{4} \quad (6.7)$$

که توان تابش از یکای سطح در یکای بازه بسامدی در بسامد  $\nu$  است. کلمه "شدت" که آن را با  $\mathcal{I}$  نشان می‌دهیم، گاهی برای بیان توان تابش از واحد سطح در یکای زاویه فضای به‌کاربرده می‌شود. این شدت برای تابش در جهت عمود بر سطح چنین است:

$$\mathcal{I} = \frac{uc}{4\pi} = \frac{I}{\pi} \quad (7.7)$$

با همین روش شدت بینایی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathcal{I}_\nu = \frac{u_\nu c}{4\pi} = \frac{I_\nu}{\pi} \quad (8.7)$$

که توان از یکای سطح در یکای زاویه فضای در یکای بازه بسامدی در جهت عمود بر سطح است.

### ۳.۷ مدهای تابش الکترومغناطیسی درون یک کاواک

برای به‌دست‌آوردن چگالی تابش درون یک کاواک، نخست باید گرته‌های

موج ایستاده یا مدهای تابش الکترومغناطیسی را که می‌توانند درون آن وجود داشته باشند بررسی کنیم. خواهیم دید که تعداد این مدها در یک گسترهٔ بسامدی معین برای نظریهٔ تابش از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. برای سادگی یک کاواک مکعب مستطیلی را در نظر می‌گیریم. امواج ایستادهٔ درون کاواک را می‌توان با ترکیب خطی مناسبی از توابع موج مبتنی بر تابع اصلی به صورت زیر نمایش داد:

$$e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} e^{-i\omega t}$$

که در آن  $k_x$ ،  $k_y$  و  $k_z$  مولفه‌های  $\mathbf{k}$  هستند. فرض کنید ابعاد کاواک در جهت‌های  $x$ ،  $y$  و  $z$  به ترتیب  $A$ ،  $B$  و  $C$  باشند. در این صورت اگر تابع موج به گونه‌ای که در معادلات زیر بیان می‌شود دوره‌ای باشد، یک گرتهٔ ساکن یا مد درون کاواک وجود خواهد داشت:

$$k_x A = \pi n_x \quad k_y B = \pi n_y \quad k_z C = \pi n_z \quad (9.7)$$

در این معادلات  $n_x$  و  $n_y$  و  $n_z$  اعدادی درستند. هر مجموعهٔ  $(n_x, n_y, n_z)$  متناظر با یک مد ممکن تابش درون کاواک است، (شکل ۳.۷). چگونگی —  
بنابراین:  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

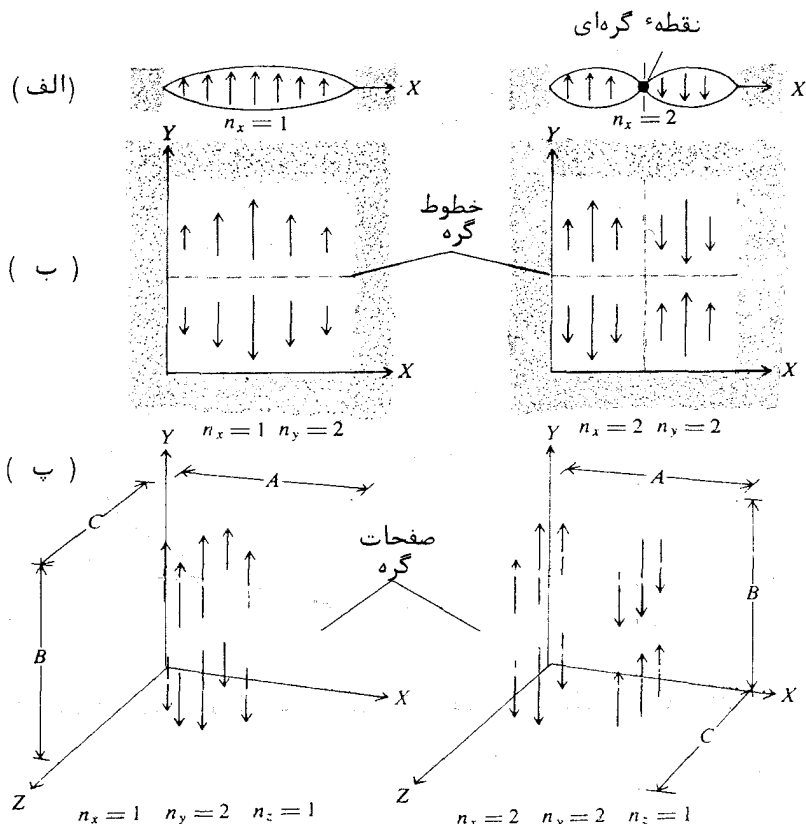
$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \pi^2 \left( \frac{n_x^2}{A^2} + \frac{n_y^2}{B^2} + \frac{n_z^2}{C^2} \right) \quad (10.7)$$

یا:

$$\frac{4\nu^2}{c^2} = \frac{n_x^2}{A^2} + \frac{n_y^2}{B^2} + \frac{n_z^2}{C^2} \quad (11.7)$$

نتیجهٔ بالا نشان می‌دهد که برای یک بسامد معین  $\nu$ ، تنها برخی از مقادیر  $n_x$ ،  $n_y$  و  $n_z$  مجازند.

شکل ۴.۷ را که در آن نمودار معادلهٔ (۱۱.۷) برحسب مختصات  $n_x$ ،  $n_y$  و  $n_z$  کشیده شده است در نظر می‌گیریم. مدهای گوناگون با نقطه در گوشه‌های مکعبی‌های یکا نشان داده شده و بعضی از آنها در شکل مشخص شده‌اند. معادلهٔ (۱۱.۷)، معادلهٔ بیضیواری است که طول نیم محوره‌های آن به ترتیب چنین‌اند

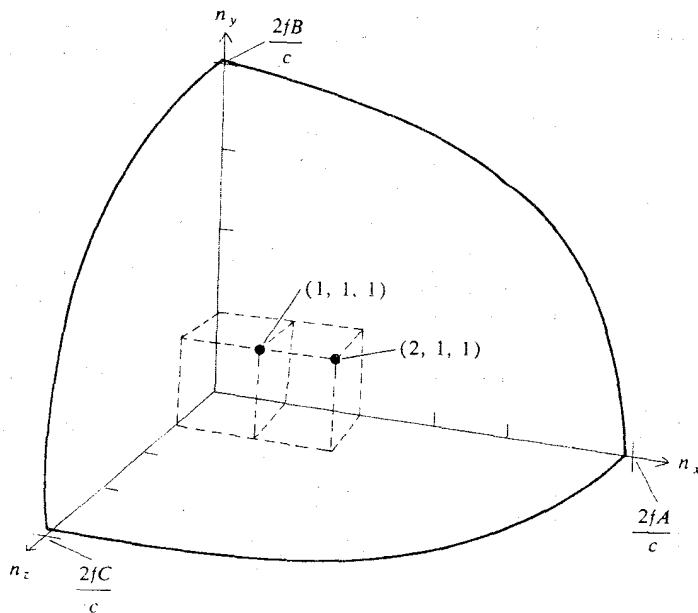


شکل ۳.۷ گرته‌های امواج ایستاده (مدها) در کاواکهای مختلف. قسمت (الف) دو تا از پایین‌ترین مدهای یک کاواک تک‌بعدی را نشان می‌دهد، ( $n=1$  و  $n=2$ ) در (ب) مدهای ( $1, 2$ ) و ( $2, 2$ ) یک کاواک دو بعدی نشان داده شده و سرانجام در (پ) مدهای ( $1, 2, 1$ ) و ( $2, 2, 1$ ) یک کاواک سه بعدی نمایش داده شده است.

$2\nu A/c$  ،  $2\nu B/c$  و  $2\nu C/c$  . بنابراین حجم یک هشتم این بیضوار برابر است

با:

$$\frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} \frac{2\nu A}{c} \frac{2\nu B}{c} \frac{2\nu C}{c} = \frac{4\pi\nu^3 ABC}{3c^3} = \frac{4\pi\nu^3}{3c^3} V \quad (12.7)$$



شکل ۴.۷ مکعبهای یکا و نقاط وابسته نمایشگر مدهای یک کاواک. یک هشتم بیضیوار نشان داده شده است.

که در آن  $V = ABC$  حجم کاواک است. چون هر مکعب یکا به یک مد تعلق دارد، عبارت بالا برابر با تعداد مدهای مربوط به همه بسامدهای مساوی یا کوچکتر از  $\nu$  است. چون مقادیر مثبت و منفی  $n$  متناظر با یک مدند، برای شمارش مدها تنها به یک هشتم بیضیوار نیاز است. ولی برای به دست آوردن تعداد مدها باید مقدار بالا را دو برابر کرد، زیرا برای یک جهت معین انتشار تابش الکترومغناطیسی در کاواک، دو قطبیدگی متعامد وجود دارند. بنابراین تعداد مدها در یکای حجم برای تمام بسامدهای مساوی یا کمتر از  $\nu$  چنین است:

$$g = \frac{8\pi}{3c^3} \nu^3 \quad (13.7)$$

حال می‌توانیم تعداد مدها در یکای حجم را برای بسامدهای بین  $\nu$  و  $\nu + d\nu$  با دیفرانسیل‌گیری به دست آوریم. نتیجه چنین است.

$$dg = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (14.7)$$

یک راه برای تعبیر این نتیجه این است که بگوییم تعداد مد در یکای حجم در یکای بازه بسامدی چنین است:

$$g_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \quad (15.7)$$

با اینکه فرمول بالا برای یک کاواک مکعب مستطیلی به دست آمد، نتیجه به شکل کاواک بستگی ندارد به شرط آنکه ابعاد کاواک از طول موج تابش بزرگتر باشند.

### ۴.۷ نظریه کلاسیک تابش جسم سیاه. فرمول ریلی - جینز

طبق نظریه جنبشی کلاسیک، دمای یک گاز مقیاسی از میانگین انرژی گرمایی مولکولهای آن گاز است. انرژی میانگین وابسته به هر درجه آزادی یک مولکول  $\frac{1}{2}kT$  است، که در آن  $k$  ثابت بولتزمن و  $T$  دمای مطلق است. این قاعده مشهوراً اصل همپاری انرژی می نامند. البته این اصل تنها برای دستگاههایی به کار برده می شود که در ترازمندی ترمودینامیکی هستند.

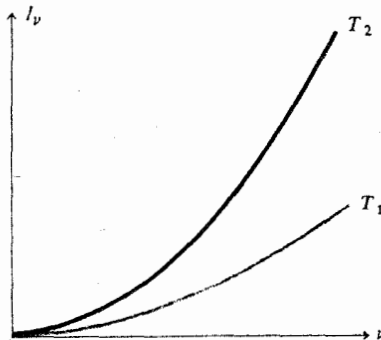
ریلی و جینز پیشنهاد کردند که اصل همپاری انرژی را می توان برای تابش الکترومغناطیسی در یک کاواک نیز به کار برد. هرگاه تابش با دیوارهای کاواک در ترازمندی گرمایی باشد، در این صورت می توان انتظار داشت همپاری انرژی میان مدهای کاواک برقرار باشد. ریلی و جینز فرض کردند انرژی میانگین هر مد  $kT$  باشد. در واقع معنی این فرض این است که در یک مد مشخص، هر یک از میدانهای الکتریکی و مغناطیسی نشان دهنده یک درجه آزادی است. اگر  $g_\nu$  تعداد مد در یکای حجم در یکای بازه بسامدی باشد، در این صورت چگالی بینایی تابش  $g_\nu kT$  خواهد بود. بنابراین از معادله (۱۵.۷) داریم:

$$u_\nu = g_\nu kT = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3} \quad (16.7)$$

با توجه به معادله (۷.۷) می توان فرمول زیر را برای توان تابشی بینایی یعنی توان از یکای سطح در یکای بازه بسامدی، به دست آورد:

$$I_\nu = \frac{2\pi\nu^2 kT}{c^2} \quad ( ۱۷.۷ )$$

این فرمول مشهور ریلی - جینز است، و وابستگی توزیع بینایی تابش جسم سیاه را به مربع بسامد پیشگویی می‌کند، ( شکل ۵.۷ ). برای بسامدهای به اندازه کافی پایین، این فرمول با داده‌های تجربی بخوبی سازگار است، ولی پیشگویی می‌کند که در بسامدهای بالاتر، جسم سیاه به طور فزاینده تابش بیشتری گسیل می‌کند. البته مشاهده خلاف این را نشان می‌دهد. این تناقض اصطلاحاً "فاجعه فرابنفش نظریه کلاسیک تابش نام گرفته است. فاجعه فرابنفش آشکارا نشان می‌دهد که در رهیافت کلاسیک اشتباهی وجود دارد.



شکل ۵.۷ قانون ریلی - جینز، منحنیهای  $I_\nu$  بر حسب بسامد سهمی‌اند.

### ۵.۷ کوانتیدگی تابش کاواکی

راه جلوگیری از فاجعه فرابنفش در سال ۱۹۰۱/۱۲۸۵ به وسیله پلانک کشف شد. پلانک با شناساندن یک مفهوم کاملاً بنیادی، یعنی کوانتیدگی تابش الکترومغناطیسی، توانست معادله‌ای برای گسیل تابش به وسیله جسم سیاه به دست آورد که کاملاً با مشاهدات تجربی سازگار باشد. بدین سان نظریه کوانتومی آغاز شد.

پلانک اصل همپاری را برای تابش کاواکی نپذیرفت . او فرض کرد انرژی وابسته به هر مد کوانتیده است ، یعنی انرژی تنها می تواند به صورت مضره های درستی از یک کمترین مقدار یا کوانتوم وجود داشته باشد . پلانک فرض کرد که انرژی این کوانتوم با بسامد تابش متناسب است . نام کوانتوم تابش الکترومغناطیسی فوتون است .

اگر ثابت تناسب را  $h$  بنامیم ، در این صورت  $h\nu$  انرژی یک فوتون با بسامد  $\nu$  است . طبق فرضیه پلانک ، مدهای یک کاواک توسط تعداد درستی فوتون اشغال می شوند و از این رو مقدار انرژی یک مد با بسامد  $\nu$  می تواند هر یک از مقادیر زیر باشد :

$$0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots$$

تعداد متوسط فوتون در یک مد را با  $\langle n_\nu \rangle$  نشان می دهند و آن را نماز اشغال می خوانند ، پس انرژی میانگین در هر مد برابر با  $h\nu \langle n_\nu \rangle$  است . با توجه به معادله (۱۵.۷) ، که چگالی مد را به دست می دهد ، چگالی بینایی تابش کاواکی چنین می شود .

$$u_\nu = g_\nu h\nu \langle n_\nu \rangle = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \langle n_\nu \rangle \quad (18.7)$$

بنابراین ، تابع توان تابشی بینایی مربوط برای تابش جسم سیاه چنین خواهد بود :

$$I_\nu = \frac{1}{4} c g_\nu h\nu \langle n_\nu \rangle = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \langle n_\nu \rangle \quad (19.7)$$

گام بعدی این است که تعیین کنیم نماز اشغال  $\langle n_\nu \rangle$  به عنوان تابعی از بسامد چگونه تغییر می کند .

### ۶.۷ آمار فوتونی . فرمول پلانک

جستجوی نحوه ای که فوتونها میان مدهای موجود در یک کاواک توزیع می شوند مسئله ای آماري است . می خواهیم بدانیم ، اگر مقداری انرژی به صورت فوتون در یک کاواک داشته باشیم ، آیا توزیع ویژه ای وجود دارد که احتمال آن از توزیعهای

دیگر بیشتر باشد، و اگر چنین است، محتملترین توزیع کدام است؟ پاسخ این مسئله با به کار بردن یک روش شناخته شده مکانیک آماری، که در آن توابع توزیع دستگاههای حاوی ذرات متعدد محاسبه می شوند، به دست می آید. در این روش  $W$ ، یعنی تعداد کل راههایی که ذرات، در اینجا فوتونها، می توانند در یک توزیع دلخواه ولی مشروط به شرایط کلی آراسته شوند را محاسبه می کنند. سپس به پیدا کردن توزیع ویژه‌ای می پردازند که برای آن  $W$  بیشترین مقدار را داشته باشد. نظر به اینکه تعداد ذرات برای حالت‌های مورد نظر خیلی زیاد است، توزیعی که مقدار  $W$  برای آن حداکثر است محتملترین توزیعها خواهد بود، و بنابراین با اطمینان نزدیک به یقین توزیع واقعی را نشان می دهد.

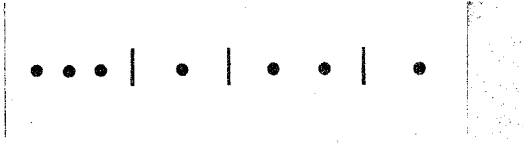
برای به کار بردن روش آماری در تابش کاواکی، بیناب بسامدی را به بازه‌های بیشماری تقسیم می کنیم. اندازه بازه دلخواه است، و ما برای سادگی یکای بازه بسامدی را انتخاب می کنیم. تعداد حالت‌های کوانتومی موجود (تعداد مدهای موجود)، در هر بازه  $g_\nu$  است. اگر تعداد فوتونها در یکای بازه بسامدی که بسامد مرکز آن  $\nu$  است،  $N_\nu$  باشد، در این صورت نماراشغال، آن مقدار از  $N_\nu/g_\nu$  است که  $W$  را بیشینه می کند، یعنی

$$\langle n_\nu \rangle = \left( \frac{N_\nu}{g_\nu} \right)_{\max} \quad (20.7)$$

اکنون برای به دست آوردن تعداد آرایشهای  $N_\nu$  فوتون در میان  $g_\nu$  مد گوناگون در یک بازه، می توانیم فوتونها را اجسامی همشکل تصور کنیم که در یک آرایه خطی شامل  $g_\nu$  خانه جای داده شده اند (شکل ۶.۷). فوتونها با نقطه نشان داده شده و خانه‌ها به وسیله  $g_\nu - 1$  افراز از یکدیگر جدا شده اند. تعداد کل راههای آراستن نقطه‌ها در خانه‌ها درست برابر تعداد جایگشتها یا پس و پیش سازهایی  $N_\nu + g_\nu - 1$  جسم است. این برابر  $(N_\nu + g_\nu - 1)!$  است. ولی نقطه‌ها اجسامی همشکلند، پس این مقدار را باید به تعداد جایگشت‌های نقطه‌ها، یعنی  $N_\nu!$ ، تقسیم کنیم. افرازاها نیز همشکلند، پس این کمیت را باید به تعداد جایگشت‌های افرازاها، یعنی  $(g_\nu - 1)!$ ، نیز تقسیم کنیم. نتیجه برابر است با:

$$W_\nu = \frac{(N_\nu + g_\nu - 1)!}{N_\nu! (g_\nu - 1)!} \quad (21.7)$$





$$N_\nu = 7 \quad g_\nu = 4$$

شکل ۶.۷ یک آرایش ممکن از هفت جسم همشکل (فوتون) در چهارخانه (مد) .

این عدد مساوی تعداد راههای گوناگونی است که می توان  $N_\nu$  جسم همشکل را در  $g_\nu$  خانه جای داد، یعنی تعداد آرایشهای گوناگون  $N_\nu$  فوتون در یک بازه<sup>۱</sup> بسامدی واحد، حاوی  $g_\nu$  مد. سرانجام، تعداد کل راههای آرایش فوتونها در همه<sup>۲</sup> بازه های بسامدی، از حاصلضرب همه<sup>۳</sup>  $W_\nu$  ها به دست می آید، یعنی:

$$W = \prod_\nu W_\nu = \prod_\nu \frac{(N_\nu + g_\nu - 1)!}{N_\nu! (g_\nu - 1)!} \quad ( ۲۲.۷ )$$

کار با تابع فاکتوریل نامناسب و دست و پاگیر است، از این رو از تقریب استرلینگ " Stirling " استفاده خواهیم کرد

$$\ln x! \cong x \ln x - x \quad ( ۲۳.۷ )$$

این تقریب برای مقادیر کوچک  $x$  دقت زیادی ندارد، ولی دقت آن با افزایش  $x$  به طور فراینده بهتر می شود<sup>۱</sup>. در این کاربرد،  $x$  خیلی بزرگ است. پس می توان نوشت:

$$\ln W = \sum_\nu [(N_\nu + g_\nu - 1) \ln (N_\nu + g_\nu - 1) - N_\nu \ln N_\nu - (g_\nu - 1) \ln (g_\nu - 1)] \quad ( ۲۴.۷ )$$

۱- بسط مجانبی  $\ln x!$  به صورت زیر است:

$$\ln x! = x \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi x} + \ln \left( 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} + \dots \right)$$

چون  $x \gg 1$  است، تنها دو جمله<sup>۲</sup> اول برای منظور ما از اهمیت برخوردارند.

اگر توزیع چنان باشد که  $W$  بیشترین مقدار را داشته باشد  $\ln W$  نیز بیشینه خواهد بود، و نخستین وردش آن،  $\delta(\ln W)$ ، صفر می‌شود. (این در واقع شرط فرینگی  $W$  است، با این حال می‌توان نشان داد که نتیجه پایانی در واقع یک بیشینه است). پس برای اینکه  $W$  بیشترین مقدار را داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$\delta(\ln W) = \sum_{\nu} [\ln(N_{\nu} + g_{\nu}) - \ln N_{\nu}] \delta N_{\nu} = 0 \quad (25.7)$$

در اینجا از عدد ۱ در برابر  $N_{\nu} + g_{\nu}$  که مسلماً از آن خیلی بزرگتر است چشم‌پوشی شده است. حال اگر کمیتهای  $N_{\nu}$  از یکدیگر مستقل می‌بودند، برای اینکه این معادله برقرار باشد، هر یک از گروه‌ها در جمع بالا باید جداگانه صفر می‌شد. ولی در واقع  $N_{\nu}$  ها به یکدیگر وابسته‌اند. این از آنجا سرچشمه می‌گیرد که کل انرژی فوتونی  $E = \sum h\nu N_{\nu}$  ثابت می‌ماند. در نتیجه وردش انرژی کل باید صفر باشد، یعنی:

$$\delta E = \sum_{\nu} h\nu \delta N_{\nu} = 0 \quad (26.7)$$

برای به دست آوردن  $N_{\nu}$  بر حسب  $\nu$ ، به طوری که معادلات (۲۵.۷) و (۲۶.۷) هر دو همزمان برقرار باشند، روش ضرایب نامعین لاگرانژ را به کار می‌بریم. در این روش اصولاً از ترکیب دو معادله یک معادله به دست می‌آید، که در آن  $N_{\nu}$  ها عملاً به یکدیگر ناوابسته‌اند. معادله شرطی (۲۶.۷) را در ضریب نامعین که یک ثابت است و آن را  $-\beta$  می‌نامیم، ضرب کرده و با معادله اول جمع می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\delta(\ln W) - \beta \delta E = 0$$

یا:

$$\sum_{\nu} [\ln(N_{\nu} + g_{\nu}) - \ln N_{\nu} - \beta h\nu] \delta N_{\nu} = 0 \quad (27.7)$$

اکنون در جمع بالا  $\beta$  را طوری می‌گزینیم که هر یک از گروه‌ها صفر شود:

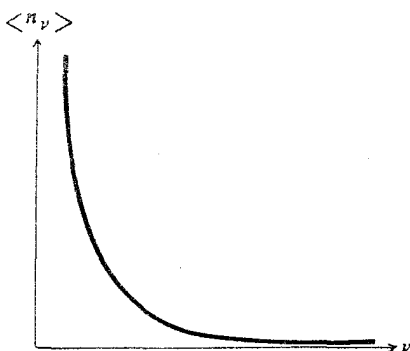
$$\ln(N_{\nu} + g_{\nu}) - \ln N_{\nu} - \beta h\nu = 0 \quad (28.7)$$

اگر معادله را برای به دست آوردن  $N_\nu/g_\nu$  حل کنیم ، نتیجه زیر برای نما را شغال حاصل می شود :

$$\langle n_\nu \rangle = \left( \frac{N_\nu}{g_\nu} \right)_{\max} = \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad ( ۲۹.۷ )$$

این ، آن توزیع ویژه ای است که ، به شرط ثابت بودن  $E$  ،  $W$  را بیشینه می سازد . این توزیع به قانون توزیع بوز-اینشتین در مورد فوتون معروف است . علاوه بر فوتونها ، ذرات دیگری چون ذرات آلفا ، مزونها ی پی و جز اینها از این قانون پیروی می کنند که جمعا " به آنها بوزون می گویند . ( گروه دیگری از ذرات هستند که از نظر آماری رفتار دیگری دارند و از قانون توزیع دیگری به نام توزیع فرمی - دی راک پیروی می کنند ، این ذرات فرمیون نامیده می شوند . الکترونها ، پروتونها ، مزونها ی میو نمونه هایی از فرمیونها هستند ) . برای بحث کامل درباره این موضوع به خواننده توصیه می شود به کتابهای آمار کوانتومی مراجعه کند .

معادله ( ۲۹.۷ ) تعداد متوسط فوتونها را در هر مد به عنوان تابعی از بسامد و ثابت  $\beta$  ، که هنوز شناخته نشده است ، به دست می دهد . نمودار این معادله در شکل ۷.۷ نشان داده شده است .



شکل ۷.۷ تعداد فوتون در یکای بازه بسامدی ( نما را شغال ) بر حسب بسامد در یک دمای معین .

با قراردادن عبارت بالا در معادله (۱۹.۷) می‌یابیم

$$I_{\nu} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (۳۰.۷)$$

که توزیع تابش جسم سیاه را به عنوان تابعی از بسامد به دست می‌دهد. برای بسامدهای پایین ( $\beta h\nu \ll 1$ ) فرمول بالا به صورت ساده زیر در می‌آید:

$$I_{\nu} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{1}{\beta} \quad (۳۱.۷)$$

اگر ضریب نامعین  $\beta$  را مساوی  $1/kT$  بگذاریم، رابطه بالا با فرمول ریلی-جینز یکی می‌شود. ما این کار را با اطمینان و به استناد این واقعیت فیزیکی که فرمول ریلی - جینز برای بسامدهای کم با مشاهدات تجربی توافق دارد، انجام می‌دهیم. پس فرمول نهایی برای توزیع بینایی تابش جسم سیاه چنین است:

$$I_{\nu} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (۳۲.۷)$$

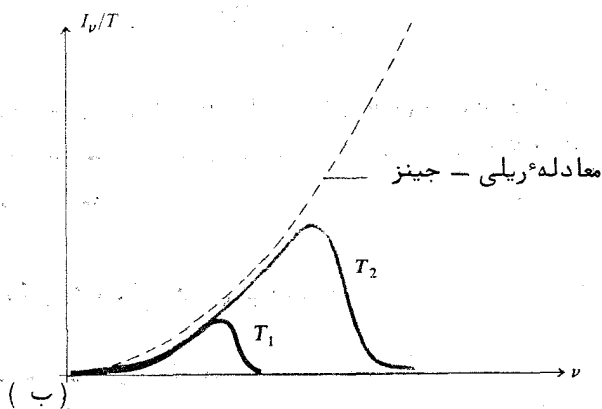
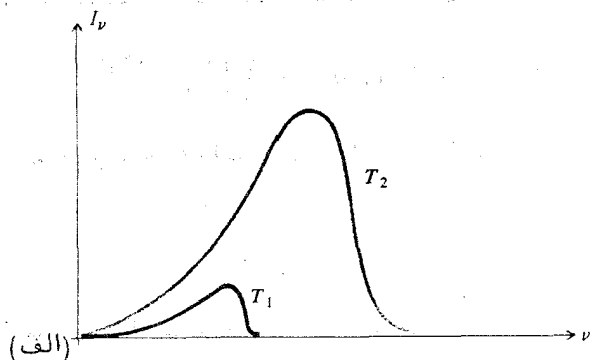
این همان معادله مشهوری است که پلانک آن را برای نخستین بار به دست آورد و - به طور کامل با اندازه‌گیریهای تجربی سازگاری دارد. شکل ۸.۷ (الف) چند نمونه منحنی  $I_{\nu}$  را بر حسب بسامد برای دماهای گوناگون نشان می‌دهد. در شکل ۸.۷ (ب) همان داده‌ها به کاربرده شده‌اند ولی کمیت  $I_{\nu}/T$  بر حسب بسامد رسم شده است تا مقایسه فرمول کوانتومی (۳۲.۷) و فرمول کلاسیک ریلی - جینز (۱۷.۷) بهتر امکانپذیر باشد.

قانون وین و قانون استفان-بولتزمن هر دو آسانی از فرمول تابش پلانک به دست می‌آیند. برای این منظور از پارامتر بدون بعد زیر استفاده می‌کنیم:

$$x = \frac{h\nu}{kT} \quad (۳۳.۷)$$

فرمول پلانک به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$I_{\nu} = \frac{2\pi k^3 T^3}{c^2 h^2} \frac{x^3}{e^x - 1} \quad (۳۴.۷)$$



شکل ۸.۷ قانون تابش پلانک. (الف)  $I_\nu$  بر حسب  $\nu$ ، (ب)  $I_\nu/T$  بر حسب  $\nu$  همراه با قانون ریلی - جینز (خط چین) برای مقایسه.

با دیفرانسیل‌گیری نسبت به  $x$  و مساوی صفر قراردادن نتیجه، می‌بینیم که برای  $x \approx 2.82$ ،  $I_\nu$  بیشینه می‌شود. یعنی بسامد  $\nu_{\max}$  که در آن  $I_\nu$  بیشینه است از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\nu_{\max} = \frac{2.82 kT}{h} \quad (۳۵.۷)$$

این یک شکل قانون وین است. (شکل دیگر قانون وین بر حسب طول موج است. به مسئله ۸.۷ در پایان فصل نگاه کنید).

برای به دست آوردن تابش کل در همه بسامدها، داریم:

$$I = \int_0^{\infty} I_{\nu} d\nu = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad (۲۶.۷)$$

مقدار این انتگرال معین برابر  $\pi^4/15$  است. بدین سان قانون استفان-بولتزمن به دست می آید

$$I = \sigma T^4 \quad (۲۷.۷)$$

که در آن ثابت استفان - بولتزمن،  $\sigma$ ، چنین است

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} \quad (۲۸.۷)$$

و مقدار عددی آن در یکان MKS عبارت است از  $۵.۶۷ \times 10^{-8}$  watts/m<sup>2</sup>/degree<sup>4</sup> پس از یک متر مربع سطح جسم سیاه در دمای ۱۰۰۰ درجه کلوین با آهنگ ۵۶٫۷ کیلو ژول در ثانیه تابش گسیل می شود.

### ۷.۷ اثر فوتوالکتریک و آشکارسازی فردی فوتونها

هرگاه یک پرتو نور روی یک فلز فرود آید، از سطح آن فلز الکترون گسیل می شود. این پدیده معروف، که اثر فوتوالکتریک نامیده می شود، به روشهای گوناگون برای تنظیم و اندازه گیری نور و جز اینها به کار برده می شود.

فوتوالکترونها با انرژی جنبشی خیلی متفاوت گسیل می شوند. ولی اندازه گیریهای دقیق نشان می دهند که اگر نور تکفام باشد انرژی فوتوالکترونها، با اینکه متفاوت است، هرگز از مقدار معین  $E_{\max}$  بیشتر نمی شود. اندازه  $E_{\max}$  به طور خطی به بسامد نور فرودی  $\nu$  بستگی دارد و از معادله زیر پیروی می کند.

$$E_{\max} = h\nu - e\phi \quad (۲۹.۷)$$

که در آن  $h$  ثابت پلانک و  $e$  بار الکترون است. اندازه ثابت  $\phi$  به فلز به کار برده شده بستگی دارد و آن را تابع کار فلز می نامند که برای بیشتر فلزات حدود چند ولت است. کمیت  $e\phi$  نمایانگر کاری است که برای جدا کردن الکترون از سطح فلز لازم است.

طبق معادله بالا، انرژی الکترون گسیلیده هیچگاه به شدت نور فرودی بستگی ندارد و تنها به بسامد وابسته است. لیکن معلوم می‌شود که شدت جریان حاصل از نور مستقیماً به شدت نور بستگی دارد. به گفته‌ای دیگر، تعداد فتوالکترونیایی که در هر ثانیه گسیل می‌شوند با تعداد فتونهایی که در هر ثانیه به سطح فلز برخورد می‌کنند متناسب است. می‌توان شدت نور را به اندازه‌ای کم کرد که فتوالکترونها یک‌به‌یک قابل شمارش باشند. چون انرژی هر فتوالکترون به وسیله معادله (۳۹.۷) داده می‌شود، باید نتیجه بگیریم که انرژی هر الکترون به وسیله یک فوتون به آن منتقل می‌شود. بدین‌سان اثر فتوالکتریک آشکار ساختن فردی فوتونها را امکان‌پذیر می‌سازد.

### ۸.۷ اندازه حرکت یک فوتون . فشار نور

بنابر یک محاسبه مشهور مبتنی بر نظریه کلاسیک الکترومغناطیسی، (۱۶) و (۳۴)، که سالها پیش به‌طور تجربی نیز نشان داده شده است (۲۸)، فشار یک پرتو نور با تابندگی  $I$  روی یک سطح سیاه برابر با  $I/c$  است. اندازه این فشار خیلی کم بوده و برای آشکار ساختن آن به یک وسیله اندازه‌گیری بسیار حساس نیاز است.

در توصیف کوانتومی نور، وجود فشار نور مستلزم این است که فوتون، هم دارای اندازه حرکت و هم دارای انرژی باشد. اگر فرض شود که رابطه جرم-انرژی اینشتین برقرار است، در این صورت اندازه حرکت خطی فوتون بسادگی قابل محاسبه خواهد بود. رابطه یادشده چنین است:

$$h\nu = mc^2 \quad (40.7)$$

که در آن  $\nu$  بسامد و  $m$  جرم فوتون است. چون سرعت فوتون  $c$  است، پس اندازه حرکت خطی آن،  $p$ ، چنین است:

۲- جرم فوتون در حال سکون،  $m_0$ ، باید صفر باشد، در غیر این صورت طبق رابطه

$$m = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

جرم - سرعت

چون  $c = \nu \lambda$  است،  $m$  بینهایت می‌شود.

$$p = mc = \frac{h\nu}{c} \quad (41.7)$$

روش دیگر برای بیان اندازه حرکت یک فوتون، برحسب طول موج آن است، یعنی:

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (42.7)$$

که بسادگی به کمک  $\nu\lambda = c$  به دست می‌آید.

فرض کنید یک دسته فوتون به‌طور عمودی بر یک سطح درآشامنده کامل فرود آید. با فرض اینکه اندازه حرکت پایسته است، یک فوتون تمام اندازه حرکت  $h\nu/c$  خود را در برخورد با سطح به آن منتقل می‌کند و جذب آن می‌شود. اگر در هر ثانیه  $N$  فوتون به یکای مساحت برخورد کند، فشار  $P$ ، که مساوی با آهنگ انتقال اندازه حرکت خطی به یکای مساحت است، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P = \frac{N h \nu}{c} \quad (43.7)$$

تابندگی پرتو،  $I$ ، مساوی توان بر یکای مساحت است و چون هر فوتون حامل انرژی  $h\nu$  است، نتیجه می‌شود که:

$$I = N h \nu \quad (44.7)$$

بنابراین داریم

$$P = \frac{I}{c} \quad (45.7)$$

که همان عبارت کلاسیک فشار است.

هرگاه سطح بازتابنده کامل باشد، فشار دو برابر مقدار بالا، یعنی  $2I/c$  خواهد بود، زیرا تغییر اندازه حرکت هر فوتون بازتابنده  $p - (-p) = 2p$  است. بنابراین هر فوتون دو برابر حالتی که درآشامنده می‌شود اندازه حرکت منتقل می‌کند.

۹.۷ اندازه حرکت زاویه‌ای یک فوتون

هرگاه یک پرتو نور قطبیده دایره‌ای روی یک سطح درآشامنده فرود آید،



طبق نظریهٔ کلاسیک الکترومغناطیس، این سطح یک گشتاور نیرو دریافت می‌کند (۳۴). محاسبه نشان می‌دهد که آهنگ این گشتاور نیرو  $\mathcal{T}$  بر یکای مساحت برابر است با:

$$\mathcal{T} = \frac{I}{2\pi v} = \frac{I}{\omega} \quad (۴۶.۷)$$

که در آن  $I$  مانند گذشته تابندگی پرتو است. نتیجهٔ بالا را با توجه به (۴۴.۷) می‌توان به صورت دیگری نوشت:

$$\mathcal{T} = \frac{Nh}{2\pi} \quad (۴۷.۷)$$

مفهوم ضمنی این رابطه این است که فوتونها علاوه بر اندازه حرکت خطی، باید اندازه حرکت زاویه‌ای نیز داشته باشند. این اندازه حرکت زاویه‌ای ذاتی، اسپین نامیده می‌شود. از معادلهٔ بالا می‌بینیم که بزرگی اسپین یک فوتون  $h/2\pi$  است. جهت اسپین فوتون برای نور قطبیدهٔ دایره‌ای راست، موازی جهت انتشار است، در صورتی که برای نور قطبیدهٔ دایره‌ای چپ، نسبت به جهت انتشار پادموازی است. نور قطبیدهٔ خطی و نور ناقطبیده را می‌توان مخلوطی مساوی از قطبیدگیهای دایره‌ای راست و چپ دانست، به طوری که اندازه حرکت زاویه‌ای میانگین صفر است. برای نور قطبیدهٔ خطی، این مخلوط همدوس است، در صورتی که برای نور ناقطبیده ناهمدوس است.

### ۱۰۰۷ طول موج یک ذرهٔ مادی. فرضیهٔ دوبروی

در سال ۱۹۲۴/۱۳۰۳ فیزیکدان فرانسوی لوئی دوبروی "Louis de Broglie" پیشنهاد کرد: همانگونه که نور خواص ذره‌ای و موجی از خود نشان می‌دهد، ممکن است ذرات مادی نیز رفتاری موجی داشته باشند. دوبروی ابراز داشت که سه مانستهٔ عبارت اندازه حرکت فوتون،  $p = h/\lambda$ ، ممکن است بتوان این رابطه را برای هر ذره‌ای به کاربرد. بدین سان طول موج وابسته به یک ذره که با اندازه حرکت  $p = mu$  پیش می‌رود چنین نوشته خواهد شد.

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mu} \quad (۴۸.۷)$$

که در آن  $h$  ثابت پلانک است.

درستی پیشنهاد بی‌باکانه دوبروی با یک آزمایش معروف که در سال ۱۳۰۶ / ۱۹۲۷ به وسیله داویسون "Davisson" و جرمر "Germer" انجام شد نمایش داده شد. آنان نشان دادند که یک پرتو الکترون در برخورد با یک بلور، مانند یک پرتو نور که از روی یک توری پراشده بازتاب می‌شود عمل می‌کند. الکترونها برای بازتاب زاویه‌های خاصی را می‌گزینند و تحت آنها بازتاب پیدا می‌کنند. زاویه‌های بازتاب قوی از فرمول توری پیروی می‌کنند، یعنی داریم:

$$n\lambda = d \sin \theta \quad ( ۴۹.۷ )$$

که در آن  $n$  عددی درست و  $d$  جدایی شکافهای توری است.  $d$  در یک بلور، جدایی میان ردیفهای اتمی مجاور هم است. طول موجی که در آزمایش داویسون و جرمر برای الکترون به دست آمد دقیقاً با معادله دوبروی توافق داشت.

پس از آزمایش داویسون و جرمر کسان بسیاری درستی فرمول دوبروی را نه تنها برای الکترون بلکه برای ذرات دیگر مانند پروتون، نوترون، اتمهای ساده و ملکولها نیز نشان دادند. هم نور و هم ماده هر دو، ماهیت دوگانه دارند و بسته به نوع آزمایش می‌توانند ویژگی ذره‌ای یا ویژگی موجی از خود نشان دهند. این رفتار دوشخصیتی ماده و تابش نشان می‌دهد که نه الگوی ذره‌ای و نه الگوی موجی هیچکدام کاملاً درست نیست. با این حال آنها یکدیگر را طرد نمی‌کنند بلکه یکی مکمل دیگری است و هر کدام جنبه‌ای را تاکید می‌کند و محدودیتهای خود را نیز دارد.

### ۱۱.۷ اصل عدم قطعیت هایزنبرگ

یکی از بنیادین‌ترین و ژرفترین مفاهیم کلی فیزیک نظری نوین در سال ۱۹۲۷/۱۳۰۶ به وسیله ورنر هایزنبرگ فرمولبندی و به نام اصل عدم قطعیت شناخته شد. این اصل به حد دقت ما در شناخت دستگاههای فیزیکی مربوط می‌شود. این اصل بصراحت چنین بیان می‌شود: اگر  $P$  و  $Q$  بمعنای مکانیک کلاسیکی دو متغیر همبوغ باشند، دانستن مقادیر این دو متغیر به‌طور همزمان با دقتی بیش از آنچه از همبستگی زیر به دست می‌آید امکان‌پذیر نیست:

$$\Delta P \Delta Q \approx h \quad ( ۵۰.۷ )$$

که در آن  $h$  ثابت پلانک است. انرژی و زمان، مکان و اندازه حرکت، زاویه و اندازه حرکت زاویه‌ای نمونه‌هایی از کمیت‌های همیوگند.

برای اینکه نشان دهیم چگونه اصل عدم قطعیت در مورد کوانتوم‌های نور به‌کاربرده می‌شود، فرض کنید بخواهیم انرژی یک فوتون یا بسامد آن را بدقت اندازه‌گیری کنیم. فرض کنید قرار باشد این اندازه‌گیری در مدت  $\Delta t$  انجام شود، مثلاً "یک بستاورنوری برای مدت  $\Delta t$  باز و سپس بسته شود. حتی اگر چشمه نور کاملاً تکفامی بود، در تجزیه فوریه‌ای تب یک پهن‌شدگی بسامدی، ناشی از متناهی بودن مدت دوام تب، وجود می‌داشت که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta \nu \Delta t \approx 1 \quad (51.7)$$

این را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta(h\nu) \Delta t \approx h \quad (52.7)$$

یعنی

$$\Delta E \Delta t \approx h \quad (53.7)$$

در اینجا کمیت  $\Delta E$  عدم قطعیت در انرژی فوتون هم‌ارز با عدم قطعیت  $\Delta \nu$  در بسامد است. پس انرژی فوتون را نمی‌توان با دقت مطلق اندازه گرفت، مگر اینکه زمان اندازه‌گیری نامتناهی باشد. برعکس، لحظه عبور فوتون از بستاور را نمی‌توانیم با دقت مطلق بدانیم مگر اینکه از داشتن هرگونه آگاهی در مورد بسامد یا انرژی صرف‌نظر کنیم. در هر حال حاصلضرب نامعینی‌های  $\Delta E$  و  $\Delta t$  هرگز نمی‌تواند از  $h$  کمتر باشد.

کاربرد دیگر اصل عدم قطعیت مربوط به مکان یک فوتون است. مانند مثال پیش فرض کنید بستاور برای یک زمان  $\Delta t$  باز باشد و فوتونها در جهت  $x$  پیش روند. پس:

$$\Delta x = c \Delta t \approx \frac{c}{\Delta \nu} \quad (54.7)$$

ولی از معادله (۴۱.۷) داریم

$$\Delta p = \frac{h \Delta \nu}{c} \quad ( ۵۵.۷ )$$

بنابراین:

$$\Delta x \Delta p \approx h \quad ( ۵۶.۷ )$$

یعنی نمی‌توانیم مقادیر لحظه‌ای مکان و اندازه حرکت یک فوتون را همزمان با دقت دلخواه اندازه‌گیری کنیم. اگر اندازه حرکت آن را با دقت کامل بدانیم، درمورد مکان آن هیچ نخواهیم دانست و برعکس اگر مکان آن را دقیقاً بدانیم، نمی‌توانیم هیچ آگاهی درباره‌ی اندازه حرکت آن داشته باشیم.

اصل عدم قطعیت نارسایی توصیف یک فوتون به عنوان یک ذره را هویدا می‌سازد. اگر دقت توصیف فوتون را به حدی سوق دهیم که موقعیت مکانی و زمانی آن بدرستی مشخص شوند، این توصیف معنی خود را از دست خواهد داد، زیرا اندازه حرکت و انرژی فوتون کاملاً نامعین می‌شوند.

## مسائل

۱.۷ تعداد مدهای موجود در یک جعبه مکعبی به ضلع ۱۰ سانتی‌متر را برای بازه‌های زیر محاسبه کنید.

(الف) بازه بسامدی ۱۰۰۰ هرتزی که طول موج میانی آن ۵۰۰ نانومتر است.

(ب) بازه طول موجی یک انگسترمی که طول موج میانی آن ۵۰۰۰ نانومتر است.

۲.۷ تعداد فوتونهای موجود در جعبه را برای دو حالت مسئله بالا در دماهای زیر تعیین کنید:

(الف) دمای دیواره‌ها مساوی دمای اتاق، یعنی ۳۰۰ درجه کلوین است.

(ب) دمای دیواره‌ها مساوی دمای سطح خورشید، یعنی ۶۰۰۰ درجه کلوین است.

۳.۷ یک لامپ تنگستن ۱۰۰ واتی در دمای ۱۸۰۰ درجه کلوین تابش می‌کند. در گستره ۵۰۰۰ تا ۵۰۰۱ انگسترم، دره‌رثانیه چند فوتون

- گسیل می‌کند؟ ( فرض کنید رشته مانند یک جسم سیاه تابش کند ).
- ۴۰۷ تعداد فوتونهای موجود در هر مد را درون یک کاواک با دمای ۳۰۰ و ۶۰۰۰ درجه کلوین برای طول موجهای زیر به دست آورید:  
(الف) ۵۰۰۰ نانومتر، (ب) ۵۰ میکرون، (پ) ۵ میلی‌متر.
- ۵۰۷ تعداد کل فوتونهای موجود در یک کاواک به حجم  $V$  و دمای  $T$  را در تمام بسامدها محاسبه کنید.
- ۶۰۷ تعداد کل فوتونهایی که در یکای زمان از یکای مساحت یک جسم سیاه به دمای  $T$  گسیل می‌شوند را محاسبه کنید.
- ۷۰۷ قانون تابش پلانک را برحسب توان تابش در یکای مساحت در یکای بازه طول موجی به دست آورید و آن را بر حسب طول موج بیان کنید.
- ۸۰۷ طول موجی که برای آن تابش در یکای بازه طول موجی حداکثر است را به دست آورید. نتیجه با طول موج بیشینه تابش در معادله (۳۵.۷) تفاوت دارد، چرا؟
- ۹۰۷ پهنای خط یک لیزر هلیوم - نئون ۱۰۰۰ هرتز و طول موج آن ۶۳۲۷ انگستر و توان آن یک میلی‌وات است.  
(الف) در هر ثانیه چند فوتون توسط این لیزر گسیل می‌شود؟  
(ب) هرگاه قطر پرتو برون‌داد یک میلی‌متر باشد، دمای یک جسم سیاه که همین تعداد فوتون را، از سطحی به همین اندازه و در همان بازه بسامدی لیزر، گسیل می‌کند به دست آورید.
- ۱۰۰۷ معادله‌ای به دست آورید که فشار فوتونی روی دیواره‌های درون یک کاواک مکعبی را در دمای  $T$  به دست دهد. (فرض کنید در هر جهت، مثلاً "  $x$  ، یک سوم فوتونها موثر باشند ).
- ۱۱۰۷ از نتیجه مسئله ۱۰۰۷ دمایی را که در آن فشار برابر یک هگزام اتمسفر است به دست آورید.
- ۱۲۰۷ یک پرتو لیزر در لکه‌ای به قطر یک میکرون که حد پراش است، کانونی می‌شود. اگر توان لیزر ۱۰ وات باشد، فشار در نقطه کانونی چقدر است؟

## فصل هشتم

بینابهای نوری

## ۱۰۸ نگرشهای کلی

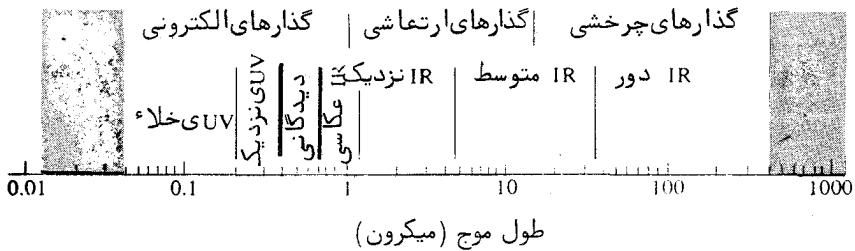
بیناب را می‌توان تابش الکترومغناطیسی که بر حسب بسامد یا طول موج ترتیب یافته است تعریف کرد. بیناب کامل یک چشمه از همه بسامدهایی که این چشمه از خود گسیل می‌کند تشکیل می‌شود. چون یک دستگاه کلی که بتواند همه بسامدها را جداسازی کند وجود ندارد، از این رو بخشهای گوناگون بیناب الکترومغناطیسی یا روشهای متفاوتی مورد بررسی قرار می‌گیرند. از بخشهای عمده بیناب الکترومغناطیسی پیش از این در قسمت ۳۰۱ نام برده شد.

بخش "نوری" بیناب گسترده وسیعی را، از فروقرمز دور در یک سو تا فرابنفش دور در سوی دیگر، دربرمی‌گیرد که بخش دیدگانی جزء نسبتاً کمی از آن است، (شکل ۱۰۸). در عمل بخش نوری تابش الکترومغناطیسی با خواص عمومی زیر مشخص می‌شود:

(۱) به وسیله آینه و عدسی کانونی، هدایت و تنظیم می‌شود.

(۲) با منشور و توری به بیناب پاشیده می‌شود.

برخلاف بیناب تابش گرمایی اجسام جامد که پیوسته است، تابش گسلی آنها یا مولکولهای برانگیخته از بسامدهای گسسته گوناگونی تشکیل می‌شود. این بسامدها،



شکل ۱۰۸ بخش نوری بیناب الکترومغناطیسی.

از ویژگیهای مشخصه اتم یا مولکولهای سازنده چشمه‌اند. معمولاً اسم بیناب "خطی" برای این نوع تابش به کار برده می‌شود. این اسم از آن‌روست که روزنه ورودی دستگاههای بیناب‌نمایی که در بخش نوری بیناب به کار برده می‌شوند، معمولاً "یک شکاف باریک است و برای هر طول موج گسیلیده یک خط تصویر مجزا در صفحه کانونی به وجود می‌آید. چشمه‌های بیناب خطی عبارتند از قوس، جرقه، تخلیه الکتریکی درون گازها و جز اینها.

بینابهای نوری بیشتر اتمها بسیار پیچیده‌اند و به نظر می‌رسد گره‌های خطی آنها نظم بخصوصی ندارند. چند عنصر، از آن جمله هیدروژن و فلزهای قلیائی، بینابهای نسبتاً ساده‌ای از خود نشان می‌دهند. بینابهای این عناصر بارشته‌هایی از خطوطی که در حد همگرا هستند مشخص می‌شوند.

وقتی با یک دستگاه بیناب‌نمایی با توان جداسازی کم، بینابهای نوری بسیاری از مولکولها، بویژه مولکولهای دو اتمی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم، "نوارهایی" با فاصله‌های کم و بیش منظم می‌بینیم، ولی با دستگاههای قویتر، دیده می‌شود که این نوارها از رشته خطوط نزدیک به هم تشکیل شده‌اند.

هرگاه نور سفید از گاز یا بخار نابرانگیخته‌ای عبور داده شود، معمولاً اتمها یا مولکولهای بخار، همان بسامدهایی را که در برانگیختگی گسیل می‌کنند، از آن درمی‌آشامند، در نتیجه در نوری که از بخار یا گاز عبور کرده است این بسامدهای بخصوص یا ضعیف دیده می‌شوند، یا بکلی حذف می‌شوند. این اثر را در نورخورشید، که بیناب آن از خطوطی تاریک روی یک زمینه پیوسنه روشن تشکیل می‌شود می‌توان دید.



ایسن خطوط تاریک را خطوط فرانیهوفری می نامند زیرا فرانیهوفر از نخستین کسانی بود که به طور کمی آنها را اندازه گیری کرد. این خطوط وجود یک لایهء گاز را در جو خورشید، که به طور نسبی از بقیهء جو سردتر است، معلوم می سازد. اتمهای این لایه طول موجهای ویژهء خود را، از نوری که از لایه های چگال و داغ زیرین خورشید تابش می شود، جذب می کنند. تابش گرمایی لایه های زیرین خورشید متناظر با دمای ۵۵۰۰ درجهء کلوین است.

جامدات نیز در آشامی گزینشی از خود نشان می دهند. کمابیش کلیهء اجسام شفاف در فروقرمز و فرابنفش نوارهای پهن جذبی دارند. در مواد رنگی، این نوارهای پهن جذبی در بخش دیدگانی نیز مشاهده می شوند. ولی در برخی اجسام مانند بلورها و شیشه های که ناخالصیهایی از عناصر نادر خاکی دارند، نوارهای جذبی نسبتاً باریکند.

### ۲۰۸ نظریهء مقدماتی بینابهای اتمی

نظریهء ریاضی بینابهای اتمی در سال ۱۹۱۳/۱۲۹۲ که نیلز بور Niels Bohr فیزیکدان دانمارکی نتیجهء کار مشهور خود را اعلام کرد، آغاز گردید. گرچه نظریهء بور اساساً به بیناب هیدروژن مربوط بود، با این حال مبانی آن را می توان برای اتمهای دیگر نیز به کار برد.

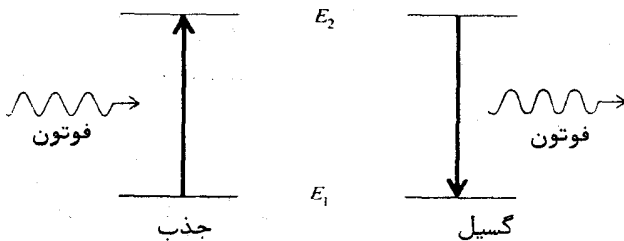
بور برای توضیح اینکه اتمها فقط بسامدهای معین و ویژهء خود را گسیل می کنند، دو فرض بنیادی زیر را پیش آورد:

(۱) الکترونهای یک اتم می توانند تنها بعضی از مدارها یا حالت های گسستهء کوانتیده را اشغال کنند. این حالتها انرژیهای متفاوت دارند، و آنکه پایینترین انرژی را دارد حالت طبیعی اتم است، که حالت زمینه نیز خوانده می شود.

(۲) وقتی الکترون از حالتی به حالت دیگر گذار می کند، این گذار با گسیل یا درآشامی تابش توسط اتم همراه است. بسامد این تابش از معادلهء زیر به دست می آید:

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} \quad (108)$$

که در آن  $\Delta E$  اختلاف انرژی میان دو حالت، و  $h$  ثابت پلانک است. این دو فرض نمایانگر انحرافی بنیادی از مفهوم کلی کلاسیکی یا نیوتونی اتم است. فرض نخست، کوانتیدگی تابش کاواکی که پیشتر به وسیله پلانک مطرح شده بود را پیش می‌نهد. اندیشه دوم چنین می‌نماید که اتم در هنگام تغییر از یک حالت کوانتیده به حالت دیگر، یک فوتون گسیل یا جذب می‌کند که انرژی آن برابر اختلاف انرژی دو حالت است، (شکل ۲۰۸).



شکل ۲۰۸ نموداری برای نمایش فرایندهای جذب و گسیل.

بیناب بسامدی یک اتم یا مولکول از تقسیم اختلاف انرژیهای ممکن  $|E_1 - E_2|$  بر  $h$  حاصل می‌شود. برای اینکه عملاً "بیناب اتم بخصوصی را محاسبه کنیم، نخست باید انرژیهای حالتی کوانتومی گوناگون این اتم را بدانیم. بعکس، شناخت حالتی کوانتومی با اندازه‌گیری بسامدهای خطوط گوناگون بیناب امکان‌پذیر است.

### اتم بور و بیناب هیدروژن

بور در بررسی اتم هیدروژن با طرح یک اصل اساسی مربوط به اندازه حرکت زاویه‌ای، توانست فرمول درستی برای ترازهای انرژی به دست آورد. بنا به این اصل، اندازه حرکت زاویه‌ای یک الکترون همواره مضرب درستی از  $h/2\pi$  است، که در آن  $h$  ثابت پلانک است.

اندازه حرکت زاویه‌ای یک الکترون با جرم  $m$  که با سرعت  $u$  در مدار دایره‌ای به شعاع  $r$  در گردش است، برابر  $mur$  است. پس داریم

$$mur = \frac{nh}{2\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (208)$$

این رابطه کوانتیدگی اندازه حرکت زاویه‌ای مداری الکترون را بیان می‌کند. عدد درست  $n$ ، عدد کوانتومی اصلی نامیده می‌شود.

معادلهء کلاسیک نیرو، در مورد یک الکترون با بار  $-e$  که در مداری به شعاع  $r$  به گردیک پروتون با بار  $+e$  در حرکت است، چنین است.

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mu^2}{r} \quad (۳۰۸)$$

اگر  $u$  را در دو معادلهء بالا حذف کنیم، شعاع مدارهای کوانتیده به دست می‌آید:

$$r = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2 = a_H n^2 \quad (۴۰۸)$$

شعاع کوچکترین مدار ( $n=1$ ) را نخستین شعاع بسور می‌نامند و با  $a_H$  نمایش می‌دهند. اندازهء عددی آن چنین است

$$a_H = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 0.529 \text{ \AA} \quad (۵۰۸)$$

بنابراین شعاع مدارهای گوناگون از دنبالهء عددی  $a_H$ ،  $4a_H$ ،  $9a_H$ ، ... و جز اینها به دست می‌آید.

انرژی کل یک مدار از جمع انرژیهای جنبشی و پتانسیل به دست می‌آید، یعنی

$$E = \frac{1}{2} mu^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (۶۰۸)$$

با حذف  $u$  به کمک معادلهء (۳۰۸) نتیجه می‌شود که

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (۷۰۸)$$

این مقدار کلاسیکی انرژی یک الکترون مقید است. اگر مجاز بودیم هر مقداری به جای  $r$  بگذاریم، در این صورت هر مقداری (منفی) برای انرژی ممکن بود، ولی مدارها طبق معادلهء (۴۰۸) کوانتیده‌اند. انرژیهای کوانتیدهء حاصل، از معادلهء زیر به دست می‌آیند.

$$E_n = -\frac{R}{n^2} \quad (۸۰۸)$$

که در آن ثابت  $R$ ، ثابت ریذبرگ Rydberg نامیده می‌شود و برابر است با

$$R = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \quad (۹۰۸)$$

این، انرژی بستگی الکترون در حالت زمينه  $n=1$  نیز هست و مقدار آن تقریباً  $۱۳٫۵$  الکترون ولت است.

فرمول بیناب هیدروژن از ترکیب معادله انرژی با شرط بسامدی بسور به دست می‌آید. اگر انرژی مدارهای  $n_1$  و  $n_2$  را بترتیب با  $E_1$  و  $E_2$  نشان دهیم، می‌یابیم

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h} = \frac{R}{h} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (۱۰۰۸)$$

مقدار عددی  $R/h$  برابر  $۳٫۲۹ \times 10^{15}$  هرتز است.<sup>۱</sup>

نمودار گذار اتم هیدروژن در شکل ۳۰۸ دیده می‌شود. انرژی مدارهای مجاز با خطوط افقی نشان داده شده‌اند و گذارهای مربوط به خطوط مختلف بیناب با پیکانهای قائم مشخص شده‌اند. ترکیب اعداد درست  $n_1$  و  $n_2$ ، سریهای مشاهده شده<sup>۲</sup> بیناب را به دست می‌دهد، این سریها عبارتند از:

$n_1 = 1$	$n_2 = 2, 3, 4, \dots$	(فرابنفش دور)	Lyman	سری لیمان
$n_1 = 2$	$n_2 = 3, 4, 5, \dots$	(دیدگانی و فرابنفش نزدیک)	Balmer	سری بالمر
$n_1 = 3$	$n_2 = 4, 5, 6, \dots$	(فروقرمز نزدیک)	Paschen	سری پاشن
$n_1 = 4$	$n_2 = 5, 6, 7, \dots$	(فروقرمز)	Brackett	سری براکت
$n_1 = 5$	$n_2 = 6, 7, 8, \dots$	(فروقرمز)	Pfund	سری فوند

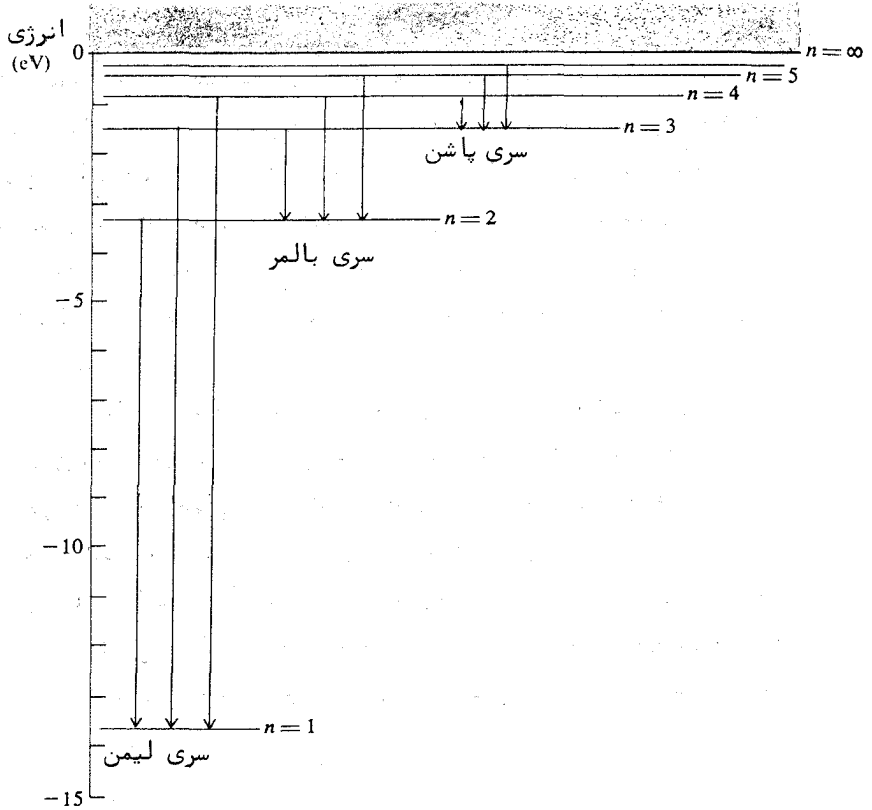
برخی از این سریها در شکل ۴۰۸ به مقیاس لگاریتمی طول موج نشان داده شده‌اند.

۱- در بیناب‌نمایی، معمولاً "معادله" (۱۰۰۸) را برحسب عدد موج بیان می‌کنند:

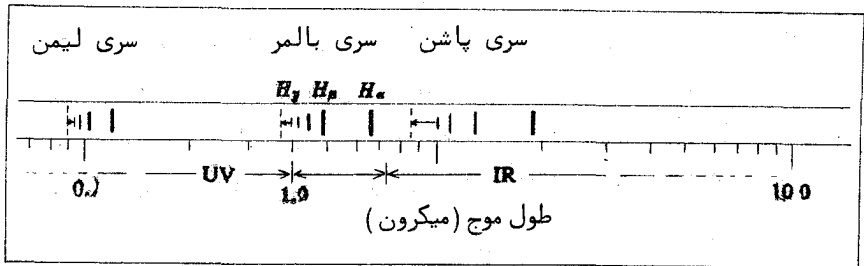
$$\sigma = \frac{\nu}{c} = R (n_1^{-2} - n_2^{-2})$$

که در آن  $R$  ثابت ریذبرگ در یکای عدد موج است، یعنی

$$R = \frac{R}{ch} = 10,973,731 \text{ m}^{-1}$$



شکل ۳۰۸ ترازهای انرژی اتم هیدروژن. گذارها برای سه سری نخست مشخص شده‌اند.



شکل ۴۰۸ سه سری نخست بیناب اتم هیدروژن به مقیاس لگاریتمی طول موج.

سه خط نخست سری بالمر، یعنی  $H_\alpha$  به طول موج ۶۵۶۳ انگسترم،  $H_\beta$  به طول موج ۴۸۶۱ انگسترم و  $H_\gamma$  به طول موج ۴۳۴۰ انگسترم را با به کار بردن یک لامپ تخلیه ساده هیدروژن در یک بیناب‌نمای کوچک می‌توان مشاهده کرد. تا کنون خطوط این سری تا  $n_2 = 22$  با روش عکسبرداری ثبت شده‌اند. شدت خطهای هر سری با زیاد شدن  $n_2$  کاهش پیدا می‌کند و شدت سریهای گوناگون با افزایش  $n_1$  به طور محسوسی کم می‌شود. مشاهده خطهای بینابی، با چشمه‌های معمولی آزمایشگاهی، تا خط ۱۲٫۳ میکرونی در فروقرمز که مربوط به  $n_1 = 6$  و  $n_2 = 7$  است. ادامه یافته است.

بیناب هیدروژن در ستاره‌شناسی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. چون هیدروژن فراوانترین عنصر در کیهان است، سری بالمر در بیناب بیشتر ستارگان به صورت خطوط جذبی برجسته‌ای نمایان می‌شوند. این سری در بیناب سحابیهای درخشان نیز وجود دارد و به صورت خطوط گسیلی روشن دیده می‌شود. در مشاهدات جدید با تلسکوپهای رادیویی (۲۶)، خطوط گسیلی هیدروژن بین ستاره‌ای با عددهای کوانتومی خیلی بزرگ شناسایی شده‌اند. برای مثال خط هیدروژن با بسامد ۱۶۵۱ مگاهرتز که مربوط به گذار  $n_1 = 158$ ،  $n_2 = 159$  است دریافت و شناسایی شده است.

### اثر متناهی بودن جرم هسته

مقدار ثابت ریذبرگ که از معادله ۹۰۸ به دست می‌آید برای حالتی است که جرم هسته نامتناهی باشد. چون این جرم در واقع متناهی است پس مدار الکترون دایره‌ای به مرکز هسته نیست، بلکه الکترون و هسته هر دو گرد مرکز جرم مشترک خود می‌گردند. این موضوع ایجاب می‌کند که برای به دست آوردن اندازه صحیح ثابت ریذبرگ به جای جرم الکترون، جرم کاهیده آن را به کار ببریم. از این رو مقدار دقیقتر ثابت ریذبرگ برای هیدروژن از فرمول زیر به دست می‌آید

$$R_H = \frac{\mu e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \quad (11.8)$$

که در آن:

$$\mu = \frac{mM}{m+M} \quad (12.8)$$

جرم کاهیده،  $M$  جرم هسته اتم، و  $m$  جرم الکترون است.

هستهٔ هیدروژن معمولی، یک پروتون تکی است و نسبت جرمها،  $M/m$  مساوی ۱۸۳۶ است. ولی برای ایزوتوپ سنگین هیدروژن، یعنی دوتریوم، نسبت جرمها تقریباً "دو برابر این مقدار است. بنابراین ثابت ریذبرگ برای دوتریوم کمی با هیدروژن فرق می‌کند. نتیجه این می‌شود که تفاوت کمی میان بسامدهای خطوط بیناب دو ایزوتوپ وجود دارد. این اثر را که **جابجایی ایزوتوپی** نامیده می‌شود، می‌توان با دوتایی شدن خطهای بینابی در یک لامپ تخلیهٔ حاوی مخلوطی از دوتریوم و هیدروژن مشاهده کرد.

طبق نظریهٔ کلاسیک الکترومغناطیس، الکترون در حرکت دایره‌ای حالت زمینه باید از خود تابش گسیل کند، ولی با اینکه الگوی بور در مورد اتم هیدروژن نتایج عددی درستی به دست می‌دهد نمی‌تواند علت عدم گسیل این تابش را ذکر کند. گذشته از این، به کاربردن نظریهٔ بور برای اتمهای پیچیده دشوار و برای مولکولها کاملاً "غیر عملی است. نظریه پردازان از آغاز سعی کردند نظریهٔ بور را به صورتی تغییر دهند که بتواند پدیده‌های چون ساختار ریز خطوط بیناب و جزاینها را توضیح دهد، (بخش ۷۰۸). گرچه آنان در این کوششها با موفقیت‌های متفاوتی روبرو شدند، ولی سرانجام نظریهٔ نوین کوانتومی اتم که در بخشهای بعد بررسی خواهد شد، جانشین نظریهٔ بور شد.

### بیناب فلزات قلیایی

یک فرمول آروینی، مانند رابطهٔ مربوط به اتم هیدروژن، در مورد بیناب فلزات قلیایی یعنی لیتیم، سدیم و جز اینها به کار برده می‌شود که نتایج دقیقی به دست می‌دهد. این فرمول عبارت است از

$$\nu = R \left[ \frac{1}{(n_1 - \delta_1)^2} - \frac{1}{(n_2 - \delta_2)^2} \right] \quad (13.8)$$

ثابت ریذبرگ  $R$  تقریباً برابر  $R_H$  است. این ثابت برای عنصرهای گوناگون کمی فرق می‌کند. اعداد کوانتومی  $n_1$  و  $n_2$  اعداد درستند و کمیت‌های  $\delta_1$  و  $\delta_2$  را کاستیهای کوانتومی می‌نامند.

## جدول ۱۰.۸ سریهای سدیم

سری	$n_1$	$n_2$	$\delta_1$	$\delta_2$
شیز	۳	۰۰۶،۵،۰۴	۰۸۷	۱۳۵
اصلی	۳	۰۰۵،۴،۰۳	۱۳۵	۰۸۷
پخش	۳	۰۰۵،۴،۰۳	۰۸۷	۰۰۱
پایه	۳	۰۰۶،۵،۰۴	۰۰۱	۰۰۰

در یک سری بینایی معین، که با یک مقدار ثابت  $n_1$  و مقادیر فزاینده  $n_2$  مشخص می‌شود، کاستیهای کوانتومی تقریباً " ثابتند. سریهای عمده فلزات قلیایی را بترتیب سری تیز، اصلی، پخش و پایه می‌نامند. برای نمونه، اعداد و کاستیهای کوانتومی برای سریهای سدیم در جدول ۱۰.۸ آورده شده‌اند.

علت نامگذاری سریهای تیز و پخش شکل ظاهری خطوط بینایی آنهاست. خطوط سری اصلی، به‌صورت گسیلی شدیدترین خطوطند و تیز هرگاه نور سفید از بخار فلز عبور داده شود، قویترین خطوط جذبی مربوط به سری اصلی‌اند. در سری پایه کاستیهای کوانتومی خیلی کوچکند. در نتیجه بسامدهای خطوط این سری تقریباً با بسامدهای سری متناظر در هیدروژن برابرند. به همین دلیل آن را سری پایه می‌نامند.

## ۳۰.۸ مکانیک کوانتومی

نظریه نوین کوانتومی به وسیله شرو دینگر، هایزنبرگ و دیگران در دهه دوم قرن بیستم پیریزی شد. در ابتدا دو نظریه کوانتومی بظاهر متفاوت وجود داشتند، یکی به نام مکانیک موجی و دیگری به نام مکانیک ماتریسی. بعدها نشان داده شد، که این دو فرمولبندی نظریه کوانتومی کاملاً " معادل یکدیگرند و در واقع مکانیک کوانتومی نوین شامل هر دوی آنهاست. در اینجا سعی خواهیم کرد که مکانیک کوانتومی را به‌طور کامل بیروانیم، تنها چند نتیجه مهم آن را که در نظریه اتمی به‌کاربرده می‌شوند ذکر خواهیم کرد.



وصف یک اتم یا یک دستگاه اتمی از دیدگاه مکانیک کوانتومی، با یک تابع موج یا تابع حالت انجام می‌گیرد. این تابع را بیشتر با  $\Psi$  نشان می‌دهند.  $\Psi$  معمولاً عددی است مختلط که آن را تابعی از همهء مختصات پیکری دستگاه مورد بحث و همچنین تابعی از زمان می‌دانند.

طبق اصول موضوعی بنیادی مکانیک کوانتومی، تابع حالت  $\Psi$  این ویژگی را دارد که توان دوم اندازهء مطلق آن  $|\Psi|^2$  یا  $\Psi^*\Psi$ ، مقیاسی است از احتمال اینکه دستگاه مورد نظر در پیکربندی که مختصات مربوط آن را تعیین می‌کند واقع باشد. گاهی  $\Psi^*\Psi$  را تابع توزیع احتمال یا چگالی احتمال می‌خوانند.

برای مثال اگر دستگاه اتمی ما یک الکترون باشد، و مختصات آن  $x$ ،  $y$  و  $z$  باشند، در این صورت احتمال اینکه الکترون میان  $x$  و  $x + \Delta x$ ،  $y$  و  $y + \Delta y$  و  $z$  و  $z + \Delta z$  واقع باشد، از عبارت زیر به دست می‌آید:

$$\Psi^*(x,y,z,t)\Psi(x,y,z,t) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (14.8)$$

با توجه به تعریف تابع حالت که گذشت، بدیهی است که هرگز نمی‌توان اطمینان داشت که الکترون در یک محل بخصوصی واقع باشد، تنها دانستن احتمال این که الکترون در محدودهء معینی واقع است امکان دارد. این موضوع با اصل عدم قطعیت هایزنبرگ که در بخش ۱۱.۷ دیدیم کاملاً سازگار است. احتمال کل اینکه الکترون در جایی از فضا واقع باشد الزاماً برابر واحد است. بنابراین انتگرال چگالی احتمال روی تمام فضا، معین و در واقع برابر یک است، یعنی:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*\Psi dx dy dz = 1 \quad (15.8)$$

توابعی که در معادلهء بالا صدق می‌کند، گفته می‌شود، توابعی بهنجار و مجذوراً انتگرال پذیرند.

### حالت‌های مانا

حالتی که انرژی آن کاملاً مشخص باشد را حالت مشخصه یا "ویژه حالت" می‌نامند. هر دستگاه ممکن است چندین ویژه حالت داشته باشد که هر کدام به‌طور معمول انرژی متفاوتی دارند. هرگاه انرژی دستگاهی در یکی از حالت‌های مشخصه آن

با  $E_n$  نمایش داده شود، وابستگی زمانی تابع حالت به صورت سازه‌نمایی مختلط  $\exp(-iE_n t/\hbar)$  نوشته می‌شود که در آن:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

بنابراین تابع حالت کامل به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Psi_n(x, y, z, t) = \Psi_n(x, y, z) e^{-iE_n t/\hbar} \quad (16.8)$$

در اینجا  $\psi_n$  تنها، تابعی از مختصات پیکربندی است. چگالی احتمال دستگاهی را در نظر بگیرید که در یکی از ویژه حالت‌های خود باشد. داریم:

$$\Psi_n^* \Psi_n = \psi_n^* e^{iE_n t/\hbar} \psi_n e^{-iE_n t/\hbar} = \psi_n^* \psi_n \quad (17.8)$$

می‌بینیم که سازه‌های نمایی حذف می‌شوند. این بدان معنی است که توزیع احتمال در زمان ثابت می‌ماند. به همین دلیل حالت‌های ویژه را حالت‌های مانا نیز می‌نامند. دستگاهی که در یک حالت مانا است دستگاهی ایستا است، بدین معنی که نسبت به خارج هیچ تغییری در آن صورت نمی‌گیرد.

در حالت بخصوصی که دستگاه کوانتومی مورد نظر یک اتم، متشکل از هسته و الکترون‌های اطراف آن، است تابع توزیع احتمال در حقیقت مقیاسی از میانگین چگالی الکترونی در یک نقطه معین از فضا است. گاهی در اشاره به این‌گونه موارد عبارت ابر بار الکتریکی به‌کاربرده می‌شود. وقتی اتمی در یک حالت مانا است، چگالی الکترونی با زمان تغییر نمی‌کند. میدان الکترومغناطیسی اطراف آن ایستا است و اتم تابش نمی‌کند.

### حالت‌های هم‌دوس

دستگاهی را که در حال تغییر از یک ویژه حالت  $\psi_1$  به ویژه حالت دیگر  $\psi_2$  است در نظر بگیرید. در خلال گذار، تابع حالت از ترکیب خطی توابع حالت یادشده به دست می‌آید، یعنی

$$\Psi = c_1 \psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 \psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar} \quad (18.8)$$

در اینجا  $c_1$  و  $c_2$  پارامترهایی هستند که تغییرات آنها با زمان، در مقایسه با سازه‌های نمایی، کند است. این نوع حالت را، حالت همدموس می‌نامند. یک تفاوت اساسی میان یک حالت همدموس و یک حالت مانا این است که انرژی حالت همدموس خیلی مشخص نیست، در حالی که انرژی دومی معین است. توزیع احتمال حالت همدموسی که با معادله (۱۸۰۸) نمایش داده می‌شود به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Psi^* \Psi = c_1^* c_1 \psi_1^* \psi_1 + c_2^* c_2 \psi_2^* \psi_2 + c_1^* c_2 \psi_1^* \psi_2 e^{i\omega t} + c_2^* c_1 \psi_2^* \psi_1 e^{-i\omega t} \quad (19.08)$$

که در آن:

$$\omega = \frac{E_1 - E_2}{\hbar} \quad (20.08)$$

یا معادل آن:

$$\nu = \frac{E_1 - E_2}{h}$$

نتیجه بالا نشان می‌دهد که چگالی احتمال یک حالت همدموس به طور سینوسی با زمان نوسان می‌کند. بسامد این نوسان دقیقاً "با شرط بسامدی بور یکی است. یک اتم تابنده را از دیدگاه مکانیک کوانتومی می‌توان به صورت زیر توصیف کرد: در خلال تغییر از یک حالت کوانتومی به حالت کوانتومی دیگر، توزیع احتمال الکترون همدموس می‌شود و به طور سینوسی نوسان می‌کند. این نوسان سینوسی با یک میدان الکترومغناطیسی نوسانی، که همان تابش باشد همراه است.

### ۴۰۸ معادله شرویدینگر

تا اینجا از اینکه چگونه می‌توان توابع حالت یک دستگاه فیزیکی را پیدا کرد بحثی به میان نیاورده‌ایم. این یکی از کارهای اساسی نظریه کوانتومی است، و انجام آن مستلزم حل یک معادله دیفرانسیلی به نام معادله شرویدینگر است. در زیر، یک روش ساده برای به دست آوردن این معادله مهم برای یک ذره شرح داده می‌شود.

تابع موج  $\psi$  را که وابستگی آن به زمان به صورت معمولی سینوسی است در نظر بگیرید، و طول موج مربوط را با  $\lambda$  نمایش دهید. می‌دانیم بخش فضایی تابع موج  $\psi$  باید از معادله موج ناوابسته به زمان پیروی کند.

$$\nabla^2\psi + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\psi = 0$$

طبق فرضیه دوبروی، (بخش ۱۰.۷)، یک ذره با اندازه حرکت  $p$  دارای طول موج وابسته  $h/p$  است. پس انتظار می‌رود که این ذره از معادله موج زیر پیروی کند

$$\nabla^2\psi + \left(\frac{2\pi p}{h}\right)^2\psi = 0$$

از سوی دیگر انرژی یک ذره با جرم  $m$ ، از  $E = (\frac{1}{2})mu^2 + V$  به دست می‌آید، که در آن  $V$  انرژی پتانسیل، و  $u$  سرعت ذره است. چون اندازه حرکت خطی  $p = mu$ ، پس:

$$p^2 = 2m(E - V)$$

بنابراین معادله موج ذره به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla^2\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2} (E - V)\psi = 0 \quad (21.8)$$

این معادله معروفی است که نخستین بار در سال ۱۹۲۶/۱۳۰۵ به وسیله اروین شرودینگر ارائه شد و یک معادله دیفرانسیلی پاره‌ای خطی از مرتبه دوم است. در اصل فیزیک مورد نیاز در کاربرد این معادله، گزینش یک تابع پتانسیل  $V(x,y,z)$  است که برای دستگاه فیزیکی مورد بحث مناسب باشد. با داشتن این تابع پتانسیل، مسئله ریاضی یافتن تابع (یا توابع)  $\psi$  است که در این معادله صدق کند. تنها برخی از جوابهای ریاضی معادله شرودینگر معنای فیزیکی دارند. برای این که تابع  $\psi$  بتواند نمایانگر یک دستگاه واقعی باشد باید برای مقادیر نامتناهی مختصات، طوری به صفر بگراید که مجذور آن انتگرال پذیر باشد. معادله (۱۵.۸) گوسزدی بر این امر بود.

حل کامل معادلات دیفرانسیلی پاره‌ای شرودینگر اغلب بسیار پیچیده و دشوار است، لیکن نتایج آن براحتی قابل درکند. اینکه جوابها باید مجذوراً انتگرال پذیر باشند، منجر به این می‌شود که جوابهایی قابل قبول باشند که برای آنها

انرژی  $E$  تنها بعضی از مقادیر مشخص را دارا باشد. این مقادیر مجاز  $E$  که ویژه ارز نامیده می‌شوند در حقیقت ترازهای انرژی مشخصه دستگاهند. جوابهای وابسته، توابع حالت دستگاهند و ویژه تابع خوانده می‌شوند.

پس به کمک معادله شرودینگر می‌توان ترازهای انرژی دستگاه و همین‌طور توابع حالت وابسته را به دست آورد. در بخش بعد نشان می‌دهیم که چگونه معادله شرودینگر برای محاسبه ترازهای انرژی و توابع حالت اتم هیدروژن به کار برده می‌شود.

### ۵.۸ مکانیک کوانتومی اتم هیدروژن

نظریه کوانتومی یک تک الکترون که در یک میدان مرکزی حرکت می‌کند، و در اینجا به‌طور مختصر شرح داده می‌شود، اساس نظریه نوین اتمی را تشکیل می‌دهد. در بررسی ریاضی اتم تک‌الکترونی، با توجه به تقارن کروی میدانی که الکترون در آن حرکت می‌کند، بهتر است مختصات قطبی  $r$ ،  $\theta$  و  $\phi$  به کار برده شوند. عملگر لاپلاسی در این دستگاه مختصات چنین است

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (22.8)$$

معادله شرودینگر در این مختصات چنین می‌شود

$$\frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \psi + \frac{8\pi^2\mu}{h^2} (E - V)\psi = 0 \quad (23.8)$$

در اینجا  $\mu$  جرم کاهشده الکترون است. برای اتم هیدروژن، پتانسیل  $V$  چنین است:

$$V = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (24.8)$$

حالت پایه اتم هیدروژن

نخست جوابی ساده برای معادله شرودینگر به دست می‌آوریم. یک جواب آزمایشی ساده به شکل:

$$\psi = e^{-\alpha r} \quad (25.8)$$

که در آن  $\alpha$  ثابتی نامعلوم است، در معادله (۲۳.۸) می‌نشانیم. بدین‌سان معادله شرودینگر به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\left(\alpha^2 + \frac{8\pi^2\mu E}{h^2}\right) e^{-\alpha r} + \left(\frac{2\pi\mu e^2}{\epsilon_0 h^2} - 2\alpha\right) \frac{e^{-\alpha r}}{r} = 0 \quad (26.8)$$

این معادله در صورتی برای تمام مقادیر  $r$  برقرار است که عبارتهای درون ابروان صفر شوند، یعنی

$$\alpha^2 + \frac{8\pi^2\mu E}{h^2} = 0 \quad \frac{2\pi\mu e^2}{\epsilon_0 h^2} - 2\alpha = 0 \quad (27.8)$$

معادله دوم مقدار  $\alpha$  را معلوم می‌کند. دیده می‌شود که این کمیت درست عکس نخستین شعاع بور است:

$$\alpha = \frac{\pi\mu e^2}{\epsilon_0 h^2} = \frac{1}{a_H} \quad (28.8)$$

با نشانیدن این مقدار در معادله نخست، انرژی را به دست می‌آوریم:

$$E = -\frac{\mu e^4}{8\epsilon_0 h^2} \quad (29.8)$$

این مقدار با انرژی نخستین مدار بور، که در بخش ۲.۸ به دست آمد، برابر و انرژی حالت پایه اتم هیدروژن است.

چون جوابی که معادله ۲۵.۸ به دست می‌دهد، و در آن  $\alpha$  با معادله (۲۸.۸) مشخص می‌شود، بهنجار نیست، هنوز به عنوان یک تابع حالت کاملاً قابل قبول نیست. ولی همواره می‌توان با ضرب کردن هر جواب در یک ثابت دلخواه، جوابی که باز در معادله دیفرانسیلی صدق کند به دست آورد. پس با معرفی

ثابت هنجاربخش  $C$ ، بدون اینکه تغییری در اندازه انرژی حاصل شود، می‌توانیم بنویسیم:

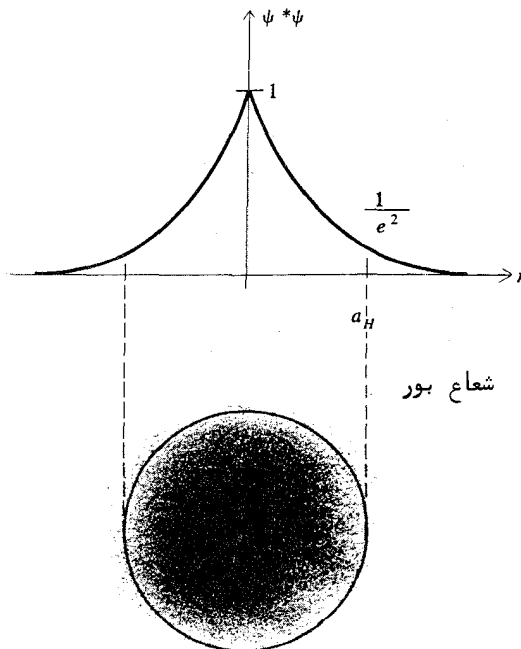
$$\psi = Ce^{-ar} \quad (۳۰.۸)$$

معادله شرط هنجاربخش، یعنی معادله ۱۵.۸ به معادله زیر ساده می‌شود:

$$\int_0^{\infty} C^2 e^{-2ar} 4\pi r^2 dr = 1 \quad (۳۱.۸)$$

که از آن می‌توان  $C$  را به دست آورد. هرگاه تنها تغییرات فضایی تابع حالت مورد نظر باشد، نیازی به منظورکردن ثابت هنجاربخش  $C$  نیست.

طبق نتایج بالا، حالت پایه اتم هیدروژن بگونه‌ای است که چگالی احتمال الکترون تقارن کروی دارد و با افزایش شعاع  $r$  به‌طور نمایی کاهش می‌یابد. چگالی در مرکز حداکثر است و در فاصله نخستین شعاع بور به  $e^{-2}$  مقدار مرکزی می‌رسد تغییرات تابع چگالی در شکل ۵.۸ نشان داده شده است.



شکل ۵.۸ چگالی احتمال حالت پایه (1s) اتم هیدروژن.

## حالت‌های برانگیخته

برای به دست آوردن توابع حالت و انرژیهای حالت‌های برانگیخته، اتهم هیدروژن باید معادله شرودینگر را به طور کامل حل کرد. برای این کار روش جداسازی متغیرها به کار برده می‌شود.

تابع حالت  $\psi$  را با حاصلضرب یک تابع شعاعی و دو تابع زاویه‌ای به صورت زیر بیان می‌کنیم.

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\phi) \quad (۲۲.۸)$$

پس معادله شرودینگر (۲۳.۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \sin^2 \theta \frac{8\pi^2 \mu r^2}{h^2} (E - V) = 0 \quad (۲۳.۸)$$

برای اینکه جواب آزمایشی ما برای تمام مقادیر مستقل  $r$ ،  $\theta$  و  $\phi$  در معادله دیفرانسیلی صدق کند، جمله نخست،  $(1/\Phi) (d^2\Phi/d\phi^2)$ ، باید الزاما ثابت باشد، در غیر این صورت  $r$  و  $\theta$  به  $\phi$  بستگی خواهند داشت. ثابت یادشده را با  $-m^2$  نشان می‌دهیم. معادله‌ای که می‌ماند، به دو بخش تقسیم می‌شود، یک بخش شعاعی است و بخش دیگر تنها به  $\theta$  بستگی دارد. هر بخش را مساوی ثابت دیگری، چون  $l(l+1)$ ، قرار می‌دهیم و معادلات دیفرانسیلی مجزا شده زیر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2 \quad (۲۴.۸)$$

$$\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = l(l+1) \quad (۲۵.۸)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{8\pi^2 \mu r^2}{h^2} (E - V) = l(l+1) \quad (۲۶.۸)$$



که در آن اتم هیدروژن داریم :

$$V = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

بدیهی است که یک جواب معادله دیفرانسیلی (۳۴.۰۸) به‌قرار زیر است :

$$\Phi = e^{im\phi} \quad (37.08)$$

برای اینکه این جواب از نظر فیزیکی قابل قبول باشد، لازم است مقدار  $\Phi$  برای  $\phi$  ،  $\phi + 2\pi$  ،  $\phi + 4\pi$  و جز اینها یکی باشد، در غیر این صورت، تابع حالت در یک نقطه از فضا به‌طور یکتا مشخص نخواهد بود. این در بایست مقادیر مجاز  $m$  را به اعداد درستی به شرح زیر محدود می‌کنند.

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (38.08)$$

عدد  $m$  را عدد کوانتومی مغناطیسی می‌نامند.

حل معادله (۳۵.۰۸) مربوط به  $\theta$  و معادله شعاعی (۳۶.۰۸) دشوارتر است و ما به حل تفصیلی آنها نمی‌پردازیم، بلکه تنها نتایج آنها را که در هر کتاب مکانیک کوانتومی یافت می‌شوند ارائه می‌دهیم. این دو معادله دیفرانسیلی خیلی قبل از شرودینگر شناخته و حل شده بودند و جوابهای آنها در ارتباط با دیگر مسایل ریاضی فیزیک محاسبه شده بودند.

معادله (۳۵.۰۸)، یکی از صورتهای معادله دیفرانسیلی لوژاندر است. این معادله تنها در صورتی جوابهای قابل قبول (نک مقدار) دارد که  $l$  یک عدد درست مثبت، و برابر یا بزرگتر از  $|m|$  باشد. عدد درست  $l$  را عدد کوانتومی سمتی می‌گویند. جوابهای حاصل را که چند جمله‌ایهای وابسته لوژاندر می‌نامند، با  $P_l^{|m|}(\cos \theta)$  نشان می‌دهند. این چند جمله‌ایها از فرمول مولد زیر به‌دست می‌آیند :

$$P_l^{|m|}(x) = \frac{(1-x^2)^{(1/2)|m|}}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{|m|+l} (x^2-1)^l \quad (39.08)$$

چند تای آنها به‌قرار زیرند

$$\begin{array}{ll} P_0^0(x) = 1 & P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2} \\ P_1^0(x) = x & P_2^1(x) = 3x(1-x^2)^{1/2} \\ P_2^0(x) = \left(\frac{1}{2}\right)(3x^2-1) & P_2^2(x) = 3(1-x^2) \end{array}$$

معادله شعاعی (۳۶.۸) را معادله دیفرانسیلی لاگر می‌نامند. جوابهای قابل قبول آن (که به توابع مجذورا" انتگرال پذیر منجر می‌شوند) از فرمول زیر به دست می‌آیند:

$$R(\rho) = \rho' e^{-(1/2)\rho} L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$$

متغیر  $\rho$  بنا به تعریف با  $r$  متناسب است و داریم:

$$\rho = \frac{2r}{na_H} \quad (40.8)$$

$n$  عددی است درست که مقدار آن برابر یا بزرگتر از  $l+1$  است و آن را عدد کوانتومی اصلی می‌نامند. توابع  $L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$  را چند جمله‌ای‌های وابسته لاگر می‌خوانند. فرمول مولد آنها چنین است

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \left(\frac{d}{d\rho}\right)^{2l+1} \left[ e^\rho \left(\frac{d}{d\rho}\right)^{n+1} (\rho^{n+l} e^{-\rho}) \right] \quad (41.8)$$

بعضی از آنها از این قرارند:

$$\begin{aligned} L_0^0(\rho) &= 1 & L_1^1(\rho) &= -1 \\ L_1^0(\rho) &= 1 - \rho & L_2^1(\rho) &= 2\rho - 4 \\ L_2^0(\rho) &= \rho^2 - 4\rho + 2 & L_2^2(\rho) &= 2 \end{aligned}$$

در طی حل معادله دیفرانسیلی شعاعی، به این نتیجه می‌رسیم که ویژه ارزشهای انرژی  $E$  با عدد کوانتومی اصلی  $n$  مشخص و از فرمول زیر حاصل می‌شوند:

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{8\epsilon_0 n^2} \left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (42.8)$$

این درست همان فرمولی است که از نظریه ساده بور به دست آمد. برای هر مقدار عدد کوانتومی اصلی  $n$  که انرژی آن  $E_n$  از معادله بالا به دست می‌آید،  $n$  مقدار ممکن برای عدد کوانتومی سمتی  $l$  وجود دارند، که عبارتند از  $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ . هر مقدار  $l$  نمایانگر نوع متفاوتی ویژه حالت است. از قدیم حالتی که برای آنها  $l$  برابر  $0, 1, 2, 3$  بوده است را به ترتیب حالت‌های  $s, p, d, f$  می‌نامیده‌اند.

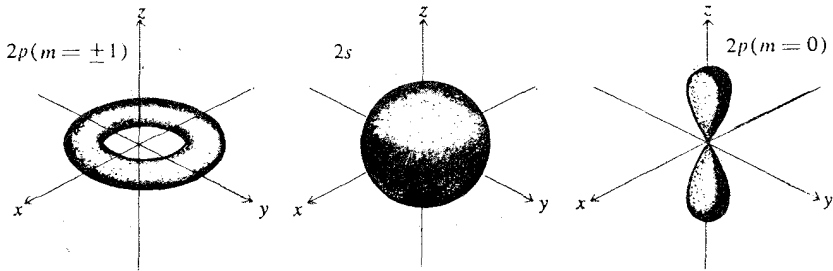
برای هر مقدار  $l$ ،  $2l+1$  مقدار ممکن برای عدد کوانتومی مغناطیسی  $m$  وجود دارند. این مقادیر عبارتند از  $l, (l-1), \dots, -l$ . در نتیجه برای هر مقدار  $n$ ، ویژه تابع یا ویژه حالت وجود دارند. جدول زیر وضع را به طور خلاصه روشن می‌کند.

$n$	1	2	3
$l$	0 (s)	1 (p)	2 (d)
$m$	0	-1 0 +1	0 -1 0 +1 -2 -1 0 +1 +2

ویژه تابع کامل، متناظر با مقادیری که برای  $l$ ،  $n$  و  $m$  فائل شدیم، از دستور زیر به دست می‌آید:

$$\psi_{n,l,m} = C \rho^l e^{-\rho/2} L_{n+l}^{2l+1}(\rho) P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (43.8)$$

که در آن  $\rho = 2r/na_H$  و  $C$  ثابت هنجاریش است. جدول ۲.۸ چند نمونه ساده‌تر از توابع حالت اتم هیدروژن را نشان می‌دهد. بعضی از این توابع در شکل ۶.۸ دیده می‌شوند.



شکل ۶.۸ چگالی احتمال برای نخستین حالت برانگیخته اتم هیدروژن  
( $n=2$ )

### اندازه حرکت زاویه‌ای

اندازه حرکت زاویه‌ای الکترونی که در یک میدان نیروی مرکزی حرکت می‌کند

را می‌توان با روشهای معمولی مکانیک کوانتومی به دست آورد. به این طریق نشان داده می‌شود که اندازه حرکت زاویه‌ای، همانگونه که در نظریه بور دیده شد، کوانتیده است و مقدار آن از اعداد کوانتومی که حالت‌های کوانتومی را مشخص می‌سازند معین می‌شود.

اندازه حرکت مداری کل تنها به عدد کوانتومی سمتی  $l$  بستگی دارد و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sqrt{l(l+1)} \frac{h}{2\pi} = \sqrt{l(l+1)} \hbar$$

جدول ۲.۸ ویژه تابعهای اتم هیدروژن (ثابت‌های هنجاریش در نظر گرفته نشده‌اند)

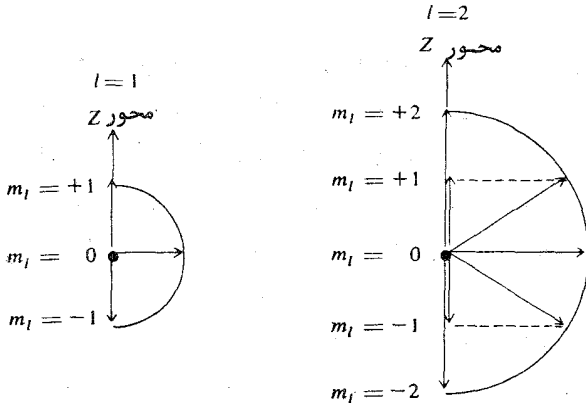
حالت	$n$	$l$	$m$		
1s	1	0	0	$e^{-\rho/2}$	
2s	2	0	0	$e^{-\rho/2} (1 - \rho)$	
2p	2	1	-1	$e^{-\rho/2} \rho$	$\begin{cases} \sin \theta e^{-i\phi} \\ \cos \theta \\ \sin \theta e^{+i\phi} \end{cases}$
			+1		
3s	3	0	0	$e^{-\rho/2} (\rho^2 - 4\rho + 2)$	
3p	3	1	-1	$e^{-\rho/2} (\rho^2 - 2\rho)$	$\begin{cases} \sin \theta e^{-i\phi} \\ \cos \theta \\ \sin \theta e^{+i\phi} \end{cases}$
			0		
			+1		
3d	3	2	-2	$e^{-\rho/2} \rho^2$	$\begin{cases} \sin^2 \theta e^{-i2\phi} \\ \sin \theta \cos \theta e^{-i\phi} \\ (1 - 3 \cos^2 \theta) \\ \sin \theta \cos \theta e^{+i\phi} \\ \sin^2 \theta e^{+i2\phi} \end{cases}$
			-1		
			0		
			+1		
			+2		

که با مقدار  $nh/2\pi$  نظریه بور تفاوت دارد. بویژه برای حالت‌های  $s$ ، ( $l=0$ )، اندازه حرکت زاویه‌ای صفر است. معنی فیزیکی این امر این است که برای حالت‌های  $s$  ابر الکترونی حرکت خالص دورانی ندارد. البته این مانع از آن نمی‌شود که ابر الکترونی حرکت داشته باشد.

همچنین نظریه کوانتومی نشان می‌دهد که مولفه  $z$  اندازه حرکت زاویه‌ای کوانتیده است، و مقدار آن چنین است:

$$\frac{mh}{2\pi} = m\hbar$$

که در آن  $m$  عدد کوانتومی مغناطیسی است. همانگونه که دیده‌ایم،  $m$  عدد کوانتومی وابسته به زاویه چرخشی  $\phi$  گرد محور  $z$  است. نظریه‌ای که  $m$  می‌تواند هر یک از مقادیر  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$  را اختیار کند، نتیجه می‌شود که برای هر مقدار  $l$  تعداد  $2l+1$  مقدار مختلف برای مولفه  $z$  اندازه حرکت زاویه‌ای وجود دارد. این موضوع در شکل ۷.۸ نشان داده شده است.

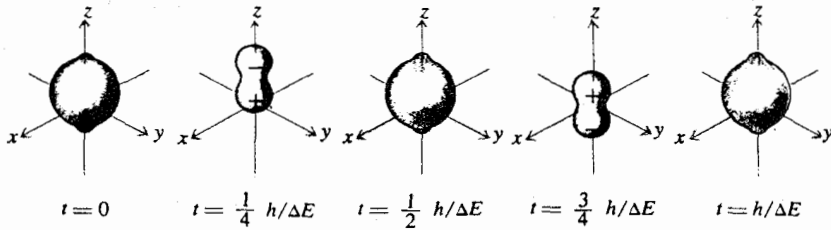


شکل ۷.۸ کوانتس فضایی اندازه حرکت زاویه‌ای برای موارد  $l=1$  و  $l=2$ .

### ۶.۸ گذارهای تابشمند. قواعد گزینش

همانگونه که پیشتر گفته شد، وقتی یک اتم از یک ویژه حالت به ویژه حالت دیگری در حال تغییر است، چگالی احتمال بار الکترونی هم‌دوس می‌شود و به‌طور سینوسی با بسامدی که به‌وسیله شرط بسامدی بور داده می‌شود نوسان می‌کند. نحوه نوسان ابر بار الکترونی به ویژه حالت‌های مربوط بستگی دارد. در گذار دوقطبی، مرکز بار منفی ابر الکترونی پیرامون بار مثبت هسته نوسان می‌کند. بدین‌سان اتم یک دوقطبی الکتریکی نوسان‌کننده می‌شود.

در شکل ۸.۸ نموداری از تغییرات زمانی توزیع بار الکتریکی برای اتم

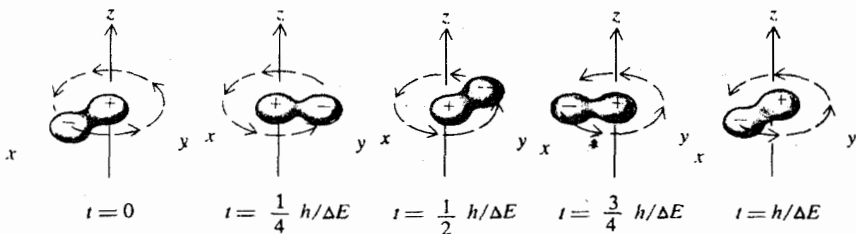


شکل ۸.۸ توزیع بار در حالت همدوس  $1s + 2p_0$  بر حسب زمان. اتم، یک دوقطبی نوسان‌کننده است.

هیدروژن در حالت همدوسی که با ترکیب  $1s + 2p(m=0)$  نمایش داده می‌شود، نشان داده شده است. می‌بینیم که مرکز بار روی محور  $z$  نوسان می‌کند. میدان الکترومغناطیسی وابسته به آن دارای یک توزیع جهتمندی، شبیه به میدان یک انتن دوقطبی ساده واقع بر محور  $z$  است. بدین ترتیب تابش در صفحه  $xy$  حداکثر و روی محور  $z$  صفر است. در این حالت میدان تابش به‌طور خطی قطبیده است و صفحه قسطنطین آن موازی با محور دوقطبی است.

در شکل ۹.۸ مورد دیگری نشان داده شده است. در اینجا حالت همدوس با ترکیب  $1s + 2p(m=+1)$  نمایانده می‌شود. مرکز بار الکترونی روی یک مسیّر دایره‌ای گرد محور  $z$  می‌گردد و بسامد زاویه‌ای این حرکت از فرمول بسامدی بسور معین می‌شود.

$$\omega = \Delta E / \hbar$$



شکل ۹.۸ توزیع بار الکترونی در حالت همدوسی  $1s + 2p_1$  بر حسب زمان. اتم، یک دوقطبی چرخان است.

در اینجا، اتم به جای اینکه یک دو قطبی نوسان کننده باشد، یک دو قطبی چرخان است. قطبیدگی میدان تابشی وابسته به آن که در جهت محور  $z$  پیش می رود دایره ای، در جهت عمود بر آن خطی، و در جهت های دیگر بیضی است. این موارد در شکل ۱۰۰۸ نشان داده شده اند. حالت همدوس  $1s + 2p (m = -1)$  با  $1s + 2p (m = +1)$  همانند است، و تنها جهت چرخش بار الکترونی در آن عکس اولی است. در نتیجه جهت چرخش تابش قطبیده دایره ای وابسته به آن نیز عکس است.

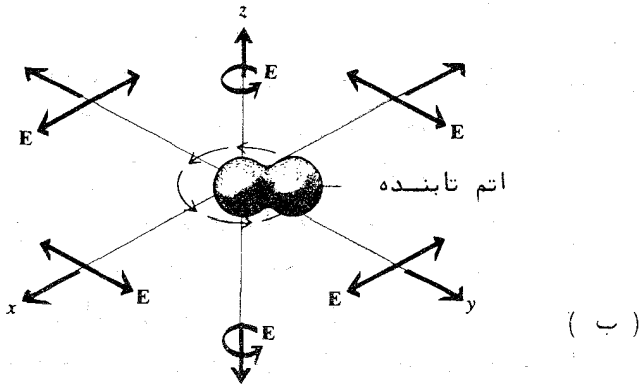
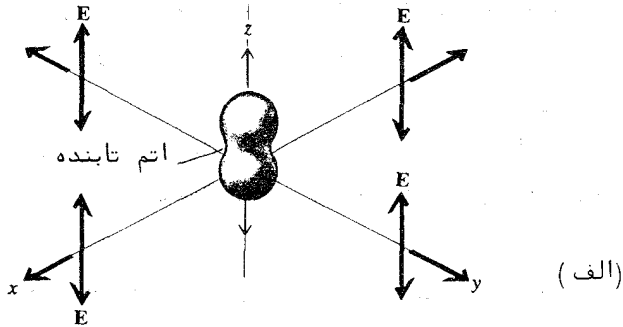
در یک چشمهٔ بینابینی معمولی، جهت اتمهای تابنده در فضا کاتوره ای است و ارتعاشات آنها با یکدیگر ناهم دوسند. پس تابش کل مخلوطی ناهم دوس از انواع قطبیدگیهاست، به زبان دیگر ناقطبیده است. با این حال اگر چشمه در یک میدان مغناطیسی قرار گیرد، میدان در فضا یک جهت برتری، مانند محور  $z$ ، ایجاد می کند، (شکل ۱۱۰۸ الف)). علاوه بر این، برهم کنش میان الکترون تابان و میدان مغناطیسی باعث می شود که هر تراز به چند زیر تراز تقسیم شود. هر یک از زیر ترازها مربوط به یک عدد کوانتومی مغناطیسی  $m$  است. در نتیجه هر خط بینابی به چند مولفه تجزیه می شود. تجزیه یا شکافتگی خطوط بیناب. در میدان مغناطیسی را اثر زیمنان می نامند. آثار قطبیدگی مورد بحث در بالا را ممکن است با کمک اثر زیمنان مشاهده کرد. این اثر در شکل ۱۱۰۸ ب) نشان داده شده است.

نظریهٔ کلی جذب و گسیل نور به وسیلهٔ اتم متضمن محاسبهٔ انتگرالهایی به نام عناصر ماتریسی است. عنصر ماتریسی مربوط به تابش دو قطبی الکتریکی، کمیت  $M_{AB}$  است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$M_{AB} = \iiint \psi_A^* \mathbf{er} \psi_B \, dx \, dy \, dz \quad (44.8)$$

که در آن  $\mathbf{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$  و  $e$  بار الکترون است. عنصر ماتریسی دو قطبی مقیاسی است از دامنهٔ گشتاور دو قطبی نوسان کنندهٔ مربوط به حالت همدوسی که از دو حالت مانای  $\psi_A$  و  $\psi_B$  به وجود می آید.

در مورد هیدروژن،  $M_{AB}$  برای کلیهٔ جفت حالتها صفر است، مگر برای آنهایی که اختلاف اعداد کوانتومی سمتی آنها،  $l_A$  و  $l_B$ ، درست مساوی یک باشد. به زبان دیگر، گذارهای دو قطبی الکتریکی در صورتی "مجازند" که داشته باشیم:



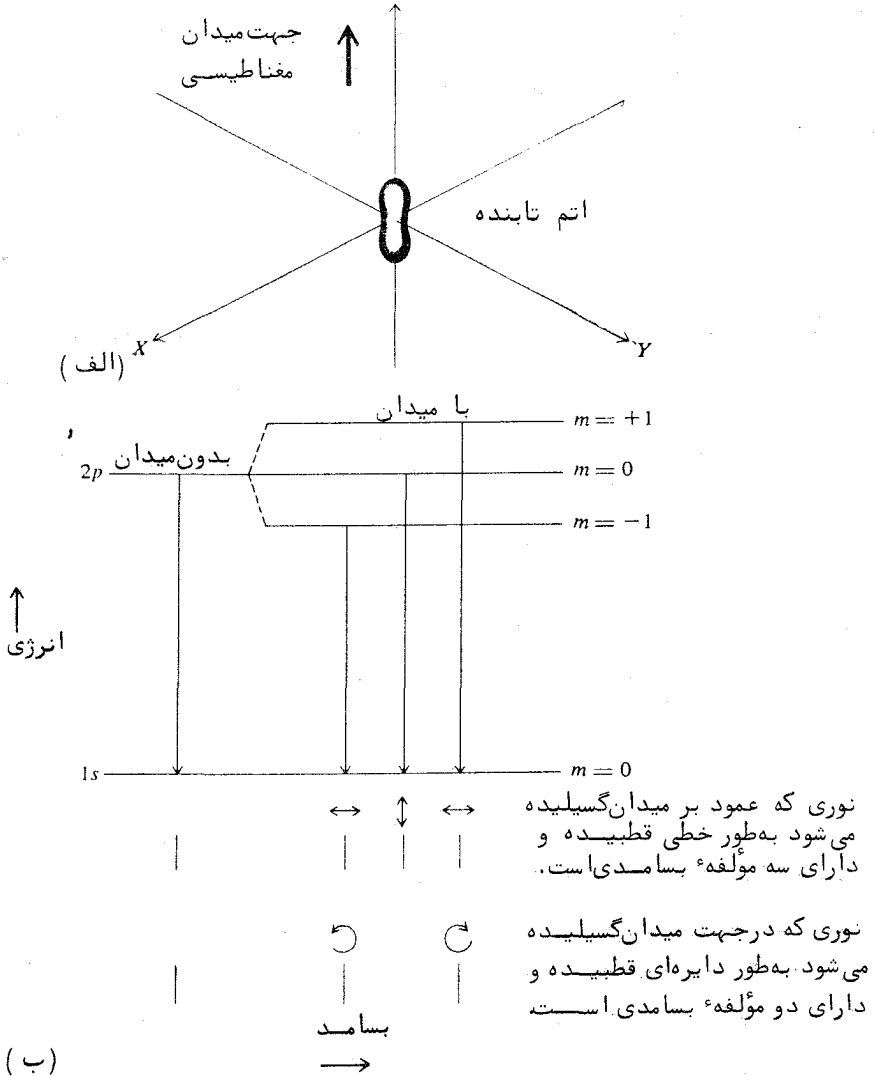
شکلی ۱۰.۸ قطبیدگی تابش الکترومغناطیسی (بردار  $E$ ). (الف) برای یک دوقطبی نوسان‌کننده، (ب) برای یک دوقطبی چرخان.

$$\Delta l = \pm 1 \quad (۴۵.۸)$$

این را قاعدهٔ گزینش  $l$  می‌نامند. مفهوم ضمنی آن این است که به هنگام یک گذار دوقطبی، اندازه حرکت زاویه‌ای اتم به اندازه  $\hbar$  تغییر می‌کند. این تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای به وسیلهٔ فوتون مربوط، گرفته می‌شود. برای  $m$  نیز یک قاعدهٔ گزینش وجود دارد، که چنین است:

$$\Delta m = 0 \text{ یا } \pm 1 \quad (۴۶.۸)$$





شکل ۱۱.۸ اثر زیمنان. (الف) جهت میدان مغناطیسی خارجی، (ب) نمودار گذار. برای نوری که در جهت عمود بر میدان مغناطیسی گسیلیده می شود، سه مؤلفه قطبیده خطی وجود دارند، و برای نوری که موازی با میدان مغناطیسی گسیلیده می شود تنها دو مؤلفه وجود دارند که به طور دایره ای قطبیده اند. فرمول اصلی زیمنان برای شکافتگی خط بینایی  $\Delta v = eH/4\pi\mu_0 m$  است، که در آن  $H$  میدان مغناطیسی،  $e$  بار الکترون و  $m$  جرم الکترون است (۴۰) (برای سادگی از اسپین الکترون چشم پوشی شده است).

گذارهایی که برای آنها  $\Delta m = 0$  مربوط به نوع خطی دوقطبی است، در صورتی که  $\Delta m = \pm 1$  برای نوع چرخان آن است. این دو نوع گذار در واقع همانهایی هستند که هم اکنون شرح آنها در مورد هیدروژن گذشت و در شکل ۱۱۰۸ نشان داده شدند.

### آهنگ گذار و عمر حالت

عبارت کلاسیک برای توان تابشی کل  $P$  که به وسیله یک دوقطبی الکتریکی نوسان کننده، با گشتاور  $M = M_0 \cos \omega t$ ، گسیلیده می شود چنین است.

$$P = \frac{1}{3} \frac{\omega^4 M_0^2}{\pi \epsilon_0 c^3} \quad (47.8)$$

همین فرمول برای گسیل اتمی به کار برده می شود، مشروط بر اینکه  $|M_{AB}|$  به جای  $M_0$  نشانده شود. با این حال در این مورد این فرمول را باید به روش دیگری تعبیر کنیم. چون هر اتم در هر گذار یک کوانتوم با انرژی  $h\nu$  می گسیلد، تعداد کوانتوم بر اتم بر ثانیه برابر با  $P/h\nu$  است. یعنی تعداد گذار در ثانیه برای هر اتم چنین است:

$$A = \frac{2}{3} \frac{\omega^3 |M_{AB}|^2}{h \epsilon_0 c^3} \quad (48.8)$$

این را احتمال گذار می نامند. وارون احتمال گذار، یعنی  $1/A$ ، بعد زمان دارد و مقیاسی است از زمانی که یک اتم برانگیخته یک کوانتوم نور می گسیلد. به همین دلیل آن را عمر تابشندی اتم می نامند. عمرهای اتمی برای گذارهای دوقطبی مجاز در ناحیه دیدگانی بیناب، نوعاً در حدود  $10^{-8}$  ثانیه است. وجود سازه سامدی  $\omega^3$  در فرمول فوق، باعث می شود که عمر تابشندی در فرورمز به همین نسبت درازتر و در فرابنفش کوتاهتر باشد.

### گذارهای مرتبه های بالاتر

هر چند گذارهای دوقطبی الکتریکی معمولاً "قویترین خطوط بیناب را موجب می شوند، ولی گذارهای دیگری نیز وجود دارند. یک اتم می تواند با داشتن یک

گشتاور چهارقطبی الکتریکی نوسان‌کننده، تابش الکترومغناطیسی گسیل یا جذب کند، این گذارها، گذارهای چهارقطبی الکتریکی نامیده می‌شوند. قاعده<sup>۶</sup> گزینش برای آنها چنین است

$$\Delta l = \pm 2$$

بسادگی می‌توان نشان داد که توزیع بار الکتریکی برای یک حالت همدوس، مانند  $1s + 3d (m = 0)$  یک چهارقطبی نوسان‌کننده تشکیل می‌دهد. احتمالهای گذار برای تابش چهارقطبی معمولاً "چندین مرتبه<sup>۷</sup> بزرگی از احتمال مربوط به تابش دوقطبی الکتریکی کمتر است. عمرهای تابش‌مندی، در تابش چهارقطبی، معمولاً "حدود یک ثانیه‌اند. گذارهای مرتبه‌های بالاتر مانند گذارهای هشت قطبی،  $\Delta l = \pm 3$ ، و جز اینها نیز روی می‌دهند. این گذارها بندرت در بینابهای اپتیکی دیده می‌شوند، ولی در فرایندهای هسته‌ای اتم بسیار روی می‌دهند.

### ۷.۸ ساختار ریز خطوط بیناب . اسپین الکترون

هرگاه بیناب هیدروژن با دستگاهی که توان جداسازی آن زیاد است مطالعه شود، دیده می‌شود که خطوط آن تکی نیستند، بلکه از چند مولفه<sup>۸</sup> نزدیک به هم تشکیل شده‌اند. برای مثال خط  $H\alpha$  به صورت دو خط، با جدایی حدود ۱۴ ره - انگستر، نمایان می‌شود. ( این، با شکافتگی خطوط بیناب هیدروژن - دوتریم کسه پیشتر بحث شد متفاوت است). این شکافتگی خطوط بیناب، یا تبدیل شدن هر خط به چند خط را ساختار ریز می‌نامند. در بیناب عناصر دیگر نیز، با ساختار ریز مواجه می‌شویم. بسته به تعداد مولفه‌ها، این خطوط را خطوط یگانه، دوگانه، سه‌گانه و جز اینها می‌نامند.

توضیح نظری ساختار ریز خطوط بیناب، نخستین بار به وسیله<sup>۹</sup> پاولی ارائه شد. وی فرض کرد که الکترون علاوه بر اندازه حرکت زاویه‌ای مداری، دارای یک اندازه حرکت زاویه‌ای ذاتی نیز است. این اندازه حرکت زاویه‌ای را اسپین می‌نامند. اسپین تمام الکترونها یکی است و به حرکت آنها به دور هسته و یا نوع پیوند آنها به هسته و جز اینها بستگی ندارد. مطالعات نظری نشان می‌دهد که مولفه<sup>۱۰</sup> این اسپین در یک جهت معین باید همیشه یکی از دو مقدار زیر باشد:

$$-\frac{1}{2}\hbar \quad \text{یا} \quad +\frac{1}{2}\hbar$$

بنابراین اندازه حرکت زاویه‌ای کل یک الکترون در یک اتم، حاصل جمع برداری اندازه حرکت گردشی  $l$  و اسپین آن  $s$  است. پس اندازه حرکت زاویه‌ای کل یک الکترون که با  $j$  نشان می‌دهیم چنین است

$$j = l + s \quad (۴۹۰۸)$$

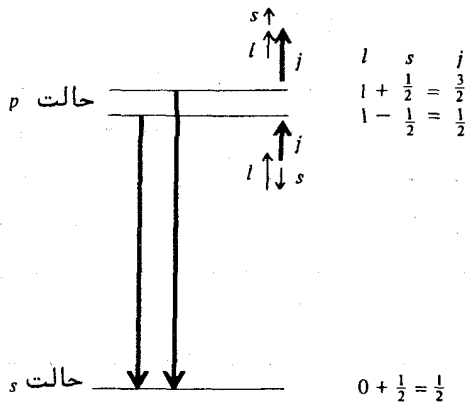
چنین مرسوم است که اندازه حرکت‌های زاویه‌ای گوناگون را در یکای  $\hbar$  بیان می‌کنند. بنابراین در این یکان، این کمیته‌ها اساساً "عددهای کوانتومی اند". در برابر هر مقدار از عدد کوانتومی سمتی  $l$ ، دو مقدار برای عدد کوانتومی که نمایشگر اندازه حرکت زاویه‌ای کل یک الکترون تکی است وجود دارند، یعنی

$$j = l + 1/2 \quad \text{و} \quad j = l - 1/2 \quad (۵۰۰۸)$$

بدین ترتیب، برای  $l = 1$  داریم  $\frac{1}{2}$  یا  $z = \frac{3}{2}$ ، برای  $l = 2$  داریم  $\frac{3}{2}$  یا  $z = \frac{5}{2}$  و جز اینها. برای  $l = 0$  تنها یک مقدار وجود دارد زیرا هر دو حالت  $z = +\frac{1}{2}$  و  $z = -\frac{1}{2}$  عملاً یکی هستند.

بیشتر گفته شد، انرژی همه حالت‌های هیدروژن که عدد کوانتومی اصلی آنها یکی است، یکسان است. این دقیقاً درست نیست زیرا اسپین الکترون به حساب نیامده بود. در حقیقت چون الکترون روی مدار گرد هسته، که بار مثبت دارد، حرکت می‌کند، در معرض یک میدان مغناطیسی ناشی از این حرکت قرار می‌گیرد. گشتاور مغناطیسی وابسته به اسپین، با این میدان برهم‌کنش می‌کند. این را برهم‌کنش اسپین-مداری می‌نامند<sup>۲</sup>. نتیجه این برهم‌کنش اسپین-مدار این است که انرژی حالت‌های  $j = l + s$  و  $j = l - s$  کمی با هم تفاوت دارند و این بنوبه خود باعث یک شکافتگی در خطوط بیناب می‌شود. نمودار ساده‌ای که شکافتگی را برای گذار  $s \rightarrow p$  نشان می‌دهد در شکل ۱۲۰۸ کشیده شده است.

۲- در هیدروژن علاوه بر شکافتگی اسپین-مداری ترازهای انرژی، شکافتگی دیگری ناشی از اثرهای نسبیتی نیز وجود دارد. شکافتگی نسبیتی نیز خیلی کوچک است و باعث می‌شود که انرژی‌های حالت‌هایی که  $l$  مساوی ولی  $l$  متفاوت دارند، اندکی متفاوت باشند (۲۴).



شکل ۱۲۰۸ ساختار ریز یک خط بینایی برای گذار

۸۰۸ چندگانگی در بینابهای اتمهای چند الکترونی . نمادگذاری بیناب‌نمایی

اندازه حرکت زاویه‌ای کل در اتمهایی که بیش از یک الکترون دارند، برابر است با حاصل جمع کلیه اندازه حرکت‌های مداری  $l_1, l_2, \dots$  و اسپین‌های  $s_1, s_2, \dots$  و جز اینها.

در حالت معمولی، اندازه حرکت‌های مداری با هم جفت می‌شوند و اندازه حرکت مداری کل را به وجود می‌آورند  $L = l_1 + l_2 + \dots$ . همین‌طور اسپینها با هم جفت می‌شوند و اسپین برآیند را تشکیل می‌دهند  $S = s_1 + s_2 + \dots$ . سپس اندازه حرکت زاویه‌ای کل از جفت شدن  $L$  و  $S$  به وجود می‌آید:

$$J = L + S \quad (51.8)$$

این نوع جفت‌شدگی را "جفت‌شدگی  $LS$ " می‌نامند. جفت‌شدگیهای دیگری نیز وجود دارند، مانند "جفت‌شدگی  $jj$ " که در آن  $z$ ها با هم جمع می‌شوند و  $J$  را به وجود می‌آورند. معمولاً "جفت‌شدگی  $LS$ " در عناصر سبک و جفت‌شدگی  $jj$  در عناصر سنگین روی می‌دهد.

در جفت‌شدگی  $LS$  هر سه کمیت  $L, S, J$  کوانتیده‌اند. بزرگی هر یک از این کمیتها از فرمول مربوط به دست می‌آید:

$$|L| = \hbar\sqrt{L(L+1)}, |S| = \hbar\sqrt{S(S+1)}, |J| = \hbar\sqrt{J(J+1)}$$

که در آن  $L$ ،  $S$  و  $J$  اعداد کوانتومی با ویژگیهای زیرند. عدد کوانتومی  $L$  همیشه عددی است درست و مثبت یا صفر. عدد کوانتومی اسپین  $S$  بسته به اینکه تعداد الکترونها جفت یا فرد باشد، بترتیب عددی است درست یا نیم درست. در نتیجه، عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه‌ای کل  $J$  بسته به اینکه تعداد الکترونها جفت یا فرد باشد، بترتیب عددی است درست یا نیم درست.

انرژی کل یک حالت به نحوه جمع شدن اندازه حرکت‌های زاویه‌ای گوناگون و تشکیل برآیند کل بستگی دارد. از این رو برای مقادیر معین  $L$  و  $S$ ، مقادیر گوناگون  $J$  مربوط به انرژیهای متفاوتی هستند. این به نوبه خود منجر به ساختار ریز در خطوط بیناب می‌شود.

یک حالت که با مقادیر  $L$ ،  $S$ ، و  $J$  مشخص می‌شود، در بیناب‌نمایی سه صورت نمادی زیر نشان داده می‌شود

$${}^{2S+1}L_J$$

در اینجا کمیت  $2S + 1$  را چندگانگی می‌نامند. در صورتی که  $L \gg S$  باشد، این کمیت معرف تعداد مقادیر گوناگونی است که  $J$  در ازای یک مقدار معین  $L$  اختیار می‌کند، یعنی

$$L+S, L+S-1, L+S-2, \dots, L-S$$

اگر  $L < S$  باشد، در این صورت تنها  $2L + 1$  مقدار گوناگون برای  $J$  وجود خواهند داشت، یعنی

$$L+S, L+S-1, L+S-2, \dots, |L-S|$$

این را "چندگانگی ناکامل" می‌نامند.

هرگاه  $S = 0$  چندگانگی برابر یک خواهد بود. در این صورت حالت را "یگانه" می‌نامند. همین‌طور، برای  $S = \frac{1}{2}$ ، چندگانگی برابر دو، و حالت دوگانه است. جدول ۳۰۸، اسپین، چندگانگی و نام چند نوع حالت نخست را نشان می‌دهد.

جدول ۳۰۸ چندگانگی‌های حالتها

نام	چندگانگی	S
Singlet	یگانه	۱
Doublet	دوگانه	۲
Triplet	سه‌گانه	۳
Quartet	چهارگانه	۴
Quintet	پنج‌گانه	۵
Sextet	شش‌گانه	۵

برای اتمهای تک الکترونی تنها یک مقدار ممکن برای  $S$ ، یعنی  $\frac{1}{2}$ ، می‌تواند وجود داشته باشد. از این رو همه حالت‌های اتمهای تک الکترونی دوگانه‌اند. در مورد دو الکترون،  $S$  می‌تواند هر یک از مقادیر  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  و  $0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$  را دارا باشد. پس برای اتمهای دو الکترونی دو گروه حالت وجود دارند، حالت‌های سه‌گانه و حالت‌های یگانه.

علاوه بر اینکه حالتها بر حسب چندگانگی نامگذاری می‌شوند، برای نشان دادن اندازه حرکت مداری کل، یعنی  $L$ ، یک حرف الفبایی به‌کاربرده می‌شود. این علامت‌گذاری در جدول ۴۰۸ ارائه شده است.

جدول ۴۰۸ نمادگذاری حالتها بر حسب اندازه حرکت مداری

L	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
نماد	S	P	D	F	G	H	I	K	M

حرف  $S$  در اینجا نمایانگر حالت‌های  $L=0$  است، در جای دیگر از آن برای عدد کوانتومی اسپین استفاده شده است. درست است که این علامت‌گذاری

اشتباه‌انگیز است، ولی قراردادی است پذیرفته شده.

برای مثال یک مورد دو الکترونی را در نظر می‌گیریم. فرض کنید یکی از آنها الکترون  $p$  ( $l_1 = 1$ ) و دیگری الکترون  $d$  ( $l_2 = 2$ ) باشد. مقادیر ممکن  $L$  برابر با  $l_1 + l_2$  و  $|l_1 - l_2|$  و همه اعداد درست میان آنهاست. بدین ترتیب  $L$  مساوی ۲، ۱ یا ۳ است، یعنی حالت‌های وابسته عبارتند از حالت‌های  $P$ ، حالت‌های  $D$  و حالت‌های  $F$ . چون  $S$  می‌تواند صفر یا یک باشد، بنابراین برای هر مقدار  $L$ ، حالت‌های یگانه و حالت‌های سه‌گانه هر دو وجود دارند. جدول کامل حالت‌های ممکن برای یک مورد دو الکترونی  $p$  و  $d$  در زیر آمده است.

سه‌گانه‌ای			یگانه‌ای
${}^3P_0$	${}^3P_1$	${}^3P_2$	${}^1P_1$
${}^3D_1$	${}^3D_2$	${}^3D_3$	${}^1D_2$
${}^3F_2$	${}^3F_3$	${}^3F_4$	${}^1F_3$

### قواعد گزینش

در مورد جفت‌شدگی  $LS$ ، قواعد گزینش حاکم بر گذارهای مجاز برای تابش دوقطبی عبارتند از:

$$\begin{aligned} \Delta L &= 0, \pm 1 \\ \Delta S &= 0 \\ \Delta J &= 0, \pm 1 \quad (J=0 \rightarrow J=0 \text{ ممنوع است}) \end{aligned}$$

در همه موارد نماد  $\Delta$  نمایانگر اختلاف میان عدد کوانتومی حالت‌های آغازی و حالت‌های پایانی گذار است.

### ترویگی [ پارینه ]

علاوه بر قواعد گزینش که در بالا گفته شد، قاعده مهم دیگری مربوط به



یک مفهوم کلی به نام **تروگی** وجود دارد. تروگی یک حالت اتمی می‌تواند زوج یا فرد باشد، و جمع مقادیر  $l$  تک تک الکترونها این را معین می‌کند. هرگاه ایمن حاصل جمع زوج باشد، تروگی زوج و در غیراین صورت فرد است. برای مثال، حالت‌های یک اتم دو الکترونی را در نظر بگیرید. اگر یکی از الکترونها، الکترون  $s$  ( $l_1 = 0$ ) و دیگری الکترون  $p$  ( $l_2 = 1$ ) باشد، پس  $l_1 + l_2 = 1$  است. از این رو همه حالت‌های  $sp$  دارای تروگی فردند. همین‌طور، همه حالت‌های  $sd$  دارای تروگی زوجند و جز اینها. قاعده‌ه گزینش زیر برای تابش دوقطبی حاصل از گذارهای بین دو حالت برقرار است:

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرد} \leftarrow \text{فرد} \\ \text{زوج} \leftarrow \text{زوج} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{( ممنوع )، فرد} \rightarrow \text{زوج} \\ \text{( مجاز )} \end{array}$$

به عبارت دیگر، تروگی حالت آغازی و تروگی حالت پایانی باید باهم متفاوت باشند.

یک حالت برانگیخته ممکن است طوری باشد که نتواند با تابش دوقطبی به هیچ حالت پایین‌تری گذار کند. گفته می‌شود این حالت **فرا پایدار** است. اگر اتمی در یک حالت فرا پایدار باشد، یا باید با گسیل تابشی غیر از تابش دوقطبی، مثلاً "چهارقطبی و جزاینها، یا در اثر برخورد با اتمهای دیگر، به حالت پایه باز گردد.

### ۹۰۸ بینابهای مولکولی

مولکولها، مانند اتمها، وقتی در حالت گازی به‌گونه‌ای مناسب برانگیخته شوند، بینابهای گسسته از خود نشان می‌دهند. این نشانه‌ه آن است که حالت‌های انرژی آنها کوانتیده‌اند و یک مولکول ممکن است با جذب یا گسیل یک فوتون، از یک حالت انرژی به حالتی دیگر برود.

برای مقاصد بیناب‌نمایی، انرژی یک ملکول را می‌توان متشکل از مجموع سه نوع انرژی دانست. این انرژیها عبارتند از، انرژی چرخشی  $E_{rot}$ ، انرژی ارتعاشی  $E_{vib}$  و انرژی الکترونی  $E_{el}$ . بدین‌سان

$$E = E_{\text{rot}} + E_{\text{vib}} + E_{\text{el}}$$

از بین این انرژیها، معمولا" انرژی چرخشی از همه کوچکتر و حدود چندصدم الکترون ولت است. انرژی ارتعاشی حدود دهم الکترون ولت است، درحالی که بزرگترین بخش انرژی از نوع انرژی الکترونی است که معمولا" حدود چند الکترون ولت است. هریک از این سه نوع انرژی به طریقی متفاوت کوانتیده است و از این رو به هریک از آنها اعداد کوانتومی متفاوتی وابسته اند.

گذار ممکن است تنها مربوط به ترازهای چرخشی باشد. در این صورت بیناب حاصل را که معمولا" در ناحیهء فروقرمز دور یا که موجها ظاهر می شود بیناب چرخشی خالص می نامند. اگر انرژی ارتعاشی نیز در گذار تغییر کند ولی انرژی الکترونی بدون تغییر بماند، بیناب چرخشی - ارتعاشی خواهیم داشت، که خطوط آن بیشتر در فروقرمز نزدیک یافت می شوند. سرانجام، گذارهایی که در آنها انرژی الکترونی تغییر می کند پرانرژیترین گذارها هستند. این نوع بیناب را بیناب الکترونی می نامند و خطوط آن معمولا در ناحیهء دیدگانی و فرابنفش ظاهر می شوند.

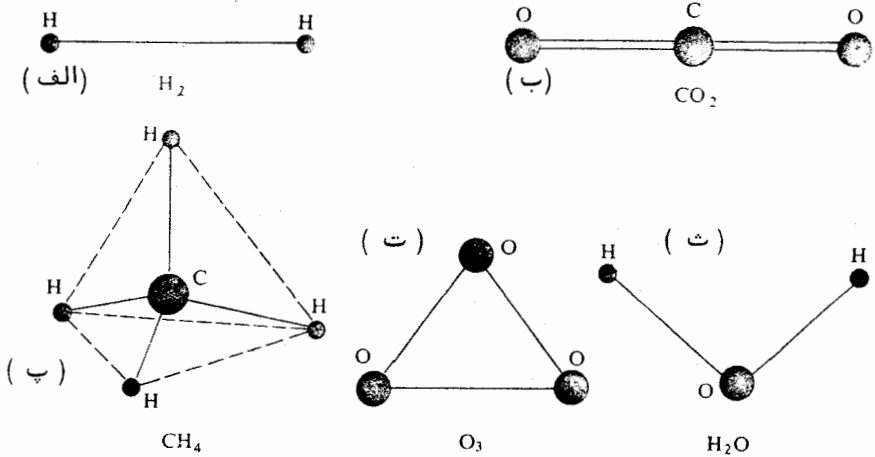
### ترازهای انرژی چرخشی

انرژی چرخشی، انرژی جنبشی چرخش تمامی مولکول است. کوانتیدگی این انرژی با اعداد کوانتومی چرخشی مشخص می شود. اینکه چند عدد کوانتومی برای مشخص کردن یک حالت چرخشی لازم است، به شکل هندسی مولکول بستگی دارد. از نظر شکل هندسی چهار نوع مولکول وجود دارند:

- (۱) مولکولهای خطی
- (۲) مولکولهای فرفره ای کروی
- (۳) مولکولهای فرفره ای متقارن
- (۴) مولکولهای فرفره ای نامتقارن

این چهار نوع مولکول در شکل ۱۳-۸ نمایش داده شده اند.

برای مشخص کردن حالت چرخشی مولکولهای خطی و فرفره ای کروی، تنها به یک عدد کوانتومی  $J$  نیاز است. مانند حالت های اتمی، بزرگی اندازه حرکت زاویهای



شکل ۱۳.۸) مثالهایی برای نشان دادن چندنوع تقارن چرخشی مولکولی. (الف) و (ب) مولکولهای خطی  $I_a = I_b, I_c = 0$  ، (پ) مولکولهای فرفرمای کروی ،  $I_a = I_b = I_c$  (ت) مولکولهای فرفرمای متقارن ،  $I_a \neq I_b \neq I_c$  ، (ث) مولکولهای فرفرمای نامتقارن ،  $I_a = I_b \neq I_c$

برابر  $\hbar\sqrt{J(J+1)}$  است. انرژی چرخشی از معادل کوانتومی مقدار کلاسیک آن به دست می آید، یعنی

$$E_{rot} = \frac{(\hbar)^2 [ \hbar\sqrt{J(J+1)} ]^2}{I} = J(J+1) Bhc \quad ( ۵۲.۸ )$$

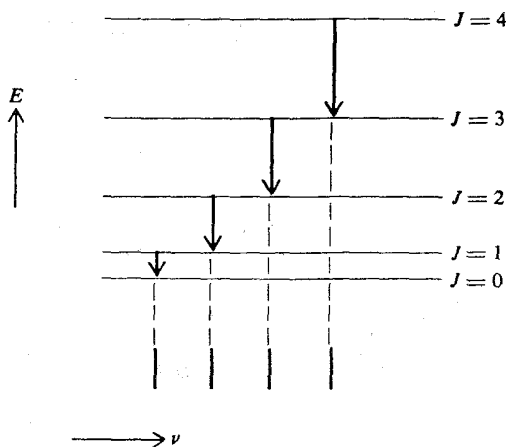
که در آن:

$$B = \frac{h}{8\pi^2 cI} \quad ( ۵۳.۸ )$$

و:

$$J = 0, 1, 2, \dots$$

در اینجا  $I$  گشتاور لختی مولکول به دور محور چرخشی است، (برای مولکولهای دو اتمی متقارن، که جرم هر یک از اتمها  $M/2$  و جدایی آنها  $2b$  است، گشتاور لختی از رابطه کلاسیک  $I = Mb^2$  به دست می آید). نموداری از ترازهای انرژی چرخشی



شکل ۱۴۰۸ نمودار گذار برای یک بیناب چرخشی خالص.

یک مولکول خطی در شکل ۱۴۰۸ دیده می‌شود.

برای مشخص کردن حالت‌های چرخشی مولکولهای فرفره‌ای متقارن، سه دو عدد کوانتومی نیاز است. معمولاً این دو عدد را با حروف  $J$  و  $K$  نمایش می‌دهند، باز  $\pi\sqrt{J(J+1)}$  اندازه حرکت چرخشی کل است. عدد کوانتومی  $K$  مولفه اندازه حرکت زاویه‌ای بر روی محور تقارن مولکول بوده یکای آن  $\hbar$  است.  $J$  می‌تواند برای یک مقدار معین  $K$ ، هر یک از مقادیر  $K$ ،  $K+1$ ،  $K+2$  و جز اینها را اختیار کند. بنابراین ترازهای انرژی چرخشی از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$E_{\text{rot}} = J(J+1)Bhc + K^2(C-B)hc \quad (54.8)$$

در این رابطه کمیت‌های  $B$  و  $C$  به دو گشتاور لختی اصلی مولکول مربوط می‌شوند

$$B = \frac{h}{8\pi^2 c I_b} \quad C = \frac{h}{8\pi^2 c I_c} \quad (55.8)$$

در اینجا  $I_c$  گشتاور لختی حول محور تقارن و  $I_b$  گشتاور لختی حول محور عمود است.

مولکولهای فرفره‌ای نامتقارن، سه گشتاور لختی گوناگون دارند و متضمن سه عدد کوانتومی چرخشی هستند. بررسی نظری این مورد خیلی پیچیده است و فرمول ساده‌ای برای انرژیهای حالتیهای کوانتیده وجود ندارد (۲۳). قواعد گذارهای چرخشی به وسیله قواعد کلی گزینش معین می‌شوند:

$$\begin{aligned} \Delta J &= 0, \pm 1 \\ \Delta K &= \pm 1 \end{aligned} \quad ( ۵۶۰۸ )$$

علاوه بر قواعد بالا، قواعد گزینش دیگری که تقارن حالتیهای چرخشی را دربرمی‌گیرند وجود دارند که ما در اینجا وارد بحث آنها نمی‌شویم.

### ترازهای انرژی ارتعاشی

برای مولکولی که دارای  $N$  اتم است، تعداد  $3N$  مد حرکت وجود دارد، که از میان آنها سه مد وابسته به جابجایی مولکول و سه مد مربوط به چرخش آن است ( برای مولکولهای خطی دو مد حرکت مربوط به چرخش است) بقیه آنها، یعنی  $3N - 6$  ( یا  $3N - 5$  ) مد مربوط به انواع ارتعاشهای طبیعی هستند. بررسی نظری نشان می‌دهد که کوانتس هر مد ارتعاشی، با یک تک عدد کوانتومی وابسته مشخص می‌شود. بسامدهای طبیعی آنها را با  $\nu_1, \nu_2, \dots$  و اعداد کوانتومی وابسته را با  $v_1, v_2, \dots$  نشان می‌دهیم. بنابراین انرژی ارتعاشی برابر است با:

$$E_{\text{vib}} = (v_1 + \frac{1}{2})h\nu_1 + (v_2 + \frac{1}{2})h\nu_2 + \dots \quad ( ۵۷۰۸ )$$

رابطه بالا در صورتی برقرار است که دامنه ارتعاشها به اندازه‌ای کوچک باشد که حرکت، کم‌وبیش خاصیت سازگانی داشته باشد. این فرمول نشان می‌دهد که ترازهای انرژی یک مد طبیعی معین (۱) همفاصله‌اند و (۲) انرژی پایین‌ترین حالت ارتعاشی  $(v_1 = 0, v_2 = 0, \dots)$  صفر نیست بلکه مقدار معین  $(\frac{1}{2})h\nu_1 + (\frac{1}{2})h\nu_2 + \dots$  را داراست. این انرژی را انرژی نقطه صفر می‌نامند و حتی در دمای صفر مطلق نیز وجود دارد.

قاعده گزینش برای گذارهای ارتعاشی عبارت است از:

$$\Delta v = \pm 1 \quad ( ۵۸.۰۸ )$$

این قاعده تنها در صورتی برقرار است که حرکت کاملاً " سازگان باشد. چنین وضعی در حقیقت هرگز روی نمی‌دهد. گذارهایی که برای آنها  $\Delta v = +۳$  و  $\Delta v = +۲$  است نیز وجود دارند، ولی معمولاً خیلی ضعیفتر از گذارهای اصلی اند که در آنها  $\Delta v = +۱$  . یک مولکول دو اتمی هم هسته، نه بیناب چرخشی خالص دارد و نه بیناب چرخشی- ارتعاشی، زیرا این مولکولها گشتاور دوقطبی الکتریکی همیشگی ندارند. در نتیجه نه گذارهای چرخشی گشتاور دوقطبی نوسانی تولید می‌کنند، نه گذارهای ارتعاشی. بنابراین تابش دوقطبی وابسته وجود نخواهد داشت.

از سوی دیگر مولکولهای دو اتمی ناهم هسته‌ای مانند اسید کلریدریک، بینابهای چرخشی - ارتعاشی از خود نشان می‌دهند.

نمودار گذار یک مولکول دو اتمی، که ترازهای انرژی ارتعاشی را نشان می‌دهد، در شکل ۱۵.۸ نشان داده شده است. در این شکل ترازهای انرژی چرخشی نیز اضافه شده است. قاعده گزینش برای گذارهای چرخشی - ارتعاشی عبارت است از:

$$\Delta J = 0, \pm 1 \quad ( ۵۹.۰۸ )$$

بیناب به سه شاخه با نامهای  $P$ ،  $Q$  و  $R$  که برحسب مقدار  $\Delta J$  مشخص می‌شوند تقسیم می‌شود.

$$\Delta J = -1 \quad \text{شاخه } P$$

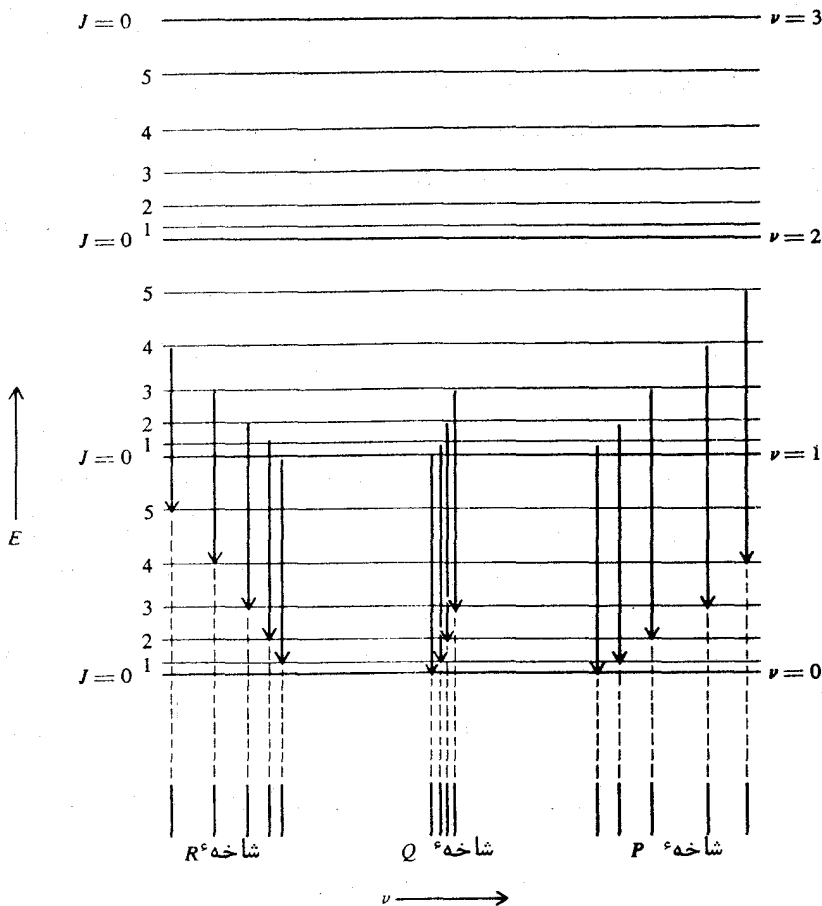
$$\Delta J = 0 \quad \text{شاخه } Q$$

$$\Delta J = +1 \quad \text{شاخه } R$$

### حالتهای انرژی الکترونی در مولکولها

بحث زیر بیشتر مربوط به مولکولهای دو اتمی است، با این حال بعضی از اصول عمومی آن در مورد دیگر مولکولها نیز صادق است.

گشتاورهای زاویه‌ای مداری و اسپینهای الکترونی در مولکولها، به همان روشی که در بحث اتمها دیدیم، با یکدیگر جفت می‌شوند. در مولکولهای دو اتمی یکی از



شکل ۱۵۰۸ نمودار گذار برای یک بیناب چرخشی - ارتعاشی.

اعداد کوانتومی مهم، حاصل جمع تصاویر گشتاورهای زاویه‌ای مداری بر روی خط  
 واصل میان دو اتم است. این عدد کوانتومی را با حرف  $\Lambda$  نشان می‌دهند. حالت‌های  
 الکترونی گوناگون مربوط به مقادیر مختلف  $\Lambda$  را با حروف بزرگ یونانی نمادگذاری  
 می‌کنند:

$$\Lambda : 0, 1, 2, 3, \dots$$

حالت الکترونی :  $\Sigma, \Pi, \Delta, \Phi, \dots$

عدد کوانتومی چرخشی  $J$ ، برای یک مقدار معین  $\Lambda$ ، می‌تواند یکی از مقادیر  $\Lambda$

$\Lambda + 1$  ،  $\Lambda + 2$  ، ... و جز اینها را اختیار کند .

در اینجا نیز مانند آنچه درباره آنها گفته شد ، اسپین کل  $S$  ، چندگانگی یک حالت الکترونی را مشخص می کند . این چندگانگی برابر با  $2S + 1$  است و تعداد زیرترازها را برای یک مقدار معین  $J$  مشخص می کند . بدین سان حالت های یگانه ( $S = 0$ ) عبارتند از :

$$^1\Sigma, ^1\Pi, ^1\Delta, \dots$$

و حالت های دوگانه ( $S = 1/2$ ) :

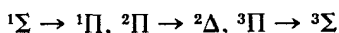
$$^2\Sigma, ^2\Pi, ^2\Delta, \dots$$

و جز اینها . در اینجا نیز اگر تعداد کل الکترونها زوج ( یا فرد ) باشد ، چندگانگی فرد ( یا زوج ) خواهد بود .  
قواعد گزینش برای گذارهای الکترونی چنین اند :

$$\Delta\Lambda = 0, \pm 1 \quad (60.8)$$

$$\Delta S = 0 \quad (61.8)$$

چند نمونه از گذارهای الکترونی مجاز در زیر آورده می شوند :

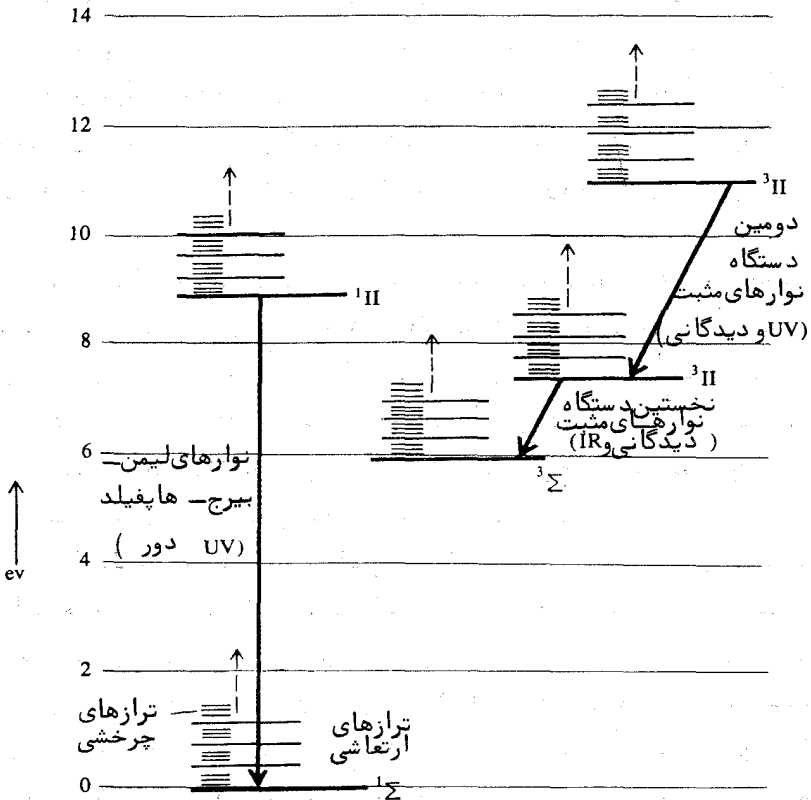


چون انرژیهای چرخشی و ارتعاشی به انرژیهای الکترونی در مولکول اضافه می شوند ، گذارهای الکترونی ممکن است با گذارهای ارتعاشی و چرخشی همراه باشند . در نتیجه برای هر گذار الکترونی ، تعداد زیادی خط به وجود می آید که ساختار ارتعاشی-چرخشی مولکولها را در بینابهای الکترونی آنها تشکیل می دهند . بخشی از نمودار ترازهای انرژی مولکول ازت  $N_2$  به عنوان نمونه در شکل ۱۶.۸ کشیده شده است .

### ۱۰.۸ ترازهای انرژی اتمی در جامدات

اتمی را که به عنوان یک جزء ساختاری یا یک ناخالصی در جسمی جامد جای دارد در نظر بگیرید . یک یا چند الکترون ممکن است در جسم باشند که به کل جسم





شکل ۱۶.۸ بخشی از نمودار ترازهای انرژی مولکول ازت. گذارهای الکترونی چند دستگاه نوار مهم مشخص شده‌اند. ترازهای انرژی چرخشی و ارتعاشی بمقیاس شکل کشیده نشده‌اند.

تعلق دارند و به اتم ویژه‌ای وابستگی ندارند.

ترازهای انرژی این الکترون‌ها به صورت نوارهایی پهن درمی‌آیند که به نوارهای ظرفیتی و رسانشی جامد معروفند. پس، اتم مورد بحث به یک یون تبدیل می‌شود. الکترون‌های در بند این یون، ممکن است حالت‌های کوانتیده گوناگونی در اختیار داشته ترازهای انرژی متفاوتی دارا باشند. این وضع یک بیناب جذبی یونی

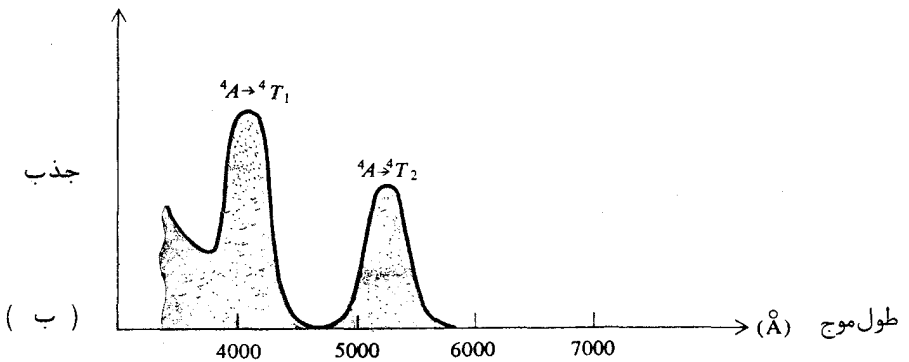
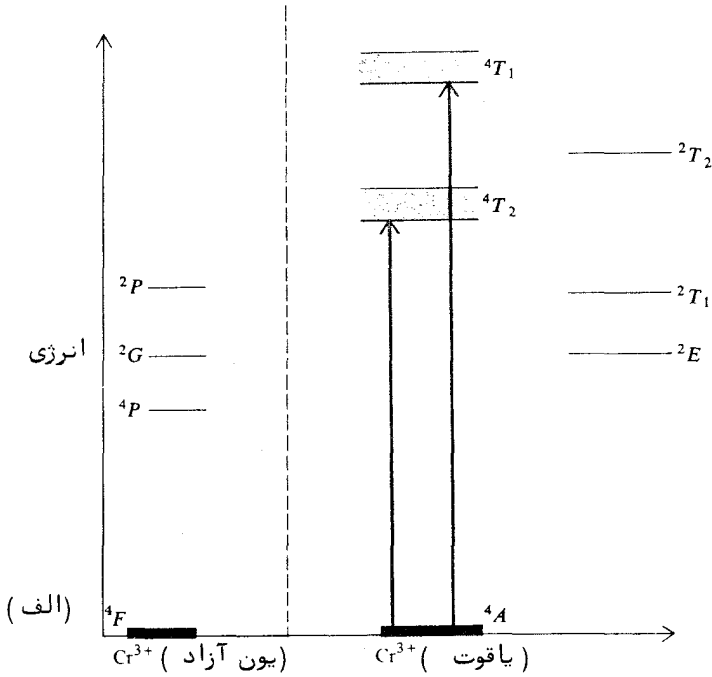
ویژه‌ای به وجود می‌آورد.

در مورد یونهای نادر خاکی، لایه‌های پرنشده مربوط به الکترونهای  $4f$  - هستند که خیلی در عمق واقع‌اند. الکترونهای بیرونی برای الکترونهای این لایه سپر واقع می‌شوند، و وقتی این یون آزاد در یک جسم جامد قرار می‌گیرد، ترازهای انرژی آن خیلی تغییر نمی‌کنند. ترازها برحسب اندازه حرکت زاویهای کوانتیده‌اند و روش نمادگذاری در آنها مانند روشی است که برای ترازهای انرژی اتمی در بخش ۲۰۸ به‌کار برده شد.

برای فلزات واسطه، مانند آهن، کرم و جز اینها، لایه  $3d$  بلور به‌طور کامل پر نیست. این لایه بخوبی لایه  $4f$  در فلزات نادر حفاظ ندارد. در نتیجه وقتی یونهای اتمهای واسطه در یک جسم جامد قرار می‌گیرند، ترازهای انرژی آنها "تغییر می‌کنند. در این جا، تقارن تابع موج در تعیین ترازهای انرژی مهم است نه اندازه حرکت زاویهای، بویژه اگر یون درون یک شبکه بلوری باشد. پس کوانتیدگی انرژی، بیشتر توسط تقارن میدان یونهای مجاور تعیین می‌شود.

بسط نظریه ترازهای انرژی اتمی در بلورها بسیار پیچیده و از حوصله این کتاب خارج است. هم‌اکنون منابع گسترده‌ای که تعداد آنها روزافزون است در این باره موجود می‌باشند. با این حال برای نشان دادن شکل ترازهای انرژی در یک مورد نوعی، نمودار ترازهای یون کرم  $Cr^{3+}$  در شکل ۱۷۰۸ ارائه می‌شود. ترازهای یون آزاد در سمت چپ نشان داده شده و ترازهای یون کرم  $Cr^{3+}$  در یاقوت در سمت راست نمایش داده شده‌اند. نمادهای  $A$ ،  $E$  و  $T$  انواع تقارن را نشان می‌دهند. بلور یاقوت از  $Al_2O_3$  (corundum) تشکیل شده است که در آن بخشی از اتمهای آلومینیم توسط کرم جایگزین شده است. رنگ سرخ یاقوت، از جذب نور سبز و آبی مربوط به گذار از حالت پایه  $4A$  به حالت‌های برانگیخته  $4T_1$  و  $4T_2$ ، که در شکل نشان داده شده‌اند، ناشی می‌شود.

برای مطالعه بیشتر درباره بیناب‌نمایی اتمی، ملکولی و همچنین بیناب‌نمایی حالت جامد، مراجع (۱۸)، (۱۹)، (۲۳)، (۲۴)، (۳۰) و (۴) پیشنهاد می‌شوند.



شکل ۱۷۰۸ (الف) نمودار ترازیهای انرژی یون  $Cr^{3+}$  در حالت آزاد و در یاقوت. (ب) جذب نور به وسیله یون  $Cr^{3+}$  در یاقوت.

مسائل

- ۱۰۸ اگر  $R$  در معادله  $۹۰.۸$ ، ثابت ریذبرگ برای یک هسته به جرم — بینهایت باشد، نشان دهید که ثابت ریذبرگ برای یک هسته به جرم  $M$  تقریباً " چنین است  $R_M \approx R - (m/M)R$
- ۲۰۸ اختلاف میان بسامدهای خطوط  $\alpha$  ی بالمر را در هیدروژن و دوتریم پیدا کنید.
- ۳۰۸ بسامد گذار  $n = 100 \rightarrow n = 101$  در هیدروژن را محاسبه کنید.
- ۴۰۸ با عمل جایگذاری در معادله شعاعی شرودینگر  $۳۶.۰۸$ ، نشان دهید که انرژی حالت  $2s$  اتم هیدروژن (جدول  $۲۰.۸$ )  $-\frac{1}{4}R$  است.
- ۵۰۸ یک اتم هیدروژن را در حالت پایه در نظر بگیرید و کره‌ای با شعاع  $r$  و به مرکز هسته این اتم تصور کنید. رابطه‌ای برای احتمال اینکه الکترون درون این کره باشد به دست آورید. (الف) این احتمال برای  $r = a_H$  چقدر است؟ (ب) برای چه مقداری از  $r$  این احتمال ۹۹ درصد است؟
- ۶۰۸ کلیه حالت‌های یک پیکربندی  $pf$  دو الکترون را در جفت‌شدگی  $LS$  تعیین کنید.
- ۷۰۸ کلیه گذارهای دوقطبی مجاز بین پیکربندی‌های  $pd$  و  $pf$  را تعیین کنید.
- ۸۰۸ عمر حالت  $2p$  اتم هیدروژن را با فرض اینکه اندازه گشتاور دوقطبی گذار به حالت  $1s$  تقریباً برابر  $ea_H$  است، محاسبه کنید.
- ۹۰۸ بسامد تابشی که در گذار چرخشی خالص  $J = 0 \rightarrow J = 1$  از اسپین کلریدریک گسیل می‌شود را به دست آورید. فاصله میان اتم کلر و اتم هیدروژن  $۳$  را انگسترم است.

## فصل نهم

تقویت نور . لیزرہا

## ۱۰۹ درآمسد

پیدایش لیزر یا میزر نوری<sup>۱</sup>، بر دانش نورشناسی چنان اثر قابل ملاحظه‌ای داشته است که کمتر اثری را بر رشته‌های دیگر علوم می‌توان با آن مقایسه کرد. نوسان‌کننده‌های لامپی که تابش هم‌دوس الکترومغناطیسی با بسامدهایی تا  $10^9$  هرتز را تولید می‌کنند، از سالها پیش شناخته شده بودند. میزر در سال ۱۳۳۳/۱۹۵۴ ابداع شد (۱۳). میزرها که موج ( $10^9$  تا  $10^{11}$  هرتز) تولید می‌کنند. عملی بودن استفاده از اصول میزر برای تقویت نور، ( $10^{14}$  هرتز)، در سال ۱۳۳۷/۱۹۵۸ به وسیله شاولو "Schawlow" و "تاونز" Townes " بررسی و نظریه‌های بنیادی آن پیشنهاد شد. نخستین لیزر قابل استفاده در سال ۱۳۳۹/۱۹۶۰ در آزمایشگاههای پژوهشی هیوز از بلور مصنوعی یا قوت ساخته شد. چند ماه بعد یک لیزر گازی هلیموم - نئون در آزمایشگاههای بل تلفن به کار افتاد. لیزر یا قوتی نور دیدگانی

۱- کلمه لیزر از حروف اول کلمات "light amplification by stimulated emission of radiation" ساخته شده است. لیزر چند سال بعد از میزر (microwave amplifiers) توسعه یافت. به همین دلیل لیزرهای اولیه میزرها نوری خوانده می‌شدند ولی اکنون کلمه لیزر پذیرش کلی یافته است.

قرمز تولید می‌کند. لیزر هلیوم-نئون هم نور دیدگانی قرمز تولید می‌کند هم تابش فروقرمز. امروزه انواع لیزرهایی که بسامدهای گوناگون، از فروقرمز دور تا فرابنفش، تابش می‌کنند ساخته می‌شوند (۲۵).

لیزر در واقع یک نوسان‌کنندهء اپتیکی است و اساساً از یک محیط تقویت‌کننده که در داخل یک بازآواگر یا کاواک مناسب قرار دارد تشکیل می‌شود. نوسان لیزر را می‌توان به موج ایستاده در کاواک تشبیه کرد. محیط تقویت‌کننده به کمک یک نوع انگیزش خارجی به‌کار می‌افتد. برونداد لیزر، پرتوی بسیار تکفام و شدید است.

شدت درخشش چشمه‌های معمولی نور (قوس، رشته، تخلیه) معادل تابش گرمایی در دماهایی کمتر از حدود  $10^4$  درجهء کلوین است. درحالی که با لیزر، شدت‌هایی معادل تابش گرمایی در دماهای  $10^{20}$  تا  $10^{30}$  درجه باسانی تولید می‌شود. این شدت‌های هنگفت بررسی پدیده‌های نورشناختی جدید، مانند نورشناسی غیرخطی، زنش اپتیکی، تداخل از راه دور و پدیده‌های دیگر، که قبلاً "غیرممکن بودند" را امکان‌پذیر می‌سازند. شماری از کاربردهای عملی لیزر شامل مخابرات دوربرد، رادار اپتیکی، جوشکاری خیلی ظریف، جراحی چشم و جز اینها هستند.

## ۲.۹ گسیل القایی و تابش گرمایی

در سال ۱۹۱۷/۱۲۹۶ اینشتین نظریهء گسیل القایی تابش دستگاه‌های اتمی را برای نخستین بار ارائه داد. او نشان داد که برای توصیف کامل برهم‌کنش ماده و تابش، فرایندی را باید در نظریه گنجانید که در آن، یک اتم تحریک‌شده می‌تواند در حضور تابش القاء شود و یک فوتون بگسیلد و به حالت با انرژی پایین‌تر فروافتد. دستگاه اتمی کوانتیده‌ای را که ترازهای آن با اعداد ۱، ۲، ۳، ... و انرژی‌های آنها با  $E_1$ ،  $E_2$ ،  $E_3$ ، ... نشان داده می‌شوند در نظر می‌گیریم. فراوانی اتم‌ها در یکای حجم در هر تراز را با  $N_1$ ،  $N_2$ ،  $N_3$ ، ... نشان می‌دهیم. اگر دستگاه اتمی با تابش گرمایی در دمای  $T$  در ترازمندی باشد، فراوانی نسبی هر دو تراز، مانند  $N_2/N_1$  از معادلهء بولتزمن به‌دست می‌آید.

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{e^{-E_2/kT}}{e^{-E_1/kT}} \quad (1.9)$$

که در آن  $k$  ثابت بولتزمن است. اگر برای صراحت فرض کنیم  $E_2 > E_1$ ، دراین صورت  $N_2 < N_1$ .

یک اتم در تراز ۲ می‌تواند با گسیل یک فوتون به تراز ۱ فرو افتد. احتمال گذار در یکای زمان، برای این گسیل خودبه‌خودی، از تراز ۲ به تراز ۱ را با  $A_{21}$  نشان می‌دهیم. پس شمار فروافت‌های خودبه‌خودی در یکای زمان  $N_2 A_{21}$  است. (مقدار  $A_{21}$  را می‌توان به کمک معادله<sup>۱</sup> (۸.۸) در فصل قبل محاسبه کرد). علاوه بر این گذارهای خودبه‌خودی، گذارهای القایی نیز وجود دارند. آهنگ این گذارهای القایی بین تراز ۲ و تراز ۱ با چگالی انرژی  $u_\nu$  تابش و بسامد  $\nu$  آن متناسب است، که در آن:

$$\nu = \frac{(E_2 - E_1)}{h} \quad (2.9)$$

اگر  $B_{12}$  و  $B_{21}$  نماینده<sup>۲</sup> ثابتهای تناسی در گسیل القایی باشند، شمارگذارهای القایی نزولی (گسیلها) در هر ثانیه برابر خواهد بود با:

$$N_2 B_{21} u_\nu$$

همین‌طور، شمارگذارهای القایی صعودی (درآشامیها) در هر ثانیه برابر است با:

$$N_1 B_{12} u_\nu$$

ثابتهای تناسی در عبارات بالا به ضریبهای  $A$  و  $B$  ی اینشتین موسومند. در شرایط ترازمندی، آهنگ‌گذارهای نزولی با گذارهای صعودی یکی است،

یعنی

$$N_2 A_{21} + N_2 B_{21} u_\nu = N_1 B_{12} u_\nu \quad (3.9)$$

ازاین معادله نتیجه می‌شود:

$$u_\nu = \frac{N_2 A_{21}}{N_1 B_{12} - N_2 B_{21}}$$

با درنظرگرفتن معادله<sup>۳</sup> (۱.۹) می‌توانیم بنویسیم:



$$u_\nu = \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{1}{(B_{12}/B_{21}) e^{h\nu/kT} - 1} \quad (4.9)$$

برای اینکه این رابطه با رابطه تابش پلانک برابری کند، باید تساویهای زیر برقرار باشند.

$$B_{12} = B_{21} \quad (5.9)$$

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \quad (6.9)$$

بدین سان برای اتمهایی که با تابش گرمایی در ترازمندی‌اند، نسبت گسیل القایی به گسیل خودبه‌خودی، از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\frac{\text{گسیل القایی}}{\text{گسیل خودبه‌خودی}} = \frac{B_{21} u_\nu}{A_{21}} = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (7.9)$$

از بخش ۵.۷ بیاد می‌آوریم که این دقیقا "همان شمار فوتون در یک مد، یعنی نمار اشغال، است.

بنابر نتیجه بالا، آهنگ گسیل القایی در چشمه‌های معمولی نور در بخش دیدگانی ( $T \sim 10^3 \text{ }^\circ\text{K}$ ) بسیار ناچیز است. از این رو، تابش در این چشمه‌ها، بیشتر به روش گذار خودبه‌خودی گسیل می‌شود. چون این گذارها به‌طور کاتوره‌ای انجام می‌گیرند چشمه‌های معمولی نور مرئی ناهمدوسند.

از سوی دیگر، چگالی تابش برای برخی از مدهای برتر در یک لیزر چنان زیاد می‌شود که قسمت اعظم گذارها القایی هستند. یک نتیجه اینکه تابش گسیلیده فوق‌العاده همدوس است. دیگر اینکه توان تابشی بینایی در بسامد کساری لیزر بمراتب بیشتر از چشمه‌های معمولی نور است.

### ۳.۹ تقویت در یک محیط

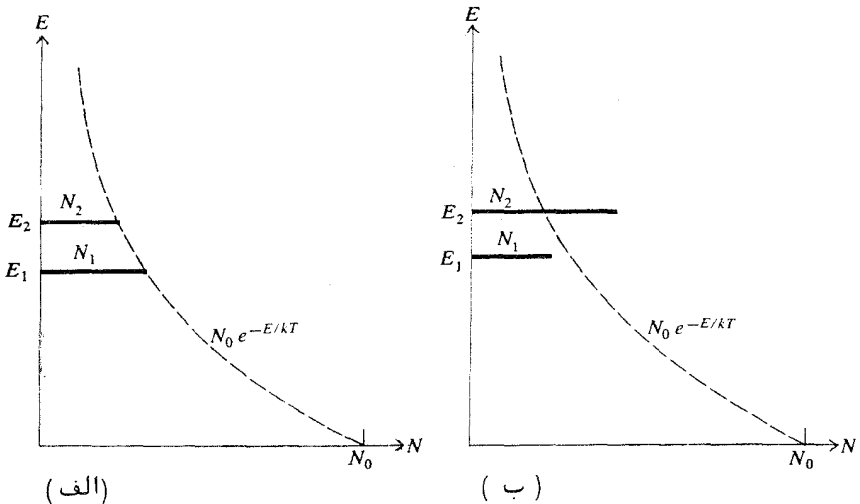
یک محیط نوری که تابش از آن عبور می‌کند را در نظر بگیرید. فرض کنید محیط دارای اتمهایی با ترازهای گوناگون  $E_1$ ،  $E_2$ ،  $E_3$  و جز اینها باشد. به دو تراز، مثلا "  $E_1$  و  $E_2$  که برای آنها  $E_1 < E_2$  است، بیندیشید. بیشتر دیدیم که

آهنکهای گسیل و جذب القایی مربوط به این دو تراز بترتیب با  $N_1 B_{12}$  و  $N_2 B_{21}$  متناسبند. چون  $B_{21} = B_{12}$ ، پس آهنک‌گذارهای نزولی در صورتی از گذارهای صعودی بیشتر خواهد بود که داشته باشیم:

$$N_2 > N_1$$

یعنی فراوانی حالت بالاتر از حالت پایین‌تر بیشتر باشد.

چنین حالتی با توزیع ترازمندی گرمایی بولتزمن، یعنی رابطه (۱۰۹) مغایر است و واژگونی فراوانی نامیده می‌شود (شکل ۱۰۹). اگر واژگونی فراوانی وجود داشته باشد، در این صورت چنانکه نشان خواهیم داد، شدت پرتو نور زیاد می‌شود. یا به عبارت دیگر، ضمن عبور از محیط تقویت می‌شود، زیرا بهره ناشی از گسیل القایی از اتلاف ناشی از درآشامی تجاوز می‌کند.



شکل ۱۰۹ نمودارهای چگالیهای فراوانی دو تراز یک دستگاه (الف) توزیع عادی یا بولتزمن (ب) توزیع واژگون شده.

۲- اگر ترازهای انرژی دستگاه واگن باشند، یعنی اگر برای یک انرژی معین، چندین زیرتراز وجود داشته باشند، آن وقت روابط بهره به صورت زیر تغییر خواهند کرد: کمیت  $N_1$  بسا  $(g_2/g_1) N_1$  جایگزین می‌شود. پارامترهای واگنی  $g_1$  و  $g_2$  بترتیب شمار زیرترازها در تراز ۱ و تراز ۲ هستند، به این ترتیب شرط تقویت به صورت  $N_2 > (g_2/g_1) N_1$  درمی‌آید.

تابش القایی در جهت پرتو اولیه گسیل می‌شود و با آن رابطه فازی معینی دارد، بدین معنی که با پرتو اولیه همدوس است. اثبات این مطلب بر مبنای مدهای میدان تابش الکترومغناطیسی امکان‌پذیر است. عمل گسیل القایی یک اتم تکی باعث می‌شود یک فوتون به مد بخصوصی که گسیل القایی را ایجاد می‌کند، افزوده شود. همان‌طور که نشان دادیم، آهنگ گسیل القایی با تعداد فوتونهای موجود در مد مورد نظر متناسب است. مدها به کمک بسامد، جهت بردار موج و قطبیدگی از یکدیگر تشخیص داده می‌شوند. از این رو فوتونی که از راه گسیل القایی به یک مد اضافه شده، شبیه به فوتونهایی است که از قبل در آن مد موجود بوده‌اند.

### ثابت بهره

برای تعیین کمی مقدار تقویت در محیط، باید به جزئیات گسیل و جذب توجه دقیقتری کنیم. فرض کنید یک دسته پرتو موازی در محیطی که در آن واژگونی فراوانی رخ داده است، پیش برود. چگالی بینایی انرژی  $u_\nu$  و تابندگی بینایی  $I_\nu$  در بازه بسامدی  $\nu$  و  $\nu + \Delta\nu$ ، با رابطه زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند.

$$I_\nu \Delta\nu = \frac{I_\nu \Delta\nu}{c} \quad (۸.۹)$$

به‌خاطر پدیده دوپلر و دیگر اثرهای پهن‌کننده خطوط بینایی، همه اتمهایی که در تراز انرژی معینی هستند، درگسیل و جذب در یک بازه بسامدی موثر نیستند، بلکه از  $N_1$  اتم در یکای حجم که در تراز ۱ هستند تنها تعدادی در یکای حجم، مثلاً  $\Delta N_1$  در انجام آن مؤثرند. در نتیجه آهنگ گذارهای صعودی چنین است.

$$B_{12} u_\nu \Delta N_1 = B_{12} \left( \frac{I_\nu}{c} \right) \Delta N_1$$

همین‌طور آهنگ گذارهای القایی نزولی برابر است با

$$B_{21} u_\nu \Delta N_2 = B_{21} \left( \frac{I_\nu}{c} \right) \Delta N_2$$

هر گذار صعودی مقداری انرژی، به اندازه کوانتوم  $h\nu$ ، از پرتو می‌کاهد. همین‌طور

هر گذار نزولی همین مقدار را به پرتو می‌افزاید، بنابراین آهنگ زمانی تغییر چگالی انرژی بینایی در بازه بسامدی  $\Delta\nu$  چنین است

$$\frac{d}{dt} (u_\nu \Delta\nu) = h\nu (B_{21} \Delta N_2 - B_{12} \Delta N_1) u_\nu \quad (9.9)$$

موج در زمان  $dt$  مسافت  $dx = c dt$  را می‌پیماید. به این ترتیب، با در نظر گرفتن معادله (۸.۹) می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{dI_\nu}{dx} = \frac{h\nu}{c} \left( \frac{\Delta N_2}{\Delta\nu} - \frac{\Delta N_1}{\Delta\nu} \right) B_{21} I_\nu \quad (10.9)$$

که آهنگ تقویت پرتو را در جهت انتشار به دست می‌دهد. جواب معادله دیفرانسیلی بالا را می‌توان با انتگرال‌گیری به دست آورد و چنین است

$$I_\nu = I_{0\nu} e^{\alpha_\nu x} \quad (11.9)$$

که در آن  $\alpha_\nu$  ثابت بهره در بسامد  $\nu$  است و از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{c} \left( \frac{\Delta N_2}{\Delta\nu} - \frac{\Delta N_1}{\Delta\nu} \right) B_{12} \quad (12.9)$$

اگر  $\Delta\nu$  را پهنای خط بینایی بگیریم، یک عبارت تقریبی برای ثابت بهره در وسط خط بینایی به دست می‌آید. برای این منظور  $\Delta N$  ها مساوی  $N$  ها قرار داده می‌شوند. نتیجه، گذشته از یک ثابت عددی با مرتبه بزرگی واحد، درست و به صورت زیر است.

$$\alpha_{\max} \approx \frac{h\nu}{c\Delta\nu} (N_2 - N_1) B_{12} = \frac{\lambda^2}{8\pi\Delta\nu} (N_2 - N_1) A_{12} \quad (13.9)$$

گام آخر از رابطه میان ضرایب  $A$  و  $B$  ی اینشتین، یعنی معادله (۶.۹) نتیجه می‌شود.

می‌بینیم اگر  $N_2 > N_1$  باشد،  $\alpha$  مثبت، و شرط تقویت برقرار است. برعکس اگر  $N_2 < N_1$  (که شرط ترازندی عادی است)،  $\alpha$  منفی است و نور جذب خواهد شد. روشهای تولید واژگونی فراوانی در محیطهای اپتیکی در بخش بعد مورد بحث قرار می‌گیرند.

## منحنی بهره

برای تعیین چگونگی تغییر بهره با بسامد، باید جزئیات پهن‌شدگی خطوط بینایی را در نظر بگیریم. در حالتی که پهن‌شدگی خط تنها به خاطر جنبش گرمایی است، نظریه جنبشی (۳۱) کسری از آنها که مولفه  $x$  سرعتشان بین  $u_x$  و  $u_x + \Delta u_x$  است را به دست می‌دهد. این کسر به صورت تابعی گاوسی است، یعنی

$$C e^{-a u_x^2} \Delta u_x$$

که در آن  $C = (m/2\pi kT)^{1/2}$  و  $a = m/2kT$ . در اینجا  $T$  دمای مطلق و  $k$  ثابت بولتزمن است. به خاطر پدیده دوپلر، بسامد  $\nu$  ی‌گسلی و یا جذبی این اتمها، که در جهت  $x$  منتشر می‌شود، با بسامد  $\nu_0$  اتم در حال سکون کمی متفاوت است. تفاوت بسامد از معادله زیر به دست می‌آید.

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{u_x}{c}$$

از این رو نتیجه می‌شود که تعداد اتمها در یک تراز معین که می‌توانند بین بسامدهای  $\nu$  و  $\nu + \Delta\nu$  جذب یا گسیل کنند چنین است:

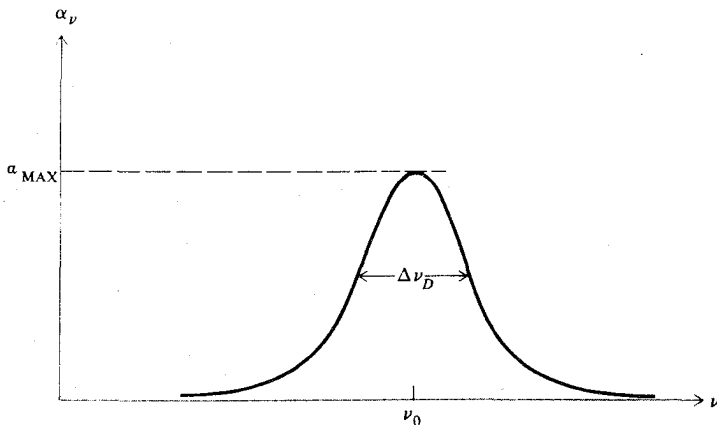
$$\Delta N_i = N_i C e^{-\beta(\nu - \nu_0)^2} \frac{C}{\nu_0} \Delta\nu$$

که در آن  $\beta = mc^2/(2kT\nu_0^2)$ . با قراردادن آن به جای  $\Delta N_1$  و  $\Delta N_2$  در معادله (۱۲.۹)، نتیجه می‌شود:

$$\alpha_\nu = C e^{-\beta(\nu - \nu_0)^2} (N_2 - N_1) h B_{21} \quad (14.9)$$

پس بهره برای یک گذار لیزری با پهن‌شدگی دوپلری، به صورت یک تابع گاوسی با بسامد تغییر می‌کند که منحنی آن در شکل ۲.۹ دیده می‌شود. این منحنی نمایه خط بینایی پهن شده در اثر پدیده دوپلر را نیز نمایش می‌دهد. بیشترین بهره در وسط خط رخ می‌دهد و به وسیله رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\alpha_{\max} = C(N_2 - N_1) h B_{21} = C(N_2 - N_1) \frac{\lambda_0^3}{8\pi} A_{21} \quad (15.9)$$



شکل ۲۰۹ ضریب تقویت برای یک خط بینایی پهن‌شده دوپلری.

برای اینکه بتوان این رابطه را با عبارت تقریبی آن یعنی معادله (۱۳۰۹) مقایسه کرد، باید پهنای یک خط پهن‌شده دوپلری محاسبه شود. برای به دست آوردن نیم پهنای کافی است سازه  $e^{-\beta(\nu-\nu_0)^2}$  را برابر با  $\frac{1}{4}$  قرار دهیم. پس نتیجه می‌شود که  $\nu - \nu_0 = (\ln 2/\beta)^{1/2}$  و دو برابر آن، پهنای خط را به دست می‌دهد:  $\Delta \nu_D = 2(\ln 2/\beta)^{1/2}$ . با به کار بردن تعاریف مربوط به  $C$  و  $\beta$ ، که در بالا داده شده‌اند، نتیجه می‌گیریم:

$$\alpha_{\max} = 2 \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \frac{\lambda_0^2}{8\pi \Delta \nu_D} (N_2 - N_1) A_{21} \quad (16.9)$$

سازه عددی  $2(\ln 2/\pi)^{1/2}$  برابر با ۰٫۹۳۹ ره است. دیده می‌شود که رابطه (۱۳۰۹) در این حالت از دقت بالایی برخوردار است.

### ۴۰۹ روشهای تولید واژگونی فراوانی

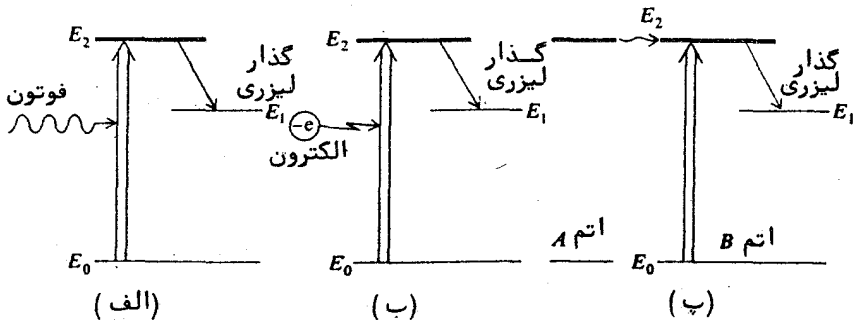
برای تولید واژگونی فراوانی که برای تقویت نور لازم است، چندین روش وجود دارد. آنهایی که بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند در زیر آورده شده‌اند:

- (۱) دمش اپتیکی یا انگیزش فوتونی
- (۲) انگیزش الکترونی
- (۳) برخورد ناکشسان اتم به اتم
- (۴) واکنشهای شیمیایی

در روش دمش اپتیکی، برای اینکه فراوانی یک تراز انرژی بخصوص در محیط لیزر بالا برده شود، از یک چشمه خارجی نور استفاده می‌شود و در محیط لیزر جذب گرینشی نور صورت می‌گیرد، شکل ۳۰۹ (الف). از این روش انگیزش در لیزرهای حالت جامد، که پیش‌نمونه آن لیزر یاقوتی است، استفاده می‌شود.

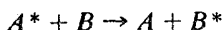
واژگونی مطلوب را می‌توان با به‌کاربردن انگیزش مستقیم الکترونی در یک تخلیه گازی به‌وجود آورد، شکل ۳۰۹ (ب). این روش در بعضی از لیزرهای گازی یونی مانند لیزر آرگون به‌کاربرده می‌شود. در این نوع انگیزش، محیط لیزر خود حامل جریان تخلیه است. تحت شرایط فشار و جریان مناسب، الکترونها ممکن است مستقیماً اتمهای فعال را تحریک کنند و فراوانی بعضی از ترازها را از ترازهای پایینتر بیشتر کنند. سازه‌های دخیل در این روش، سطح مقطع انگیزش الکترونی و عمر ترازهای گوناگون هستند.

در روش سوم نیز از یک تخلیه الکتریکی استفاده می‌شود ولی در اینجا تخلیه در مخلوط مناسبی از گازها انجام می‌شود. دو نوع اتم متفاوت، مانند  $A$  و  $B$ ،



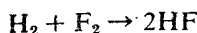
شکل ۳۰۹ نمودار سه روش ایجاد واژگونی فراوانی. (الف) دمش اپتیکی، (ب) انگیزش مستقیم الکترونی، (پ) برخوردهای کشسان اتم به اتم.

که حالت‌های برانگیخته  $A^*$  و  $B^*$  آنها دقیقاً "یا تقریباً" بر هم منطبق اندرا در نظر بگیرد. انتقال برانگیختگی بین این دو اتم ممکن است به صورت زیر رخ دهد.



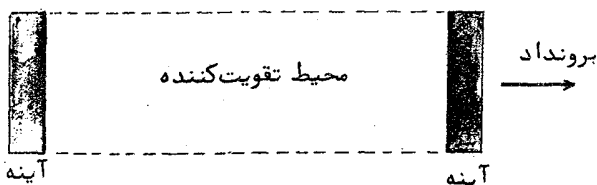
اگر حالت برانگیخته یکی از اتمها، مثلاً  $A^*$ ، شبه پایدار باشد، در این صورت وجود گاز  $B$  راه گزینی برای این برانگیختگی است. در نتیجه، تراز برانگیخته اتم  $B$  ممکن است بمراتب پرجمعیت‌تر از یک تراز پایین‌تر، که اتم  $B$  با تابش به آن فرو می‌افتد بشود، شکل ۳۰۹ (پ). این وضع در لیزر هلیوم-نئون وجود دارد. به طوری که یک اتم نئون به کمک یک اتم برانگیخته، هلیوم تحریک می‌شود و سپس گذار لیزری در اتم نئون انجام می‌گیرد.

روش چهارم در گروه بخصوصی از لیزرها به نام لیزرهای شیمیایی به‌کار برده می‌شود. در اینجا یک مولکول وادار به تغییرات شیمیایی می‌شود که یکی از فرآورده‌های این واکنش، مولکول یا اتمی است در یک حالت برانگیخته. در شرایط مقتضی، یک واژگونی فراوانی امکان‌پذیر خواهد بود. لیزر شیمیایی اسید فلوریدریک، نمونه‌ای از این لیزر است که در آن مولکول برانگیخته اسید فلوریدریک از واکنش زیر نتیجه می‌شود:



### ۵۰۹ نوسان لیزری

کاواک اپتیکي یا بازآواگر یک لیزر، معمولاً از دو آینه، خمیده یا تخت تشکیل می‌شود که محیط تقویت‌کننده در میان آنها قرار دارد (شکل ۴۰۹).



شکل ۴۰۹ شکل کلی لیزر.



اگر یک واژگونی فراوانی بسنده در محیط به وجود آید، آنوقت تابش الکترومغناطیسی تقویت می شود و به صورت یک موج ایستاده بین آینه‌ها برقرار می شود. برای خارج شدن انرژی از بازآواگر، یک یا هر دو آینه به طور جزئی شفاف است.

کاواک نوری با آینه‌های تخت شبیه به یک تداخل سنج فابری - پروی معمولی است. نوارهای گذار بازآواگر فابری - پرو در بی نهایت بسامد همفاصله رخ می دهند:

$$\dots, \nu_n, \nu_{n+1}, \nu_{n+2}, \dots$$

فاصله هر دو نوارگذار پیاپی برابر با گستره آزاد بینایی است:

$$\nu_{n+1} - \nu_n = \frac{c}{2d}$$

که در آن  $c$  سرعت نور و  $d$  جدایی آینه‌ها است. این بسامدها، مشخص کننده مدهای طولی بازآواگرند. مدهای عرضی نیز وجود دارند که در بخش بعد درباره آنها بحث خواهد شد.

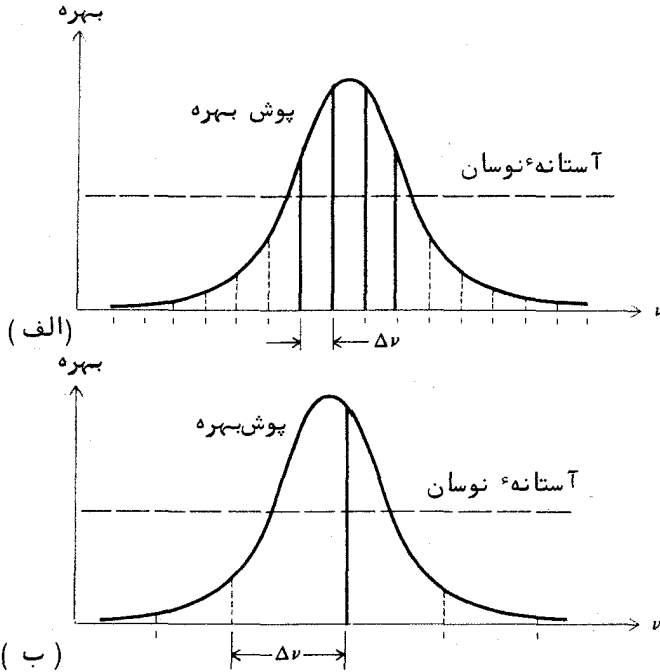
نوسان ممکن است در یکی، یا بیشتر، از این بسامدهای بازآواکی رخ دهد. این به پهنای منحنی بهره در رابطه با فاصله مدها بستگی دارد، شکل (۵.۹). بیشتر لیزرها همزمان در چند مد نوسان می کنند.

اگر خلوص بینایی یا تکفامی فوق العاده مورد نیاز باشد، می توان با انتخاب مناسب پارامترهای لیزر، نوسان تک مدی به دست آورد. در این حالت پهنای ذاتی خط به طور عمده توسط سازه کیفی  $Q$  ی بازآواگر لیزر تعیین می شود. پهنای ذاتی نوعاً در حدود چند هرتزند ولی در عمل پهنایی در حدود  $10^3$  هرتز به دست می آیند. این محدودیت بیشتر توسط پایداری گرمایی و مکانیکی تعیین می شود.

شرط آستانه‌ای برای نوسان

دیدیم که بهره یک باریکه نور موازی در یک محیط تقویت کننده، طبق رابطه زیر می بالد.

$$I_\nu = I_{0\nu} e^{\alpha_\nu x}$$



شکل ۵.۹ بسامدهای نوسانی در یک لیزر (الف) چهار مد طولی، (ب) یک مد.

فرض کنید یک موج در یک نقطه از کاواک لیزر، میان دو آینه شروع به رفت و آمد کند. در برگشت، کسر  $\delta$  از انرژی خود را در اثر پراکندگی، بازتاب و جز اینها از دست می‌دهد. برای اینکه لیزر نوسان کند، باید بهره مساوی یا زیادتر از این اتلاف باشد، یعنی:

$$I_{\nu} - I_{0\nu} \geq \delta I_{\nu}$$

یا

$$e^{\alpha_{\nu} 2l} - 1 \geq \delta \quad (17.9)$$

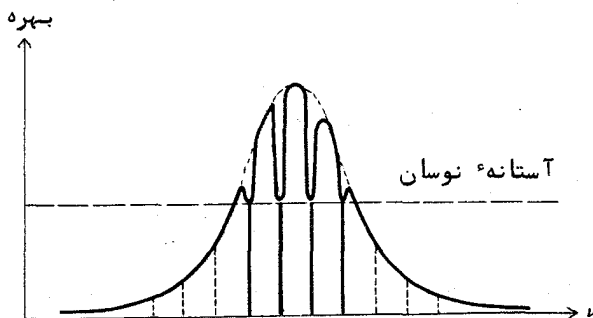
که در آن  $l$  طول موثر محیط تقویت‌کننده است. اگر  $\alpha_{\nu} 2l \ll 1$  باشد، شرط نوسان به صورت زیر درمی‌آید:

$$\alpha_{\nu} 2l \geq \delta \quad (18.9)$$

اگر در بسامد معینی بهره بیش از اتلاف باشد، نوسان بعدی می‌بالد ( نمو می‌کند ) تا وضع تعادل برقرار شود. اتلاف کسری  $\delta$  کم‌وبیش ثابت است و بستگی به دامنه نوسان ندارد. از این رو یک تهی‌شدگی در محیط روی می‌دهد و موجب می‌شود اختلاف فراوانی،  $N_2 - N_1$ ، کاهش یابد. بنابراین بهره کم می‌شود تا تساوی زیر برقرار شود.

$$\alpha_{\nu} 2l = \delta \quad ( ۱۹.۹ )$$

این تهی‌شدگی که در نواری به مرکز بسامد نوسان روی می‌دهد چال سوزی نام دارد. شکل این چال یک منحنی وارونه بازآوائی است و به منحنی بازآوائی یک نوسانگر سازگان می‌ماند که به نمایه لورنتس موسوم است. پهنای نمایه لورنتس برابر با عکس عمر تابشندی اتمی است که عمل لیزری را انجام می‌دهد. اگر این پهنای تابشی به بزرگی یا بزرگتر از پهنای منحنی بهره باشد، در این صورت کلیه اتمهای برانگیخته را می‌توان با مد نوسان لیزر " در ارتباط " دانست. این وضعیت را پهن‌شدگی همگن می‌نامند. از طرف دیگر اگر پهنای تابشی گذار لیزر کوچکتر از پهنای منحنی بهره باشد، تنها پاره‌ای از اتمها در یک مد معین فعالیت مشترک دارند. این را پهن‌شدگی ناهمگن می‌نامند. در این حالت چال سوزی منحنی بهره را مطابق شکل ۶.۹ دگرگون می‌کند.



شکل ۶.۹ چال سوزی پوش بهره در یک لیزر.

۶.۹ نظریهٔ بازآواگر اپتیکی

مفهوم کلی مدهای فضایی تابش الکترومغناطیسی درون یک کاواک بسته، در بخش ۳.۷ باختصار بررسی شد. در آنجا نشان داده شد که یک مد معین را می‌توان به کمک سه عدد درست، که مستقیماً به گرتهٔ موج ایستادهٔ آن مد بستگی دارند، مشخص کرد. کاواک در بازآواگر لیزر، چون که تنها از دو سطح بازتابنده ساخته شده است، بسته نیست. با این همه چنین کاواک‌هایی که اطراف آنها باز است نیز می‌توانند موج ایستادهٔ سه‌بعدی نگهدارند، این را گاهی شبه مد می‌خوانند. یک واقعیت مهم این است که مقداری از انرژی در اطراف آینه‌های بازتابندهٔ "لیزر" شده و از مقدار آن کم می‌شود. این را اتلاف پراشی در بازآواگر می‌نامند. رسیدگی دقیق به این اتلاف در لیزر لازم و با اهمیت است، بویژه برای دستگاه‌های کم‌بهره مانند لیزر هلیوم - نئون که تقویت در هر رفت یا برگشت تنها چند درصد است.

برای روشن ساختن مسئلهٔ ریاضی موجود در بازآواگر اپتیکی، در شکل ۷.۹ مختصات دهانهٔ آینه‌های بازآواگر را بترتیب با  $x, y$  و  $x', y'$  نشان می‌دهیم. همان‌گونه که نشان داده شده، این حالت معادل با پراش به وسیلهٔ دهانه‌های چندگانه است. اگر  $U(x, y)$  و  $U'(x', y')$  نمایانگر دامنه‌های مختلط تابش روی سطح آینه‌ها باشند، در این صورت با به‌کاربردن نظریهٔ پراش فرنل - کیرشهوف (بخش ۲.۵) می‌توانیم بنویسیم

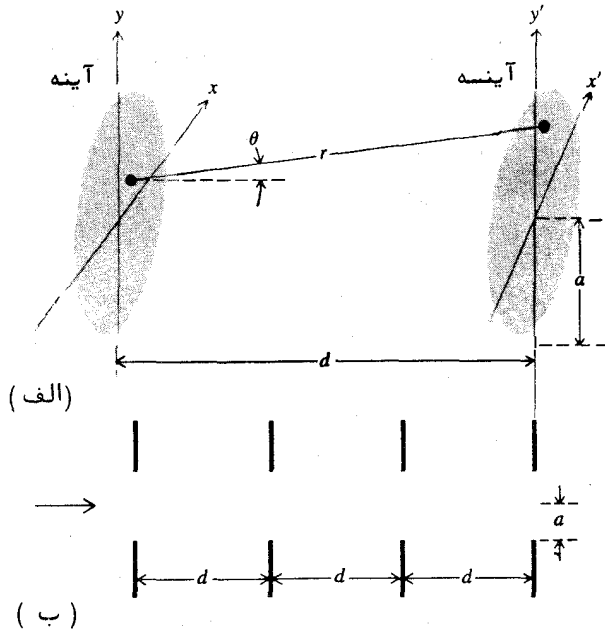
$$U'(x', y') = \frac{-ik}{4\pi} \iint U(x, y) \frac{e^{ikr}}{r} (1 + \cos \theta) dx dy \quad ( ۲۰.۹ )$$

که در آن:

$$r = [d^2 + (x' - x)^2 + (y' - y)^2]^{1/2}$$

$$\cos \theta = \frac{d}{r}$$

اگر آینه‌ها، چنانکه معمول است، یکسان باشند، برای حالت پایا، یعنی بعد از اینکه تابش بارها بین دو آینه رفت و برگشت کرد، دو تابع  $U$  و  $U'$  گذشته از یک سازهٔ ثابت  $\gamma$  یکسان می‌شوند. در این حالت داریم:



شکل ۷.۹ (الف) شکل هندسی کاواک لیزر فابری-پرو، (ب) معادل پراشی آن.

$$\gamma U(x', y') = \iint U(x, y) K(x, y, x', y') dx dy \quad ( ۲۱.۹ )$$

که در آن

$$K(x, y, x', y') = \frac{-ik}{4\pi} (1 + \cos \theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad ( ۲۲.۹ )$$

معادله (۲۱.۹) یک معادله انتگرالی از تابع مجهول  $U$  است. تابع  $K$  هسته معادله و  $\gamma$  ویژه‌ارز نامیده می‌شود. شمار جوابهای تابع مجهول نامتناهی است و برای هر کدام یک ویژه‌ارز  $\gamma$  وجود دارد. این دو را بترتیب با  $U_n$  و  $\gamma_n$  نمایش می‌دهیم که در آن  $n = 1, 2, 3, \dots$ . جوابهای مختلف متناظر با مدهای طبیعی، بازآواگردند. اگر  $\gamma_n$  را با عبارت زیر نشان دهیم:

$$\gamma_n = |\gamma_n| e^{i\phi_n} \quad ( ۲۳.۹ )$$

می‌بینیم که  $|\gamma_n|$  نسبت دامنه و  $\phi_n$  جابجایی فازی وابسته به یک مد را مشخص می‌کند. کمیّت  $1 - |\gamma_n|^2$  اتلاف نسبی انرژی در اثر پراش در هر گذر است. ( این باید به اتلاف انرژی ناشی از جذب به وسیله آینه‌ها افزوده شود ).

" فوکس" و " لسی " از اولین کسانی بودند که معادله انتگرالی بازآواگر فابری پرو را بررسی کردند (۹). آنها برای به دست آوردن جوابهای عددی و ویژه - ارزهای وابسته، از کامیوتر الکترونیکی رقمی استفاده کردند. " بوید " و " گوردن" برای معادله انتگرالی جوابهای تحلیلی به دست آوردند (۶). بازآواگرهای اپتیکی بررسی شده شامل هر دو نوع بودند، هم بازآواگر با آینه‌های تخت - موازی و هم آنهایی که آینه‌های خمیده دارند.

با اینکه حل دقیق مسئله بازآواگر فابری - پرو خیلی پیچیده است، به کمک روشی مشابه با آنچه در پراش فرانیهوفری به کار برده شد، می‌توان یک حل تقریبی ساده برای آن به دست آورد. طبق آن روش، معادله (۲۲.۹) به معادله زیر ساده می‌شود.

$$K(x,y,x',y') = C e^{-ik_1(xx'+yy')}$$

که در آن طبق تقریبی که بیان شد  $C$  و  $k_1$  ثابتند. پس معادله انتگرالی ( ۲۱.۹ ) به صورت زیر در می‌آید:

$$\gamma U(x',y') = C \iint U(x,y) e^{ik_1(xx'+yy')} dx dy \quad ( ۲۴.۹ )$$

این معادله می‌گوید تابع  $U(x,y)$  تبدیل فوریه خودش است. ساده‌ترین این نوع توابع، تابع گاوسی است

$$U(x,y) = e^{-\rho^2/w^2} = e^{-(x^2+y^2)/w^2} \quad ( ۲۵.۹ )$$

در اینجا  $w$  یک ثابت نرده‌بندی و  $\rho^2 = x^2 + y^2$ . توابع کلّیتری که تبدیل فوریه خودشانند، حاصلضرب تابعی به نام چند جمله‌ایهای هرمیت (۲۷) و تابع گاوسی بالا هستند.

$$U_{pq}(x,y) = H_p\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) H_q\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) e^{-(x^2+y^2)/w^2} \quad (26.9)$$

اعداد درست  $p$  و  $q$  نمایانگر مرتبه چند جمله‌ایهای هرمیت‌اند<sup>۳</sup>، و هر مجموعه‌ $e$   $(p,q)$  متناظر با یک مد عرضی بخصوص بازآواگر است. چند جمله‌ای هرمیت با پایینترین مرتبه،  $H_0$ ، ثابت و برابر با یک است. از این‌رو مد ساده گاوسی، مربوط به مجموعه  $(0,0)$  است و مد  $TEM_{0,0}$  نامیده می‌شود، منظور از اصطلاح  $TEM$  مدهای الکترومغناطیسی عرضی در کاواک است. گاهی از علامت  $TEM_{n,p,q}$  استفاده می‌شود که در آن عدد درست  $n$  عدد مد طولی و  $p$  و  $q$  اعداد مد عرضی‌اند. تعدادی گرته<sup>۴</sup> مرتبه پایین در شکل ۸.۹ نمایش داده شده‌اند.

### پیکربندیهای بازآواگر - پایداری

ترکیبهای گوناگونی از آینه‌های خم و تخت وجود دارند که می‌توان برای کاواک لیزری از آنها استفاده کرد. چند نمونه از آنها در شکل ۹.۹ نشان داده شده‌اند. یکی از رایجترین پیکربندیهای کاواکی به نام بازآواگر همکانون موسوم است. این کاواک از دو آینه<sup>۵</sup> کروی کاو و مشابه که فاصله آنها برابر با شعاع خمیدگی آینه‌ها است تشکیل شده است. هم‌خط کردن آینه‌های کاواک همکانون از کاواک با آینه‌های تخت - موازی خیلی آسانتر است. دقت میزان کردن آینه‌های حفره‌های نوع اخیر باید حدود یک ثانیه زاویه‌ای باشد، در حالی که ترکیب همکانون، در کاربردهای عادی، به دقتی حدود یک‌چهارم درجه نیاز دارد.

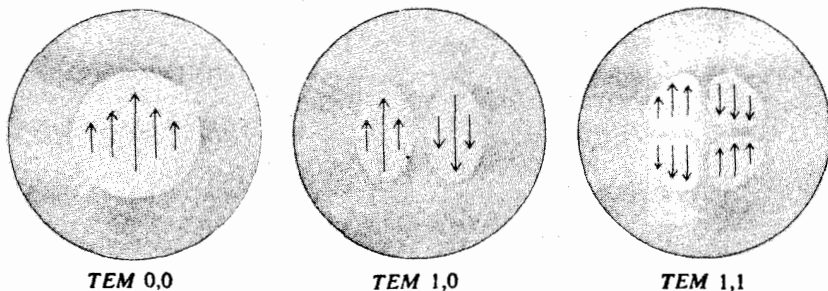
اتلاف پراشی، که به وسیله بوید و گوردن، برای بعضی از مدهای مرتبه<sup>۶</sup> پایین در بازآواگرهای تخت - موازی و همکانون محاسبه شده، در شکل ۱۰.۹ کشیده شده است. در این نمودار اتلاف به شکل تابعی از عدد فرنل  $N = a^2/\lambda d$  ترسیم شده که در آن  $a$  شعاع آینه‌ها و  $d$  فاصله آنها از یکدیگر است. اتلاف پراشی

۳- چندجمله‌ایهای هرمیت عبارتند از:

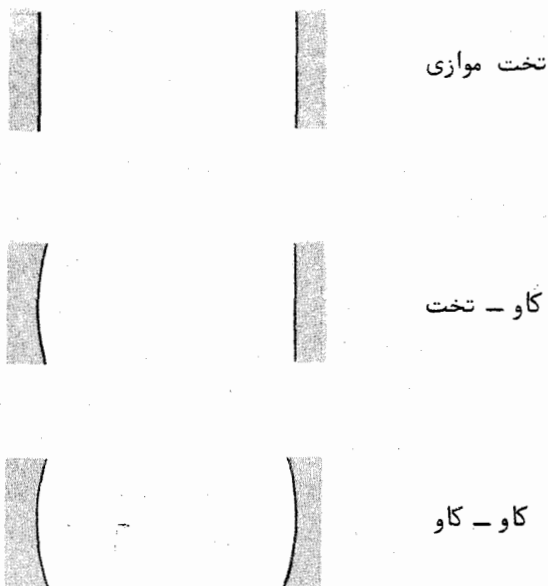
$$H_0(u) = 1$$

$$H_1(u) = 2u$$

$$H_n(u) = (-1)^n e^{u^2} \frac{d^n}{du^n} e^{-u^2}$$

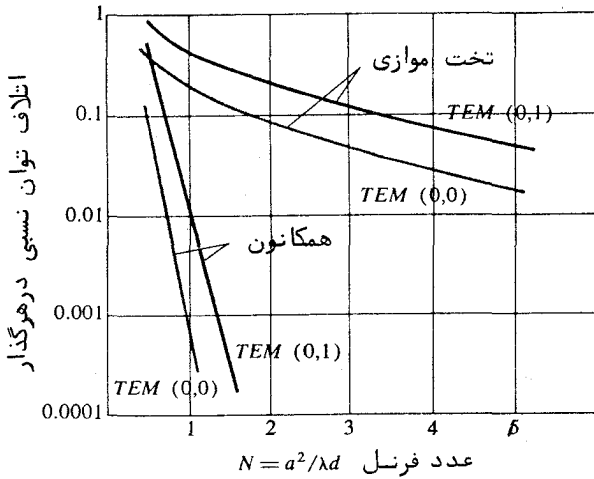


شکل ۸.۹ توزیع میدان روی آینه‌ها برای بعضی از مدهای مرتبه پایین.



شکل ۹.۹ چند نمونه از کاواکهای لیزری متداول.





شکل ۱۰.۹ منحنیهای اتلاف برای دو مد نخست در کاواکهای لیزری تخت - موازی و همکانون.

برای مدهای مرتبه پایین در آینه‌های کروی همکانون، وقتی  $N > 1$  قابل چشم‌پوشی است. مقایسه اتلاف در بازآواگر تخت - موازی و بازآواگر همکانون، نشان می‌دهد که نوع دوم به‌طور مسلم برتر است.

با استفاده از نورشناسی هندسی می‌توان بازآواگرهای لیزری را بر حسب معیاری موسوم به پایداری رده‌بندی کرد. یک بازآواگر پایدار، بازآواگری است که در آن یک پرتو، با بازتابهای پیاپی از آینه‌ها پایانی، نزدیک محور نوری باقی می‌ماند. معیار پایداری را در فصل بعد (بخش ۵.۱۰) به‌دست خواهیم آورد. همانگونه که نشان خواهیم داد، برای اینکه کاواکهای متقارن، که از دو آینه یا شعاع خمیدگی مساوی درست شده‌اند، پایدار باشند، باید جدایی آینه‌ها کمتر از دو برابر شعاع خمیدگی باشد.

اندازه لکه

پارامتر نرده‌بندی  $w$ ، که در معادلات (۲۵.۹) و (۲۶.۹) معرفی شد، مقیاسی

از توزیع عرضی انرژی در دسته پرتو اپتیکی درون بازآواگر است. هرگاه،  $\rho$ ، فاصله عرضی از محور نوری برابر با  $w$  شود، تابع گاوسی  $e^{-\rho^2/w^2}$  تبدیل به  $e^{-1}$  خواهد شد. چون این تابع با دامنه میدان، و انرژی با مربع میدان متناسب است، بنابراین انرژی به  $e^{-2}$  برابر بیشینه خود نزول خواهد کرد. از این رو  $w$  را اندازه لکه مد برتر  $(0,0)$  می نامند.

در یک بازآواگر،  $w$  تابعی از مکان طولی است. اگر  $z$  فاصله طولی از نقطه میانی دو آینه باشد، در این صورت پارامتر  $w$ ، چنانکه بوید و گوردن نشان داده اند، به کمک رابطه زیر به دست می آید:

$$w^2 = w_0^2 + \frac{\lambda^2 z^2}{\pi^2 w_0^2} \quad (27.9)$$

در اینجا،  $\lambda$  طول موج و  $w_0$  پارامتر دیگری است به نام اندازه لکه در مرکز که مقدار آن به وسیله شعاعهای خمیدگی آینهها و فاصله آنها از یکدیگر معین می شود. برای یک کاواک متقارن، که از دو آینه با شعاع خمیدگی  $R$  تشکیل شده، و فاصله آنها از یکدیگر  $d$  است، پارامتر  $w_0$  از رابطه زیر به دست می آید:

$$w_0^2 = \frac{\lambda}{\pi} \left[ \frac{d}{2} \left( R - \frac{d}{2} \right) \right]^{1/2} \quad (28.9)$$

و شعاع خمیدگی سطح موج ایستاده در یک نقطه چنین است:

$$r_c = z + \frac{d(2R - d)}{4z} \quad (29.9)$$

در بازآواگر همکانون،  $R = d$ ، اندازه لکه در مرکز چنین است:

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda d}{2\pi}}$$

اندازه لکه روی هر یک از آینهها،  $z = \pm d/2$ ، از رابطه زیر به دست می آید:

$$w = \sqrt{\frac{\lambda d}{\pi}}$$

شکل ۱۱.۹ یک بازآواگر همکانون را نشان می دهد. برای نشان دادن خمیدگی امواج ایستاده داخل کاواک، سطوح هم فاز کشیده شده اند، خمیدگی سطوح موج روی آینهها



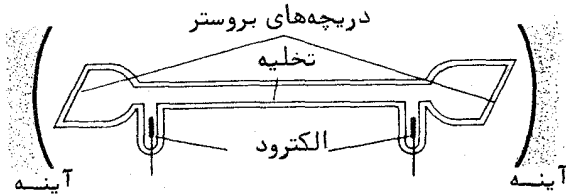
شکل ۱۱.۹ گرتنه امواج ایستاده و توزیع عرضی مد  $TEM_{0,0}$  در یک کاواک لیزری همکانون.

با خمیدگی آینه‌ها یکی است. در مرکز که اندازه لکه کمینه است، سطح موج تخت می‌شود. با قراردادن یک آینه تخت در مرکز یک کاواک همکانون، یک کاواک نیم-همکانون به دست می‌آید و سطوح موج و اندازه لکه برای بخشی از کاواک همکانون، بین آینه‌های کاواک جدید، بدون تغییر باقی می‌مانند. در واقع اگر هر دو سطح موجی را با آینه‌هایی با همان خمیدگی جایگزین کنیم، یک کاواک جدید تشکیل می‌شود.

## ۷.۹ لیزرهای گازی

شکل ۱۲.۹ آرایش فیزیکی یک لیزر گازی نوعی را نشان می‌دهد. در اینجا کاواک اپتیکی با آینه‌های خارجی به وجود می‌آید و برای اینکه توان بازتاب آنها در طول موج مورد نظر زیاد باشد، آینه‌ها را با چند لایه نارسانا می‌اندازند و نیز برای کاستن از اتلاف انرژی و آسانی هم‌خط‌سازی از آینه‌های کروی در ایجاد این کاواک‌های همکانون استفاده می‌شود.

دو انتهای لامپ لیزر را با دریچه‌های بروستر می‌پوشانند تا بیشتر شفافیت حاصل شود. با به‌کاربردن این دریچه‌ها، برونداد لیزر به طور خطی قطبیده خواهد بود. همانگونه که در بخش ۲.۸ بحث شد، دریچه‌های بروستر برای یک جهت قطبیدگی بخصوص، قطبیدگی  $TM$ ، خیلی شفافند. در نتیجه، نوسان لیزر در این قطبیدگی تقویت می‌شود و بر قطبیدگی عمود بر آن،  $TE$ ، غلبه می‌کند.



شکل ۱۲۰۹ طرح نوعی یک لیزر گازی.

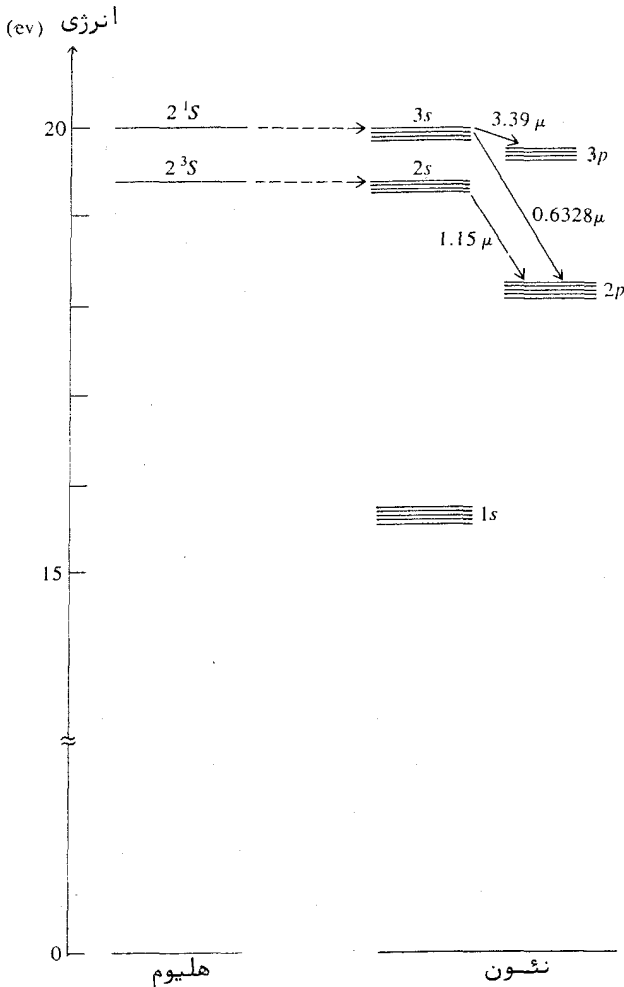
برانگیزش الکتریکی خارجی با هر یک از روشهای زیر میسر است:

- (۱) تخلیهٔ جریان مستقیم
- (۲) تخلیهٔ جریان متناوب
- (۳) تخلیهٔ بی‌الکتروودی بالا - بسامد
- (۴) تپهای فشار قوی (بالا - ولتاژ)

استفاده از روشهای (۱) و (۲) در لیزرهای گازی تجارتي متداول است. اگر لیزر برای کارهایی از قبیل زنش اپتیکی (optical heterodyning)، مخابرات و جز اینها باشد، برانگیزش به روش تخلیهٔ جریان مستقیم (۱) برتر است. روش تخلیهٔ جریان متناوب (۲) ساده‌ترین روش است زیرا منبع تغذیه می‌تواند یک میدل معمولی ولتاژ قوی، که به الکترودهای فلزی سرد در داخل لامپ متصل می‌شود، باشد. روش تخلیهٔ بی‌الکتروودی بالا - بسامد (۳)، در اولین لیزر گازی، لیزر هلیوم - نئون، که به وسیلهٔ جوان، بنت و هرپوت (۲۱) در آزمایشگاههای بل تلفن ساخته شد، به‌کاربرده شد. روش (۴) در لیزرهای تپی پرتوان به‌کاربرده می‌شود. در بعضی موارد کسه نمی‌توان به‌طور پایا واژگونی جمعیت را برقرار نگاهداشت، استفاده از این روش برانگیزش لازم می‌شود.

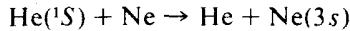
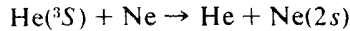
### لیزر هلیوم - نئون

شکل ۱۳۰۹ نموداری از ترازهای انرژی لیزر هلیوم - نئون را نشان می‌دهد. انتمهای هلیوم با برخورد الکترونی در تخلیهٔ الکتریکی، برانگیخته می‌شوند. فراوانیهای



شکل ۱۳.۹ نمودار ساده شده ترازهای انرژی لیزر هلیوم- نئون.

حالت‌های شبه‌پایدار  $3s$  و  $1s$  هلیوم پیوسته افزایش می‌یابند زیرا گذارهای مجاز به ترازهای پایین وجود ندارند. در شکل دیده می‌شود که ترازهای  $2s$  و  $3s$  نئون به ترازهای شبه‌پایدار هلیوم نزدیکند. بنابراین احتمال زیادی وجود دارد که وقتی یک اتم شبه‌پایدار هلیوم با یک اتم نئون نابرانگیخته برخورد می‌کند، انرژی به آن بدهد. این انتقال انرژی به صورت زیر است:



تحت شرایط تخلیه مناسب، می‌توان در ترازهای  $\text{Ne}(2s)$  و  $\text{Ne}(3s)$  واژگونی فراوانی به‌وجود آورد. مقدار بهینه فشار کل در حدود یک تور، و نسبت مطلوب مقدار هلیوم به نئون حدود ۷ به ۱ است. عمل لیزری اصلی در دستگاه هلیوم - نئون به گذارهای زیر در اتم نئون مربوط می‌شود.

$$3s_2 \rightarrow 2p_4 \quad 632.8 \text{ nm}$$

$$2s_2 \rightarrow 2p_4 \quad 1.1523 \mu$$

$$3s_2 \rightarrow 3p_4 \quad 3.39 \mu$$

علاوه بر اینها، گذارهای ضعیفتر دیگری را در نئون به نوسان لیزری واداشته‌اند (۲۵).

### لیزرهای گازی دیگر

تخلیه‌های الکتریکی در گازهای خالص و مخلوطهای گازی گوناگون، در طول موجهای زیادی، از فروقرمز دور تا فرابنفش، عمل لیزری پدید آورده‌اند. تمام گازهای نادر، هلیوم، نئون، آرگون، کریپتون و گزنون، به‌صورت خالص، در شرایطی گذارهای لیزری از خود نشان می‌دهند. مثلاً "لیزر یون آرگون در چندین طول‌موج در ناحیه آبی، نور تولید می‌کند. تخلیه‌های تپی در بخارهای فلزی کادمیم، جیوه، سرب، قلع و فلزات دیگر، برای پدیدآوردن عمل لیزری به‌کار برده شده‌اند، (۴)، (۸)، (۳۷). هالوژنها، کلر، برم و ید نیز در شرایط تپی عمل لیزری از خود نشان می‌دهند. تخلیه در گازهای مولکولی موجب واژگونی فراوانی در گذارهای مولکولی گوناگون شده است. در میان لیزرهای گازی، لیزر مولکول ازت ( $\text{N}_2$ )، که تابش فروقرمز و فرابنفش تولید می‌کند، و لیزر  $\text{CO}_2$  که در ناحیه ۱۰ میکرونی نوسان می‌کند دارای اهمیت‌اند. چند نمونه از لیزرهای گازی متداول در جدول ۱۰۹ خلاصه شده‌اند.

جدول ۱.۹ چند نمونه از لیزرهای کاری

ملاحظات	طول موجهای اصلی لیزر (بر حسب میکرون)	عنصر فعال	گاز یا مخلوط کاری
بیوسته - موج	۰/۶۳۲۸، ۱/۱۵، ۴/۳۹	Ne	He-Ne
گسته-موج (تی) بالا - بهره	۰/۵۴۰۱، ۰/۶۱۴۳، ۱/۱۱۵	Ne	Ne
بیوسته - موج یا گسته - موج (یا تی)	۰/۳۳۲۳، ۰/۳۳۷۸، ۰/۳۳۹۲	Ne <sup>+</sup>	Ne
بیوسته - موج یا گسته - موج	۰/۴۷۶۵، ۰/۴۸۸۰، ۰/۵۱۴۵	Ar <sup>+</sup>	Ar
بیوسته - موج یا گسته - موج	۰/۵۲۰۸، ۰/۵۳۰۹، ۰/۵۸۶۲، ۰/۶۴۷۱	Kr <sup>+</sup>	Kr
بیوسته - موج ، بالا - بهره	۳/۵۰۷، ۵/۵۷۴	Xe	Xe-He
بیوسته - موج یا گسته - موج	۰/۴۶۰۳، ۰/۵۴۱۹، ۰/۵۹۷۱	Xe <sup>+</sup>	Xe
بیوسته - موج	۰/۸۴۴۶	O	Ne-O <sub>2</sub> ، Ar-O <sub>2</sub>
گسته - موج ، بالا - بهره	۰/۳۳۷۱	N <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>
گسته - موج	۰/۵۶۷۹	N <sup>+</sup>	هوا، N <sub>2</sub>
بیوسته - موج ، پر بارده	۰/۳۲۵۰، ۰/۴۴۱۶	Cd <sup>+</sup>	He-Cd
بیوسته - موج و تی ، پر بارده و پر بارده	۱۰/۶	CO <sub>2</sub>	CO <sub>2</sub> -N <sub>2</sub> -He
اولین لیزر حلاء فرا بنفش	۰/۱۲، ۰/۱۷	H <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>
طول موج بلند	۲۷/۹، ۱۱۸/۶	H <sub>2</sub> O	H <sub>2</sub> O
طول موج بسیار بلند	۳۳۷	HCN	CH <sub>3</sub> CN-NH <sub>3</sub>

## ۸۰۹ لیزرهای حالت جامد با دمش اپتیکی

در لیزرهای حالت جامد، اتمهای فعال محیط لیزر در جامد نشانده می‌شوند. لیزر یاقوتی یکی از اولین نمونه‌های لیزر حالت جامد است. بلور و شیشه هر دو به عنوان حامل ناخالصی و قرارگاه این اتمها به کار برده می‌شوند. این بلورها یا شیشه‌ها معمولاً به شکل میله استوانه‌ای ساخته می‌شوند که دو انتهای آن آینه وار به طور اپتیکی ساییده و صیقلی می‌شوند و کاملاً تخت و موازیند. میله لیزر را با اندودن دو انتهای آن می‌توان طوری ساخت که خود کاواک اپتیکی را به وجود آورد، یا می‌توان از آینه‌های خارجی استفاده کرد.

دمش اپتیکی اتمهای فعال به کمک یک چشمه نور خارجی انجام می‌شود. این چشمه می‌تواند از نوع تپی یا پیوسته باشد. معمولاً برای این منظور از لامپهای پرشدت، مانند لامپهای درختی گزنون یا لامپهای تخلیه پرفشار جیوه استفاده می‌شود.

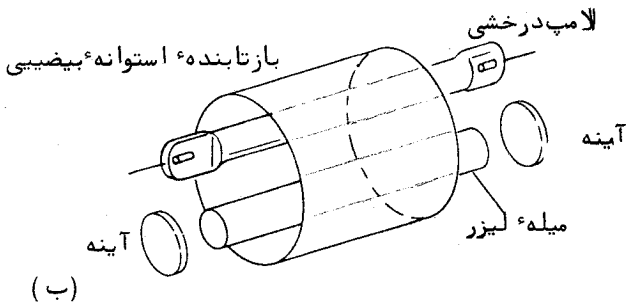
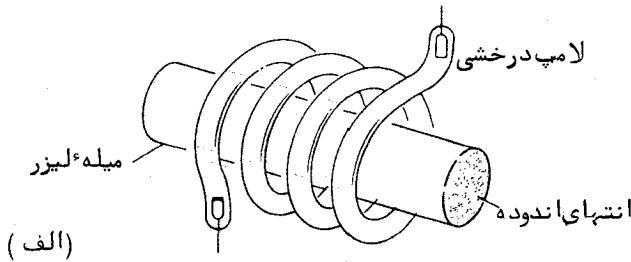
شکل ۱۴۰۹ دو آرایش نوعی لیزرهای حالت جامد با دمش اپتیکی را نشان می‌دهد. در (الف) یک لامپ درختی ماریچی به کار برده شده که میله لیزر در آن قرار دارد. دو انتهای میله اندوده شده در نتیجه لیزر خیلی ساده و جمع و جور است. دستگاه مفصلتری در (ب) دیده می‌شود. در اینجا میله لیزر در یکی از کانونهای یک بازتابنده استوانه‌ای با مقطع بیضی قرار دارد و لامپ دم‌ننده در کانون دیگر، از آینه‌های خارجی برای این کاواک اپتیکی استفاده می‌شود.

## لیزر یاقوتی

میله لیزر یاقوتی از یاقوت مصنوعی ( $Al_2O_3$ ) ساخته شده، که با  $Cr_2O_3$  به اندازه تقریباً ۵ درصد وزنش آلائیده شده است. این مجموعه، یک جسم صورتی‌رنگ تولید می‌کند. این رنگ به خاطر وجود یون  $Cr^{3+}$  است که در شبکه بلور به جای آلومینیم قرار می‌گیرد.

نموداری از ترازهای انرژی  $Cr^{3+}$  در یاقوت، در شکل ۱۷۰۸ فصل قبل نشان داده شده است. موقعی که لیزر کار می‌کند، نور دم‌ننده، به وسیله یونهای  $Cr^{3+}$  جذب شده





شکل ۱۴.۹ طرحهایی نوعی برای لیزرهای حالت جامد با دمش اپتیکی.

و باعث می‌شود آنها از حالت زمینه  $4A$  به یکی از حالت‌های برانگیخته  $4T_1$  یا  $4T_2$ ، بالا روند. یک گذار سریع و بدون تابش از این ترازها به تراز  $2E$  انجام می‌گیرد. فروافت از تراز  $2E$  نسبتاً کند است، به طوری که با تحریک کافی، بین  $2E$  و حالت زمینه  $4A$  یک واژگونی فراوانی می‌تواند رخ دهد. همین که این وضعیت برقرار شد، در طول موج ۶۹۳۴ انگسترم، که مربوط به گذار  $2E \rightarrow 4A$  است، تقویت روی می‌دهد. نتیجه نور تپسی پرشدتی است که در این طول موج از لیزر خارج می‌شود.

#### دیگر مواد لیزری حالت جامد

علاوه بر یاقوت، تعدادی بلور دیگر وجود دارند که وقتی با ناخالصیهایی که زیر لایه ناکامل دارند آلاپیده می‌شوند، گسیل القایی از خود نشان می‌دهند. مثلاً

نئودیمیوم اتمی است که یک گذار لیزری در حدود ۱٫۰۶ میکرون دارد. میزبانهای جامد گوناگونی با نئودیمیوم به کار برده شده اند، منجمله بلورهای فلرور کلسیم ( $\text{CaF}_2$ ) و تنگستات کلسیم ( $\text{CaWO}_4$ ) و شیشه. گارت آلومینیم اینتریم آلائیده با نئودیمیوم (YAG) نشان داده که یک بلور لیزری بسیار موثر است. لیزرهای YAG، وقتی با نور لامپ رشته‌ای تنگستن دمیده می‌شوند، به‌طور پیوسته کار می‌کنند. جدول ۲۰۹ چند نمونه از مواد لیزرهای حالت جامد را نشان می‌دهد.

جدول ۲۰۹ چند نمونه از لیزرهای حالت جامد

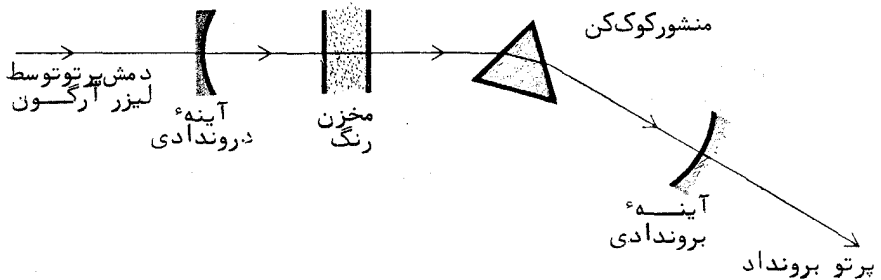
ملاحظات	طول موج (بر حسب میکرون)	میزبان	یون لیزر
پر قدرت، اولین لیزر ابداعی	۰٫۶۹۴۳	$\text{Al}_2\text{O}_3$	$\text{Cr}^{3+}$
	۱٫۰۴۶	$\text{CaF}_2$	$\text{Nd}^{3+}$
رایج موثر، قادر به تولید امواج پیوسته	۱٫۰۶	$\text{CaWO}_4$	
	۱٫۰۶	شیشه	
	۱٫۰۶	YAG	
	۲٫۰۹	$\text{CaF}_2$	$\text{Ho}^{3+}$
	۲٫۰۴	شیشه $\text{CaF}_2$	$\text{Er}^{3+}$
	۱٫۹	$\text{SrF}_2, \text{CaWO}_4$	$\text{Tm}^{3+}$
	۱٫۱	شیشه	$\text{Yb}^{3+}$
	۲٫۵	$\text{BaF}_2, \text{CaF}_2$	$\text{U}^{3+}$

### ۹۰۹ لیزرهای رنگی

گسیل القایی، در محلولهای مایع رنگهای آلی فلورسان، برای اولین بار در ۱۹۶۶/۱۳۴۵ به وسیله سوروکین (Sorokin) و لانکارد (Lankard) از آزمایشگاههای آی‌بی‌ام گزارش شد. محلولهای رنگی، اول با لیزر یاقوتی، و در آزمایشهای بعد با

لامپ درخشی سریع دمیده می‌شدند، رنگهای آلی، مانند فلورسین و رودامین، که در لیزرها به‌کار برده می‌شوند، نوارهای فلورسانس خیلی پهن، معمولا " ۵۰ تا ۱۰۰ نانومتر، دارند. نوار نور تقویت شده نیز متناظرا " پهن است و از این‌رو می‌توان با عناصر کوک‌کننده ( منشور، توری و تداخل‌سنج) که در کاواک لیزر قرار داده می‌شوند بسامد خروجی لیزر را تغییر داد.

قبل از پیدایش لیزر رنگی، تنها بسامدهای لیزری گسسته<sup>۶</sup> معدودی در دسترس بودند ولی اکنون با گزینش مایعهای گوناگون لیزری می‌توان سراسر بیناب اپتیکی، از فراینش نزدیک تا فزوقرمز نزدیک را مورد استفاده قرار داد. با به‌کار بردن یک لیزر گازی پیوسته - موج ( آرگون یا کریبتون) به عنوان منبع دمنده<sup>۶</sup> اپتیکی، تولید امواج پیوسته با لیزر مایعی میسر شده است. نموداری از یک لیزر مایعی پیوسته - موج کوک‌شونده<sup>۶</sup> نوعی در شکل ۱۵.۹ نشان داده شده است. جدول ۳.۹ چند نمونه از رنگهای لیزری و گستره‌های کوک آنها را نشان می‌دهد.



شکل ۱۵.۹ آرایش یک لیزر رنگی کوک‌شونده. آینه ورودی نسبت به پرتو دمنده<sup>۶</sup> لیزر آرگون شفاف، ولی در گستره<sup>۶</sup> کوک کاملا " بازتابنده است.

## جدول ۳۰۹ چند نمونه از رنگهای لیزری

ناحیهء کوک شونگی ( برحسب نانومتر )	مایع رنگی
۶۴۰ - ۷۰۰	Cresyl violet      کرزیل بنفش
۵۸۰ - ۶۹۰	Rhodamine B      رودامین
۶۰۰ - ۶۳۰	Acridine red      اکریدین قرمز
۵۶۰ - ۶۵۰	Rhodamine 6G      رودامین ۶ G
۵۲۰ - ۵۷۰	Sodium fluorescein      فلورسین سدیم
۴۴۰ - ۵۴۰	4 Methylumberiferone      ۴ متیلیوم بریفرون
۴۴۰ - ۴۹۰	Coumarin      کومارن
۴۳۰ - ۴۵۰	Diphenyl anthracene      دی فنیل انتراسین
۳۹۰ - ۴۲۰	Sodium salicylate      سالیسیلات سدیم
۳۸۰ - ۴۴۰	POPOP

## ۱۰۰۹ لیزرهای دیودی نیمرسانا

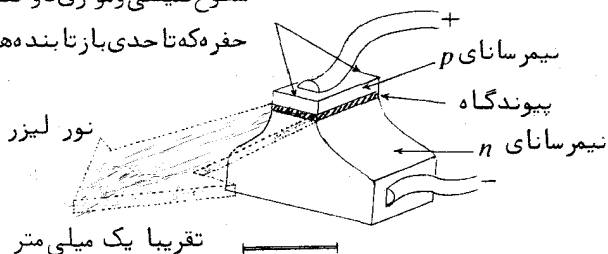
جمع وجورترین لیزر، لیزری است که با دیود نیمرسانا ساخته می شود و لیزر تزریقی نامیده می شود. ساده ترین لیزر دیودی، از یک پیوند  $p-n$  در یک تک بلور آلاییده از یک نیمرسانای مناسب، مانند ارسینور گالیم، تشکیل می شود. هرگاه یک اختلاف پتانسیل الکتریکی با یاس مستقیم به دیود اعمال شود، الکترونها به طرف  $p$  ی پیوند و حفرهها به طرف  $n$  پیوند حرکت می کنند. در ناحیهء پیوند از آمیزش حفرهها و الکترونها تابش بازترکیب به وجود می آید. کار دیوددههای نوری ( light-emitting-diode (LED) بر همین اصل استوار است. دستگاههایی که با این دیودها ساخته می شوند برای مصارف زیادی مانند نمایش ارقام در کامپیوترهای الکترونیکی و غیره به کار برده می شوند، و در آنها تابش بازترکیب آنی تولید می شود اگر در پیوندگاه چگالی جریان به اندازه کافی زیاد باشد، بین ترازهای الکترونی و

ترازهای حفره‌ای واژگونی فراوانی به وجود می‌آید. وقتی بهره‌اِپتیکی از اتلاف زیادتر شد، در لایه پیوند گاه گسیل القایی تولید و اثر لیزری شروع می‌شود. در لیزرهای دیودی این لایه نازک معمولاً "حدود چند میکرون است. سطوح انتهایی بلور را به‌طور جزئی بازتابنده می‌کنند تا یک بازآواگر اپتیکی را تشکیل دهد (شکل ۱۶.۹). چگالی جریان آستانه برای لیزرهای نیمرسانا که با ارسنیور گالیم ساخته می‌شوند در حدود  $10^4$  آمپر بر سانتی‌متر مربع و طول موج تابش گسیلیده در فروقرمز نزدیک در حدود ۸۳۰ تا ۸۵۰ نانومتر است.

### ۱۱.۹ بستاوری Q و مد بستن

در لیزرهای قوی که با تپهای اپتیکی شدید دمیده می‌شوند، عمل لیزری وقتی شروع می‌شود که چگالی واژگونی فراوانی به یک حد معینی برسد، یعنی وقتی بهره‌اِپتیکی از اتلاف بیشتر شود. عکس اتلاف نسبی در هر چرخه را بازآوای Q ی کاواک می‌نامند. هرچه اتلاف کمتر باشد، Q بیشتر و چگالی واژگونی لازم برای نوسان کمتر می‌شود و برعکس. در لیزرهای تپی قوی، به مجرد شروع نوسان لیزری، چگالی واژگونی به سرعت "صرف شده" و از بین می‌رود. با به تاخیر انداختن آغاز نوسان می‌توان به واژگونی بیشتر و بدین سان به برونداد بیشتری دست یافت. این عمل با قراردادن یک بستاور نوری مناسب به نام کلید Q در داخل کاواک لیزر انجام می‌شود. بستاور به‌هنگام شروع دمش تپی بسته است و وقتی واژگونی فراوانی به حداکثر می‌رسد باز می‌شود.

سطوح صیقلی و موازی دو انتهای  
حفره که تا حدی بازتابنده هستند



شکل ۱۶.۹ لیزر دیود نیمرسانا.

روشهای بستاوری  $Q$  ی مختلفی وجود دارند. یک روش ساده این است که یکی از آینه‌های بازآواگر را با سرعت حول محوری عمود بر محور نوری کاواک لیزر بچرخانیم. این کار، جز برای زمانی کوتاه در خلال چرخه چرخش، عمل کاواک را مختل می‌کند و نوسان را باز می‌دارد. در روش دوم از یک بستاور الکترواپتیکی در کاواک لیزر استفاده می‌شود. در اینجا، معمولاً "سلولهای پوکلز به‌کاربرده می‌شوند. سلول پوکلز با یک ولتاژ تپی قوی، که خود نسبت به دمش تپی اپتیکی تاخیر مناسبی دارد، "باز" می‌شود. در روش سوم یک درآشامنده قابل اشباع به‌کاربرده می‌شود. این، یک نوع رنگ مایع است که وقتی نور شدید بر آن تابیده می‌شود زداییده و شفاف می‌شود، به‌طوری که ترازهای بالای آن اشباع شده و دیگر جذب رخ نمی‌دهد. این‌گونه بستاور  $Q$  را بستاور خودکار می‌نامند.

با استفاده از بستاور  $Q$  می‌توان حد اکثر را خیلی بالا برد. تپهای ۱۰۰ مگاواتی با لیزرهای یا قوتی و لیزرهای نئودیمیوم - شیشه‌ای نسبتاً متداول است. همچنین وقتی بستاور  $Q$  اعمال می‌شود زمان تپ از مقدار نوعی چند میکروثانیه به چند نانوثانیه تقلیل پیدا می‌کند. با عبور دادن پرتو خروجی یک لیزر مجهز به بستاور  $Q$  از یک یا چندین تقویت‌کننده، ممکن است توان را حتی از این هم زیادتر کرد. با این روش توانسته‌اند تپهای گیگاواتی (GW) و تراواتی (TW) تولید کنند. این توانهای فوق‌العاده زیاد برای لیزرهایی که در جوشکاری به‌کاربرده می‌شوند لازم است.

### مد بستگی

اگر یک جسم درآشامنده غیرخطی، مانند رنگ مایع زدایی‌پذیر، در کاواک بازآواگر یک لیزر قرار داده شود، اغلب دیده می‌شود که بیرون داد لیزر به تپهای منظم خیلی کوتاه تبدیل می‌شود. جدایی زمانی بین تپهای بی‌درپی برابر با زمان یک رفت و برگشت نور در کاواک اپتیکی (یا گاهی کسر ساده  $\frac{1}{4}$ ،  $\frac{1}{3}$ ،  $\frac{1}{2}$ ، ... از آن) است. بدین‌سان تابش در داخل کاواک در یک یا چند تپ کوتاه "دسته می‌شود" که بین آینه‌های بازآواگر رفت و آمد می‌کنند. یک تحلیل ساده فوریه نشان می‌دهد که بیناب بسامدی یک قطار منظم تپ از یک عده بسامدهای گسسته تشکیل می‌شود که با بسامد تکرار تپها از هم جدا می‌شوند. چون زمان رفت و برگشت  $2dl/c$  است،

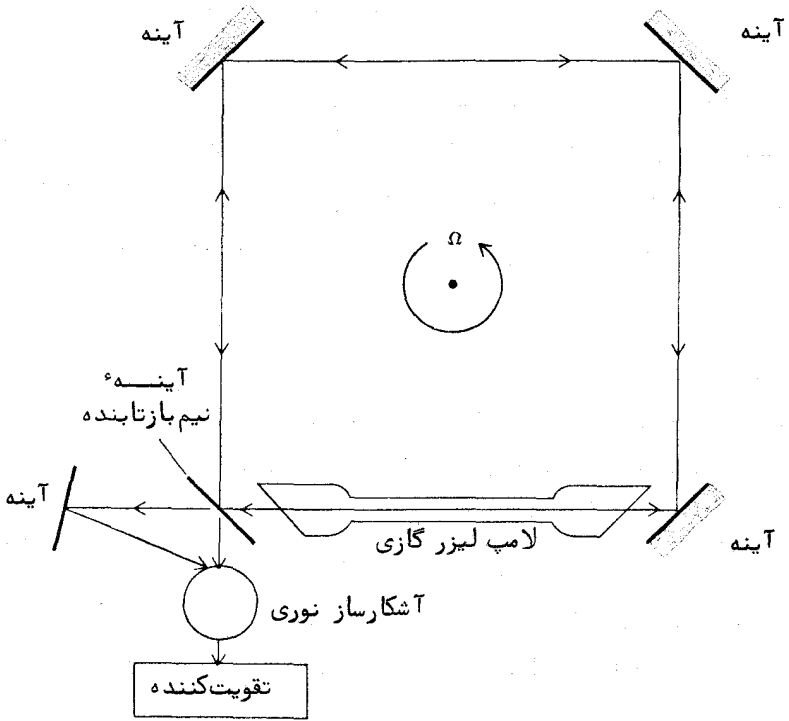
که در آن  $d$  فاصله آینه‌ها و  $u$  سرعت نور است، بنابراین بیناب بسامدی قطار تپ شامل مولفه‌هایی است که با فاصله مد طولی  $u/2d$  (یا مضرب صحیحی از آن) از هم جدا می‌شوند. — برخلاف یک لیزر معمولی که در مدهای طولی گوناگونی به‌طور همزمان و بدون رابطه فازی همدوس نوسان می‌کند، فازها در تپهای منظم، لزوماً به‌طور معینی به یکدیگر مربوطند. از این رو گفته می‌شود که لیزر تپی، مد بسته، یا فاز بسته است.

طبق بحث بخش ۶.۳، معادله (۳۳.۳)، پهنای یک تپ تکی برابر با عکس پهنای بسامدی وابسته است. این پهنای، برای یک لیزر مد بسته، برابر با تمام پهنای نواری است که به وسیله مدهای نوسانی اشغال می‌شود، از این رو اگر  $N$  عدد از چنین مدهایی وجود داشته باشند، پهنای زمانی هر تپ برابر  $1/N$  زمان بین دو تپ پیاپی است. بدین سان لیزرهایی که نوار بسامدی تقویتشان پهن است می‌توانند حامل تعداد زیادی مد باشند و در نتیجه قادرند تپهای مد بسته خیلی کوتاه تولید کنند. در لیزرهای گازی، مانند لیزر هلیوم — نئون یا لیزر آرگون، که در یک خط اتمی باریک نوسان می‌کنند، باریکی تپهای مد بسته به چند نانوثانیه محدود می‌شود. ولی لیزرهای رنگی و لیزر نئودیمیوم — شیشه‌ای که نوار بسامدی پهن دارند، تپهای مد بسته با باریکی پیکوثانیه تولید می‌کنند. برای نمونه باریکی یک تپ سمپیکوثانیهای فقط یک میلی‌متر است. در این گونه موارد براستی می‌توان گفت که تابش در "ورقه" نازکی که با سرعت نور پیش می‌رود تمرکز پیدا کرده است.

## ۱۲.۹ لیزر حلقه‌ای

لیزر حلقه‌ای نمونه‌ای است از کاربردهای فن‌شناختی لیزر. این وسیله در سال ۱۹۶۳/۱۳۴۲ به وسیله موسسه اسپری-رندبرای اندازه‌گیری چرخش ساخته شد. در این روش پرتوهای نور همدوس در جهت عکس چرخش مورد اندازه‌گیری دوران داده می‌شوند. طرح آن شبیه به لیزر تجربه سایناک "Sagnac" (بخش ۴ پیوست) است.

شکل ۱۲.۹ اصول بنیادی لیزر حلقه‌ای را نشان می‌دهد. کاواک اپتیکی لیزر از چهار آینه که یک مربع را به وجود می‌آورند تشکیل شده است. یک یا چند لوله لیزر برای تقویت در کاواک قرار داده می‌شوند. نوسان با بسامدهای بازآوایی:



شکل ۱۲۰۹ لیزر حلقه‌ای.

$$v_n = n \frac{c}{L}$$

که در منحنی تقویت محیط لیزری قرار دارند، انجام می‌گیرد. در اینجا  $L$  طول موثر تمام حلقه و  $n$  عددی درست است.

اگر دستگاه گرد محوری عمود بر سطح مربع بچرخد، طولهای موثر راههای نوری پرتوهایی که در دو جهت مخالف حرکت می‌کنند متفاوت خواهند بود. در نتیجه بین بسامدهای نوسان لیزری دو پرتو یک اختلاف  $\Delta\nu$  وجود خواهد داشت. این اختلاف چنین است:

$$\Delta\nu = \nu \frac{4A}{cP} \Omega \quad (۳۰۹)$$



که در آن  $\nu$  بسامد لیزر در حال سکون،  $A$  مساحت سطح مربع،  $P$  محیط آن و  $\Omega$  سرعت زاویه‌ای چرخش است.

در لیزر حلقه‌ای، روش بسامدآمیزی اپتیکی به‌کاربرده می‌شود. دو پرتو برون‌دای لیزر، مطابق شکل، نزد هم آورده می‌شوند و آشکارسازی می‌شوند. برون‌داد آشکارساز نوری علامتی زنشی است، که بسامد آن برابر با اختلاف  $\Delta\nu$  است. این اختلاف به‌نوبه خود با سرعت زاویه‌ای چرخشی متناسب است.

### مسائل

- ۱۰۹ اولین خط سری اصلی سدیم، خط  $D$  به طول موج  $5890$  نانومتر است. این طول موج مربوط به گذار از اولین حالت برانگیخته  $(3p)$  به حالت زمینه  $(3s)$  است. انرژی اولین حالت برانگیخته برحسب الکترون ولت چقدر است؟
- ۲۰۹ در یک لامپ بخار سدیم با دمای  $250$  درجه سانتی‌گراد چه کسری از اتمهای سدیم در نخستین حالت برانگیخته‌اند؟
- ۳۰۹ برای خط  $D$  سدیم، در دمای  $250$  درجه سانتی‌گراد نسبت گسیل‌القایی به گسیل خودبه‌خودی چقدر است؟
- ۴۰۹ ثابت بهره یک لیزر فرضی با مشخصات زیر را محاسبه کنید. چگالی واژگونی:  $10^{17} / \text{cm}^3$ ، طول موج:  $700$  نانومتر، پهنای خط:  $1$  نانومتر و عمر گسیل خودبه‌خودی:  $10^{-4}$  ثانیه.
- ۵۰۹ چگالی واژگونی  $(g_2/g_1) N_2 - N_1$  را برای لیزر هلیوم - نئون در طول موج  $633$  نانومتر محاسبه کنید. ثابت بهره  $2$  درصد بر متر و دمای تخلیه  $100$  درجه سانتی‌گراد است. عمر حالت بالا برای گسیل خودبه‌خودی به حالت پایین،  $10^{-7}$  ثانیه است.
- ۶۰۹ اگر قطر لکه روی آینه‌های لیزر هلیوم نئون  $5$  میلی‌متر باشد، طول کاواک لیزر چقدر است؟ کاواک از نوع همکانون و طول موج نور  $633$  نانومتر است. قطر لکه گذار  $39$  میکرومتری در همان حفره چقدر است؟

- ۷.۹ برای ازبین بردن مدهای بالا، روی آینه‌های کاواک همکانون دهانه‌های محدودکننده فرار می‌دهند. اگر طول کاواک یک متر باشد، قطر روزنه‌ها چقدر باید باشد تا اتلاف برای مد  $TEM\ 0,1$  یک درصد باشد اتلاف برای مد  $TEM\ 0,0$  چقدر است؟ (به شکل ۱۰.۹ نگاه کنید). طول موج نور ۶۳۳ نانومتر است.
- ۸.۹ معادلهٔ (۳۰.۹) مربوط به تفاوت بسامدی در لیزر حلقه‌ای را به دست آورید.

## فصل دهم

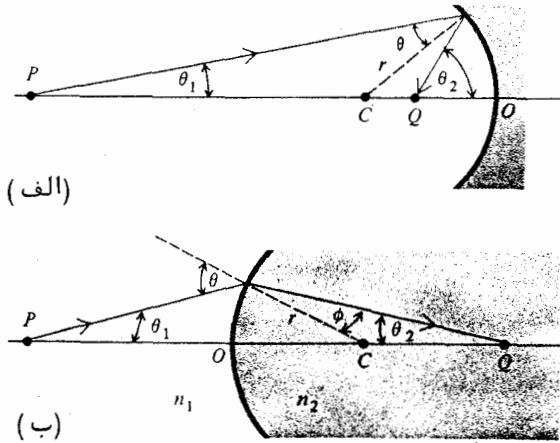
نورشناسی پرتوی

## ۱۰۱۰ بازتاب و شکست در یک سطح کروی

در واقع همه دستگاههای نوری مورد استفاده همگان شامل دو نوع سطح اپتیکی اند. تخت و کروی. وقتی نور از یک دستگاه نوری که دارای اجزای نوری گوناگونی مانند آینه، منشور و عدسی است می‌گذرد، مسیر آن براحتی و بدقت برحسب پرتوهای نور مشخص می‌شود. مسیر یک پرتو را می‌توان با به‌کاربردن قانون بازتاب یا قانون شکست اشکل محاسبه کرد. روش تعقیب مسیر یک پرتو معین در دستگاه را ردیابی پرتو می‌نامند.

در شکل ۱۰۱۰ مسیر یک پرتو که از نقطه  $P$  روی محور یک سطح نوری برخاسته، نشان داده شده است. در شکل (الف) سطح نوری یک آینه کروی است، در (ب) سطح نوری یک سطح شکست کروی است که دو محیط نوری را از یکدیگر جدا می‌کند. پرتو در نقطه‌ای مانند  $Q$  به محور باز می‌گردد. فاصله  $OP = s$  را فاصله جسم و فاصله  $OQ = s'$  را فاصله تصویر می‌نامند. شعاع خمیدگی سطح،  $OC = AC = r$  است.

برای آینه کروی که در شکل ۱۰۱۰ (الف) نشان داده شده است، با استفاده از مثلثهای مناسب، از قانون سینوسها نتیجه می‌گیریم که:



شکل ۱۰۱۰ هندسه (الف) بازتاب یک پرتو از یک سطح کروی و (ب) شکست یک پرتو در یک سطح کروی.

$$r \sin \theta = (s - r) \sin \theta_1 \quad r \sin \theta' = (r - s') \sin \theta_2$$

با به‌کاربردن قانون بازتاب  $\theta = \theta'$  همبستگی میان زاویهٔ میل پرتو فرودی و زاویهٔ میل پرتو بازتاب به‌دست می‌آید،

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{(r - s')}{(s - r)} \quad ( ۱۰۱۰ )$$

همین‌طور، برای سطح شکست کروی در شکل ۱۰۱۰ (ب)، از قانون سینوسها

نتیجه می‌شود:

$$r \sin \theta = (r + s) \sin \theta_1 \quad r \sin \phi = (s' - r) \sin \theta_2$$

با استفاده از قانون اشکل  $\sin \theta / \sin \phi = n_2 / n_1$ ، که در آن  $n_1$  و  $n_2$  نماشکستهای دو محیط هستند، همبستگی زیر را میان پرتوهای فرودی و شکسته به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{s' - r}{s + r} \frac{n_2}{n_1} \quad (2010)$$

### تقریب پیرامحوری

تحلیل بالا نشان می‌دهد که هرگاه پرتوهایی از یک نقطه روی محور آغاز شوند فاصله تصویر برای همه پرتوها یکی نیست، بلکه به زاویه میل  $\theta_1$  در محل جسم بستگی دارد، یعنی پرتوها در یک نقطه تکی کانونی نمی‌شوند. این یک ویژگی همگانی برای سطوح کروی است و آن را عیب کروییت می‌نامند. با این حال اگر زوایا به اندازه‌ای کوچک باشند که بتوان در معادلات (۱۰۱۰) و (۲۰۱۰) خود زوایا را جایگزین سینوسها کرد، همبستگیهای بالا بسیار ساده می‌شوند و تصویر یک نقطه محوری یک نقطه خواهد شد. این را تقریب پیرامحوری می‌نامند. بدین سان برای بازتابنده کروی، معادله (۱۰۱۰) به صورت ساده زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \quad (3010)$$

و همین‌طور، برای سطح شکننده کروی، معادله (۲۰۱۰) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (4010)$$

### قرارداد علامتها

باید توجه داشت که هرچند نمودارهای شکل ۱۰۱۰ پرتوی را نشان می‌دهند که از یک نقطه جسم روی محور به طور واگرا برمی‌خیزد و به طور همگرا نقطه تصویر را روی محور تشکیل می‌دهد، معادلات (۳۰۱۰) و (۴۰۱۰) برای موارد دیگر نیز برقرارند. مثلاً "اگر فاصله تصویر به دست آمده،  $q$ ، برای مقادیر معین پارامترهای دیگر منفی باشد، در این صورت پرتوها در حقیقت همگرا نخواهند بود، بلکه واگرا بوده و به نظر می‌رسند که از نقطه‌ای مجازی در پشت سطح اپتیکی مورد بحث می‌آیند. دیگر اینکه در یک بازتابنده خم، علامت شعاع  $r$  برای سطح کاو، مطابق شکل، مثبت

و برای سطح کوژ منفی است. همین‌طور اگر یک سطح شکننده<sup>۲</sup> خم، مانند شکل، نسبت به جهت پرتو فرودی کوژ باشد علامت شعاع آن مثبت، و اگر کاو باشد منفی است.

### فاصله<sup>۲</sup> کانونی یک آینه<sup>۲</sup> کروی

با مراجعه به معادله<sup>۲</sup> (۳۰۱۰) می‌بینیم که اگر فاصله<sup>۲</sup> جسم بی‌نهایت بزرگ باشد، به‌گونه‌ای که پرتوهای تابنده موازی باشند، فاصله<sup>۲</sup> تصویر درست  $r/2$  می‌شود. این فاصله را فاصله<sup>۲</sup> کانونی آینه می‌نامند و با  $f$  نشان می‌دهند. پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (5.10)$$

که در آن، برای یک آینه<sup>۲</sup> کروی به شعاع  $r$  داریم:

$$f = \frac{r}{2} \quad (6.10)$$

### ۲۰۱۰ عدسیها

#### عدسی نازک تکی

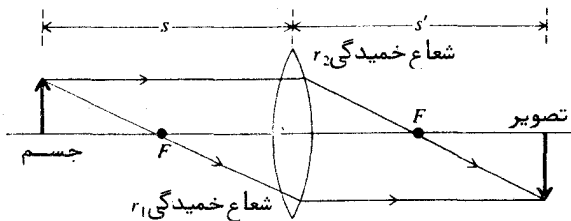
در یک عدسی نازک، که از ماده‌ای با نمارشکست  $n$  ساخته شده و شعاعهای خمیدگی آن  $r_1$  و  $r_2$  است، بسادگی می‌توان نشان داد که، برای پرتوهای پیرامحوری، فاصله<sup>۲</sup> جسم و فاصله<sup>۲</sup> تصویر با معادله<sup>۲</sup> زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (7.10)$$

در اینجا نمارشکست محیط اطراف عدسی یک اختیار شده است. اگر عدسی در محیطی همگن باشد، در این صورت  $n$  نمارشکست نسبی عدسی و محیط اطراف آن است. به دست آوردن این رابطه، به عنوان یک تمرین به عهده<sup>۲</sup> خواننده واگذار می‌شود. مانند بازتابنده<sup>۲</sup> کروی، فاصله<sup>۲</sup> کانونی  $f$  بنا به تعریف برابر با فاصله<sup>۲</sup> تصویر برای پرتوهای فرودی موازی است. از این رو می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad ( ۸۰۱۰ )$$

این معادله فرمول عدسی‌سازان نامیده می‌شود. در شکل ۲۰۱۰ تشکیل تصویر به وسیله یک عدسی تکی نشان داده شده است. گرچه نقطه جسم و نقطه تصویر در این حالت روی محور نوری نیستند. ولی می‌توان فرمولهای پرتوهای پیرامحوری را برای یافتن نتایج تقریبی به‌کاربرد.



شکل ۲۰۱۰ تشکیل تصویر به‌وسیله یک عدسی نازک. فاصله مرکز عدسی از نقطه‌هایی که با  $F$  نشان داده شده‌اند برابر فاصله کانونی  $f$  است.

### ترکیب عدسیهای نازک

فاصله کانونی کل حاصل از ترکیب چند عدسی نازک که مجاور هم (در تماس) قرار دارند به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \dots \quad ( ۹۰۱۰ )$$

که در آن  $f_1, f_2, \dots$  هر یک، فاصله کانونی یکی از عدسیها است. اگر دو عدسی که با هم ترکیب می‌شوند با یکدیگر تماس نداشته باشند و فاصله آنها از هم  $d$  باشد، فاصله کانونی مؤثر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad ( ۱۰۰۱۰ )$$



## عدسی کلفت

برای یک عدسی کلفت تکی که در هوا قرار دارد، معادله<sup>۲</sup> (۲۰۱۵) را می‌توان برای ردیابی پرتو به‌کاربرد، ولی اگر فرمول ساده<sup>۱</sup> عدسی نازک به‌کار برده‌شود باید دانست که فواصل جسم و تصویر بترتیب از صفحات اصلی  $H$  و  $H'$  اندازه‌گیری می‌شوند، (شکل ۳۰۱۵). فاصله<sup>۲</sup> کانونی  $f$  (نسبت به صفحه<sup>۱</sup> اصلی) از معادله<sup>۲</sup> زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{(n-1)t}{nr_1r_2} \right] \quad (11.10)$$

که در آن  $t$  کلفتی عدسی است. مکانهای صفحات اصلی نسبت به رأسهای عدسی از معادلات زیر به‌دست می‌آیند:

$$d_1 = \frac{ft}{n} \left( \frac{1-n}{r_2} \right) \quad (12.10)$$

$$d_2 = \frac{ft}{n} \left( \frac{1-n}{r_1} \right)$$

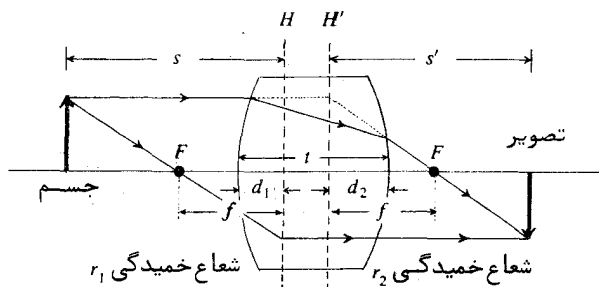
## عیب رنگی

چون نمارشکست به طول موج بستگی دارد، فاصله<sup>۲</sup> کانونی یک عدسی<sup>۱</sup>، معادله<sup>۲</sup> (۸۰۱۵)، با طول موج تغییر می‌کند. این تغییرات را ابیراهی رنگی می‌خوانند. این عیب را می‌توان با ترکیب عدسیهایی که از شیشه‌هایی با پاشندگیهای متفاوت ساخته شده‌اند، به‌طور اساسی کاهش داد. از ترکیب دو عدسی نازک با فواصل کانونی زیر می‌توان یک عدسی مرکب بدون عیب رنگی با فاصله<sup>۲</sup> کانونی  $f$  به‌دست آورد:

$$f_1 = f \left( 1 - \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) \quad f_2 = f \left( 1 - \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) \quad (13.10)$$

که در آنها:

$$\delta_1 = \frac{1}{n_1 - 1} \frac{dn_1}{d\lambda} \quad \delta_2 = \frac{1}{n_2 - 1} \frac{dn_2}{d\lambda} \quad (14.10)$$



شکل ۳۰۱۰ تشکیل تصویر به وسیله یک عدسی کلفت. فاصله کانونی \$f\$ که از معادله (۱۱.۱۰) به دست می آید، فاصله هر یک از صفحات اصلی است از نقطه‌هایی که با \$F\$ نشان داده شده‌اند.

چون \$dn/d\lambda\$ نیز با طول موج تغییر می‌کند، یک عدسی را برای یک بازه طول موجی محدودی می‌توان بی‌عیب ساخت.

### عیب کرویت در یک عدسی تکی

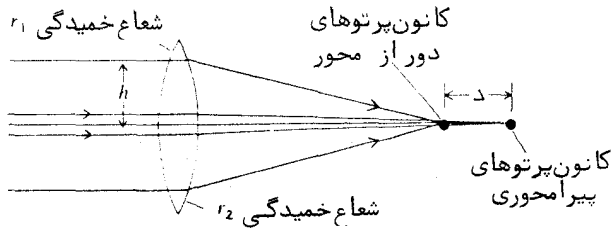
فاصله کانونی مؤثر یک عدسی ساده با \$h\$ که فاصله پرتوهای فرودی از محور است تغییر می‌کند، (شکل ۴.۱۰).

فرمول (۸.۱۰) برای پرتوهای پیرامحوری به کار برده می‌شود. اختلاف میان فاصله کانونی \$f\$ برای پرتوهای پیرامحوری و فاصله کانونی برای پرتوهای که در فاصله \$h\$ از محور وارد عدسی می‌شوند، تقریباً متناسب با \$h^2\$ است و می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد.

$$\Delta = \frac{1}{2} K h^2 \quad (15.10)$$

که در آن \$K\$ از عبارت نسبتاً پیچیده زیر به دست می‌آید

$$K = \frac{f^2(n-1)}{n^2} \left[ \frac{1}{r_1^3} + \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{r_2} \right)^2 \left( \frac{n+1}{f} - \frac{1}{r_2} \right) \right] \quad (16.10)$$



شکل ۴.۱۰ نمایش عیب کرویت .

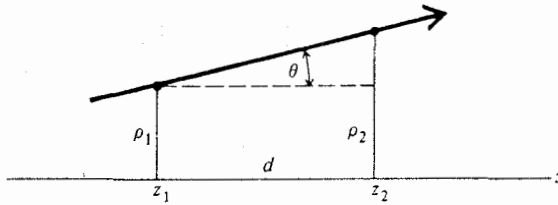
هرگاه نسبت شعاعها به یکدیگر به صورت زیر باشد :

$$\frac{r_1}{r_2} = -\frac{n+4-2n^2}{n+2n^2} \quad (17.10)$$

$K$  کمترین مقدار را دارا خواهد بود. این فرمول، که شکل یک عدسی ساده با کمترین ابیراهی کرویت را مشخص می‌کند، تنها برای اجسام بسیار دور صادق است. در وسایل نوری، مانند دوربینهای عکاسی، که از ترکیب عدسیها استفاده می‌شود، با انتخاب مناسب خمیدگی و فاصله عدسیها، می‌توان ابیراهی کرویت و دیگر ابیراهها را به کمترین مقدار خود رساند. در سالهای اخیر پیچیدگیهای ریاضی در طراحی عدسیها، با به‌کاربردن ماشینهای حسابگر الکترونیکی، بسیار ساده شده است. علاقمندان به این مبحث می‌توانند به منابعی که در پایان کتاب آورده شده مراجعه کنند.

### ۳.۱۰ معادلات پرتو

یک دسته پرتو پیرامحوری که در جهت کلی محور نوری (محور  $z$ ) یک دستگاه اپتیکی پیش می‌رود را در نظر بگیرید. مکان و جهت هر پرتو را می‌توان به کمک دو پارامتر معین کرد، یکی فاصله پرتو از محور نوری که با  $\rho$  نشان می‌دهیم، و دیگری زاویه پرتو با محور نوری که با  $\theta$  نمایش می‌دهیم. اگر مطابق شکل (۵.۱۰)، پرتو از  $z = z_1$  به  $z = z_2 = z_1 + d$  برود، بنابراین تقریب پیرامحوری،  $\rho$  به اندازه  $\theta d$  زیاد می‌شود و بنابراین می‌توانیم بنویسیم



شکل ۵.۱۰ تعریف هندسی پارامترهای بردار پرتو.

$$\begin{aligned}\rho_2 &= \rho_1 + \theta_1 d \\ \theta_2 &= \theta_1\end{aligned}\quad (18.10)$$

معادله (۱۸.۱۰) بیان‌کننده تبدیل پرتو  $(\rho_1, \theta_1)$  در پیمودن فاصله  $d$  در یک محیط همگن است.

فرض کنید یک پرتو معین  $(\rho_1, \theta_1)$  از صفحه مرزی دو محیط دی‌الکتریک با نمارشکستهای  $n_1$  و  $n_2$  عبور کند، (شکل ۶.۱۰). دوباره در تقریب پیرامحوری از قانون اشنل نتیجه می‌گیریم

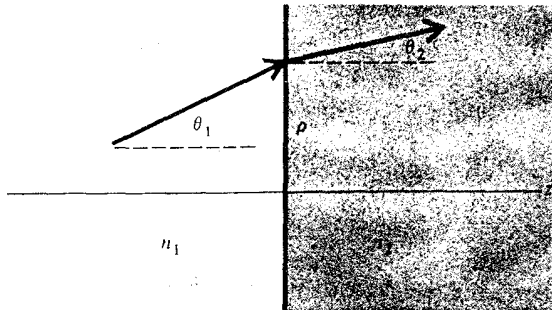
$$\begin{aligned}\rho_2 &= \rho_1 \\ \theta_2 &= \theta_1 \frac{n_1}{n_2}\end{aligned}\quad (19.10)$$

اگر به جای صفحه مرزی، مطابق شکل ۱۰.۱۰ (ب)، یک سطح مرزی خم داشته باشیم، در این صورت با تغییری آشکار در نمادگذاری خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\rho_2 &= \rho_1 \\ \theta_2 &= \theta_1 \frac{n_1}{n_2} - \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \frac{\rho_1}{r}\end{aligned}\quad (20.10)$$

معادله دوم با قراردادن  $\theta_1 = \rho_1/s$  و  $\theta_2 = -\rho_1/s'$  در معادله (۴.۱۰) به دست آمده است.

سرانجام برای عدسی یا آئینه خم معادلات پرتو، متناظر با معادله (۵.۱۰)،



شکل ۶.۱۰ هندسه عبور یک پرتو از یک صفحه مرزی.

عبارتند از

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \rho_1 \\ \theta_2 &= \theta_1 - \frac{\rho_1}{f} \end{aligned} \quad (21.10)$$

که در آن  $f$  فاصله کانونی عدسی یا آینه است.

#### ۴.۱۰ ماتریسهای پرتو و بردارهای پرتو

همه معادلات پرتوی که در بخش پیش به دست آوردیم را می توانیم براحتی در یک شکل کلی ماتریسی بیان کنیم:

$$\begin{bmatrix} \rho_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad (22.10)$$

ماتریسهای ستونی  $\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} \rho_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$  را بردارهای پرتو، و ماتریس تبدیل:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

را ماتریس پرتو می خوانند. این ماتریس به طور فشرده، تغییری که یک پرتو هنگام عبور

از یک سطح یا جزء نوری متحمل می‌شود را مشخص می‌کند. ماتریسهای پرتو متناظر با معادلات پرتو که در بخش ۳۰۱۰ به دست آمدند، در جدول ۱۰۱۰ نوشته شده‌اند. مفیدترین ویژگی حل ماتریسی مسایل نورشناسی پرتوی، این است که می‌توان بسادگی با ضرب ماتریسی به ترکیب اجزای نوری پرداخت. بدین‌سان ماتریس کلی یک رشته اجزای نوری که ماتریس هر یک از آنها  $[M_a]$ ،  $[M_b]$ ،  $[M_c]$ ، ... و غیره است، عبارت است از:

$$[M] = \dots [M_c][M_b][M_a] \quad (23.10)$$

برای مثال، ترکیبی از دو عدسی نازک به هم چسبیده را که فواصل کانونی آنها به ترتیب  $f_1$  و  $f_2$  است در نظر بگیرید. با مراجعه به جدول ۱۰۱۰ برای ماتریس یک عدسی تکی می‌بینیم که ماتریس این ترکیب چنین خواهد بود

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین فاصله کانونی مؤثر این ترکیب به صورت زیر بیان می‌شود

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

### ۵۰۱۰ موجبر با عدسیهای دوره‌ای. بازآواگرهای نوری

اکنون روش ماتریسی را برای بررسی عبور یک پرتو از یک رشته عدسیهای پیاپی به‌کار می‌بریم؛ همچنین از آنجا که یک آینه خم با شعاع  $r$  از نظر نوری با یک عدسی به فاصله کانونی  $f = r/2$  معادل است، همین‌روش را برای پرتوی که میان دو آینه خم رفت و آمد می‌کند به‌کار می‌بریم. برای سادگی مطابق شکل ۷۰۱۰ حالت متقارنی را در نظر می‌گیریم که در آن عدسیها (آینه‌ها) همانند بوده و دارای فاصله کانونی  $f$  و جدایی  $d$  هستند.

یک پرتو را که از سطح یک عدسی یا آینه برمی‌خیزد در نظر بگیرید. این پرتو بعد از پیمودن فاصله  $d$  به عدسی یا آینه بعدی می‌رسد و به‌وسیله آن

## جدول ۱۰۱۰ چند ماتریس پرتو

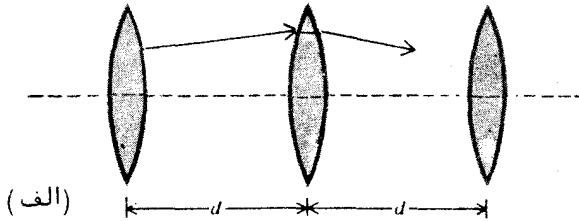
ملاحظات	ماتریس پرتو	جزء نوری
$d =$ مسافت طی شده	$\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	سیر آزاد در محیط همگن
$n_1$ و $n_2$ نمارشکستهای دو طرف	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_1/n_2 \end{bmatrix}$	صفحه دی الکتریک مرزی (تخت)
$r =$ شعاع خمیدگی گوژ $r > 0$ کاو $r < 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{r}(n_1/n_2 - 1) & n_1/n_2 \end{bmatrix}$	سطح دی الکتریک مرزی (کروی)
برای آینه $f = r/2$ ، برای عدسی از معادله (۸.۱۰) استفاده می شود.	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}$	عدسی یا آینه با فاصله کانونی $f$

شکسته یا بازتابیده می شود. پس تبدیل پرتو از معادله زیر به دست می آید

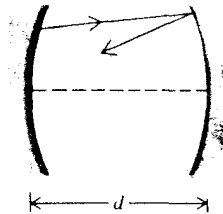
$$\begin{bmatrix} \rho_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -1/f & 1 - d/f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad (24.10)$$

در اینجا این پرسش مطرح می شود که آیا بردار پرتو اولیه ای وجود دارد که بردار پرتو برونداد مضرب ثابتی از آن باشد؟ به زبان دیگر آیا جوابی برای معادله زیر وجود دارد؟

$$\begin{bmatrix} \rho_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$



( الف )



( ب )

شکل ۷.۱۰ (الف) موجبر با عدسیهای دوره‌ای متقارن، (ب) یک بازآواگر نوری.

این پرسش می‌تواند به‌طور کلی برای هر دستگاه نوری که ماتریس پرتوی آن به‌وسیله معادله کلی (۲۲.۱۰) بیان می‌شود، مطرح شود. مسئله ریاضی، یافتن جوابهای معادله:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

یا:

$$\begin{bmatrix} M_{11} - \lambda & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (25.10)$$

است. در اینجا با همان مسئله ریاضی که پیشتر در فصل دوم، در رابطه با ویژه بردارهای ماتریس جونز، مورد بحث بود روبرو هستیم. جوابهای معادله (۲۵.۱۰) ویژه بردارهای دستگاه نوری را معین می‌کنند. دترمینان این معادله چنین است

$$\begin{vmatrix} M_{11} - \lambda & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (26.10)$$



به مسئله بازآواگر متقارن یا موجبرهای دوره‌ای برمی‌گردیم، دترمینان بالا

چنین می‌شود

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (27.10)$$

که به معادله زیر ساده می‌شود:

$$\lambda^2 - \lambda \left( 2 - \frac{d}{f} \right) + 1 = 0$$

برای اختصار اختیار می‌کنیم  $\alpha = 1 - d/2f$ . در نتیجه جوابهای معادله درجه دوم بالا چنین می‌شوند

$$\lambda = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} = e^{\pm i\phi} \quad |\alpha| > 1 \quad (28.10)$$

یا:

$$\lambda = \alpha \pm i \sqrt{1 - \alpha^2} = e^{\pm i\phi} \quad |\alpha| < 1 \quad (29.10)$$

که در آن  $\phi$  عددی حقیقی است.

اکنون فرض کنید بردار پرتو داده شده‌ای، ویژه برداری از دستگاه باشد و  $N$  بار در دستگاه نوری بازتاب یا شکست پیدا کند. بنابراین بردار پرتو برون داد نهایی چنین خواهد بود

$$\begin{bmatrix} \rho_N \\ \theta_N \end{bmatrix} = \lambda^N \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad (30.10)$$

بدیهی است که اگر شرط بیان شده در معادله (29.10) برقرار باشد، مسیر پرتو پایدار و مجاور محور دستگاه نوری خواهد بود، زیرا در آن صورت  $\lambda^N = e^{\pm iN\phi}$  و  $|\lambda^N| = 1$ . در حالت ناپایداری که معادله (28.10) بیانگر آن است، مسیر واگر است. معیار پایداری  $|\alpha| < 1$  نامناوی زیر را برحسب پارامترهای نوری به دست می‌دهد:

$$0 < d < 4f \quad (31.10)$$

یا:

$$0 < d < 2r \quad (۳۲.۱۰)$$

در مورد بازآواگر نوری، فاصله کانونی باید مثبت باشد (آینه یا عدسی همگرا) و جدایی باید کمتر از چهار برابر فاصله کانونی یا دو برابر شعاع خمیدگی آینه‌های بازآواگر باشد. در ترکیب همکانون داریم  $d = 2f = r$  که در شرط پایداری صدق می‌کند و در بازآواگرهای لیزری بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

با روش مشابه می‌توان معیار پایداری را برای بازآواگر نوری نامتقارن که از دو آینه با فاصله‌های کانونی  $f_1$  و  $f_2$  و جدایی  $d$  تشکیل شده است، به دست آورد. این معیار عبارت است از:

$$0 < \alpha_1 \alpha_2 < 1 \quad (۳۳.۱۰)$$

که در آن:

$$\alpha_1 = 1 - \frac{d}{2f_1} \quad \alpha_2 = 1 - \frac{d}{2f_2} \quad (۳۴.۱۰)$$

بدیهی است که معیار پایداری فوق در مورد یک موجبر دوره‌ای که از عدسیهایی با فاصله‌های کانونی یک‌درمیان  $f_1$  و  $f_2$  و فاصله‌های مساوی  $d$  تشکیل شده است نیز صادق است. محاسبه به‌عنوان یک تمرین به عهده خواننده واگذار می‌شود. به‌مسائل ۶۰۱۰ و ۷۰۱۰ نگاه کنید.

## مسائل

- ۱۰۱۰ معادله ۷۰۱۰ را با روش ردیابی پرتو به دست آورید.
- ۲۰۱۰ فاصله کانونی و مکانهای صفحات اصلی را برای یک عدسی که از یک کره شیشه‌ای به شعاع  $r$  و نمارشکست  $n$  ساخته شده است معین کنید.
- ۳۰۱۰ معادله ۱۳۰۱۰ را اثبات کنید.
- ۴۰۱۰ با استفاده از روش ماتریس پرتو، معادله ۷۰۱۰ را اثبات کنید.
- ۵۰۱۰ با استفاده از روش ماتریس پرتو فاصله کانونی یک عدسی کلفت، معادله (۱۱۰۱۰)، را به دست آورید.

۶۰۱۰ شرط پایداری، معادله (۳۳.۱۰)، را برای بازآواگر نوری نامتقارن به دست آورید.

۷۰۱۰ با رسم نمودار تغییرات  $\alpha_2$  بر حسب  $\alpha_1$  در مختصات قائم، شرط پایداری  $0 < \alpha_1 \alpha_2 < 1$  را توضیح دهید. برای این منظور دو شاخه هذلولی  $\alpha_1 \alpha_2 = 1$  را بکشید. نشان دهید که شرط پایداری در نخستین و سومین ربع، در ناحیه میان محورهای مختصات و شاخه مربوط هذلولی برقرار است. توجه داده می شود که برای یک بازآواگر نوری، مبداء مختصات  $\alpha_1 = 0 = 1 - d/r_1$  و  $\alpha_2 = 0 = 1 - d/r_2$  نماینده بازآواگر همکانون است، یعنی  $d = r_1 = r_2$ . همین طور نقطه  $\alpha_2 = \alpha_1 = 1$  بازآواگر تخت-موازی را نمایش می دهد. کدام نقطه نماینده بازآواگر نیمکره ای است؟

**پیوست**

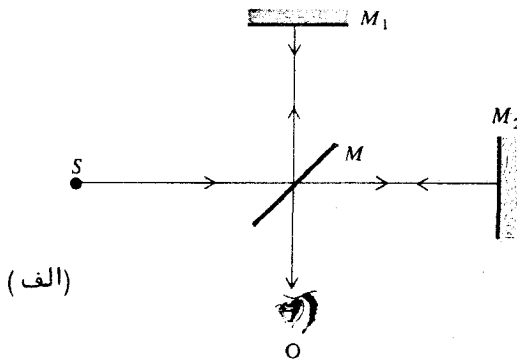
**نورشناسی نسبی**

## ۱- آزمایش مایکلسون - مورلی

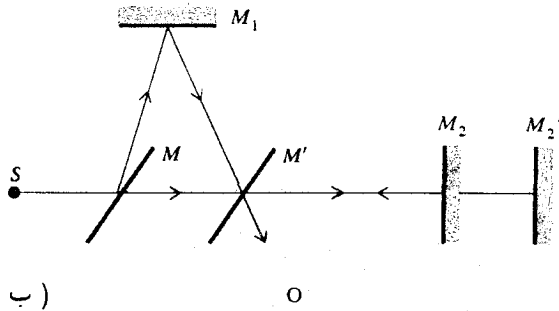
هدف مایکلسون و مورلی از انجام آزمایشی که در سال ۱۸۸۷/۱۲۶۶ انجام شد و به نام آنان مشهور است، اندازه‌گیری سرعت مطلق حرکت زمین در فضا به کمک امواج نوری بود.

نمودار ساده‌ای از آرایش اپتیکی این آزمایش که در حقیقت یک تداخل‌سنج نوری است، در شکل ۱.۱ پ نشان داده شده است. در تداخل‌سنج، پرتوی از چشمه  $S$  به کمک یک آینه نیمه نقره اندود  $M$  به دو پرتو تقسیم می‌شود. یکی از پرتوها به سوی آینه  $M_1$  بازتاب می‌شود و این آینه به نوبه خود آن را به سوی  $M$  باز می‌تاباند. پرتو دیگر مستقیماً به طرف  $M_2$  تراگیسل می‌شود و بعد از بازتابیده شدن از آن دوباره به  $M$  باز می‌گردد. این دو پرتو در  $M$  با هم همراه می‌شوند و به طرف دیدبان در  $D$  می‌روند و گرتّه فریزهای تاریک و روشن تداخلی را ایجاد می‌کنند. اگر یکی از دو آینه  $M_1$  یا  $M_2$  به اندازه یک چهارم طول موج جابه‌جا شود، فریزها در گرتّه تداخلی نیز به اندازه یک فریز تغییر مکان می‌دهند.

اگر آینه‌های  $M_1$  و  $M_2$  از  $M$  دقیقاً به یک فاصله باشند و در مدتی که نور یک رفت و برگشت را انجام می‌دهد، دستگاه حرکت نکند، در این صورت دو موج هنگام



(الف)



(ب)

شکل ۱. پ نمودار ساده شده آزمایش مایکلسون - مورلی .

بازگشت با هم همفاز خواهند بود، به طوری که در نقطه  $O$  یک فریز روشن دیده می شود. اکنون فرض کنید، تمام دستگاه در سوی نخست پرتو  $SM$  حرکت کند. مسیری که پرتوها در این حالت طی خواهند کرد با خطوط جهت دار در شکل نشان داده شده است. اگر فرض شود که سرعت نور در محیط، ثابت و برابر  $c$  است، زمانهایی که این دو موج مسیرهای خود را می پیمایند با هم برابر نخواهند بود. وضعیت مانند وضعیت دو شناگر در یک رودخانه است که یکی از آنها عرض رودخانه را می پیماید و بر می گردد، دیگری در راستای جریان رودخانه یک رفت و برگشت انجام می دهد.

برای تجزیه و تحلیل این وضعیت به طور کمی، فرض کنید سرعت دستگاه نسبت به محیط  $u$  باشد، پس سرعت موجی که به طرف  $M_2$  می رود نسبت به دستگاه

$c - u$  است. سرعت نسبی این موج در بازگشت  $c + u$  است. بنابراین زمان کل رفت و برگشت این موج برابر است با:

$$t_2 = \frac{d}{c - u} + \frac{d}{c + u} = \frac{2cd}{c^2 - u^2}$$

که در آن  $d$  فاصله  $OM_2$  است. از سوی دیگر، موجی که به وسیله  $M_1$  باز می‌تابد، مطابق شکل، مسیر  $MM_1'O$  را طی می‌کند. اگر زمان کل این رفت و برگشت را با  $t_1$  نشان دهیم، در این صورت فاصله  $MM_1'$  برابر  $\sqrt{d^2 + (\frac{1}{4})u^2t_1^2}$  است و بنابراین:

$$t_1 = \left(\frac{2}{c}\right) \sqrt{d^2 + \frac{1}{4}u^2t_1^2}$$

که بعد از حل معادله،  $t_1$  به دست می‌آید:

$$t_1 = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

تفاوت زمانی  $\Delta t$  میان دو مسیر چنین است:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 2d \left( \frac{c}{c^2 - u^2} - \frac{1}{\sqrt{c^2 - u^2}} \right) = \frac{du^2}{c^3} + \dots$$

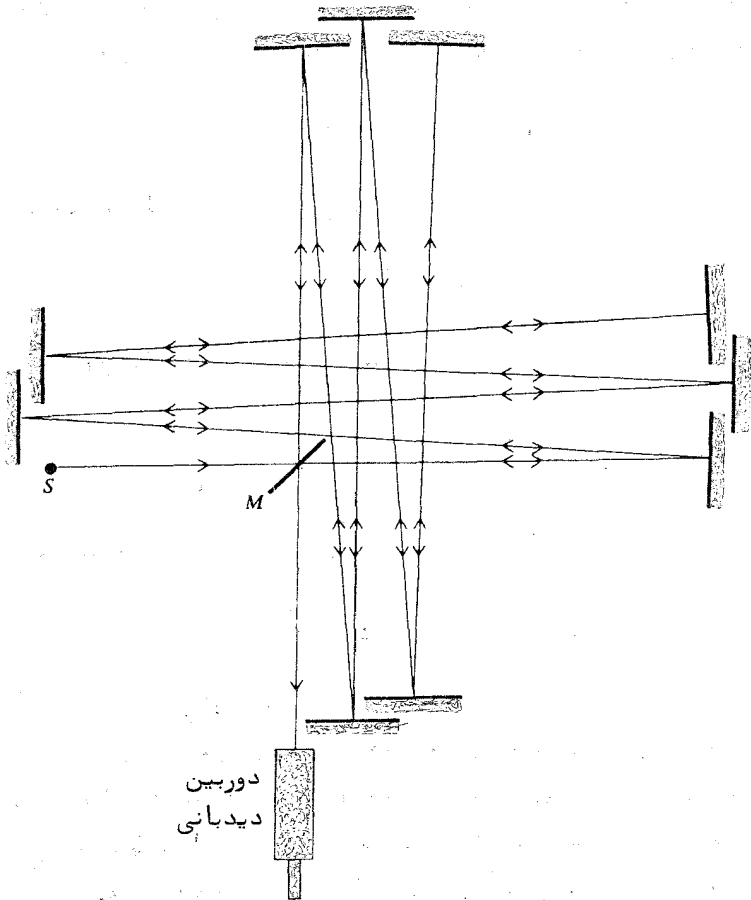
این تفاوت متناظر با اختلاف فاز زیر است:

$$\Delta\phi = \omega \Delta t = \frac{2\pi c}{\lambda} \Delta t \approx \frac{2\pi d}{\lambda} \frac{u^2}{c^2}$$

که در آن  $\lambda$  طول موج نور است.

مایکلسون و مورلی در آزمایش خود با بازتابهای پی‌درپی، چنانچه در شکل دیده می‌شود، فاصله مؤثر  $d$  را به ۱۰ متر رساندند. آزمایش با شناور ساختن تمام دستگاه روی حوضچه‌ای از جیوه انجام شد و دستگاه، در حین مشاهده فریزها به اندازه ۹۰ درجه چرخانده می‌شد. با این کار هر یک از پرتوها به نوبه خود موازی یا عمود بر حرکت زمین قرار می‌گرفت. سرعت گردش زمین به گردخورشید حدود  $c \cdot 10^{-4}$  است و انتظار می‌رفت، برای نور زرد ۵۹۰۰ انگسترمی، فریزها حدود یک سوم فریز جابجا شوند. در واقع هیچ جابجایی دیده نشد. این نتیجه منفی برای

دانشمندان شگفت‌انگیز بود و با نظریهء الکترومغناطیسی که ( در آن زمان ) مورد قبول بود، و طبق آن برای تراگیسیل تابش در فضا به یک محیط مادی نیاز نبود، مغایرت داشت. فرض براین بود که، این محیط مادی که آن را اتر ( ether ) می‌خوانند، تمام فضا را فراگرفته باشد و محاسبات زیادی نیز دربارهء ویژگیهای آن توسط دانشمندان گوناگون، منجمله ماکسول، انجام شده بود.



شکل ۲. پ مسیر واقعی نور در آزمایش مایکلسون - مورلی .



آزمایش مایکلسون - موری بارها به وسیله دانشمندان دیگر تکرار شده و همواره نتیجه آن منفی بوده است. برخی از پژوهشگران گزارشهایی مبنی بر مشاهده یک جابجایی قابل اندازه‌گیری ارائه داده‌اند، ولی هرگز این جابجاییها به اندازه پیشگویی شده برای سرعت گردش زمین نبوده است. در حقیقت این کمترین مقدار سرعت است، زیرا سرعت گردش تمام دستگاه خورشیدی به دور مرکز کهکشان حدود ده برابر این سرعت است.

پنداشت دانشمندان درباره اثر با چنان گستردگی پذیرفته شده بود، که سالها سپری شد تا سرانجام رها گردید. در واقع دو فیزیکدان، فیتزجرالد و لورنتس بر آن بودند تا با پیشنهاد اینکه هر جسمی در جهت حرکت خود در اثر به نسبت  $\sqrt{1 - u^2/c^2}$  می‌ترنجد یا منقبض می‌شود، نتیجه منفی آزمایش مایکلسون و موری را توضیح دهند. این مقدار کوتاه‌شدگی که به نام ترنچش یا انقباض فیتزجرالد - لورنتس *Fitzgerald-Lorentz contraction* نامیده می‌شود، دو مسیر نور را درست با هم مساوی می‌کرد، به طوری که جابجایی فریز وجود نمی‌داشت. یک چنین توضیح ویژه‌ای پذیرفتنی نیست، زیرا مشاهده مستقیم این انقباض امکان‌پذیر نیست و هر کوششی برای اندازه‌گیری آن با شکست روبه‌رو می‌شود، چون دستگاه اندازه‌گیری نیز همراه با جسم مورد اندازه‌گیری منقبض می‌شود.

## ۲- اصول موضوع نسبیت خاص اینشتین

در سال ۱۹۰۵/۱۲۸۴، البرت اینشتین نظریه نسبیت خاص خود را فرمولبندی کرد. این نظریه بر دو اصل بنیادی استوار است:

(۱) همه قوانین فیزیکی در تمام دستگاههای مختصات لخت یک شکل دارند.

(۲) سرعت تابش الکترومغناطیسی در خلاء در تمام دستگاههای لخت یکی است.

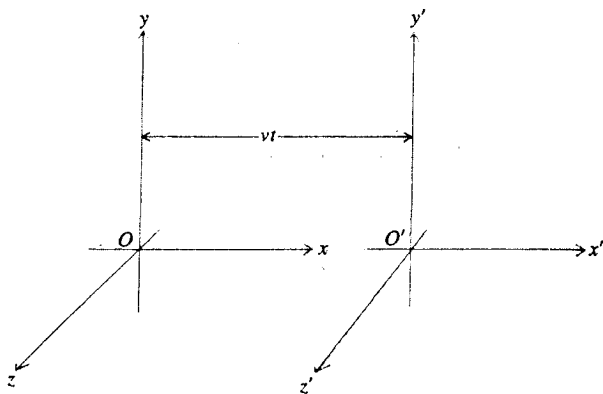
اصل اول بیانی است درباره قوانین فیزیکی و تعمیم نسبیت نیوتونی است. می‌توان نشان داد که معادلات ماکسول از این اصل پیروی می‌کنند، یعنی شکل کلی معادلات ماکسول در هر دستگاه مختصات لختی یکی است. اثبات این مطلب را کمابیش در هر کتابی درباره نسبیت می‌توان یافت (۳۲).

اصل دوم صراحت بیشتری داشته و مستقیماً " در بررسیهای نورشناختی کاربرد دارد. این اصل می‌گوید هرگونه اندازه‌گیری از سرعت نور یک مقدار را به‌دست می‌دهد، حتی اگر چشمه نور نسبت به دیدبان، و یا دیدبان نسبت به چشمه نور حرکت داشته باشد. این اصل یک باره نتیجه منفی آزمایش مایکلسون - مورلی را توضیح می‌دهد و ایجاب می‌کند که، چه دستگاه حرکت کند چه نکند، سرعت انتشار هر دو پرتو در آزمایش یادشده  $c$  باشد. از این رو نه تغییر فازی وجود دارد و نه جابجایی فریز<sup>۱</sup>.

### ۳- پدیده‌های نسبیتی در نورشناسی

طبق اصل دوم نظریه نسبیت خاص، سرعت نور در خلاء برای هر دیدبانی یکی است، خواه چشمه نور نسبت به او حرکت داشته باشد خواه او نسبت به چشمه. برای بررسی پیامدهای این اصل، دو دیدبان را در نظر بگیرید که با سرعت ثابت  $u$  نسبت به یکدیگر حرکت دارند. دستگاههای مختصات این دو دیدبان را بترتیب با  $Oxyz$  (دستگاه اول) و  $O'x'y'z'$  (دستگاه دوم) نمایش می‌دهیم. برای سادگی فرض می‌کنیم محوره‌های  $Ox$  و  $O'x'$  و جز اینها، دوه‌دو با هم موازی باشند و سرعت نسبی در جهت  $xx'$  باشد (شکل ۳.۳). فرض کنید دو مبداء  $O$  و  $O'$  در لحظه  $t=0$  بر یکدیگر منطبق باشند. بنابراین فاصله  $OO'$  برابر  $ut$  است و معادلات تبدیل، طبق جنبش‌شناسی کلاسیک یا نیوتونی، عبارتند از:

۱- باید توجه داشت که اینستین نظریه نسبیت را برای توضیح نتیجه منفی آزمایش مایکلسون - مورلی فرمولبندی نکرد، بلکه آزمایش مایکلسون - مورلی به‌عنوان یک آزمایش که اصل دوم را تایید می‌کند ذکر شده است. اخیراً آزمایشهای دیگری برای تایید ثابت بودن سرعت نور، وقتی دیدبان و چشمه نسبت به هم حرکت دارند، انجام شده‌اند. بحث بسیار جالب و مروری بر این آزمایشها در منبع زیر ارائه شده است:



شکل ۳. پ. دستگاه‌های مختصات دو دیدبان که با سرعت ثابت نسبت به یکدیگر حرکت می‌کنند.

$$x = x' + ut'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t'$$

معادله  $t = t'$ ، مساوی بودن مقیاسهای زمان دو دیدبان را بیان می‌کند. دیدبانها از ساعت‌های یکسانی استفاده می‌کنند. این معادلات تبدیل آشکارا با اصل دوم مغایزند، زیرا از آنها نتیجه می‌شود  $dx/dt = dx'/dt' + u$  به طوری که هر چیزی که با سرعت نور  $c$ ، مثلاً در دستگاه دوم، حرکت کند در دستگاه اول با سرعت  $c + u$  حرکت می‌کند:

برای به دست آوردن یک تبدیل مختصاتی که با اصل دوم نسیت سازگار باشد، معادله موج را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

این معادلهٔ دیفرانسیلی موج نوری است که با سرعت  $c$  در جهت  $x$  پیش می‌رود. لازمۀ اصل دوم این است که این معادله برای دستگاه دوم نیز به همین شکل باقی بماند، یعنی:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t'^2} = 0$$

و این در صورتی است که:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t'^2} \quad (پ. ۱)$$

معلوم می‌شود که اگر یک تبدیل خطی معمولی<sup>۲</sup> با ثابتهای مناسبی به صورت زیر انتخاب شود، معادلهٔ موج در هر دو دستگاه ناوردا خواهد بود.

$$x = a_{11}x' + a_{12}t'$$

$$t = a_{21}x' + a_{22}t'$$

برای پیدا کردن ضرایب  $a_{11}$ ،  $a_{12}$ ، و جز اینها، تبدیل بالا را در (پ. ۱) می‌نشانیم و با توجه به اینکه این معادله باید یک اتحاد باشد، سه معادله به دست می‌آوریم. این شرط جنبی که  $x=0$  باید  $x' = -ut'$  تبدیل شود را نیز نیاز داریم، به طوری که  $a_{12} = ua_{11}$ . نتیجهٔ همه اینها تبدیل مشهور لورنتس است:

$$x = \gamma(x' + ut')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right)$$

که در آن:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

۲- یک تبدیل غیر خطی نمی‌تواند واقعیت داشته باشد، زیرا حرکت یکنواخت در یک دستگاه مختصات، حرکتی شتابدار در دستگاه دیگر خواهد شد.

در اینجا فرض شده است که خواننده با پیآمدهای جنبش شناختی تبدیل لورنتس مانند انقباض طول و اتساع زمان آشنایی لازم را دارد (۳۲).

فرمول نسبیتی دوپلر

یک موج الکترومغناطیسی تخت که وابستگی فضا-زمانی آن در دستگاه مختصات اول به صورت  $\exp i(kx - \omega t)$  است را در نظر می‌گیریم. از نظر دیدبانی که در این دستگاه است، بسامد زاویه‌ای این موج  $\omega = ck$  است و درجهت  $x$  حرکت می‌کند. با به‌کاربردن تبدیل لورنتس، می‌بینیم که از نظر دیدبانی که در دستگاه مختصات دوم است، وابستگی فضا-زمانی این موج به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \exp i \left[ k\gamma(x' + ut') - \omega\gamma \left( t' + \frac{ux'}{c^2} \right) \right] \\ & = \exp i \left[ \left( k\gamma - \frac{\omega\gamma u}{c^2} \right) x' - (\omega\gamma - k\gamma u) t' \right] \end{aligned} \quad (پ. ۳)$$

که باید با عبارت زیر یکی باشد:

$$\exp i(k'x' - \omega't')$$

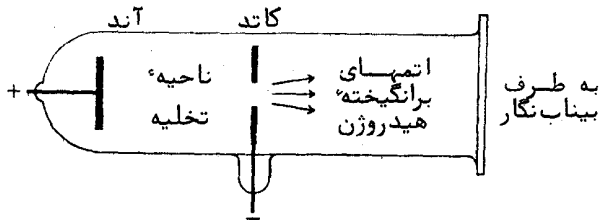
از این رو:

$$\omega' = \omega\gamma \left( 1 - \frac{ku}{\omega} \right) = \omega\gamma \left( 1 - \frac{u}{c} \right) \quad (پ. ۴)$$

همچنین چون  $\omega = 2\pi\nu$  و  $\gamma = [1 - (u^2/c^2)]^{-1/2}$  می‌توانیم بنویسیم:

$$\nu' = \nu \frac{1 - u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \nu \frac{\sqrt{1 - u/c}}{\sqrt{1 + u/c}} = \nu \left( 1 - \frac{u}{c} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} - \dots \right) \quad (پ. ۵)$$

این فرمول نسبیتی دوپلر است و بسط آن نشان می‌دهد که تفاوت جابجایی نسبیتی دوپلری با جابجایی غیرنسبیتی آن، تنها در جملات درجه دوم و بالاتر است و بنابراین تنها برای سرعت‌های زیاد قابل توجه می‌شود. درستی این فرمول، در



شکل ۰۴ پ لامپ تخلیه برای مشاهده اثر نسبیتی دوپلر .

آزمایشهایی با اتمهای تسدر و هیدروزن در لامپ تخلیه‌ای که برای همین کار ساخته شده است و طرح‌واره‌ای از آن در شکل ۰۴ پ دیده می‌شود، آزموده شده است .

### جابجایی عرضی دوپلر

حال فرض کنید، یک موج تخت در جهت منفی محور  $y$  در دستگاه مختصات اول پیش برود . وابستگی فضا-زمانی این موج چنین است  $\exp i(ky + \omega t)$  . با به‌کاربردن تبدیل لورنتس نتیجه می‌گیریم که برای دیدبانی که در دستگاه دوم با سرعت  $v$  در جهت  $x$  حرکت می‌کند ، وابستگی فضا-زمانی این موج به صورت زیر است .

$$\exp i \left[ ky' + \omega \left( \gamma t' + \frac{ux'\gamma}{c^2} \right) \right] = \exp i \left[ \frac{\omega u \gamma x'}{c^2} + ky' + \omega \gamma t' \right]$$

که چون باید با :

$$\exp i (k_x' x' + k_y' u' + \omega' t')$$

یکسان باشد، بنابراین برای ضریب  $t'$  داریم :

$$\omega' = \omega \gamma$$

که معادل است با :

$$\nu = \nu' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \nu' \left( 1 - \frac{u^2}{2c^2} + \dots \right) \quad (پ ۰.۶)$$

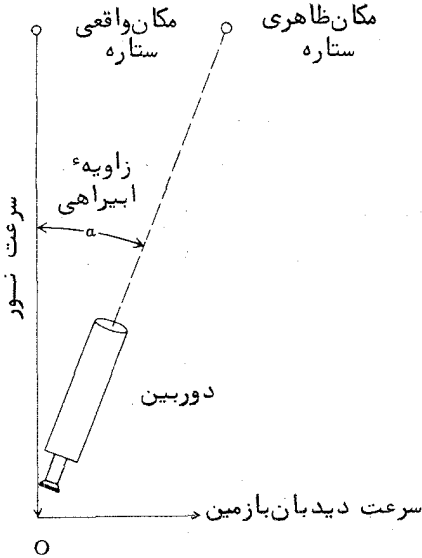
این فرمول تغییر بسامد را، برای وقتی که حرکت نسبی عمود بر جهت دید است، معین می‌کند و آن را جابجایی عرضی دوپلر می‌خوانند. اثر این جابجایی با جمله درجه دوم آغاز می‌شود و بنابراین اندازه‌گیری آن بسیار دشوار است. درستی این فرمول با استفاده از اثر موسبائر Mossbauer effect در مورد تابش گاما از اتمهای پرتوزا آزموده شده است (۱۱).

### ابیراهی نور ستارگان

پیآمد دیگر تبدیل نسبیتی یک موج تخت که در جهت  $y$  پیش می‌رود، ظاهر شدن  $x'$  در تابع موج است. این به‌طور ضمنی به این معنی است که بردار موج  $k$  دارای مولفه‌ای در سوی  $x'$  است، و در نتیجه جهت انتشار به‌طور دقیق با جهت محور  $y'$  یکی نیست. زاویه میل آن نسبت به محور  $y'$  از  $\alpha = k_x/k_y$  به‌دست می‌آید. از این رو

$$\tan \alpha = \frac{\omega \gamma u / c^2}{k} = \frac{u}{c} \gamma = \frac{u}{c \sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (پ ۰.۷)$$

این اثر را **ابیراهی نور** می‌نامند و نخستین بار در سال ۱۷۲۷/۱۱۰۶ به‌طور تجربی به‌وسیله برادلی Bradley ستاره‌شناس انگلیسی مشاهده شد. برادلی در دیدبانیهای خود در مکان هر ستاره یک جابجایی ظاهری ملاحظه کرد. این جابجایی برای ستاره‌هایی که خط دید آنها در موقع دیدبانی بر سرعت گردش زمین به‌دور خورشید عمود است، بیشتر است. بیشترین مقدار این ابیراهی اختری حدود ۲۰ ثانیه زاویه‌ای است. در شکل ۰.۵ توضیح برادلی درباره تغییر ظاهری جهت ستاره، به علت حرکت دیدبان، نشان داده شده است. وضعیت مانند حالت شخصی است که در یک هوای بارانی راه می‌رود، اگر باران با وزش باد همراه نباشد و به‌طور قائم بیارد، به‌خاطر حرکت شخص، به نظر می‌رسد که سرعت قطرات باران قائم نیست بلکه یک مولفه افقی مساوی سرعت شخص دارد. از روی شکل دیده می‌شود که  $\tan \alpha = u/c$ . تفاوت



شکل ۵.۵ پ ابیراهی نور ستاره.

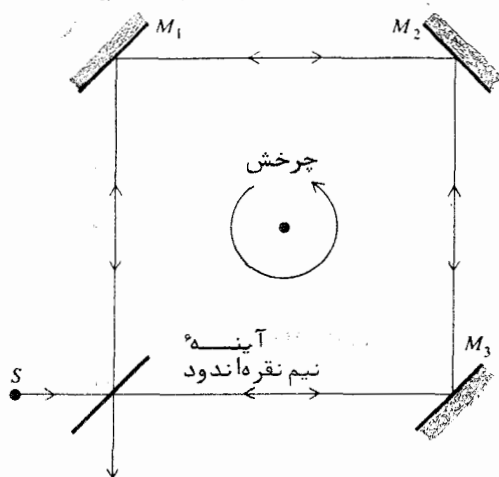
این فرمول ساده با فرمول نسبیتی (۷.۲) در وجود عامل  $\gamma$  است. ولی برای زمین  $u/c$  حدود  $10^{-4}$  و تفاوت کلا" قابل چشم‌پوشی است.

شایان توجه است که تبدیل غیر نسبیتی برای امواج تخت ابیراهی صفر به دست می‌دهد، از این رو اصولاً "ابیراهی نور یک اثر نسبیتی است. ولی توضیح ساده‌ء ابیراهی در صورتی معتبر است که نور را به صورت بارشی از فوتون فرض کنیم.

#### ۴- آزمایش سایناک و آزمایش مایکلسون و گیل برای آشکارسازی چرخش

سایناک، فیزیکدان فرانسوی در سال ۱۹۱۱/۱۲۹۰ برای آشکارسازی چرخش، با استفاده از نور، آزمایش جالب توجهی انجام داد. در این آزمایش، که در شکل (۶.۶) نمایش داده شده است، یک پرتو نور از چشمه  $S$  به کمک آینه نیمه نقره‌اندود  $M$  به دو پرتو تقسیم می‌شود. این دو پرتو مطابق شکل مسیرهای مخالفی را، در یک مدار که از آینه‌های  $M_1$ ،  $M_2$  و  $M_3$  به وجود آمده است، می‌پیمایند. پرتوها در  $M$  دوباره ترکیب و به درون یک دوربین دیدبانی بازتابیده می‌شوند، و در آنجا فریزهای تداخلی درست می‌کنند.



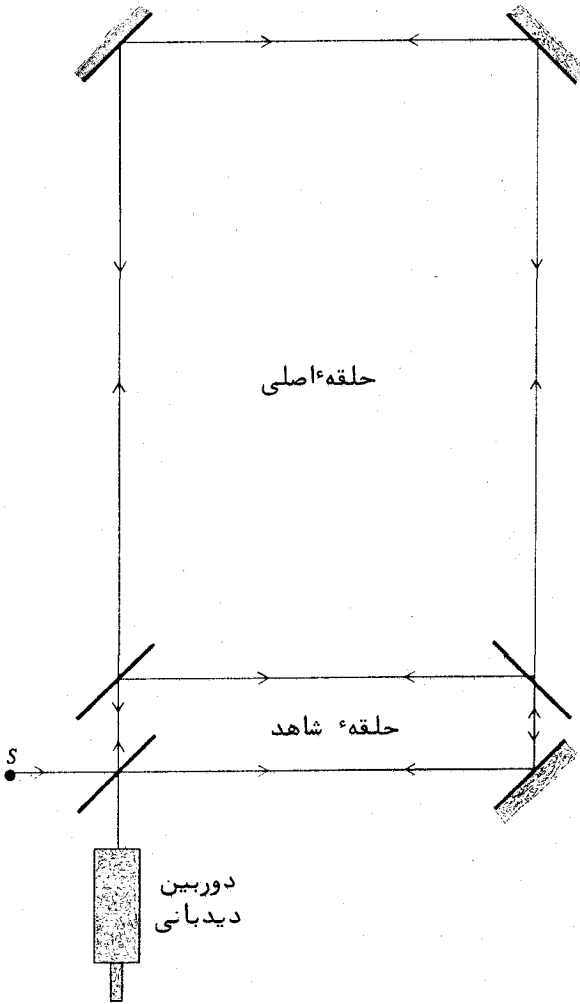


شکل ۶. پ، نمودار آزمایش ساینک.

دستگاه روی یک پایه صلب که می‌تواند گرد محور قائمی بچرخد سوار شده است. چرخش، یک اختلاف زمان میان پرتوی که در جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند و پرتوی که در جهت خلاف آن پیش می‌رود، به وجود می‌آورد. در نتیجه یک جابجایی فریز که با سرعت زاویه‌ای چرخش متناسب است رخ می‌دهد. بسادگی می‌توان نشان داد که مقدار تقریبی اختلاف راه مؤثر دو پرتو برابر است با:

$$\Delta s = \frac{4A}{c} \Omega$$

که در آن  $A$  مساحت مدار و  $\Omega$  سرعت زاویه‌ای است. ساینک توانست با یک مسیر مربعی به ضلع حدود یک متر و چرخش ۱۲۰ دور در دقیقه جابجایی فریز را مشاهده کند. برای آشکارسازی سرعت‌های زاویه‌ای کم، مدار بزرگتری لازم است. مایکلسون و گیبل در سال ۱۹۲۵/۱۳۰۴ آزمایشی با مسیر طولی به ابعاد ۵ در ۲ در ۵ را مایل ترتیب دادند، (شکل ۷. پ). با این مدار توانستند جابجایی فریزی که برای چرخش زمین انتظار می‌رفت را مشاهده کنند. برای ایجاد



شکل ۷. پ آزمایش مایکلسون-گیل برای آشکارسازی چرخش مطلق زمین.

فریزهای مقایسه‌ای، از یک مدار کوچک که در داخل مدار بزرگ قرار داده شده بود استفاده کردند.

## مسائل

پ.۱ نشان دهید خواه دیدبان حرکت کند خواه چشمه، جابجایی نسبیستی دوپلر یکی است.

پ.۲ ثابت کنید، فرمول نسبیستی جابجایی دوپلر در حالت کلی به صورت زیر است:

$$f' = f \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

که در آن  $f'$  بسامد دیدبانی شده و  $\theta$  زاویه بین بردار سرعت  $v$  و جهت دید است.

پ.۳ طول موج یک چشمه نور  $\lambda_0$  است. رابطه‌ای برای به دست آوردن طول موج ظاهری آن در حالت‌های زیر پیدا کنید: (الف) چشمه حرکت می‌کند (غیر نسبیستی)، (ب) دیدبان حرکت می‌کند (غیر نسبیستی)، (پ) حالت نسبیستی.

پ.۴ نشان دهید اگر سرعت  $v$  نسبت به  $c$  کم باشد، زاویه ابیراهی که از فرمول نسبیستی محاسبه می‌شود، به طور تقریب به اندازه  $(1/2)(v/c)^3$  با آنچه از فرمول ساده محاسبه می‌شود تفاوت دارد.

پ.۵ اگر  $v = 0.9c$  باشد، زاویه ابیراهی را به کمک فرمول‌های نسبیستی و غیر نسبیستی محاسبه کنید.

پ.۶ ثابت کنید سرعت ظاهری نور، در محیطی که با سرعت  $v_m$  نسبت به دیدبان حرکت می‌کند و نمارشکست آن  $n$  است تقریباً برابر است با:

$$c/n + v_m(1 - 1/n^2)$$

این رابطه چنان می‌نماید که نور در جهت حرکت محیط "کشانده" می‌شود. کمیت  $(1 - 1/n^2)$  را ضریب کشش فرنل می‌نامند. راهنمایی: از تبدیل نسبیستی سرعت استفاده کنید:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}$$

۷. پ زاویه ابیراهی که به وسیله یک دوربین نجومی پر از آب مشاهده می‌شود، درست برابر با اندازه این زاویه با یک دوربین نجومی معمولی است. نشان دهید، این موضوع با آنچه در مسئله قبل به دست آمد، یعنی اینکه نور با پیشروی در آب با سرعت  $v[1 - (1/n^2)]$  بسوی جلو کشانده می‌شود، مطابقت می‌کند.

۸. پ کهکشان راه شیری در هر ۲۰۰ میلیون سال یک بار گرد مرکز خود می‌چرخد و فاصله خورشید تا مرکز کهکشان ۳۰۰۰۰ سال نوری است. پس منظومه خورشیدی نسبت به کهکشانهای دیگر در فضا حرکت می‌کند. جایایی دویپلری برای خط ۶۵۶۳ انگسترمی هیدروژن که از کهکشانهای دیگر می‌رسد را بر حسب انگسترم در دو حالت زیر محاسبه کنید: (الف) خط دید در جهت حرکت منظومه، (ب) خط دید عمود بر جهت حرکت منظومه.

۹. پ زاویه ابیراهی را در حالت (ب) در مسئله قبل محاسبه کنید.

۱۰. پ گامهایی را که برای به دست آوردن تبدیل لورنتس لازم است و در متن کتاب نیامده بنویسید. توجه کنید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x'} &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x'} \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} a_{11} + \frac{\partial U}{\partial t} a_{21}, \dots \end{aligned}$$

## فهرست منابع

1. Beran, M. J., and G. B. Parrent, Jr., *Theory of Partial Coherence*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1964.
2. Besancon, R. M., ed., *The Encyclopedia of Physics*. New York: Reinhold, 1966.
3. Bloembergen, N., *Nonlinear Optics*. New York: W. A. Benjamin, 1965.
4. Bloom, A. L., W. E. Bell, and F. O. Lopez, *Phys. Rev.*, **135**, A578 (1964).
5. Born, M., and E. Wolf, *Principles of Optics*. New York: Macmillan, 1964.
6. Boyd, G. D., and J. P. Gordon, *Bell System Tech. J.*, **40**, 489 (1961).
7. Candler, C., *Modern Interferometers*. London: Hilger and Watts, 1951.
8. Fowles, G. R., and W. T. Silfvast, *J. Quantum Electronics*, **QE-1**, 131 (1965).
9. Fox, A. G., and T. Li, *Bell System Tech. J.*, **40**, 453 (1961).
10. Francon, M., *Modern Applications of Physical Optics*. New York: Wiley, 1963.
11. Frauenfelder, H., *The Mossbauer Effect*. New York: W. A. Benjamin, 1962.
12. Gabor, D., *Nature*, **161**, 777 (1948).
13. Gordon, J. P., H. Z. Zeiger, and C. H. Townes, *Phys. Rev.*, **95**, 282 (1954).
14. Gray, D. E. ed., *American Institute of Physics Handbook*. New York: McGraw-Hill, 1957.
15. Hanbury-Brown, R., and R. Q. Twiss, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A243**, 291 (1957).
16. Harnwell, G. P., *Principles of Electricity and Electromagnetism*. New York: McGraw-Hill, 1938.
17. Harrison, G. R., R. C. Lord, and J. R. Loofbourov, *Practical Spectroscopy*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1948.
18. Herzberg, G., *Atomic Spectra and Atomic Structure*. New York: Dover, 1950.
19. ———, *Molecular Spectra and Molecular Structure*. Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1950.
20. Ives, H. E., and G. R. Stilwell, *J. Opt. Soc. Am.*, **31**, 369 (1941).

21. Javan, A., W. R. Bennet, Jr., and D. R. Herriott, *Phys. Rev. Letters*, **6**, 106 (1961).
22. Jensen, R. C., and G. R. Fowles, *Proc. IEEE*, **52**, 1350 (1964).
23. King, G. W., *Spectroscopy and Molecular Structure*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964.
24. Kuhn, H. G., *Atomic Spectra*. New York: Academic Press, 1962.
25. Lengyel, B. A., *Introduction to Laser Physics*. New York: Wiley, 1966.
26. Lilley, A. E. et al., *Nature*, **209**, 468 (1966).
27. Mathews, J., and R. L. Walker, *Mathematical Methods of Physics*. New York: W. A. Benjamin, 1964.
28. Nicols, E. F., and G. F. Hull, *Phys. Rev.*, **13**, 307 (1901).
29. Pearson, J. M., *A Theory of Waves*. Boston: Allyn and Bacon, 1966.
30. Prather, J. L., *Atomic Energy Levels in Crystals*. Washington, D. C.: Nat. Bur. Stand. Monograph 19, U. S. Govt. Printing Office, 1961.
31. Present, R. D., *Kinetic Theory of Gases*. New York: McGraw-Hill, 1958.
32. Rindler, W., *Special Relativity*. London: Olives & Boyd, 1960.
33. Rosa, E. B., and N. E. Dorsey, *A New Determination of the Ratio of the Electromagnetic to the Electrostatic Unit of Electricity*. Washington, D.C.: U.S. Bureau of Standards, Reprint No. 65, 1907.
34. Rossi, B., *Optics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1957.
35. Sawyer, R. A., *Experimental Spectroscopy*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1944.
36. Shurcliff, W. A., and S. S. Ballard, *Polarized Light*. Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1964.
37. Silfvast, W. T., G. R. Fowles, and B. H. Hopkins, *Appl. Phys. Letters*, **8**, 318 (1966).
38. Stroke, G. W., *An Introduction to Coherent Optics and Holography*, 2nd ed. New York: Academic Press, 1969.
39. West, C. D., and R. C. Jones, *J. Opt. Soc. Amer.*, **41**, 975 (1951).
40. White, H. E., *Introduction to Atomic Spectra*. New York: McGraw-Hill, 1934.
41. Williams, W. E., *Applications of Interferometry*, 4th ed. New York: Wiley, 1950.
42. Zernike, F. and J. E. Midwinter, *Applied Nonlinear Optics*. New York: Wiley, 1973.

## پاسخهای مسایل شماره فرد

### فصل اول

$U = U_0 \cos \omega \left( \frac{z}{u} - t \right)$ (پ)	$U = U_0 \cos 2\pi \left( \frac{z}{\lambda} - t \right)$ (الف)	۱۰۱
	$1,3 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$	۵۰۱
$u = c/162$	$u_g = c/186$	۷۰۱
۱۸۵، هرتز، ۱۰ <sup>۹</sup> × ۱۵۴ را		۱۱۰۱

### فصل دوم

	$3 \times 10^{10} \text{ V/m}$	۳۰۲		
	$1,27 \times 10^{18} \text{ W/m}^2$			
$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ (ت)	$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ (پ)	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (ب)	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (الف)	۷۰۲
<p>میدانهای حقیقی در جهتهای <math>x</math> و <math>y</math> عبارتند از <math>A \cos \omega t</math> و <math>B \cos(\omega t + \Delta)</math>. با حذف پارامتر <math>t</math> بین این دو عبارت، معادلهء یک بیضی به دست می آید. معادلهء این بیضی را در دستگاه محورمختصات <math>x', y'</math> که نسبت به دستگاه قبلی چرخیده است به دست آورید و زاویه چرخش را طوری انتخاب کنید که جملهء <math>x'y'</math> صفر شود.</p>				۹۰۲
<p><math>\lambda = 0</math>، ویژه بردار <math>A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}</math> و <math>\lambda = 2</math>، <math>A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}</math> را به دست می دهد، که در آن <math>A</math> یک ثابت دلخواه است.</p>				۱۳۰۲
<p>۵۳ درجه (آب)، ۶۸ درجه (الماس)</p>				۱۵۰۲
<p>۵۵ درجه</p>				۱۷۰۲
<p>۱۰<sup>-۳۸۵۹</sup> (ب) ۲۳، ۵۰۰ هرتز میلی متر، (الف)</p>				۱۹۰۲

### فصل سوم

<p><math>\theta = kyh/x</math> که در آن <math>I/I_0 = 3 + 4 \cos \theta + 2 \cos 2\theta</math> است.</p>		۱۰۳
<p>اختلاف راه نوری معادل مساوی <math>d(n-1) = 0,25 \text{ mm}</math> است که در آن <math>d</math> کلفتی شیشه است، از این رو جابجایی عرضی به وسیلهء عبارت</p>		۳۰۳
<p>به دست می آید، <math>\frac{xd(n-1)}{h} = 4.17 \text{ cm}</math></p>		

$\frac{\lambda(D + D')}{2\alpha D(n-1)}$	۵۰۳
۰۳۶ ره میلی متر، $10^{-13} \times 1.2$ ثانیه .	۷۰۳
۰۸۴ ره میلی متر	۹۰۳
۱۸ر۲ سانتی متر	۱۱۰۳

## فصل چهارم

$\mathcal{T}_{\min} = 0.0007$	$\mathcal{T}_{\max} = 0.25$	۱۰۴
$6.4 \times 10^{-7}$ نانومتر	۴۸۰ کیلوهرتز،	۳۰۴
$k = 2\pi/\lambda = 2\pi n/\lambda_0$ که در آن	$T = \left[ 1 + \left( \frac{n^2 - 1}{2n} \right)^2 \sin^2 kd \right]^{-1}$	۵۰۴
	است .	
	$R = 0.008$	۷۰۴

## فصل پنجم

(الف) فرنلی ، (ب) فرانہوفری	۱۰۵
۵۰۶ نانومتر	۳۰۵
۵۸ سانتی متر	۷۰۵
حدود ۴۵ ره	۱۱۰۵
حدود ۱۰۵ سانتی متر ( توریهای نوری خوب با این پهنا ساخته نمی شوند، از این رو جداسازی مدهای لیزر به یک تداخل سنج فابری - پرو نیاز دارد .	۱۳۰۵
$I/I' = 4$ ( بخش باز روزه درست ۳ منطقه فرنلی را شامل می شود ) .	۱۵۰۵
$g'(y') = 2 \text{Si}[2\pi b/(b - 2y')] + 2 \text{Si}[2\pi b/(b + 2y')]$ که در آن	۲۱۰۵
$\text{Si}(u) = \int_0^u (\sin u/u) du$ ، انتگرال سینوسی است ،	

## فصل ششم

$n = 9 \pm \sqrt{68} = 0.75$ و $17.25$ ( ریشه کوچکتر از نظر فیزیکی بیشتر واقعیت دارد ) .	۵۰۶
---	-----



۲۵ درجه	۱۳۰۶
۱۲ درجه	۱۵۰۶
۳ درجه	۱۷۰۶

فصل هفتم

(الف) $3.4 \times 10^5$ ، (ب) $4 \times 10^{13}$	۱۰۷
$2.4 \times 10^{14}$	۳۰۷
$3.2 \times 10^7 \sqrt{T^3}$	۵۰۷
$I_\lambda = \frac{2\pi hc}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)}$	۷۰۷
(الف) $3.2 \times 10^{15}$ ، (ب) $4.7 \times 10^9$	۹۰۷
۳۵۶۰۰ درجه کلوین	۱۱۰۷

فصل هشتم

۶ گیگا هرتز	۳۰۸
(الف) ۳۳، (ب) تقریباً $4 A_H$	۵۰۸
حدود ۳ ترا هرتز (THz)	۹۰۸

فصل نهم

۲ الکترون ولت	۱۰۹
$1.6 \times 10^{-25}$	۳۰۹
$9 \times 10^{15} / \text{cm}^3$	۵۰۹
۱٫۵ میلی متر	۷۰۹

پیوست

(الف) ۷۱٫۵ درجه، (ب) ۴۲ درجه	۵۰ پ
۶۰۰۰۰ رادیان	۹۰ پ

## واژه نامه

Arrangement	آرایش
Empirical	آروینی
Disturbance	آشفتگی
Detector	آشکارساز
Doped	آلاییده
Rate	آهنگ
Aberration	ابیراهی
Dissipation	اتلاف
Partition	افراز
Uncertainty principle	اصل عدم قطعیت
Illuminate (to)	افروختن
Model	الگو
Stack	انبوده
Transfer	انتقال
Momentum	اندازه حرکت
Coating	اندایش
Binding energy	انرژی بستگی
Resonance	بازآوایی
Resonator	بازآواگر

Reflection	بازتاب - بازتابش
Output	بازده - برونداد
Reconstruction	بازسازی
Internal	بازه
High-pass	بالاگذار
Achromat	بدون عیب رنگی
Curve fitting	پرازش خم
Excitation	برانگیزش
Resultant	برایند
Unit vector	بردار یکا
External	برونی
Superposition	برهم نهی - برهم نهش
Heterodyning	بسامدآمیزی - زنش اپتیکی
Shutter	بستاور
Q-Switching	بستاوری Q
Fundamental	بنیادی - پایه
Gain	بهره
Optimum	بهینه
Maximum	بیشینه
Ellipsometry	بیضی‌سنجی
Ellipsoid	بیضیوار
Spectrum	بیناب
Power spectrum	بیناب توان
Spectrograph	بیناب نگار
Spectroscope	بیناب نما
Spectroscopy	بیناب نمایی
Antireflection	پاد بازتابنده
Dispersion	پاشندگی
Rotatory Dispersion	پاشندگی چرخشی

Normal dispersion	پاشندگی عادی
Anomalous dispersion	پاشندگی غیرعادی
Impedance	پاگیری
Conservation	پایستگی
Diffusion, Spreading	پخش
Susceptibility	پذیرفتاری
Diffraction	پراش
Envelope	پوش
Zone plate	پولک منطقه‌ای
Dynamic (Dynamics)	پویا ( پوییش شناسی )
Width	پهنا
Broadening	پهن‌شدگی
Signal	پیام - علامت
Apodize (to)	پیراستن
Paraxial	پیرا محوری
Apodization	پیرایش
Configuration	پیکربندی
Configurational	پیکری
Appendix	پیوست
Continuity	پیوستگی
Junction	پیوند - پیوندگاه
Recombination radiation	تابش بازترکیبی
Radiative	تابش‌مند
Irradiance	تابندگی
Fiber (optics)	ناری (نورشناسی)
Transformation	تبدیل
Degenerate	تبهگن

Pulse	تپ
Flatness	تختی
Interference	تداخل - درهمروی
Equilibrium	ترازمندی - تعادل
Transmission	تراگسیل
Permeability	تراوایی مغناطیسی
Contract (to)	ترنجیدن - منقبض شدن
Parity	تروگی - پاریته
Spatial filtering	تصفیه فضایی
Contrast	تضاد
Multiplicity	تعدد - چندگانگی
Interpretation	تفسیر
Monochromatic	تکفام
Uniaxial	تک‌محوری
Monotonic	تکنواخت
Hologram	تمام نگاشت
Holography	تمام نگاری
Reflectance	توان بازتاب
Radiance	توان تابشی
Transmittance	توان تراگسیل - تراگسیلندگی
Vacuum	تهی - خلاء
Opaque	تیره - کدر
Displacement, Shift	جابجایی
Isotope shift	جابجایی ایزوتوپی
Permutation	جابگشت
Resolvable	جداپذیر
Resolution	جداسازی - تجربه

Absorption	جذب - درآشامی
Nonabsorption	جذب‌ناکننده - نادرآشامنده
Reduced mass	جرم کاهشیده
Velocity matching	جورسازی سرعت
Index matching	جورسازی نماشکست
Quarter wave	چارک موجی
Hole burning	چالسوزی
Levorotatory	چپگرد - چپگردان
Rotatory power	چرخاندگی
Cycle	چرخه
Ocular	چشمی
Multiplicity	چندگانگی - متعدد
Quadrupole	چهارقطبی
Tetragonal	چهارگوش
Excited state	حالت برانگیخته
Ground state	حالت زمینه - حالت پایه
Cavity	حفره - کاواک
Domain	حوزه
Oval	خاگی
Grazing	خراشان
Curvature	خمیدگی
Autocorrelation	خودبستگی
Spontaneous	خودبه‌خودی

Data processing	داده‌پردازی
Amplitude	دامنه
Absorption	درآشامی
Brightness	درخشانی
Input	درونداد
Internal	درونی
Interference	درهمروی - تداخل
Optical pumping	دمش اپتیکی
Dichroism	دوفامی
Duality	دوگانگی
Biaxial	دومحوری
Aperture	دهانه - روزنه
Observer	دیدبان - ناظر
Modify (to)	دیگرگون ساختن
Modification	دیگرگون‌سازی - دیگرگونی
Corpuscle	ذره
Corpuscular	ذره‌ای
Dextrorotatory	راستگرد - راستگردان
Channeled	راه‌راه
Conductor	رسانا
Conduction	رسانش
Conductivity	رسانندگی
Filament	رشته

Scanning	رویش
Aperture	روزنه - دهانه
Fine-grained	ریزدانه
Bleachable	زدایی پذیر
Relaxation time	زمان واهلش
Optical beating	زنش اپتیکی
Subshell	زیرلایه
Hyperfine structure	ساختار بس ریز
Fine structure	ساختار ریز
Harmonic	سازگان
Harmony	سازگانی - نظم
Obliquity factor	سازه میل
Static	ساکن - ایستا
Nebula	سحابی
Etalon	سنجه
Pinhole	سوراخ سوزنی - سوراخ سنجاقی
Triplet	سه گانه
Trigonal	سه گوش
Flux	شار
Flow	شارش
Electrical network	شبکه الکتریکی
Quasimonochromatic	شبه تکفام
Hexagonal	شش گوش
Splitting	شکافتگی
Double refraction	شکست دوگانه



Refractometer	شکست سنج
Gradient	شیب
Photomultiplier	شیدافزا - فرورافزا
Coefficient of finesse	ضریب‌نازکی - ضریب ظرافت
Finesse	ظرافت
Chromatic aberration	عیب رنگی - ابیراهی رنگی
Spherical aberration	عیب کروییت - ابیراهی کروییت
Spacer	فاصله‌گذار - جدایی‌انداز
Ultraviolet	فرابنفش
Metastable	فراپایدار
Process	فرایند
Hypothesis	فرضیه
Incident	فرودی
Photomultiplier	فرورافزا
Fringe	فریز
Transition rule	قاعده‌گذار
Selection rule	قاعده‌گزینش
Theorem	قضیه
Polarization	قطبش - قطبیدگی
Polarizability	قطبش‌پذیری
Polarizer	قطبیده
Polarized	قطبیده

Quantum defect	کاستی کوانتومی
Focus (to)	کانونی ساختن
Concave	کاو
Cavity	کاواک - حفره
Opaque	کدر - تیره
Elastic	کشسان - کشاینده
Minimum	کمینه
Fuzed quartz	کوارتز همجوشیده
Quantized	کوانتیده
Low pass	کوتاه‌گذر - پایین‌گذر
Convex	کوژ
Tourmaline	کهربا
Microwave	کهموج
Transition	گذار
Permittivity	گذردهی الکتریکی
Pattern	گرته
Selective	گزینشی
Range	گستره
Discrete	گسسته
Emission	گیل
Torque	گشتاور چرخشی - جفت نیرو
Dipole moment	گشتاور دوقطبی
Moment of inertia	گشتاور لختی
Tube	لامپ
Flash-lamp	لامپ درخشی
Layer, shell	لایه

Inertia	لختی
Spiral	مارپیچ
Stationary	مانا
Orthogonal	متعامد - چلیبیا
Mode locking	مدبستن
Modulation	مدوله‌سازی
Bound (electron)	مقید (الکترون)
Zone	منطقه
Collimator	موازی‌ساز
Wave guide	موجبر
Damped wave	موج میرا
Evanescent	ناپایا
Unstable	ناپایدار
Discontinuity	ناپیوستگی
Nonconducting	نارسانا
Dielectric	نارسانای الکتریکی - دی‌الکتریک
Inelastic	ناکشسان - ناکشایند
Anisotropic	ناهمسانگرد
Heterogeneous, Inhomogeneous	ناهمگن
Heteronuclear	ناهم‌هسته
Downward	نزولی - پایین‌سو
Relativistic	نسبیتی
Embed (to)	نشاندن
Theory (Theorists)	نظریه — (نظریه‌پردازان)
Recorder	نگارنده - نگار - شبات
Symbol	نماد

Notation	نمادگذاری
Occupation index	نماراشغال
Extinction index	نمارخاموشی
Ordinary index of refraction	نمارشکست عادی
Extraordinary index of ref.	نمارشکست غیرعادی
Visibility	نمایانی
Diagram, Graph	نمودار
Band	نوار
Chart recorder	نوارنگار
Double exposure	نوردهی دوگانه
Photometry	نورسنجی - شیدسنجی
Restoring force	نیروی بازگرداننده
Profile	نیمرخ - نمایه
Semiconductor	نیمرسانا
Half wave	نیم موجی
Hemiconfocal	نیم همکانون
Population inversion	واژگونی جمعیت ( یا فراوانی )
Reaction	واکنش
Divergent, Diverging	واگرا
Divergence	واگرایی
Copy	واگیره - روگرفت
Edition	ویرایش
Eigenvector	ویژه بردار
Eigenfunction	ویژه تابع
Eigenstate	ویژه حالت
Eigenvalue	ویژه مقدار

Octuple	هشت قطبی
Correlation	همبستگی
Equipartition	همپاری
Coherent	همدوس
Coherence	همدوسی
Partial coherence	همدوسی پاره‌ای
Spatial coherence	همدوسی فضایی
Confocal	همکانون
Convergent	همگرا
Convergence	همگرایی
Homogeneous	همگن
Homonuclear	هم هسته
Isotropic	همه‌سویکسان - همسانگرد
Units	یکان - آحاد
Singlet	یگانه - یکتایی

## فهرست الفبایی

- آزمایش داویسون - جرمر ۲۸۶  
آزمایش ساینک ۴۱۰  
آزمایش مایکلسون - گیل ۴۱۰  
آزمایش مایکلسون - مورلی ۳۹۹  
آزمایش یانگ ۸۰،۷۷  
آشفتگی نوری ۱۴۰  
آهنگ‌گذار ۳۲۰  
آینهء لوید ۸۱  
اثر الکتروپتیکی کر ۲۵۰  
اثر پوکلز ۲۵۲  
اثر کوتون - مرتون ۲۵۲  
اثر واگ ۲۵۰  
احتمال گذار ۳۲۰  
احتمال ( چگالی ) ۳۰۸  
ارت (بیناب) ۳۳۴  
اسپین الکترون ۳۲۱  
اسپین مداری (برهم‌کنش) ۳۲۲  
استرلینگ (تقریب) ۲۷۷  
استفان - بولتزمن (ثابت) ۲۸۲  
استفان - بولتزمن (قانون) ۲۸۲، ۲۶۶  
اصل بابینه ۱۴۴  
اصل برهم‌نهی خطی ۷۵  
اصل عدم قطعیت هایزنبرگ ۲۸۶  
اصل همپاری انرژی ۲۷۳  
اصل هویگنس ۱۴۴، ۱۳۷  
اصلی (ثابت‌های دی‌الکتریک) ۲۲۲  
اصلی (سری) ۳۰۳  
الکتروپتیکی (پدیده‌های) ۲۵۰  
انتگرال فرنل - کیرشهوف ۱۴۲  
انتگرال کیرشهوف ۱۴۰  
انتگرال‌های فرنل ۱۶۹  
انحراف نور ستاره ۴۱۰، ۴۰۹

اندازه حرکت زاویه‌ای فوتون ۲۸۵،۲۸۴	بسامد فضایی ۱۷۷
اندازه حرکت فوتون ۲۸۳	بستآوری ۳۷۲
انرژی نقطه صفر ۳۳۱	بلور تک محوری ۲۲۶
انقباض فیتزجرالد - لورنتس ۴۰۳	بلور دومحوری ۲۲۶
ایری (تابع) ۱۱۴	بلورهای مثبت و منفی ۲۲۸
ایری (قرص) ۱۵۴	بنیادی (سری) ۳۰۳
اینشتین (آلبرت) ۴۰۳	بور (نیلز) ۲۹۵
اینشتین (ضرایب) ۳۴۳	بوز - اینشتین (توزیع) ۲۷۹
	بوزون ۲۷۹
بایینه (اصل) ۱۴۴	بولتزمن (توزیع) ۳۴۵
بازآواگر نوری ۳۹۱،۳۵۵	بیضی سنجی ۲۱۹
بازآواگر همکانون ۳۶۳	بیضی (قطبش) ۴۰،۳۷
بازتاب بیرونی ۵۷	بیناب ارتعاشی ۳۲۸
بازتاب (توان) ۵۷	بیناب ازت ۳۲۴
بازتاب درونی ۵۹	بیناب الکترونی ۳۲۸
بازتاب (ضریب) ۵۶،۵۵	بیناب توان ۹۳
بازتاب کلی ۵۹	بیناب چرخشی ۳۲۸
بالمر (سری) ۳۰۰	بیناب راه‌راه ۱۳۲
بردار انتشار ۱۲	بیناب‌نمایی تبدیل فوریه‌ای ۱۰۴
بردار انتشار مختلط ۲۱۴	بینابهای مولکولی ۳۲۷
بردار پرتو ۳۸۹،۳۸۸	بیناب هیدوژن ۲۹۹
بردار پوینتینگ ۲۳۱، ۰،۳۲	
بردار جونز ۴۴	پاشن (سری) ۳۰۰
بردار موج ۱۲	پاشندگی ۹
بروستر (دریجه) ۶۱	پاشندگی چرخشی ۲۴۱
بروستر (زاویه) ۶۰	پاشندگی عادی ۲۰۵
بسامد ۱۲	پاشندگی غیرعادی ۲۰۵
بسامد پلاسما ۲۱۱	پاگیری فضای تهی ۳۲
بسامد زاویه‌ای ۱۲	پخش (سری) ۳۰۲

تابع انتقال ۱۸۰	پدیده <sup>۶</sup> دوپلر ۲۰
تابع ایری ۱۱۴	پدیده <sup>۶</sup> زیمان ۳۱۹
تابع خودبستگی ۸۶	پدیده فوتوالکتریک ۲۸۲
تابع کار ۲۸۲	پدیده‌های الکترواپتیکی و مغناطونوری ۱۹۷، ۲۵۰
تابع مختلط موج ۱۶	پذیرفتاری اصلی ۲۲۲
تابع موج ۱۲	پذیرفتاری الکتریکی ۱۹۹
تابع همبستگی ۸۶	پراش ۱۳۷
تابع همدوسی ۸۶	پراش بوسیله تک‌شکاف ۱۴۹
تابندگی ۲۶۶، ۳۳	پراش بوسیله توری‌ها ۱۵۷
تانسور پذیرفتاری ۱۹۹، ۲۲۱، ۲۴۴	پراش بوسیله شکاف دوگانه ۱۵۶
تانسور دی‌الکتریک ۲۲۲	پراش فرانسهوفری ۱۴۵، ۱۴۷
تایلور (معیار) ۱۲۲	پراش فرنلی ۱۴۵، ۱۶۲
تبدیل فوریه ۹۲	پراکندگی نور بوسیله مولکولها ۳۶، ۳۸
تبدیل فوریه (بیناب نمایی) ۱۰۴	پرتو (معادلات) ۳۸۸
تداخل "درهمروی" ۷۳	پلازما (بسامد) ۲۱۱
تداخل چندپرتوی ۱۱۱	پلانک (ماکس) ۲۷۵، ۲۸۰
تداخل (ردیف) ۱۱۵	پوئین تینگ (بردار) ۳۲
تداخل سنج اختری مایکلسون ۱۰۲	پوئین تینگ (شار) ۳۳
تداخل سنج توپمن - گرین ۸۴	پوکلز (اثر) ۲۵۲
تداخل سنج فابری - پرو ۱۱۶	پوکلز (سلول) ۲۵۲، ۲۵۳
تداخل سنج مایکلسون ۸۱	پولک منطقه‌ای ۱۶۶
تداخل سنجی شدتی ۱۰۲	پهنای همدوسی ۱۰۰
تداخل سنجی تمام‌نگاشتی ۱۹۰	پهن‌شدگی دوپلری ۲۴
تداخلی (صافی) ۱۳۰	پیرامحوری (تقریب) ۳۸۳
تراگیل (توان) ۵۵	پیرایش ۱۷۷
تراگیل (ضریب) ۵۵	
تراوایی مغناطیسی خلاء <sup>۵</sup>	تابش جسم سیاه ۲۶۶، ۲۸۱
تراوایی مغناطیسی نسبی ۹	تابش کاواکی ۲۶۷، ۲۷۴
ترکیب اسپین - مداری ۳۲۲	تابش گرمائی ۲۶۵



- |                                 |  |
|---------------------------------|--|
| ثابت بهره ۳۴۶                   | تروگی " پاریتته " ۳۲۶                    |
| ثابت ریبرگر ۲۹۸ -               | تصحیح نسبیتی رابطه <sup>۶</sup> دوپلر ۲۳ |
| ثابت کر ۲۵۱                     | تصفیه <sup>۶</sup> فضایی ۱۸۱             |
| ثابت ورده ۲۴۸                   | تضاد فاز ۱۸۲                             |
| ثابت‌های دی‌الکتریک اصلی ۲۲۲    | تقسیم جنبه <sup>۶</sup> موج ۸۰           |
| ثابت‌های نوری ۲۱۱               | تقسیم دامنه ۸۱                           |
|                                 | تقریب استرلینگ ۲۶۶                       |
| جابجایی ایزوتوپی ۳۰۱            | تک‌آینه <sup>۶</sup> لوید ۸۱             |
| جابجایی به قرمز ۲۳              | تمام نگار ۱۸۶                            |
| جابجایی گوس - هانشن ۶۴          | تمام نگاری ۱۸۶                           |
| جداسازی ( توان ) ۱۲۲            | تمام نگاری دوتویی ۱۹۰                    |
| جداسازی نوری ۱۵۵                | تمام نگاشتی (تداخل سنجی) ۱۹۰             |
| جذب ( ضریب ) ۲۰۴                | توان بازتاب ۵۵                           |
| جسم سیاه ۲۶۷                    | توان تابشی ۲۶۷                           |
| جسم سیاه ( تابش ) ۲۸۱، ۲۶۶      | توان تراکسیل ۵۵                          |
| جونز ( بردار ) ۴۴               | توان جداسازی ۱۲۲                         |
| جونز ( ماتریس ) ۴۵، ۴۶          | توان جداسازی توریها ۱۵۹                  |
| جونز ( محاسبه <sup>۶</sup> ) ۴۲ | توری فاز ۱۸۲                             |
|                                 | توریها ۱۵۷                               |
| چالسوزی ۳۵۴                     | توریهای بازتابی ۱۶۱                      |
| چرخاندگی ویژه ۲۴۱               | توزیع بوز - اینشتین ۲۷۹                  |
| چرخش الکترون ۳۲۱                | توزیع بولتزمن ۳۴۵                        |
| چرخش فاراده‌ای ۲۴۷              | توزیع فرمی - دیراک ۲۷۹                   |
| چشمه همدوس ۱۴                   | تویمن - گرین (تداخل سنج ) ۸۴             |
| چگالی احتمال ۳۰۳                | تیز (سری) ۳۰۲                            |
| چندجمله‌ای‌های لاگر ۳۱۲         | تیغه <sup>۶</sup> چارک موجی ۴۱           |
| چندجمله‌ای‌های لوژاندر ۳۱۱      |  |
| چندجمله‌ای‌های هرمیت ۳۵۷        | ثابت استفان - بولتزمن ۲۸۲                |
| چندگانگی ۳۲۴                    | ثابت انتشار ۱۲                           |

- حالت فرایا پیدار ۳۲۷  
 حالت همدوس ۳۰۵  
 خاموشی (نمار) ۲۰۴  
 خوددوسی ۸۶  
 داویسون و جرمر (آزمایش) ۲۸۶  
 دایره‌ای (قطبش) ۴۳، ۳۷  
 درجه قطبش ۳۶  
 درجه همدوسی جزئی ۸۷  
 درهمروی "تداخل" ۷۳  
 درهمروی چندپرتوی ۱۱۱  
 دریچه بروستر ۶۱  
 دوآینه فرنل ۸۱  
 دوبروی (لوئی) ۲۸۵  
 دوقطبی چرخان ۳۱۷  
 دوپلر (پدیده) ۲۰  
 دوپلر (تصحیح نسبیتی رابطه) ۲۳  
 دوپلر (همبستگی نسبیتی) ۴۰۷  
 دوپلری (پهن‌شدگی) ۲۴  
 دورنگی "دوفامی" ۳۴  
 دوره ۱۲  
 دوشکستی ۲۲۰  
 دومنشوری فرنل ۸۱  
 دی‌الکترونیک (ضریب) ۹  
 رابطه عدسی‌سازان ۳۸۵  
 ردیف تداخل ۱۱۵  
 رنگی (عیب) ۳۵۶  
 روزنه دایره‌ای ۱۵۳  
 روزنه مستطیلی ۱۵۱  
 روزنه‌های مکمل ۱۴۵، ۱۴۴  
 روشن (منشور) ۲۴۰  
 روشهای تولید واژگونی جمعیت ۳۴۹  
 ریبرگ (ثابت) ۲۹۸  
 ریلی - جینز (فرمول) ۲۷۳  
 ریلی (معیار) ۱۵۵  
 زاویه بروستر ۶۱  
 زاویه پذیرش ۶۰  
 زاویه حد ۵۹  
 زاویه فرودی اصلی ۲۱۸  
 زاویه قطبش ۶  
 زمان واهلش ۲۰۹  
 زمان همدوسی ۸۸  
 زیمان (پدیده) ۳۱۹  
 ساختار ریز ۳۲۱  
 سایناک (آزمایش) ۴۱۰  
 سرعت پرتو ۲۳۲  
 سرعت گروه ۱۷  
 سرعت فاز ۱۲، ۱۰  
 سرعت نور ۷، ۴  
 سری یا رشته اصلی ۳۰۳  
 سری یا رشته بالمر ۳۰۰  
 سری یا رشته براکت ۳۰۰  
 سری یا رشته بنیادی (یا پایه) ۳۰۳

- سری یا رشته<sup>۶</sup> پاشن ۳۰۰  
 طول عمر تابش‌مندی ۳۷۰  
 طول موج ۱۷  
 طول همدوسی ۹۱  
 طرافت بازتابی ۱۲۲  
 عادی (پاشندگی) ۲۰۵  
 عادی (نمارشکست) ۲۲۸  
 عامل میل ۱۳۴  
 عدد فرزل ۳۶۰،۳۵۸  
 عدد کوانتومی اصلی ۳۱۲،۲۹۷  
 عدد کوانتومی سمتی ۳۱۱  
 عدد کوانتومی مغناطیسی ۳۱۱  
 عدد موج ۱۲  
 عدد موج زاویه‌ای ۱۲  
 عدسی بدون عیب رنگی ۳۸۶  
 عدسی سازان (فرمول) ۳۸۵  
 عمق پوست ۲۱۰  
 عملگر دل ۳۰  
 عیب رنگی ۳۸۶  
 عیب کرویت ۳۸۷،۳۸۳  
 غیرخطی (نورشناسی) ۲۵۴  
 غیرعادی (پاشندگی) ۲۰۵  
 غیرعادی (نمارشکست) ۲۲۸  
 فابری - پرو (تداخل سنج) ۱۱۶  
 فابری - پرو (سنجه) ۱۱۷  
 سری یا رشته<sup>۶</sup> پخشیده ۳۰۳  
 سری یا رشته<sup>۶</sup> تیز ۳۰۳  
 سری یا رشته<sup>۶</sup> فوند ۳۰۰  
 سری یا رشته<sup>۶</sup> لیمن ۳۰۰  
 سطح سرعت پرتو ۲۲۲  
 سطح سرعت فاز ۲۲۸  
 سلمایر (فرمول) ۲۵۹،۲۰۸  
 سلول پولکز ۲۵۳،۲۵۲  
 سلون کر ۳۵۱  
 سنارمونت (منشور) ۲۴۰  
 سنجه<sup>۶</sup> فابری - پرو ۱۱۷  
 شار پوئین‌تینگ ۳۳  
 شدت ۳۳  
 شرودینگر (معادله<sup>۶</sup>) ۳۰۵  
 شکست دوگانه ۴۷  
 صافی تداخلی فابری - پرو ۱،۲۰  
 صافی فضایی ۱۸۳،۱۸۱  
 صفحات اصلی ۳۸۶  
 ضرایب اینشتین ۳۴۳  
 ضریب بازتاب ۵۷،۵۵  
 ضریب تراگیل ۵۷،۵۵  
 ضریب درآشامی "ضریب جذب" ۲۰۴  
 ضریب دی‌الکتریک ۹  
 ضریب طرافت ۱۱۴

- فابری - پرو (صافی) ۱۳۰  
 فارادهای (چرخش) ۲۴۷  
 فاصلهء کانونی ۳۸۴  
 فرانسزهای محلی ۸۳  
 فرانسهوفری (پراش) ۱۴۷، ۱۴۵  
 فرمول ریلی - جینز ۲۷۴  
 فرمی - دیراک (توزیع) ۲۷۹  
 فرنل (انتگرالهای) ۱۶۹  
 فرنل (دوآینهء) ۸۱  
 فرنل (دومستوری) ۸۱  
 فرنل (عدد) ۳۶۰، ۳۵۸  
 فرنل (متوازی السطوح) ۶۶  
 فرنل (معادلات) ۵۶  
 فرنل (منشور) ۲۴۴  
 فرنل - کیرشهوف (انتگرال) ۱۴۳، ۱۴۰  
 فرنل - کیرشهوف (فرمول) ۱۳۸  
 فرنلی (پراش) ۱۶۲، ۱۴۵  
 فرنلی (منطقه‌های) ۱۶۳، ۱۶۲  
 فریز (نمایی) ۸۷  
 فریزهای همشیب ۱۱۷  
 فشار نور ۲۸۳  
 فعالیت نوری ۲۴۰  
 فوتوالکتریکی (پدیدهء) ۲۸۲  
 فوتون ۲۷۵، ۰۴  
 فوتون (جرم) ۲۸۳  
 فوند (سری) ۲۹۸  
 فیتزجرالد - لورنتس (انقباض) ۴۰۳  
 فیلمهای چندلایه‌ای ۱۲۴
- قاعده گزینش ۳۳۱، ۳۳۰، ۳۲۶  
 قانون استفان - بولتزمن ۲۸۲، ۲۶۶  
 قانون کیرشهوف ۲۶۷، ۲۶۶  
 قانون وین ۲۸۱، ۲۶۵  
 قدرت نوسانگر ۲۰۶  
 قرارداد علامتها ۳۸۳  
 قرص ایری ۱۵۴  
 قضیهء گرین ۱۳۸  
 قضیه وان سیتز - زرنیک ۱۰۰  
 قطبان (منشورهای) ۲۳۷  
 قطبش بیضی ۴۰، ۳۷  
 قطبش جزئی ۳۶  
 قطبش خطی ۳۴  
 قطبش دایره‌ای ۴۳، ۳۷  
 قطبش (درجهء) ۳۶  
 قطبش (زاویهء) ۶۰  
 قطبندهء خطی ۳۴  
 قطبندهء دایره‌ای ۴۰  
 قطبندهء منشوری ۲۳۷  
 قطبیدگی عرضی ۵۳  
 قطبیدگیهای متعامد ۴۷  
 قطر ستارگان (اندازه‌گیری) ۱۰۱  
 کاستی کوانتومی ۳۰۱  
 کر (اثر الکتروایتنیکی) ۲۵۰  
 کر (ثابت) ۲۵۱  
 کر (سلول) ۲۵۲

- کرنو (مارپیچ) ۱۷۱۰۱۶۹  
 کوارتر (ویژگی نوری) ۲۴۷۰۲۴۳  
 کوانتوم ۲۷۵  
 کوانتیدگی تابش کاواکی ۲۷۴  
 کوتون - تون (اثر) ۲۵۲  
 کیرشهوف (انگزال) ۱۴۰  
 کیرشهوف (قانون) ۲۶۷۰۲۶۶  
 گابور ۱۸۶  
 گذار ۳۲۰۰۳۱۹  
 گذار تابشمند ۳۱۵  
 گذار چهارقطبی ۳۲۱  
 گذار دوقطبی ۳۱۵  
 گذارهای مرتبه‌های بالا ۳۲۰  
 گذردهی خلا ۵  
 گذردهی نسبی ۹  
 گرین (قضیه) ۱۳۸  
 گستره آزاد بینایی ۱۱۷  
 گسیل القایی ۳۴۳  
 گسیل خودبه‌خودی ۳۴۳  
 گلن (منشور) ۲۳۹  
 گوس - هانشن (جابجایی) ۶۴  
 لاگر (چندجمله‌ایهای) ۳۱۲  
 لایه‌های بازتابنده ۱۲۸  
 لایه‌های پادبازتابنده ۱۲۷  
 لوژاندر (چندجمله‌ایهای) ۳۱۱  
 لوید (آینه) ۸۱  
 لیزر حالت جامد ۳۶۷  
 لیزر حلقه‌ای ۳۷۴  
 لیزر دیودی ۳۷۱  
 لیزر رنگی ۳۶۹  
 لیزر شیمیایی ۳۵۱  
 لیزر گازی ۳۶۵  
 لیزر نیمرسانا ۳۷۱  
 لیزر هلیوم - نئون ۳۶۳  
 لیزر یاقوتی ۳۶۷  
 لیزری (نوسان) ۳۵۰  
 لیمن (سری) ۳۰۰  
 ماتریس انتقال ۱۲۶  
 ماتریس بازتاب ۶۷  
 ماتریس پرتو ۹۳۲۰۳۹۰  
 ماتریس تراگسیل ۶۷  
 ماتریس جونز ۳۰۴۵  
 ماتریسی (عناصر) ۳۱۷  
 مارپیچ کرنو ۱۷۱۰۱۶۹  
 ماکسول (جیمز) ۳  
 ماکسول (معادلات) ۱۹۸۰۲۹  
 مانا (حالت) ۳۰۳  
 مایکلسون (تداخل‌سنج) ۸۱  
 مایکلسون (تداخل‌سنج اختری) ۱۰۲  
 مایکلسون - گیل (آزمایش) ۴۱۰  
 مایکلسون - مورلی (آزمایش) ۳۹۹  
 متوازی‌السطوح فرنل ۶۷۰۶۶  
 متوازی‌السطوح مونی ۷۱  
 محاسبه جونز ۴۲  
 محور اصلی ۲۲۲

موج کروی ۱۶	محور نوری ۲۲۶
موج ناپایا ۶۲	مدیستن ۳۷۲
موج ناهمگن ۲۱۴	مدهای، تابشی حفره‌ای ۲۶۹، ۲۷۱۰
موج همگن ۲۰۳	معادلات پرتو ۳۸۸
مونی (متوازی‌السطوح) ۷۱	معادلات فرنل ۵۶
میزر ۳۴۱	معادلات ماکسول ۱۹۸، ۲۹
میل (سازه <sup>۴</sup> ) ۱۴۳	معادله <sup>۴</sup> ویژه ۴۹
	معادله <sup>۴</sup> شرودینگر ۳۰۵
ناپایا (موج) ۶۲	معادله <sup>۴</sup> موج ۲۰۰، ۰۶
ناهمگن (موج) ۲۱۴	معیار تایلور ۱۲۲
نقطه <sup>۴</sup> صفر (انرژی) ۳۳۱	معیار ریلی ۱۵۵
نماراشغال ۲۷۵	مکانیک کوانتومی ۳۰۲
نمارخاموشی ۲۰۴	مکانیک کوانتومی اتم هیدروژن ۳۰۷
نمارشکست ۱۰۰، ۹	مغناطوآپتیکی (پدیده‌های) ۳۵۱
نمارشکست اصلی ۲۲۴	منحنی بهره ۳۴۸
نمارشکست عادی ۲۲۸	منشور روشن ۲۴۰
نمارشکست غیرعادی ۲۲۸	منشور سنارمونت ۲۴۰
نمارشکست مختلط ۲۱۳	منشور فرنل ۲۴۴
نمارشکست نسبی ۵۲	منشور گلن ۲۳۹
نمایانی فریزها ۸۷، ۸۴	منشور نیکول ۲۳۹
نورشناسی جامدات ۱۹۵	منشور والاستون ۲۴۰
نورشناسی غیرخطی ۲۵۴	منشوری (قطبیده <sup>۴</sup> ) ۲۳۷
نوسان لیزری ۳۵۱	منطقه‌های فرنلی ۱۶۳، ۱۶۲
نیکول (منشور) ۲۳۹	موج (معادله <sup>۴</sup> ) ۲۰۰، ۰۶
نیوتون (اسحق) ۳	موج الکترومغناطیسی ۱۵، ۱۴
	موج ایستاده ۲۷۰
واژگونی جمعیت ۳۴۵	موج تخت ۱۱
واژگونی جمعیت (روش‌های تولید) ۳۴۲	موجبرهای نوری ۶۰
	موج سازگان ۱۱

همدوسی مرتبه <sup>۴</sup> دوم ۱۰۳	والاستون (منشور) ۲۴۰
همکانون (بازآواگر) ۳۵۸	واگ (اثر) ۲۵۰
همگن (موج) ۲۰۳	وان سیتز - زرنیک (قضیه) ۱۰۰
هویگنس (اصل) ۱۴۴۰۱۳۷	ورده (ثابت) ۲۴۸
هویگنس (کریستیان) ۳	ویژه بردار ۴۷
	ویژه تابع ۳۰۷
یانگ (آزمایش) ۸۰۰۷۷	ویژه تابعهای اتم هیدروژن ۳۱۴
یانگ (توماس) ۷۷	ویژه (معادله <sup>۴</sup> ) ۴۹
	ویژه مقدار ۳۵۶۰۴۸

هاگن روبنز (همبستگی) ۲۲۰
هانبوری - براون و تویس (تداخل سنجی شدتی) ۱۰۲
هایزنبرگ (اصل عدم قطعیت) ۲۸۶
هرمیت (چند جمله‌ای‌های) ۳۵۷
همبستگی (تابع) ۸۷
همبستگی فرنل - کیرشهوف ۱۴۰
همبستگی نسبیتی دوپلر ۴۰۷
همبستگی هاگن - روبنز ۲۲۰
همپایگی ۳۰۶
همدوس (حالت) ۳۰۴
همدوس (چشمه <sup>۴</sup> ) ۱۴
همدوسی ۷۶
همدوسی پاری (درجه <sup>۴</sup> ) ۸۷
همدوسی (پهنای) ۱۰۰
همدوسی (زمان) ۸۸
همدوسی عرضی ۱۰۱
همدوسی فضایی ۹۶