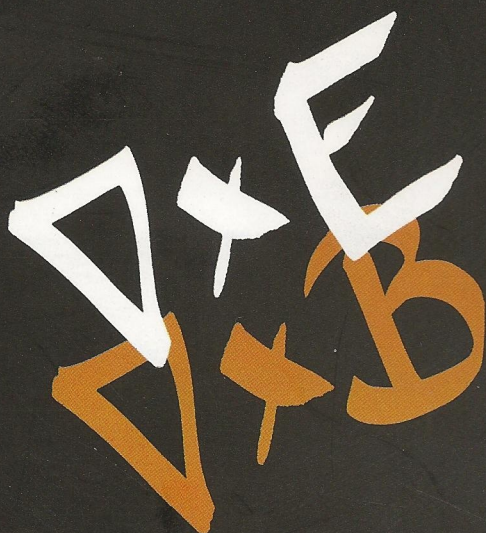


آشنایی با

الکترو دینامیک

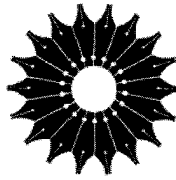
با تجدیدنظر کامل در ترجمه و ویرایش

دیوید جی. کریفیت



ترجمه حسین فرمان

این کتاب الکتروسیسته و مغناطیس برای دانشجویان دوره کارشناسی طراحی شده است، که آن را می‌توان در یک یا دو نیمسال تدریس کرد. رهیافت مؤلف این کتاب، در قیاس با دیگر مؤلفان این موضوع درسی، غیررسمی‌تر به نظر می‌رسد. به این ترتیب، ایده‌های دشوار الکترودینامیک به شیوه‌ای جالبتر و دسترس‌پذیرتر در اختیار خوانندگان و دانشجویان قرار می‌گیرند.



آشنایی با

الکترو دینامیک

(با تجدیدنظر کامل در ترجمه و ویرایش)

دیوید جی. گریفیث

ترجمه حسین فرمان



Introduction to Electrodynamics

Third Edition

David J. Griffiths

Prentice Hall, 1999

آشنایی با الکترو دینامیک

(با تجدیدنظر کامل در ترجمه و ویرایش)

تألیف دیوید جی. گریفیث

ترجمه حسین فرمان

ویراسته نادر رابط

طراح جلد: سمیه عابدینی

نسخه پرداز: زهرا دلاوری، مسعود رزدام

حروفچین: مینا مهرابی فرد

ناظر چاپ: علی صادقی

مرکز نشر دانشگاهی

ترجمه ویراست ۳ لاتین (۲ بار چاپ)

ترجمه ویراست ۳ لاتین (با تجدیدنظر کامل در ویرایش و ترجمه)، چاپ اول ۱۳۸۷

چاپ دوم ۱۳۸۹

تعداد ۲۰۰۰

لیتوگرافی: وسمه

چاپ و صحافی: سامان

۱۲۲۰۰ تومان

نشانی فروشگاه مرکزی: خیابان انقلاب، روبه‌روی سینما سپیده، پاساژ خیبری، تلفن: ۶۶۴۱۰۶۸۶، ۶۶۴۰۸۸۹۱

فروش اینترنتی: <http://eshop.iup.ir>

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Griffiths, David Jeffrey

م. - ۱۹۲۴ - سرشناسه: گریفیث، دیوید جفری، ۱۹۲۴ -

عنوان و نام پدیدآور: آشنایی با الکترو دینامیک / دیوید جی. گریفیث؛ ترجمه حسین فرمان.

وضعیت ویراست: [ویراست ۲]

مشخصات نشر: تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۷.

مشخصات ظاهری: هشت، ۷۲۸ ص. : مصور.

فروست: مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۲۹۲. فیزیک؛ ۱۳۵.

شابک: 978-964-01-1292-2

وضعیت فهرست‌نویسی: فیا

یادداشت: عنوان اصلی:

موضوع: الکترو دینامیک.

مترجم، شناسه افزوده: فرمان، حسین، ۱۳۱۷ -

چاپ دوم: ۱۳۸۹.

رده‌بندی کنگره: ۱۳۸۷ / ۵۴۱۵ / ۶۸۰ / QC

رده‌بندی دیویی: ۵۳۷/۶

شماره کتابشناسی ملی: ۱۱۱۹۵۰

Introduction to electrodynamics, c1999

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان
هفت	پیشگفتار
۱	پیشگفتار مؤلف
۳	مقدمه
۹	۱ آنالیز برداری
۹	۱-۱ جبر برداری
۲۴	۲-۱ حساب دیفرانسیل
۳۹	۳-۱ حساب انتگرال
۵۶	۴-۱ مختصات منحنی الخط
۶۴	۵-۱ تابع دلتای دیراک
۷۳	۶-۱ نظریه میدانهای برداری
۷۶	مسائل تکمیلی فصل ۱
۸۰	۲ الکتروستاتیک
۸۰	۱-۲ میدان الکتریکی
۸۸	۲-۲ دیورژانس و تاو میدانهای الکتروستاتیک
۱۰۵	۳-۲ پتانسیل الکتریکی
۱۲۰	۴-۲ کار و انرژی در الکتروستاتیک
۱۲۸	۵-۲ رساناها
۱۴۰	مسائل تکمیلی فصل ۲

۱۴۵	۳ روشهای خاص
۱۴۵	۱-۳ معادله لاپلاس
۱۵۸	۲-۳ روش تصویرها
۱۶۵	۳-۳ جداسازی متغیرها
۱۹۰	۴-۳ بسط چندقطبی
۲۰۱	مسائل تکمیلی فصل ۳
۲۰۸	۴ میدانهای الکتریکی در ماده
۲۰۸	۱-۴ قطبش
۲۱۶	۲-۴ میدان یک جسم قطبیده
۲۲۶	۳-۴ جابه‌جایی الکتریکی
۲۳۲	۴-۴ دی‌الکتریکهای خطی
۲۵۳	مسائل تکمیلی فصل ۴
۲۵۹	۵ مغناطوستاتیک
۲۵۹	۱-۵ قانون نیروی لورنتس
۲۷۵	۲-۵ قانون بیوساوار
۲۸۲	۳-۵ دیپولرئانس و تاو B
۲۹۹	۴-۵ پتانسیل برداری مغناطیسی
۳۱۵	مسائل تکمیلی فصل ۵
۳۲۷	۶ میدانهای مغناطیسی در ماده
۳۲۷	۱-۶ مغناطش
۳۳۷	۲-۶ میدان یک جسم مغناطیده
۳۴۴	۳-۶ میدان کمکی H
۳۵۰	۴-۶ محیطهای خطی و غیرخطی
۳۶۰	مسائل تکمیلی فصل ۶
۳۶۴	۷ الکترودینامیک
۳۶۴	۱-۷ نیروی محرکه الکتریکی

۲-۷ القای الکترومغناطیسی

۳۸۴

۳-۷ معادلات ماکسول

۴۱۰

مسائل تکمیلی فصل ۷

۴۲۴

میان پرده

۴۳۸

۸ قوانین پایستگی

۴۳۹

۸-۱ بار و انرژی

۴۳۹

۸-۲ تکانه

۴۴۵

مسائل تکمیلی فصل ۸

۴۶۱

۹ امواج الکترومغناطیسی

۴۶۴

۹-۱ امواج یک بعدی

۴۶۴

۹-۲ امواج الکترومغناطیسی در خلأ

۴۷۹

۹-۳ امواج الکترومغناطیسی در ماده

۴۸۷

۹-۴ جذب و پاشندگی

۵۰۱

۹-۵ امواج هدایت شده

۵۱۷

مسائل تکمیلی فصل ۹

۵۲۶

۱۰ پتانسیلها و میدانها

۵۳۰

۱۰-۱ فرمولبندی پتانسیل

۵۳۰

۱۰-۲ توزیعهای پیوسته

۵۳۸

۱۰-۳ بارهای نقطه‌ای

۵۴۷

مسائل تکمیلی فصل ۱۰

۵۶۲

۱۱ تابش

۵۶۴

۱۱-۱ تابش دوقطبی

۵۶۴

۱۱-۲ بارهای نقطه‌ای

۵۸۵

مسائل تکمیلی فصل ۱۱

۶۰۳

۶۰۹	۱۲ الکترو دینامیک و نسبیت
۶۰۹	۱-۱۲ نظریه نسبیت خاص
۶۴۷	۲-۱۲ مکانیک نسبیتی
۶۶۷	۳-۱۲ الکترو دینامیک نسبیتی
۶۹۳	مسائل تکمیلی فصل ۱۲
۶۹۹	پیوست الف حسابان برداری در مختصات خمیده خط
۷۰۹	پیوست ب قضیه هلمهولتز
۷۱۳	پیوست ج یکاها
۷۱۸	نمایه

پیشگفتار

چاپ اول متن فارسی این کتاب، متأسفانه، با اشتباهات و نارساییهایی همراه بود که اصلاح‌شان را در چاپ جدید وظیفه خود دانسته‌ایم. در بازبینی کامل متن قبلی و تجدید نظری که با همکاری مترجم محترم و گروه فیزیک مرکز نشر دانشگاهی به عمل آمد، سعی شده است که اشکالات محتوایی کتاب با حداقل تغییرات اصلاحی برطرف شود. اینک متن جدید اصلاح‌شده را با حروفچینی و صفحه‌آرایی تازه‌ای تقدیم دانشجویان و خوانندگان می‌کنیم.

گروه فیزیک

پیشگفتار

این کتاب الکتریسیته و مغناطیس برای دانشجویان سالهای پایین و بالای دوره کارشناسی طراحی شده است. آن را می‌توان، حتی با در نظر گرفتن جایی برای مباحث ویژه (مدارهای AC، روشهای عددی، فیزیک پلاسما، خطوط انتقال، نظریه آنتن و غیره) به راحتی در دو نیمسال تدریس کرد. درس در یک نیمسال می‌تواند پس از فصل ۷ متوقف شود. برخلاف مکانیک کوانتومی یا فیزیک گرما (برای مثال)، در مورد تدریس الکترودینامیک یک اجماع عمومی برای موضوعهایی که باید در نظر گرفته شوند وجود دارد؛ و حتی ترتیب ارائه مطالب نیز مباحثه برانگیز نیست، کتابهای مختلف فقط سبک و روش متفاوت دارند. رهیافت من شاید از اغلب آنها غیررسمی تر باشد؛ فکر می‌کنم این موضوع ایده‌های دشوار را جالبتر و دسترس پذیرتر می‌سازد.

در ویرایش سوم در جهت ظریفکاری و شفاف سازی مطالب، تغییرات زیادی وارد شده است. همین طور برای اجتناب از ناسازگاری یا ابهام، برخی از نمادگذاریها را اصلاح کرده‌ام. بنابراین، به جای بردارهای \vec{r} ، \vec{r}' و \vec{r}_0 از \vec{r} ، \vec{r}' و \vec{r}_0 استفاده کرده‌ام، به طوری که همه بردارها با حروف سیاه نشان داده شده‌اند و بردارهای یکه دارای حرف مختصه مربوطه هستند. (این انتخاب k را آزاد می‌گذارد تا بردار انتشار برای امواج الکترومغناطیسی شود.) استفاده از یک حرف r برای مختصات کروی (فاصله از مبدأ) و مختصات استوانه‌ای (فاصله از محور z) همواره باعث دردسر من شده است. یک راه حل این مشکل بهره‌گیری از حرف ρ است، اما این حرف وظیفه مهمتری را در الکترودینامیک به عهده دارد، و پس از یک جستجوی تمام عیار، بالاخره تصمیم به بهره‌گیری از حرف s گرفتم که چندان مورد استفاده قرار نمی‌گیرد؛ امیدوارم که این بهره‌گیری نامتعارف باعث ابهام نشود.

برخی از خوانندگان از من خواسته‌اند که حرف تحریری \mathcal{I} (بردار واصل از نقطه چشمه \mathbf{r}' به نقطه میدان \mathbf{r}) را به نفع شکل واضحتر $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ کنار بگذارم. این کار بسیاری از معادله‌ها را به طور پیچیده‌ای پر دردسر می‌سازد، به ویژه، هنگامی که بردار یکه $\hat{\mathbf{r}}$ در آنها دخیل باشد. از تجربه تدریس

خود می‌دانم که دانشجویان بی‌توجه اغلب π را Γ می‌خوانند — بدون شک این کار انتگرالها را ساده می‌کند! من بخشی را در فصل ۱ به توضیح این نمادگذاری اختصاص داده‌ام، و امید دارم که سودمند واقع شود. اگر شما دانشجو هستید، لطفاً توجه کنید $\Gamma - \Gamma' \equiv \pi$ ، که بدون شک با Γ یکی نیست. اگر معلم‌اید، لطفاً دانشجویان خود را آگاه سازید تا توجه کافی به مفهوم π بکنند. تصور می‌کنم که نمادگذاری خوبی باشد، اما باید با آن به دقت کار کرد.

بیشترین تغییر ساختاری مربوط به حذف قانونهای پایستگی و پتانسیلها از فصل ۷، و ایجاد دو فصل کوتاه (۸ و ۱۰) است. این کار درس یک نیم‌سال را راحت‌تر می‌کند و توجه بیشتری را به فصل ۷ معطوف می‌دارد.

مسئله‌ها و مثالهای تازه‌ای را وارد (و بعضی را که چندان مؤثر نبودند حذف) کرده‌ام. نشریات و مراجع بیشتری (به‌ویژه امریکن جورنال آو فیزیکز) به‌کار گرفته شده‌اند. البته، متوجه هستم که اغلب خوانندگان زمان و گرایش کافی برای استفاده از این منابع را ندارند، اما فکر می‌کنم که به هر حال این موضوع، حتی برای تأکید اینکه الکترودینامیک، به‌رغم سابقهٔ درخور احترامش، موضوعی زنده است که همواره کشفیات خیره‌کننده‌ای در آن صورت می‌گیرد لازم باشد. امیدوارم، گاهی یک مسئله کنجکاو شما را برانگیزد و علاقه‌مند شوید به مراجع، که بعضی از آنها جواهرهای واقعی هستند، نگاه کنید.

مانند ویراستهای قبل، به دو نوع مسئله توجه داشته‌ام. بعضی از آنها هدف آموزشی خاصی دارند، و باید بلافاصله پس از مطالعه بخشهای مربوط در مورد آنها کار شود؛ این نوع مسئله‌ها را در جاهای مناسب فصل قرار داده‌ام. (در چند مورد از حل مسئله بعداً در کتاب استفاده شده است؛ این مسئله‌ها را با یک دایرهٔ توپر (●) در حاشیهٔ راست مشخص کرده‌ام.) مسئله‌های طولانیتر، یا آنهایی که سرشت عامتری دارند، را در انتهای هر فصل می‌توان یافت. در هنگام تدریس موضوع، برخی از آنها را به دانشجویان محول می‌کنم، و به حل بعضی از آنها در کلاس می‌پردازم. معمولاً، مسئله‌های چالش برانگیز با علامت توجه (!) در حاشیه مشخص شده‌اند. بسیاری از خوانندگان علاقه‌مندند که جواب مسئله‌ها در انتهای کتاب آورده شود؛ متأسفانه، برخی دیگر نیز با این کار مخالف‌اند. من حد وسط را در نظر گرفته‌ام، و جوابها را در بعضی موارد مقتضی داده‌ام. راهنمای کامل حل مسئله را (مربیان) می‌توانند از ناشر بگیرند.

در تدوین این کتاب از اظهارنظر بسیاری از همکارانم بهره گرفته‌ام که نمی‌توانم فهرست کامل آنها را بیاورم. به‌ویژه، هر چیزی را که دربارهٔ الکترودینامیک می‌دانم — مخصوصاً درباره تدریس آن — مرهون ادوارد پورسل هستم.

مقدمه

الکترو دینامیک چیست، و چگونه در طرح کلی فیزیک می‌گنجد؟

قلمروهای چهارگانه مکانیک

در جدول زیر چهار قلمرو مکانیک را نشان داده‌ایم:

مکانیک کوانتومی (بور، هایزنبرگ، شرودینگر، و دیگران)	مکانیک کلاسیکی (نیوتون)
نظریه میدان کوانتومی (دیراک، پائولی، فاینمن، شرودینگر، و دیگران)	نسبیت خاص (اینشتین)

در اوایل قرن بیستم عدم کارایی مکانیک نیوتونی مشهود شد — این مکانیک برای “زندگی روزمره” مناسب است. اما برای اجسامی که با سرعت‌های بالا (نزدیک به سرعت نور) حرکت می‌کنند نادرست است، و باید با نسبیت خاص (که توسط اینشتین در ۱۹۰۵ معرفی شد) جایگزین شود؛ برای اشیایی که فوق‌العاده کوچک (در حدود اندازه اتم) هستند، به دلایل گوناگون کارا نیست و جای خود را به مکانیک کوانتومی (که توسط بور، شرودینگر، هایزنبرگ و کسان زیاد دیگری عمدتاً در قرن بیستم بسط و توسعه یافت) می‌دهد. برای اجسامی که هم بسیار کوچک‌اند و هم سرعت بسیار بالایی دارند (همانند ذرات بنیادی در فیزیک جدید)، مکانیکی مرکب از اصول نسبیتی و کوانتومی به‌کار می‌رود: ظهور این مکانیک کوانتومی نسبیتی که آن را نظریه میدان کوانتومی نام نهاده‌اند به دهه‌های سوم و چهارم قرن بیستم مربوط می‌شود، اما حتی امروز هم نمی‌توان ادعا کرد که به‌طور رضایتبخش دستگاهی کامل است. در این کتاب، بجز فصل آخر، در قلمرو مکانیک کلاسیک کار

می‌کنیم، هر چند که الکترودینامیک با سادگی منحصر به فردی به هر سه قلمرو دیگر هم گسترش می‌یابد. (در واقع، نظریه الکترومغناطیسی به‌طور خودبه‌خودی با نظریه نسبیت خاص، که برایش از نقطه نظر تاریخی تأثیرگذار اصلی بود، سازگار است.)

نیروهای چهارگانه

کار مکانیک بررسی رفتار یک دستگاه است وقتی به آن نیرویی اعمال می‌شود. در حال حاضر چهار نوع نیرو در فیزیک شناخته شده‌اند: در زیر این نیروها را به ترتیب کاهش قدرت آنها می‌آوریم:

۱. قوی

۲. الکترومغناطیسی

۳. ضعیف

۴. گرانشی

اختصار این فهرست ممکن است شما را متعجب کند. نیروی اصطکاک کجاست؟ نیروی "قائمی" که شما را در کف اتاق نگه می‌دارد کجاست؟ نیروهای شیمیایی که مولکولها را به هم می‌پیوندند کجا هستند؟ نیروی برخوردی میان دو توپ بیلیارد کجاست؟ جواب آن است که تمام این نیروها الکترومغناطیسی‌اند. در واقع اگر بگوییم که ما در یک جهان الکترومغناطیسی زندگی می‌کنیم زیاد اغراق نگفته‌ایم، زیرا چشمه هر نوع نیرویی که در زندگی روزمره تجربه می‌کنیم، بجز نیروی گرانشی، الکترومغناطیسی است.

نیروهای قوی که پروتونها و نوترونها را در هسته‌های اتمی کنار هم نگاه می‌دارد، برد بسیار کوتاهی دارند، و علی‌رغم اینکه صدها مرتبه از نیروهای الکتریکی قویترند، آنها را احساس نمی‌کنیم. نیروهای ضعیف که موجب انواع مشخصی از واپاشی پرتوزا هستند، نه تنها کوتاه بردند بلکه به مراتب از نیروهای الکترومغناطیسی مورد بحث هم ضعیفترند. همچنین در رابطه با نیروی گرانشی این نیرو (در مقایسه با نیروهای دیگر) آنقدر کوچک است که فقط برای جرمهای بسیار عظیم (مانند زمین و خورشید) محسوس می‌شود. نیروی دافعه بین دو الکترون 10^{42} مرتبه از نیروی جاذبه گرانشی بین آنها بزرگتر است، و اگر آنها (به جای نیروهای الکترومغناطیسی) بر اثر نیروی گرانشی به هم مربوط می‌شدند یک تک اتم هیدروژن به تنهایی می‌بایست از تمام جهانی که می‌شناسیم بزرگتر باشد.

نیروهای الکترومغناطیسی نه تنها عمده نیروهایی هستند که در زندگی روزمره با آنها سروکار داریم، بلکه تنها نیروهایی هم هستند که کاملاً شناخته شده‌اند. بدیهی است یک نظریه کلاسیک گرانش (قانون نیوتون برای گرانش عمومی) و نیز یک نظریه نسبیتی گرانشی (نسبیت عام اینشتین) وجود دارند، اما هنوز یک نظریه مکانیک کوانتومی کاملاً رضایتبخشی برای گرانش پرداخته نشده

است (اگر چه افراد زیادی روی آن کار می‌کنند). در حال حاضر یک نظریه بسیار موفق (گرچه پر دردرس) برای برهم‌کنشهای ضعیف و یک کاندیدای بسیار جذاب (به نام کرومودینامیک) برای برهم‌کنشهای قوی وجود دارد. تمام این نظریه‌ها از الکترومدینامیک الهام گرفته‌اند؛ در این مرحله هیچ‌یک از اینها از یک تأیید تجربی جامع برخوردار نیستند. بنابراین الکترومدینامیک، به صورت نظریه‌ای زیبا و کامل مورد توجه فیزیکدانان است: الگوی ایده‌آلی که نظریه‌های دیگر می‌کوشند از آن تقلید کنند.

قوانین الکترومدینامیک کلاسیک به تدریج توسط فرانکلین، کولن، آمپر، فاراده و دیگران کشف شدند، اما کسی که کار را تمام کرد و تمام یافته‌ها را به صورت فشرده و کامل امروزی در آورد جیمز کلارک ماکسول بود. از عمر این نظریه متجاوز از صد سال می‌گذرد.

وحدت نظریه‌های فیزیکی

الکتریسیته و مغناطیس در آغاز دو موضوع کاملاً متفاوت بودند. اولی به چیزهایی از قبیل میله شیشه‌ای، پوست گربه، باتری، جریان، الکترولیز و روشنائی مربوط می‌شد در حالی که دومی درباره آهنرباها، براده آهن، عقربه مغناطیسی و قطب شمال بحث می‌کرد. اما در سال ۱۸۲۰ میلادی، ارستد متوجه شد که جریان الکتریکی می‌تواند عقربه مغناطیسی را منحرف کند. کوتاه زمانی بعد از کشف ارستد، آمپر به درستی چنین نظر داد که تمام پدیده‌های مغناطیسی از بارهای الکتریکی متحرک ناشی می‌شوند. سپس در سال ۱۸۳۱ میلادی، فاراده کشف کرد که یک آهنربای متحرک جریان الکتریکی ایجاد می‌کند. در همان زمان ماکسول و لورنتس نظر تکمیلی خود را چنین بیان کردند که الکتریسیته و مغناطیس به‌گونه‌ای جدا نشدنی به همدیگر مربوط‌اند. این دو را دیگر نمی‌توان به‌عنوان موضوعهای جداگانه مطرح کرد، بلکه دو جنبه از یک موضوع واحدند: الکترومغناطیس.

فاراده معتقد بود که نور نیز سرشت الکتریکی دارد. نظریه ماکسول تأییدی درخشان برای این فرضیه فراهم کرد، و به‌زودی نورشناخت یعنی مطالعه عدسیها، آینه‌ها، منشورها، تداخل و پراش نیز در بحث الکترومغناطیس گنجانده شدند. هرگز که با آزمایشهای قاطع خود در سال ۱۸۸۸ میلادی بر نظریه ماکسول مهر تأیید زد این مطلب را چنین شرح داد: "حال ارتباط بین نور و الکتریسیته محرز است ... در هر شعله، در هر ذره نور، یک فرایند الکتریکی مشاهده می‌کنیم ... از این رو قلمرو الکتریکی بر سرتاسر طبیعت گسترده است. حتی بر خود ما هم تأثیرگذار است: به این دلیل آن را درک می‌کنیم که دارای ... ابزاری الکتریکی به نام چشم هستیم". بدین ترتیب در سال ۱۹۰۰ میلادی سه شاخه عمده فیزیک یعنی الکتریسیته، مغناطیس و اپتیک در یک تک نظریه واحد قرار گرفتند. (و به‌زودی آشکار شد که نور مرئی تنها یک "پنجره" باریکی از طیف وسیع تابش

الکترومغناطیسی را که از امواج رادیو، میکروموجها، پرتوهای فرسرخ و فرابنفش، تا پرتوهای x و گاما تشکیل شده‌اند به نمایش می‌گذارد.)

اینشتین رویای وحدت بزرگی را در سر می‌پروراند که بر اساس آن گرانش و الکترودینامیک را به همان شیوه‌ای که یک قرن قبل از او الکتریسته و مغناطیس ترکیب شدند با هم بیامیزد. گرچه نظریه وحدت میدانهای او چندان موفق نبود، اما در سالهای اخیر با همان محرک گروه وسیعتری به بسط و توسعه نظریه وحدت پرداخت که شروع آن به دهه ۱۹۶۰ میلادی با نظریه الکترو ضعیف، گلاشو، واینبرگ و سلام (که در آن نیروهای الکترومغناطیسی و ضعیف را به هم متصل می‌کند) برمی‌گردد و اوج آن به دهه ۱۹۸۰ و نظریه ابر ریمان (که بر اساس آن تمام چهار نیرو را در یک "نظریه" خلاصه می‌کند)، مربوط می‌شود. در هر مرحله‌ای از این سلسله مراتب، مشکلات ریاضی افزون و گاف بین نظریه‌ها و آزمون آزمایشگاهی وسیعتر می‌شود؛ با همه اینها، بدیهی است که وحدت بین نیروها که از الکترودینامیک آغاز شد موضوع مهم پیشرفت فیزیک را تشکیل می‌دهد.

فرمولبندی میدانی الکترودینامیک

یک مسئله بنیادی که نظریه الکترومغناطیس به حل آن می‌پردازد این است: یک دسته بار الکتریکی در اینجا در اختیار داریم (و شاید هم بتوانیم آنها را به اطراف جابه‌جا کنیم) — چه اتفاقی برای بار دیگری می‌افتد که آن طرف قرار دارد؟ جواب کلاسیک به صورت یک نظریه میدان است: می‌گوییم که فضای اطراف یک بار الکتریکی حاوی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی است ("رایحه" الکترومغناطیسی بار). این میدانها به بار دیگری که در آنها قرار می‌گیرد نیرو اعمال می‌کند؛ پس این میدانها هستند که تأثیر یک بار بر بار دیگر را منتقل می‌کنند. به عبارتی میدان واسطه برهم‌کنش است.

وقتی باری شتابدار می‌شود، بخشی از میدان به‌گونه‌ای خود را از بقیه "جدا می‌کند"، و با سرعت نور حرکت کرده و با خود انرژی، تکانه و تکانه زاویه‌ای منتقل می‌کند. این را تابش الکترومغناطیسی می‌نامیم. وجود آن ما را دعوت (اگر نگوئیم مجبور) به این می‌کند که میدانها را به صورت وجودهای "حقیقی" دینامیکی مستقل برای خودشان همانند آنها یا غیره بپذیریم. از این‌رو توجه ما از مطالعه و بررسی نیروهای بین بارها به خود نظریه میدانها معطوف می‌شود. اما لازمه این کار وجود باری است که میدان را ایجاد کند و نیز وجود بار دیگری که این میدان را آشکار سازد، از این‌رو بهترین کار آن است که رفتارهای اساسی بار الکتریکی را بازنگری کنیم.

بار الکتریکی

۱. بار به دو صورت مختلف "مثبت" و "منفی" وجود دارد؛ چون این دو نوع میل به خنثی کردن اثر یکدیگر دارند (اگر بارهای $+q$ و $-q$ در یک نقطه قرار بگیرند از نظر الکتریکی مثل آن است

که در آن نقطه اصلاً باری وجود ندارد). این نکته به قدری بدیهی است که به نظر می‌رسد گفتن آن لزومی ندارد، اما تذکر آن پاسخی به امکانات دیگر است: اگر 8 یا 10 نوع بار مختلف وجود داشته باشد چه؟ (در کرومودینامیک هم سه کمیت قابل قیاس با بار الکتریکی وجود دارد که ممکن است مثبت یا منفی باشند). یا اینکه اگر دو نوع بار یکدیگر را خنثی نکنند چه؟ واقعیت خارق‌العاده این است که بارهای مثبت و منفی با دقت زیاد به مقادیر کاملاً مساوی در حجم مواد وجود دارند و اثر کلی آنها خنثی است. وقتی چنین وضعیتی برقرار نباشد با نیروهای عظیمی مواجه هستیم: اگر این خنثی شدن حتی به میزان یک قسمت در 10^{10} قسمت یک سیب‌زمینی کامل نشود، انفجار عظیمی در آن رخ می‌دهد.

۲. بار پایسته است: آن را نه می‌توان ایجاد کرد و نه می‌توان نابود کرد، چیزی که همیشه بوده است. (یک بار مثبت می‌تواند بار مساوی خود را که منفی است "نابود" کند، اما یک بار مثبت به سادگی به‌طور خودبه‌خودی از بین نمی‌رود و به هر صورت چیز دیگری باید برای این بار الکتریکی را نابود کند.) بنابراین کل بارهای جهان برای همه زمانها ثابت است. این را پایستگی همه جایی بار می‌نامند. در واقع می‌توان محکمتر سخن گفت: پایستگی همه جایی این اجازه را به بار می‌دهد که مثلاً در نیویورک ناپدید شود و بلافاصله در سانفرانسیسکو ظاهر شود (که در کل تأثیری ندارد)، و در عین حال می‌دانیم که چنین چیزی اتفاق نمی‌افتد. اگر بار در نیویورک بود و به سانفرانسیسکو می‌رفت، باید از مسیر پیوسته‌ای از مبدأ به مقصد می‌گذشت. این را پایستگی موضعی بار می‌نامند. بعداً خواهیم دید که چگونه می‌توان قانون ریاضی دقیقی را برای تبیین پایستگی موضعی بار فرمولبندی کرد، این فرمول را معادله پیوستگی می‌نامند.

۳. بار کوانتیده است. گرچه چیزی در الکترومدینامیک کلاسیک لزوم این کوانتیدگی را ایجاد نمی‌کند. واقعیت این است که بار الکتریکی به صورت مقادیر ناپیوسته که خود مضربی درست از یکای بنیادی بار است، وجود دارد. اگر بار پروتون را $+e$ بنامیم، آن‌گاه الکترون حامل بار $-e$ ، بار نوترون صفر، مزون بی دارای $+e$ و 0 و $-e$ ، هسته کربن دارای بار $+6e$ و ... هستند (هیچ‌گاه $3.92e$ یا $1/2e$ نداریم).^۱ این یکای بنیادی بار بی‌اندازه کوچک است، بنابراین برای اهداف عملی، معمولاً مناسب آن است که کوانتیدگی را کاملاً نادیده بگیریم. آب هم "واقعاً" از مولکولهای مجزا از هم تشکیل شده است؛ در عین حال اگر با مقادیر خیلی خیلی زیاد از این مولکولها سروکار داشته باشیم می‌توان، آب را شماره‌ای پیوسته انگاشت. این فرض به نقطه نظر ماکسول بسیار نزدیک است؛ او

۱. در واقع پروتون و نوترون خود از کوارکها که حامل بارهای کسری ($\pm 2/3e$ و $\pm 1/3e$) هستند تشکیل شده‌اند. با وجود این به‌نظر نمی‌رسد که کوارک آزاد در طبیعت یافت شود، و به هر حال این مسئله در اصل کوانتیدگی بار تغییری ایجاد نمی‌کند؛ تنها اثر این تعریف کوچک کردن یکای پایه است.

چیزی درباره الکترونها و پروتونها نمی دانست — او بار را به صورت نوعی "ژله" در نظر می گرفت که می توان آن را به قسمتهایی با هر اندازه تقسیم کرد و مطابق دلخواه به کناری گذاشت. اینها خواص اساسی بار هستند. قبل از بحث درباره نیروهای میان بارها، بعضی ابزارهای ریاضی مورد نیازند که آنها را در فصل ۱ بیان می کنیم.

یکها

مبحث الکتروستاتیک درگیر و گرفتار دستگاه یکاهای رقیب است که در مواردی ارتباط میان فیزیکدانان را با مشکل مواجه می کند. مسئله به مراتب از مکانیک هم که در آن بعضی کشورها از پوند و فوت صحبت می کنند بدتر است. زیرا در مکانیک حداقل تمام معادلات، صرف نظر از یکاهای به کار گرفته شده در آنها، همانندند. قانون دوم نیوتون همواره به صورت $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ است، صرف نظر از اینکه از فوت، پوند، ثانیه، کیلوگرم، متر-ثانیه یا یکاهای دیگری استفاده شود. اما در مورد الکترومغناطیس چنین نیست، مثلاً قانون کولن به صورتهای گوناگون زیر ظاهر می شود

$$\frac{q_1 q_2}{\pi^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{گاوسی}), \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{SI}), \quad \frac{1}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{HL})$$

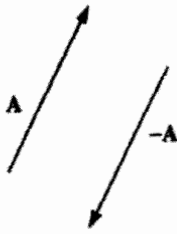
از تمام دستگاهها، دو دستگاه گاوسی (cgs) و SI (mks) مشهورترند و بیشتر به کار گرفته می شوند. نظریه پردازان ذرات بنیادی دستگاه سوم هویسایدلورنتس (HL) را ترجیح می دهند. گرچه یکاهای گاوسی از مزایای نظری بارزی برخوردارند. بیشتر خوانندگان SI را ترجیح می دهند. فکر می کنم علت این انتخاب آن است که با یکاهای کاربردی آشنای روزمره (ولت، آمپر، و وات) سروکار دارند. بنابراین ما در این کتاب یکای SI را به کار می بریم. پیوست ج جدول تبدیل نتایج اساسی به یکاهای گاوسی را نشان می دهد.

آنالیز برداری

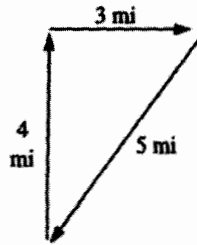
۱-۱ جبر برداری

۱-۱-۱ عملیات برداری

هرگاه ۴ مایل به طرف شمال و ۳ مایل به سمت شرق قدم بزنید (شکل ۱-۱) گرچه جمعاً ۷ مایل را طی کرده‌اید اما از محل عزیمت خود فقط ۵ مایل فاصله گرفته‌اید. ما نیاز به نوعی جبر داریم که این چنین کمیت‌هایی را توضیح دهد؛ کمیت‌هایی که الزاماً به شیوه معمول جمع نمی‌شوند. دلیل این نیاز آن است که جابه‌جایی (خط واصل بین دو نقطه) علاوه بر اندازه دارای جهت نیز هست و بنابراین باید در عملیات خود هر دو (اندازه و جهت) را مد نظر داشته باشیم. به چنین کمیت‌هایی بردار گفته می‌شود. سرعت، شتاب، نیرو، تکانه (اندازه حرکت) و تکانه زاویه‌ای مثال‌های دیگری از یک کمیت برداری هستند. در مقایسه با بردارها کمیت‌هایی که دارای اندازه هستند اما جهت ندارند اسکالر (نرده‌ای-عددی) نامیده می‌شود؛ جرم، بار الکتریکی، چگالی و دما از این دسته‌اند. از این به بعد کمیت‌های برداری را با حروف سیاه (A و B و ...) می‌نویسیم، و حروف با چاپ معمولی را نشانه کمیتی اسکالر در نظر می‌گیریم. اندازه یک کمیت برداری A به صورت $|A|$ و یا ساده‌تر A نوشته می‌شوند. در نمایش ترسیمی، بردارها را توسط یک پیکان نمایش می‌دهیم به گونه‌ای که



شکل ۲-۱



شکل ۱-۱

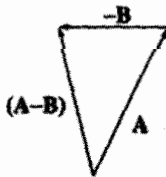
طول این سهم متناسب با اندازه بردار و نوک آن نشان‌دهنده جهت بردار باشد. منفی بردار A یعنی $-A$ برداری است که مساوی با آن اما در جهت مخالفش در نظر گرفته شده باشد. (شکل ۲-۱). توجه داشته باشید که بردارها در عین داشتن مقدار و امتداد دارای مکان مشخص نیستند. به عنوان مثال جابه‌جایی ۴ مایلی از واشنگتن به سمت شمال توسط همان برداری نمایش داده می‌شود که برای یک جابه‌جایی ۴ مایلی از بالتیمور به طرف شمال (البته با صرف نظر کردن از انحنای زمین). بنابراین در یک نمودار می‌توان علامت پیکان را در اطراف و جاهای مختلف رسم کرد به شرطی که امتداد و مقدار بردار تغییری نکند.

در اینجا به بررسی چهار عمل برداری یعنی جمع و سه نوع ضرب می‌پردازیم:

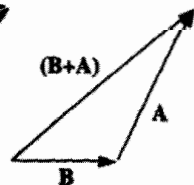
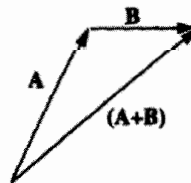
(الف) جمع دو بردار. انتهای B را بر روی نوک پیکان بردار A قرار دهید. جمع $A + B$ برداری است که انتهای آن انتهای A و نوک پیکان آن بر روی نوک پیکان B منطبق است (شکل ۳-۱). این قاعده در واقع تعمیم چگونگی ترکیب دو جابه‌جایی است. جمع بردارها خاصیت تعویض‌پذیری دارد:

$$A + B = B + A$$

مثلاً جابه‌جایی ۳ مایلی به سمت شرق و متعاقب آن ۴ مایل به سمت شمال با حرکت ۴ مایلی به طرف



شکل ۴-۱



شکل ۳-۱

شمال و در پی آن ۳ مایل به سمت شرق معادل است. جمع بردارها همچنین خاصیت شرکت پذیری دارد:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

برای کم کردن برداری از بردار دیگر (شکل ۴-۱)، بردار را با مخالف آن جمع کنید.

(ب) ضرب بردار در عدد. هرگاه برداری در عدد مثبتی ضرب شود جهت آن بدون تغییر می ماند و اندازه اش در آن عدد ضرب می شود (شکل ۵-۱). در صورتی که عدد منفی باشد، جهت آن هم عوض می شود. این ضرب دارای خاصیت توزیع پذیری است:

$$a(A + B) = aA + aB$$

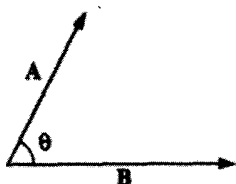
(ج) ضرب نقطه ای دو بردار. ضرب نقطه ای دو بردار به صورت زیر تعریف می شود

$$A \cdot B \equiv AB \cos \theta \quad (1-1)$$

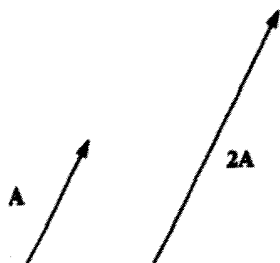
θ زاویه بین دو بردار است (شکل ۶-۱). توجه داشته باشید که $A \cdot B$ خود یک اسکالر است (به همین جهت است که آن را ضرب عددی می نامیم). ضرب نقطه ای دارای خاصیت تعویض پذیری و نیز خاصیت توزیع پذیری است.

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (2-1)$$



شکل ۶-۱



شکل ۵-۱

از نقطه نظر هندسی $A \cdot B$ برابر است با حاصلضرب A در تصویر B در امتداد A (یا حاصلضرب B در تصویر A روی B). هر گاه دو بردار موازی باشند در آن صورت $A \cdot B = AB$ یک حالت خاص مورد اخیر این است که

$$A \cdot A = A^2 \quad (3-1)$$

هر گاه A و B بر یکدیگر عمود باشند آن گاه $A \cdot B = 0$ است.

مثال ۱-۱

اگر $C = A - B$ باشد (شکل ۷-۱) و بخواهیم حاصلضرب نقطه‌ای C در خودش را محاسبه کنیم داریم

$$C \cdot C = (A - B) \cdot (A - B) = A \cdot A - A \cdot B - B \cdot A + B \cdot B$$

و یا

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$$

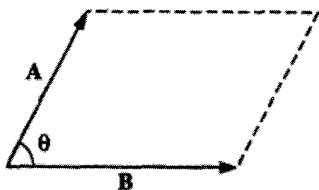
معادلهٔ اخیر را قانون کسینوسها می‌نامند.

(د) حاصلضرب برداری دو بردار. حاصلضرب برداری دو بردار به صورت زیر تعریف

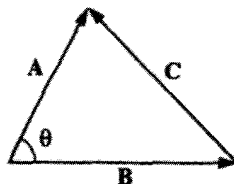
می‌شود

$$A \times B = AB \sin \theta \hat{n} \quad (4-1)$$

که در آن \hat{n} بردار یکه‌ای (به طول ۱) است که بر صفحهٔ حاصل از A و B عمود است. (علامت \wedge) را برای مشخص کردن بردار یکه به کار می‌بریم. بدیهی است که برای عمود بر صفحه می‌توان دو جهت مخالف در نظر گرفت (به سمت داخل یا خارج). این ابهام را می‌توان توسط قانون دست راست برطرف کرد: اگر انگشتان خود را در حالی که در جهت بردار اول قرار دارند به سمت بردار دوم بچرخانیم (البته در جهت پیمایش زاویهٔ کوچکتر) آن گاه انگشت شست نشان‌دهنده جهت درست بردار یکه \hat{n} است. (در شکل ۸-۱ $A \times B$ به طرف داخل صفحه و $B \times A$ به سمت



شکل ۸-۱



شکل ۷-۱

خارج صفحه است.) توجه کنید که $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ خود یک بردار است (و به همین دلیل است که این ضرب را ضرب برداری می‌نامیم). ضرب برداری (خارجی) دارای خاصیت توزیع‌پذیری است:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (5-1)$$

اما جابه‌جاپذیر نیست، یعنی

$$(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (6-1)$$

از نظر هندسی $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط دو بردار \mathbf{A} و \mathbf{B} ساخته می‌شود (شکل ۸-۱). اگر دو بردار موازی باشند حاصلضرب خارجی آنها صفر می‌شود و برای هر بردار \mathbf{A} هم داریم

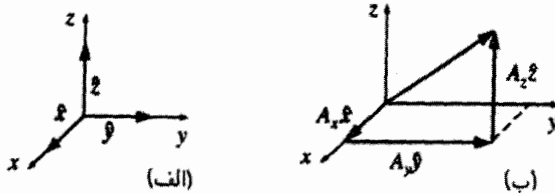
$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

! مسئله ۱-۱ با استفاده از تعاریف معادلات (۱-۱) و (۴-۱)، و نمودارهای مناسب نشان دهید که ضرب نقطه‌ای و ضرب خارجی دو بردار دارای خاصیت توزیع‌پذیری‌اند:
(الف) وقتی که هر سه بردار در یک صفحه باشند؛
(ب) در حالت کلی.

! مسئله ۲-۱ آیا ضرب خارجی دارای خاصیت شرکت‌پذیری است؟

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \stackrel{?}{=} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

□ اگر چنین است آن را ثابت کنید؛ در غیر این صورت مثال نقض بیاورید.



شکل ۹-۱

۲-۱-۱ جبر برداری: شکل مؤلفه‌ای

در بخش قبل چهار عمل برداری (جمع، ضرب عدد در بردار، ضرب داخلی و خارجی دو بردار) را بدون اشاره به نوع دستگاه مختصات معرفی کردیم. معمولاً استفاده از دستگاه مختصات دکارتی ساده‌تر است. در این دستگاه بردارهای یکه \hat{x} ، \hat{y} و \hat{z} را به ترتیب روی محورهای x ، y و z انتخاب می‌کنیم [شکل ۹-۱(الف)]. بردار دلخواه A را می‌توان برحسب این بردارهای پایه بسط داد [شکل ۹-۱(ب)]:

$$A = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$

اعداد A_x ، A_y و A_z مؤلفه‌های A نامیده می‌شوند و از نظر هندسی تصاویر A در راستای سه محور محسوب می‌شوند. حال با در نظر گرفتن این مؤلفه‌ها مجدداً چهار عمل ذکر شده قبلی را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A + B &= (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) + (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}) \\ &= (A_x + B_x) \hat{x} + (A_y + B_y) \hat{y} + (A_z + B_z) \hat{z} \end{aligned} \quad (7-1)$$

(الف) قاعده: برای جمع بردارها، مؤلفه‌های همانند را جمع می‌کنیم.

$$aA = (aA_x) \hat{x} + (aA_y) \hat{y} + (aA_z) \hat{z} \quad (8-1)$$

(ب) قاعده: برای ضرب بردار در یک عدد تمام مؤلفه‌های بردار را در آن عدد ضرب می‌کنیم.

چون \hat{x} ، \hat{y} و \hat{z} دو به دو به یکدیگر عمود هستند داریم

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1; \quad \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0 \quad (9-1)$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) \cdot (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (10-1)$$

(ج) قاعده: برای محاسبه حاصلضرب نقطه‌ای، مؤلفه‌های همانند را در یکدیگر ضرب و حاصل را با هم جمع می‌کنیم. در حالت خاص، برای یک بردار \mathbf{A} داریم

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

بنابراین

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (11-1)$$

(این نتیجه را می‌توان تعمیم سه‌بعدی قضیه فیثاغورس در نظر گرفت.) توجه کنید که ضرب نقطه‌ای بردار \mathbf{A} در بردار یک‌ه، مؤلفه \mathbf{A} را در آن جهت می‌دهد. (بنابراین $\mathbf{A} \cdot \hat{x} = A_x$ ، $\mathbf{A} \cdot \hat{y} = A_y$ ، $\mathbf{A} \cdot \hat{z} = A_z$.)

همین‌طور برای ضرب خارجی داریم^۱

$$\begin{aligned} \hat{x} \times \hat{x} &= \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = \mathbf{0} \\ \hat{x} \times \hat{y} &= -\hat{y} \times \hat{x} = \hat{z} \\ \hat{y} \times \hat{z} &= -\hat{z} \times \hat{y} = \hat{x} \\ \hat{z} \times \hat{x} &= -\hat{x} \times \hat{z} = \hat{y} \end{aligned} \quad (12-1)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) \times (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z} \end{aligned} \quad (13-1)$$

۱. این علامت به یک دستگاه مختصات راستگرد مربوطاند (یعنی محور x به طرف برون صفحه، y به سمت راست و z در جهت بالایی صفحه). در یک دستگاه مختصات چپگرد، علامت برعکس هستند: $\hat{x} \times \hat{y} = -\hat{z}$ و غیره. ما صرفاً از دستگاههای مختصات راستگرد استفاده می‌کنیم.

این چند جمله‌ای مفصل را می‌توان با استفاده از دترمینان به صورت ساده‌تر زیر نوشت

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (۱۴-۱)$$

(د) قاعده: برای محاسبه ضرب خارجی، دترمینان را طوری تشکیل دهید که در سطر اول آن بردارهای \hat{x} ، \hat{y} ، \hat{z} و در سطر دوم مؤلفه‌های \mathbf{A} و در سطر سوم مؤلفه‌های \mathbf{B} گنجانیده شوند.

مثال ۲-۱

زاویه بین دو قطر وجوه مجاور یک مکعب را حساب کنید.

حل: مکعبی به ضلع ۱ انتخاب می‌کنیم و مانند شکل ۱-۱۰ یکی از گوشه‌هایش را به عنوان مبدأ در نظر می‌گیریم. قطرهای مجاور \mathbf{A} و \mathbf{B} عبارت‌اند از

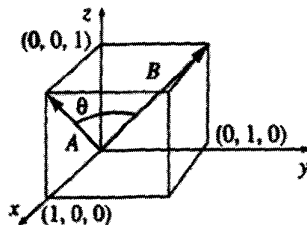
$$\mathbf{A} = 1\hat{x} + 0\hat{y} + 1\hat{z} \quad \mathbf{B} = 0\hat{x} + 1\hat{y} + 1\hat{z}$$

و بنابراین به صورت مؤلفه‌ای داریم

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 1$$

از طرف دیگر به صورت مجرد می‌توان نوشت

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \cos \theta = 2 \cos \theta$$



شکل ۱-۱۰

$$\cos \theta = \frac{1}{3} \quad \text{یا} \quad \theta = 60^\circ$$

البته جواب را با رسم قطر سوم وجه بالای مکعب و تشکیل یک مثلث متساوی الاضلاع هم می توان حساب کرد. در مسائلی هم که از نظر هندسی دشوارترند می توان با مقایسه، شکل مجرد و صورت مؤلفه‌ای حاصلضرب نقطه‌ای، زوایای مورد نظر را پیدا کرد. ■

مسئله ۳-۱ زاویه بین قطرهای داخلی یک مکعب را پیدا کنید.

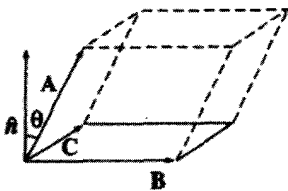
مسئله ۴-۱ با استفاده از حاصلضرب خارجی مؤلفه‌های بردار \hat{i} عمود بر صفحه نشان داده شده در شکل ۱۱-۱ را حساب کنید. □

۳-۱-۱ ضربهای سه‌تایی

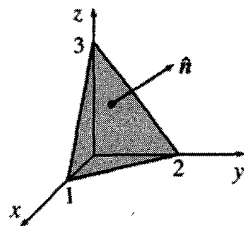
چون حاصلضرب برداری دو بردار، خود یک بردار است، بردار اخیر را می توان به صورت نقطه‌ای یا خارجی با بردار سومی ضرب کرد تا حاصلضرب سه‌گانه به دست آید.

(الف) ضرب سه‌گانه عددی: $A \cdot (B \times C)$. از نظر هندسی $|A \cdot (B \times C)|$ حجم متوازی‌السطوحی است که توسط A و B و C ساخته می‌شود، زیرا $|B \times C|$ مساحت قاعده و $|A \cos \theta|$ ارتفاع است (شکل ۱۲-۱). بدیهی است که

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) \quad (15-1)$$



شکل ۱۲-۱



شکل ۱۱-۱

زیرا هر سه جمله یک شکل را مشخص می‌کنند. توجه کنید که "ترتیب الفبایی" حفظ شده است — از دید معادله (۶-۱) حاصلضربهای سه‌تایی بدون "ترتیب الفبایی" زیر

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A})$$

دارای علائم مخالف هستند. به صورت مؤلفه‌ای هم می‌توان نوشت

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (۱۶-۱)$$

توجه کنید که جای نقطه (°) و ضربدر (×) را می‌توان تعویض کرد:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

این نتیجه‌گیری فوراً از معادله (۱۵-۱) ناشی شده است؛ با وجود این محل پراترها مهم است، مثلاً $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ عبارتی نادرست است زیرا با یک کمیت برداری و یک کمیتی عددی نمی‌توان یک ضرب برداری نوشت.

(ب) ضرب سه‌گانه برداری: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$. ضرب سه‌گانه برداری را می‌توان به صورت قاعده $\mathbf{BAC} - \mathbf{CAB}$ ساده کرد:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (۱۷-۱)$$

توجه کنید که ضرب زیر، برداری کاملاً متفاوت را نمایش می‌دهد.

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = -\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) + \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})$$

تمام ضربهای برداری چندتایی را به‌گونه‌ای مشابه می‌توان با استفاده از معادله (۱۷-۱) به ضربهای کوچکتر تقلیل داد، بنابراین هیچ‌گاه نیازی نیست که عبارتی حاوی بیش از یک ضرب خارجی در هر جمله باشد.

به عنوان مثال

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{C} \times \mathbf{D}) \quad (18-1)$$

مسئله ۵-۱ قاعده $\mathbf{BAC} - \mathbf{CAB}$ را با نوشتن هر دو طرف برحسب مؤلفه‌ها اثبات کنید.

مسئله ۶-۱ ثابت کنید

$$[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] + [\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A})] + [\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] = \mathbf{0}$$

تحت چه شرایطی داریم

$$\square \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$$

۴-۱-۱ بردارهای مکان، جابه‌جایی و فاصله

موقعیت یک نقطه در سه بعد را می‌توان با مؤلفه‌های دکارتی آن (x, y, z) مشخص کرد. برداری که از مبدأ مختصات به آن نقطه وصل می‌شود را بردار مکان می‌نامند (شکل ۱۳-۱)

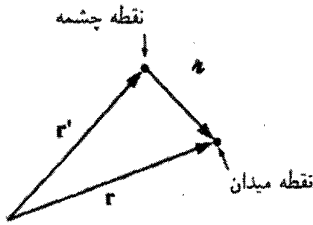
$$\mathbf{r} \equiv x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad (19-1)$$

و ما آن را در این کتاب با حرف \mathbf{r} نشان می‌دهیم. بزرگی بردار مکان فاصله آن نقطه تا مبدأ مختصات است.

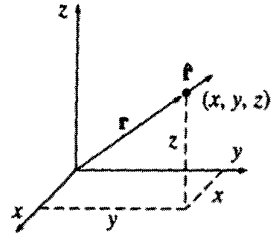
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (20-1)$$

و

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (21-1)$$



شکل ۱۴-۱



شکل ۱۳-۱

یک بردار یگانه است که در امتداد شعاعی به سمت بیرون ممتد است. بردار جابه‌جایی بینهایت کوچک از (x, y, z) به $(x + dx, y + dy, z + dz)$ برابر است با

$$dl = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z} \quad (22-1)$$

(این بردار را می‌توان $d\mathbf{r}$ ، یعنی همان چیزی که هست نامید، ولی به‌کار بردن یک حرف مخصوص برای جابه‌جایی بسیار کوچک مفید خواهد بود از این‌رو ما آن را dl می‌نامیم).

در اکثر مسائل الکتروستاتیک دو نقطه وجود دارد، به‌عنوان مثال یک نقطه به‌عنوان چشمه، r' ، که در آن بار الکتریکی قرار دارد و دیگری نقطه میدان، r ، که در آن باید میدان الکتریکی یا مغناطیسی را محاسبه کنیم (شکل ۱۴-۱). برای حل این مسئله ابتدا باید بردار فاصله از نقطه چشمه تا نقطه میدان را به‌دست آوریم و آن را در اینجا با نماد \mathbf{r} نمایش می‌دهیم.

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}' \quad (23-1)$$

اندازه این بردار برابر است با

$$r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (24-1)$$

و بردار یگانه آن در جهت r' به r به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (25-1)$$

در مختصات دکارتی داریم،

$$\pi = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z} \quad (۲۶-۱)$$

$$\pi = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (۲۷-۱)$$

$$\hat{\pi} = \frac{(x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z}}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \quad (۲۸-۱)$$

(از اینجا متوجه مزیت استفاده از نماد π می شوید.)

مسئله ۷-۱ بردار فاصله π از چشمه واقع در نقطه $(۲, ۸, ۷)$ تا نقطه میدان در $(۴, ۶, ۸)$ را پیدا کنید. اندازه بردار π را محاسبه کنید و بردار بیکه $\hat{\pi}$ آن را نشان دهید. □

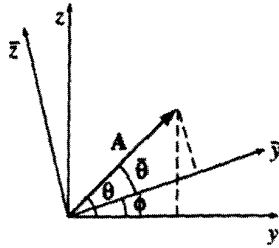
۵-۱-۱ چگونگی تبدیل بردارها

تعریف بردار به صورت "کمیتی دارای اندازه و جهت" روی هم رفته قانع کننده نیست: معنای دقیق "جهت" چیست؟^۱ این سؤال ممکن است خرده گیرانه به نظر آید. اما به زودی با نمونه‌هایی از مشتق مواجه می شویم که به نظر می رسد نوعی بردارند اما باید بیشتر از صحت این تصور اطمینان حاصل کنیم. ممکن است مایل باشید بردار را کمیتی دارای سه مؤلفه تعریف کنید که ترکیب کردن مناسب آنها توسط عمل جمع صورت می پذیرد. خوب این مثال را بررسی کنید: در سبزی از میوه N_x گلابی، N_y سیب و N_z موز وجود دارد. آیا $N = N_x\hat{x} + N_y\hat{y} + N_z\hat{z}$ یک بردار است؟ در اینجا هم سه مؤلفه وجود دارد و وقتی با سبب دیگری محتوی M_x گلابی، M_y سیب و M_z موز جمع کنیم $(N_x + M_x)$ گلابی، $(N_y + M_y)$ سیب و $(N_z + M_z)$ موز خواهیم داشت. می بینیم جمع کردن در اینجا شبیه جمع برداری است. اما می دانیم برداری در کار نیست زیرا واقعاً جهتی مطرح نیست. اشکال در کجاست؟

پاسخ آن است که با تغییر مختصات، برای N تبدیل مشخصی صورت نمی گیرد. بدیهی است که چارچوب مختصاتی را که برای تعیین مکان در فضا در نظر می گیریم کاملاً دلخواه است، اما برای تبدیل مؤلفه یک بردار از یک چارچوب به چارچوب دیگر قانون هندسی مشخصی وجود دارد. به عنوان مثال فرض کنید دستگاه $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ نسبت به دستگاه x, y, z در حالی که محور $\bar{x} = x$ آنها مشترک است، به اندازه زاویه θ چرخیده باشد. از شکل ۱۵-۱ داریم

$$A_y = A \cos \theta, \quad A_z = A \sin \theta$$

۱. این بخش را، بدون لطمه به پیوستگی مطالب، می توان حذف کرد.



شکل ۱۵-۱

در حالی که

$$\begin{aligned}\bar{A}_y &= A \cos \bar{\theta} = A \cos(\theta - \phi) = A(\cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi) \\ &= \cos \phi A_y + \sin \phi A_z \\ \bar{A}_z &= A \sin \bar{\theta} = A \sin(\theta - \phi) = A(\sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi) \\ &= -\sin \phi A_y + \cos \phi A_z\end{aligned}$$

عبارات بالا را می‌توان با نمایش ماتریسی زیر خلاصه کرد

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_y \\ \bar{A}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (۲۹-۱)$$

به صورت کلیتر، برای دوران حول یک محور دلخواه در سه بعد قانون تبدیل به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_x \\ \bar{A}_y \\ \bar{A}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (۳۰-۱)$$

یا به صورت فشرده‌تر زیر

$$\bar{A}_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} A_j \quad (۳۱-۱)$$

که اندیس ۱ برای x ، اندیس ۲ برای y ، اندیس ۳ برای z منظور می‌شود. اجزای ماتریس A را می‌توان با همان روش هندسی به کار رفته در دوران حول محور x تعیین کرد.

پرسش: آیا مؤلفه‌های N هم این‌گونه تبدیل می‌شوند؟ البته که نه — این مهم نیست که برای نمایش دادن مکان در فضا از چه دستگاه مختصاتی استفاده کنید؛ تعداد سیبهای درون یک سبد را هر گونه که بشمارند ثابت است. نمی‌توان با انتخاب مجموعه دستگاههای متفاوت، یک موز را به گلایی تبدیل کرد، گرچه می‌توان A_x را به \bar{A}_y تبدیل نمود. از نظر اصولی، هر بردار به مجموعه‌ای متشکل از سه مؤلفه اطلاق می‌شود که تبدیل آن با تغییر مختصات همانند تغییرات یک جابه‌جایی با تغییر مختصات است. مثل همیشه جابه‌جایی را الگویی جهت نشان دادن رفتار همه بردارها می‌پنداریم.

در ضمن یک تانسور (مرتبه دوم) کمیتی با ۹ مؤلفه $T_{xx}, T_{xy}, \dots, T_{zz}$ است که توسط دو عامل R تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{xx} = & R_{xx}(R_{xx}T_{xx} + R_{xy}T_{xy} + R_{xz}T_{xz}) \\ & + R_{xy}(R_{xx}T_{yx} + R_{xy}T_{yy} + R_{xz}T_{yz}) \\ & + R_{xz}(R_{xx}T_{zx} + R_{xy}T_{zy} + R_{xz}T_{zz}), \dots \end{aligned}$$

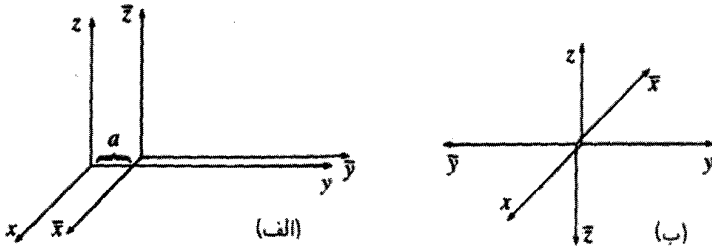
یا به صورت فشرده‌تر زیر:

$$\bar{T}_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 R_{ik}R_{jl}T_{kl} \quad (32-1)$$

در حالت کلی یک تانسور مرتبه n دارای n اندیس و 3^n مؤلفه است و توسط n عامل R تبدیل می‌شود. بر اساس این دیدگاه هر بردار یک تانسور مرتبه یک و هر اسکالر تانسوری از مرتبه صفر محسوب می‌شود.

مسئله ۸-۱ الف) ثابت کنید که ماتریس دوران دوبعدی (۲۹-۱) در ضرب نقطه‌ای صدق می‌کند (یعنی نشان دهید که $\bar{A}_y \bar{B}_y + \bar{A}_z \bar{B}_z = A_y B_y + A_z B_z$)
 ب) عناصر ماتریس دوران سه‌بعدی (۳۰-۱) چه شرایطی را باید برآورد کنند تا طول بردار A (برای هر A) ثابت بماند؟

مسئله ۹-۱ ماتریس تبدیل R را برای توصیف دورانی به اندازه 120° درجه حول محوری مرسوم از مبدأ مختصات به نقطه $(1, 1, 1)$ بیابید. دورانی را در نظر بگیرید که اگر در راستای محور به مبدأ بنگرید در جهت ساعتگرد باشد.



شکل ۱۶-۱

مسئله ۱۰-۱ (الف) مؤلفه‌های یک بردار تحت انتقال دستگاه مختصات چگونه تغییر می‌کنند؟
 $[\bar{x} = x, \bar{y} = y - a, \bar{z} = z]$ در شکل ۱۶-۱ (الف).

(ب) مؤلفه‌های یک بردار با وارونی دستگاه مختصات چگونه تغییر می‌کنند؟ $[\bar{x} = -x, \bar{y} = -y, \bar{z} = -z]$ در شکل ۱۶-۱ (ب).

(ج) حاصلضرب خارجی (۱۳-۱) دو بردار چگونه با وارونی تغییر می‌کند؟ (حاصلضرب خارجی دو بردار به دلیل این رفتار غیرعادی شبه بردار نامیده می‌شود). آیا حاصلضرب خارجی دو شبه بردار یک بردار است یا یک شبه بردار؟ دو کمیت شبه برداری در مکانیک کلاسیک نام ببرید.

(د) ضرب اسکالر (عددی) سه‌گانه سه بردار با وارونی دستگاه مختصات چگونه تغییر می‌کند؟
 (چنین چیزی را شبه اسکالر می‌نامند).

۲-۱ حساب دیفرانسیل

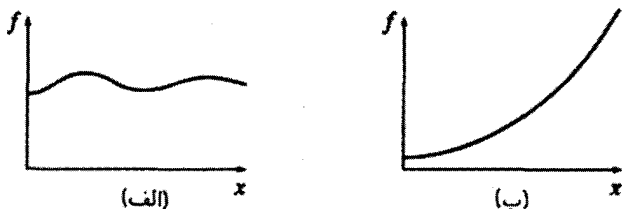
۱-۲-۱ مشتق‌های "معمولی"

پرسش: فرض کنید تابع یک متغیره $f(x)$ را داشته باشیم. مشتق df/dx برای ما چه کاری انجام می‌دهد؟

پاسخ: مشتق به ما می‌گوید که وقتی شناسه x به مقدار کوچک dx تغییر می‌کند تابع $f(x)$ با چه سرعتی تغییر می‌کند:

$$df = \left(\frac{df}{dx} \right) dx \quad (۳۳-۱)$$

به بیانی دیگر: اگر x را به مقداری dx تغییر دهیم f به اندازه df تغییر می‌کند؛ مشتق، ضریب



شکل ۱۷-۱

تناسب است. به عنوان مثال در شکل ۱۷-۱ (الف) تابع f به آهستگی با تغییرات x تغییر می‌کند و مشتق نیز متناظراً کوچک است. در شکل ۱۷-۱ (ب) می‌بینیم که f با x به طور سریع افزایش می‌یابد و با دور شدن از $x = 0$ مشتق هم بزرگ می‌شود.
تعبیر هندسی: مشتق df/dx شیب منحنی $f(x)$ (شیب منحنی f بر حسب x) است.

۲-۲-۱ گرادیان

تابعی از سه متغیر مانند دما $T(x, y, z)$ را در نظر بگیرید. (از یک گوشه اتاق شروع کنید و در آنجا دستگاهی از محورها را بنا کنید؛ آن‌گاه برای هر نقطه (x, y, z) از اتاق یک دمای T دارید). هدف ما در این بخش تعمیم “مشتق” توابعی نظیر T است که نه به یک متغیر بلکه به سه متغیر وابسته‌اند.

انتظار داریم که مشتق، سرعت تغییرات تابع f را در قبال یک جابه‌جایی کوچک معلوم کند. اما این دفعه مسئله کمی پیچیده‌تر است زیرا این تغییرات بستگی به جهت جابه‌جایی، دارد: با حرکت مستقیم به سمت بالا ممکن است تغییرات تا حدودی سریع باشد، اما مثلاً اگر افقی حرکت کنیم امکان دارد که با هیچ تغییری مواجه نشویم. در واقع تعدادی نامتناهی پاسخ برای این پرسش که $T(x, y, z)$ با چه سرعتی تغییر می‌کند وجود دارد.
خوشبختانه مسئله آن‌گونه هم که به نظر می‌رسد دشوار نیست. یک قضیه درباره مشتقات جزئی بیان می‌کند که

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) dz \quad (۳۴-۱)$$

این تابع چگونگی تغییرات T را، وقتی متغیرها را به مقدار بینهایت کوچک dx ، dy ، dz تغییر می‌دهیم نشان می‌دهد. توجه کنید که به داشتن بینهایت مشتق نیازی نیست و تنها سه مشتق، یعنی مشتقات جزئی در راستای هر یک از سه محور مختصات، کافی است.

معادله (۳۴-۱) را می‌توان به صورت یک ضرب اسکالر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} dT &= \left(\frac{\partial T}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}) \\ &= (\nabla T) \cdot (dl) \end{aligned} \quad (35-1)$$

عبارت

$$\nabla T \equiv \frac{\partial T}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{z} \quad (36-1)$$

را گرادیان T می‌نامند؛ گرادیان کمیتی برداری با سه مؤلفه است و در واقع مشتق تعمیم یافته‌ای است که به دنبالش بودیم. معادله (۳۵-۱) صورت سه‌بعدی (۳۳-۱) است.

تعبیر هندسی گرادیان: گرادیان هم مانند هر بردار دیگر دارای اندازه و جهت است. برای تعیین مفهوم هندسی آن، حاصلضرب عددی (۳۵-۱) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$dT = \nabla T \cdot dl = |\nabla T| |dl| \cos \theta \quad (37-1)$$

در این معادله θ زاویه بین ∇T و dl است. حال اگر اندازه $|dl|$ را ثابت در نظر گرفته و به اطراف در جهت‌های مختلف توجه کنیم (یعنی با تغییر θ) بدیهی است بیشینه تغییر T متناظر است با $\theta = 0$ (و یا $\cos \theta = 1$). یعنی برای یک فاصله ثابت $|dl|$ بیشینه مقدار dT وقتی حاصل می‌شود که در همان جهت ∇T حرکت کنیم. از این رو

گرادیان ∇T در امتدادی است که بیشترین افزایش تابع T را دارد.

افزون بر این،

اندازه $|\nabla T|$ شیب (آهنگ افزایش) را در این جهت بیشینه‌ای خواهد داد.

فرض کنید که بر روی تپه‌ای ایستاده‌اید تا با نگرستن به اطراف خود جهت تیزترین سربالایی را بیابید. این جهت همان جهت گرادیان است. حال شیب در این جهت را اندازه‌گیری کنید. این همان اندازه گرادیان است. (در این مثال تابع مورد بحث ارتفاع تپه و مختصه‌های وابسته به آن مکانها، یعنی طول و عرض هستند. این تابع، صرفاً دو متغیره است و نه سه متغیره، اما درک مفهوم گرادیان در دو بعد آسانتر است.) توجه کنید که از معادله (۳۷-۱) معلوم می‌شود که جهت بیشترین سربالایی برعکس جهت بیشترین سرازیری است و به‌ازای $\theta = 90^\circ$ هم، شیب صفر است

گرادیان بر خطوط تراز عمود است). ممکن است سطوحی را بشناسید که چنین خاصیتی نداشته باشند، اما این گونه سطوح همواره در خود، پیچ و تابهایی دارند و با توابع مشتق ناپذیر متناظرند. صفر شدن گرادیان به چه معنی است؟ اگر ∇T در نقطه (x, y, z) صفر شود آن گاه dT برای جابه جاییهای کوچک حول نقطه (x, y, z) صفر است. یعنی این یک نقطه مانای تابع $T(x, y, z)$ است. این نقطه می تواند یک بیشینه (قله)، یک کمینه (دره)، یک "نقطه زینی" یا "رکابی" باشد. این حالت شبیه به حالت یک تابع یک متغیره است که در آن صفر شدن مشتق یک نقطه بیشینه، کمینه و یا یک نقطه عطف را مشخص می کند. حتماً برای تعیین نقطه فرینه یک تابع سه متغیره، گرادیان آن را مساوی صفر قرار دهید.

مثال ۱-۳

گرادیان $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (اندازه بردار مکان) را به دست آورید.

حل:

$$\begin{aligned} \Delta r &= \frac{\partial r}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial r}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial r}{\partial z} \hat{z} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{x} + \frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{y} + \frac{1}{2} \frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{z} \\ &= \frac{x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

مثال بالا نشان می دهد که فاصله از مبدأ در جهت شعاعی سریعترین افزایش خود را دارد و آهنگ افزایش در این جهت ۱ است. درست همان طور که انتظار آن را داشتیم. ■

مسئله ۱-۱۱ گرادیان زیر را بیابید:

الف) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

ب) $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$

ج) $f(x, y, z) = e^x \sin(y) \ln(z)$

مسئله ۱-۱۲ ارتفاع تپه ای (برحسب فوت) از معادله زیر به دست می آید

$$h(x, y) = 10(2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 28y + 12)$$

در این معادله y (برحسب مایل)، فاصله شمالی و x فاصله شرقی است.

الف) قله تپه در کجا واقع است؟

(ب) ارتفاع تپه چقدر است؟

(ج) شیب نقطه‌ای به فاصله ۱ مایل از شمال و ۱ مایل از شرق (به‌ازای ۱ فوت برای هر مایل)

چقدر است؟ در آن نقطه تیزترین شیب در چه جهتی قرار دارد؟

• مسئله ۱-۱۳ اگر π یک بردار فاصله از نقطه ثابت (x', y', z') از نقطه (x, y, z) و π اندازه آن باشد نشان دهید که:

$$\nabla(\pi^2) = 2\pi \quad (\text{الف})$$

(ب) $\nabla(1/\pi) = -\hat{\pi}/\pi^2$ (که $\hat{\pi}$ بردار یکه‌ای در جهت π است).

(ج) فرمول عمومی برای $\nabla(\pi^n)$ چیست؟

! مسئله ۱-۱۴ f را تابعی دو متغیره از $(y$ و $z)$ بگیرید. نشان دهید که تبدیل

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \hat{y} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \hat{z}$$

مانند برداری تحت دوران است [معادله (۱-۲۹)].

(راهنمایی: توجه کنید که $\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{y}}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{y}}\right)$ و نیز فرمولی مشابه برای

$\partial f / \partial \bar{z}$ داریم. می‌دانیم که $\bar{y} = y \cos \theta + z \sin \theta$ و $\bar{z} = -y \sin \theta + z \cos \theta$. معادلات

y و z را برحسب توابعی از \bar{y} و \bar{z} حل کرده و مشتقات مورد نظر $\partial y / \partial \bar{y}$ ، $\partial z / \partial \bar{y}$ و غیره را

□

حساب کنید.)

۱-۲-۳ عملگر ∇

گرادیان به صورت برداری مانند ∇ است که در یک اسکالر مانند T "ضرب" شود:

$$\nabla T = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) T \quad (۳۸-۱)$$

(این بار بردارهای یکه را در سمت چپ نوشته‌ایم تا این ابهام پیش نیاید که از آنها مشتق گرفته

می‌شود، مثلاً $\partial \hat{x} / \partial x$ و غیره. این مشتقها به دلیل ثابت بودن بردارهای یکه صفر هستند.) عبارت

داخل پرانتز را "دل" می‌نامیم:

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (۳۹-۱)$$

بدیهی است که دل یک بردار معمولی نیست و بدون در نظر گرفتن تابعی که دل بر آن اثر می‌کند بی‌مفهوم است. افزون بر این دل واقعاً در T ضرب نمی‌شود بلکه عامل مشتق‌گیری از آن است. به عبارت دیگر دل یک عملگر برداری است که روی T عمل می‌کند (مشتق‌گیری) و نه برداری که در T ضرب شود.

با وجود این خاصیت، ∇ از هر نظر همانند یک بردار معمولی رفتار می‌کند؛ تقریباً هر کاری که با بردارهای دیگر می‌توان انجام داد با ∇ هم می‌توان. فقط باید به جای “ضرب کردن” بگوییم “عمل کردن روی”. در هر حال نمود ∇ به صورت یک بردار را باید جدی تلقی کرد: ∇ یک نوع نمادگذاری جالب است، به طوری که اگر به نظریهٔ الکترومغناطیسی که اولین بار توسط ماکسول و بدون استفاده از ∇ نوشته شد مراجعه کنید به اهمیت این بردار پی خواهید برد. حال می‌دانیم که یک بردار معمولی، مثلاً A ، دارای سه نوع ضرب است:

۱. ضرب در یک عدد اسکالر Aa :

۲. ضرب در یک بردار دیگر B به صورت نقطه‌ای: $A \cdot B$:

۳. ضرب در یک بردار دیگر به صورت برداری: $A \times B$.

همین‌طور برای بردار ∇ هم سه نوع ضرب وجود دارد:

۱. بر روی یک تابع اسکالر T : ∇T (گرادیان)؛

۲. بر روی یک تابع برداری v ، به صورت ضرب عددی: $\nabla \cdot v$ (دیورژانس)؛

۳. بر روی یک تابع برداری v ، به صورت ضرب برداری: $\nabla \times v$ (تاو).

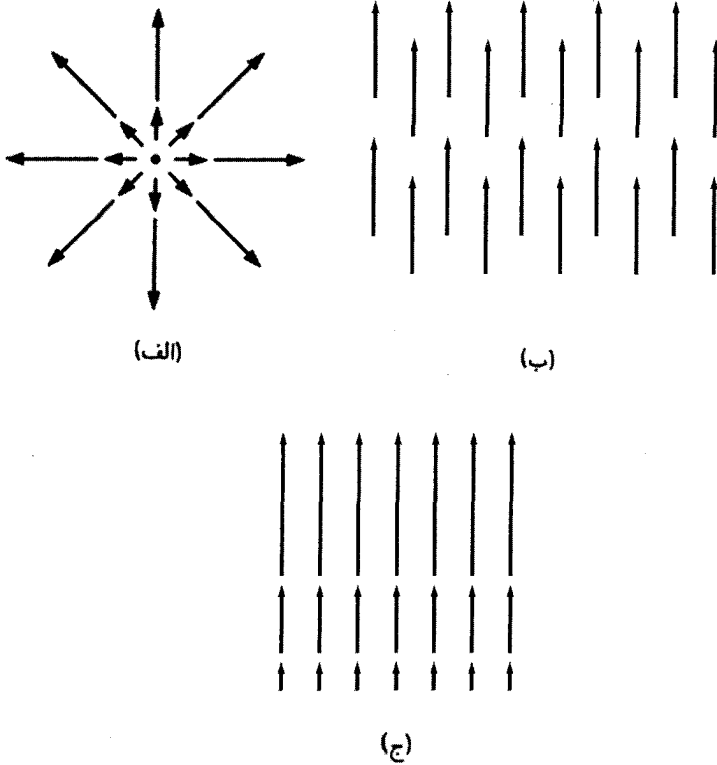
گرادیان را قبلاً بحث کردیم. در بخشهای آتی دو نوع مشتقهای برداری دیگر یعنی دیورژانس و تاو را بررسی می‌کنیم.

۱-۲-۴ دیورژانس

از روی تعریف ∇ ، دیورژانس را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \nabla \cdot v &= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}) \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (۴۰-۱)$$

می‌بینیم که دیورژانس یک تابع برداری v ، خود یک اسکالر $\nabla \cdot v$ است (نمی‌توان دیورژانس یک اسکالر را گرفت، چون بی‌معنی است).



شکل ۱۸-۱

تعبیر هندسی: نام دیورژانس انتخاب خوبی بوده است، زیرا $\nabla \cdot \mathbf{v}$ معیار پخش شدگی (واگرایی) از نقطه مورد نظر است. برای مثال تابع برداری شکل ۱۸-۱ الف دارای دیورژانس بزرگ (مثبت) است؛ (اگر پیکانها به سمت داخل بودند در آن صورت یک دیورژانس بزرگ منفی می داشتیم). تابع شکل ۱۸-۱ ب) دارای دیورژانس صفر است و تابع شکل ۱۸-۱ ج) دارای دیورژانس مثبت است. (توجه داشته باشید که \mathbf{v} در اینجا یک تابع است — به هر نقطه از فضا، بردار متفاوتی وابسته است. قاعدتاً در نمودارها فقط می توان پیکانهایی در مکانهای محدودی به عنوان نمونه رسم کرد). تصور کنید که در کنار برکه ای ایستاده اید. مقداری خاک اره یا برگ سوزنی کاج روی سطح آب بیاشید. اگر این ذرات به اطراف پراکنده شوند معلوم می شود که شما آنها را در نقطه ای با دیورژانس مثبت پاشیده اید. اگر در یک نقطه جمع شوند آنها را در نقطه ای با دیورژانس منفی پاشیده اید (تابع برداری \mathbf{v} در این مدل همان سرعت سطحی آب است). این یک مثال دوبعدی است، ولی به خواننده کمک می کند تا معنای دیورژانس را به خوبی درک کند. نقطه ای با دیورژانس مثبت به صورت چشمه یا شیر آب و نقطه ای دارای دیورژانس منفی همانند یک آبگذر یا چاهک است.

مثال ۴-۱

فرض کنید توابع شکل ۱۸-۱ به ترتیب $\mathbf{v}_c = z\hat{\mathbf{z}}$ و $\mathbf{v}_b = \hat{\mathbf{z}}$ ، $\mathbf{v}_a = \mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ هستند. دیورژانس آنها را حساب کنید.

حل:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_a = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3$$

همچنانکه انتظار داشتیم این تابع دارای دیورژانس مثبت است.

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_b = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(1) = 0 + 0 + 0 = 0$$

همانگونه که انتظار می‌رفت

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_c = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 0 + 0 + 1 = 1$$

مسئله ۱۵-۱ دیورژانس توابع برداری زیر را حساب کنید.

$$\mathbf{v}_a = x^2\hat{\mathbf{x}} + 3xz^2\hat{\mathbf{y}} - 2xz\hat{\mathbf{z}} \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{v}_b = xy\hat{\mathbf{x}} + 2yz\hat{\mathbf{y}} + 3zx\hat{\mathbf{z}} \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{v}_c = y^2\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\hat{\mathbf{y}} + 2yz\hat{\mathbf{z}} \quad (\text{ج})$$

• مسئله ۱۶-۱ تابع برداری زیر را رسم و دیورژانس آن را حساب کنید.

$$\mathbf{v} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

پاسخ حاصل شما را متعجب می‌کند ... آیا می‌توانید آن را توضیح دهید؟

! مسئله ۱۷-۱ نشان دهید که برای وضعیت دویعدی دیورژانس همانند یک عدد اسکالر تحت

دوران تبدیل می‌شود. راهنمایی: از معادله (۱-۲۹) برای تعیین \bar{v}_y و \bar{v}_z و نیز روش به‌کار رفته در

مسئله ۱۴-۱ برای تعیین مشتقها استفاده کنید. هدف شما آن است که نشان دهید

$$\square \quad \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

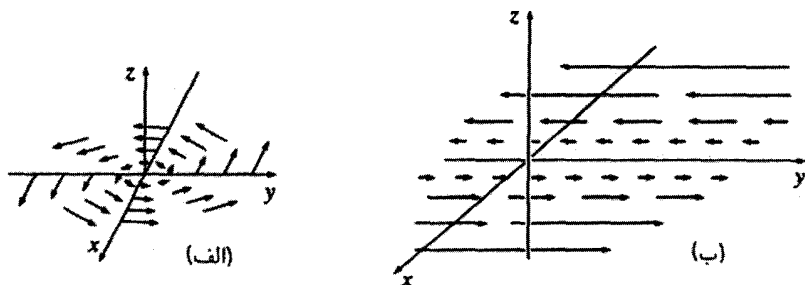
۱-۲-۵ تاو

از روی تعریف ∇ ، تاو را تبیین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (۴۱-۱)$$

توجه کنید که تاو هر تابع برداری \mathbf{v} ، همانند تمام حاصلضربهای برداری دیگر، یک بردار است. (نمی‌توان تاو یک کمیت اسکالر را تعریف کرد؛ زیرا بی‌معنی است.)

تعبیر هندسی: نام تاو هم انتخاب خوبی است، زیرا $\nabla \times \mathbf{v}$ تعیین‌کننده مقدار چرخش بردار \mathbf{v} حول نقطه مورد نظر است. از این رو سه تابع در شکل ۱۸-۱ هر سه تاو صفر دارند (می‌توانید خودتان امتحان کنید) در حالی که تابع در شکل ۱۹-۱ دارای تاو (ذاتی) واقعی در امتداد z است و این از روی قاعده دست راست هم معلوم می‌شود. دوباره تصور کنید که در کنار برکه‌ای ایستاده‌اید. یک چرخ دنده‌دار را بر سطح آب شناور کنید (این چرخ را می‌توان چوب پنبه‌ای در نظر گرفت که در آن چند خلال دندان به صورت شعاعی فرو کرده‌اید)؛ اگر چرخ شروع به دوران کند معلوم می‌شود در نقطه‌ای با تاو غیرصفر قرار دارد. نقطه‌ای با تاو بزرگ همانند یک گرداب است.



شکل ۱۹-۱

مثال ۵-۱

فرض کنید تابع مربوط به نمودار شکل ۱۹-۱ (الف) $\mathbf{v}_a = -y\hat{x} + x\hat{y}$ است و تابع مربوط به شکل ۱۹-۱ (ب) $\mathbf{v}_b = x\hat{y}$ است. تاو این دو تابع را به دست آورید.

حل:

$$\nabla \times \mathbf{v}_a = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\hat{z}$$

و

$$\nabla \times \mathbf{v}_b = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix} = \hat{z}$$

همان‌گونه که انتظار می‌رفت تاوها در امتداد z قرار دارند. (تصادفاً دیورژانس هر دو تابع نیز صفر است و این را از روی شکل می‌توان حدس زد. چیزی به سمت بیرون پخش نمی‌شود — فقط به دور خود می‌چرخد.)

مسئله ۱۸-۱ تاوهای توابع برداری مسئله ۱۵-۱ را محاسبه کنید.

مسئله ۱۹-۱ یک تابع برداری بسازید که در همه جا دارای دیورژانس و تاو صفر است. (بدیهی است که یک مقدار ثابت چنین نقشی را ایفا می‌کند، اما شما موردی کمی جالبتر از آن بیابید!) □

۶-۲-۱ قواعد حاصلضرب

محاسبه مشتقات معمولی را با داشتن چند قاعده کلی نظیر قاعده جمع می‌توان انجام داد

$$\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

قاعده برای ضرب در یک عدد ثابت:

$$\frac{d}{dx}(kf) = k \frac{df}{dx}$$

قاعده حاصلضرب

$$\frac{d}{dx}(fg) = f \frac{dg}{dx} + g \frac{df}{dx}$$

قاعده خارج قسمت:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \frac{df}{dx} - f \frac{dg}{dx}}{g^2}$$

قواعد مشابهی هم برای مشتقات برداری وجود دارد. از این رو

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g, \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\nabla \cdot \mathbf{B}),$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \times \mathbf{B})$$

و

$$\nabla(kf) = k\nabla f, \quad \nabla \cdot (k\mathbf{A}) = k(\nabla \cdot \mathbf{A}), \quad \nabla \times (k\mathbf{A}) = k(\nabla \times \mathbf{A})$$

و اینها را می‌توانید برای خودتان امتحان کنید. قاعده حاصلضرب خیلی ساده نیست. برای داشتن عددی اسکالر از نتیجه حاصلضرب دو تابع دو راه وجود دارد:

fg (حاصلضرب دو تابع اسکالر)

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (ضرب نقطه‌ای دو تابع برداری)

و دو راه هم برای داشتن بردار وجود دارد

$f\mathbf{A}$ (عدد ضربدر بردار)

$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (حاصلضرب برداری دو برداری)

به همین منوال شش قاعده حاصلضرب وجود دارد، دو قاعده برای گرادین:

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (۱)$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} \quad (۲)$$

دو قاعده هم برای دیورژانس

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f) \quad (۳)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (۴)$$

و بالاخره دو قاعده هم برای تاو

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f) \quad (۵)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (۶)$$

از این قواعد حاصلضرب به کرات استفاده خواهید کرد و به این دلیل برای سادگی دستیابی آنها را در صفحات بعد از نمایه نوشته‌ایم. اثبات اینها به سادگی از روی قاعده حاصلضرب مشتقهای معمولی به عمل می‌آید. به عنوان مثال

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (f\mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial x}(fA_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fA_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fA_z) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}A_x + f \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}A_y + f \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}A_z + f \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \\ &= (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + f(\nabla \cdot \mathbf{A}) \end{aligned}$$

همچنین می‌توان سه قاعده مربوط به تقسیم را فرمولبندی کرد

$$\nabla \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{A}}{g} \right) = \frac{g(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla g)}{g^2}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{A}}{g} \right) = \frac{g(\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla g)}{g^2}$$

با وجود این، چون اینها را می‌توان سریعاً از روی قواعد حاصلضرب متناظر پیدا کرد دیگر اینها را در صفحات بعد از نمایه نوشته‌ایم.

مسئله ۲۰-۱ قواعد ضرب (۱)، (۴) و (۵) را ثابت کنید.

مسئله ۲۱-۱ (الف) هر گاه A و B دو تابع برداری باشند معنی عبارت $(A \cdot \nabla)B$ چیست؟

(یعنی، مؤلفه‌های x, y و z آن برحسب مؤلفه‌های دکارتی A, B و ∇ کدام‌اند؟)

(ب) عبارت $\hat{r} \cdot (\nabla \cdot \hat{r})$ را که در آن \hat{r} برداریکه تعریف شده در معادله (۲۱-۱) است حساب کنید.

(ج) برای توابع مسئله ۱۵-۱ $(\nabla \cdot \mathbf{v}_a)$ را حساب کنید.

مسئله ۲۲-۱ (فقط برای آزارطلبان) قواعد حاصلضرب (۲) و (۶) را ثابت کنید. تعریف $(A \cdot \nabla)B$

را در مسئله ۲۱-۱ بیابید.

مسئله ۲۳-۱ سه قاعده خارج قسمت را به دست آورید.

مسئله ۲۴-۱ (الف) قاعده ضرب (۴) را با محاسبه هر جمله به صورت مجزا برای توابع زیر

امتحان کنید

$$A = x \hat{x} + 2y \hat{y} + 3z \hat{z}; \quad B = 3y \hat{x} - 2x \hat{y}$$

(ب) همین کار را برای حاصلضرب (۲) انجام دهید.

(ج) برای قاعده (۶) هم انجام دهید.

□

۷-۲-۱ مشتق‌های ثانی

گرادیان، دیورژانس و تاورنهای مشتق‌های مرتبه اول هستند که با استفاده از ∇ به دست می‌آیند؛ با

دوبار اعمال ∇ می‌توان پنج نوع مشتق مرتبه دوم داشت. گرادیان ∇T یک بردار است، بنابراین

می‌توان دیورژانس و تاورن آن را به دست آورد:

۱. دیورژانس گرادیان: $\nabla \cdot (\nabla T)$

۲. تاور گرادیان: $\nabla \times (\nabla T)$

دیورژانس $\nabla \cdot \mathbf{v}$ یک اسکالر است — تنها می‌توانیم گرادیان آن را حساب کنیم:

۳. گرادیان دیورژانس: $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$

تاو $\nabla \times \mathbf{v}$ یک بردار است، بنابراین می‌توان دیورژانس و تاور آن را حساب کرد:

۴. دیورژانس تاو: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$

۵. تاور تاو: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})$

اینها تنها امکانات را مشخص می‌کنند و در واقع، الزاماً همه آنها چیز تازه‌ای را به دست

نمی‌دهند. بیایید اینها را بررسی کنیم:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla T) &= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\end{aligned}\quad (۴۲-۱)$$

این معادله را که به صورت ساده $\nabla^2 T$ نشان می‌دهیم لاپلاسی T نامیده می‌شود؛ بعداً به طور مشروح درباره آن صحبت می‌کنیم. توجه کنید که لاپلاسی یک کمیت اسکالر T یک اسکالر است. به‌دردت از لاپلاسی یک بردار، $\nabla^2 \mathbf{v}$ ، صحبت می‌شود. این عبارت کمیتی برداری است که مؤلفه x آن لاپلاسی v_x است و به همین ترتیب بقیه مؤلفه‌ها:

$$\nabla^2 \mathbf{v} \equiv (\nabla^2 v_x) \hat{x} + (\nabla^2 v_y) \hat{y} + (\nabla^2 v_z) \hat{z} \quad (۴۳-۱)$$

این هم چیزی بیش از گسترش مناسب مفهوم ∇^2 نیست.
۲. تاوگرادیان همواره صفر است.

$$\nabla \times (\nabla T) = 0 \quad (۴۴-۱)$$

این واقعیت مهمی است و آن را به‌کرات به‌کار خواهیم برد؛ اثبات آن با توجه به تعریف ∇ یعنی با استفاده از معادله (۳۹-۱) ساده است. هشدار: ممکن است فکر کنید صحت معادله (۴۴-۱) "بدیهی" است — آیا این صرفاً $T(\nabla \times \nabla)$ نیست، و آیا حاصلضرب برداری هر بردار (در اینجا ∇) با خودش همواره صفر نیست؟ این استدلال خود معقول است اما نتیجه‌گیری نهایی نمی‌تواند باشد، زیرا ∇ یک عملگر است و به‌صورت معمولی ضرب در چیزی نمی‌شود. اثبات (۴۴-۱) در واقع به تساوی مشتق‌های زیر مربوط می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (۴۵-۱)$$

اگر به صحت این گفته تردید دارید معادله زیر را امتحان کنید.

$$(\nabla T) \times (\nabla S)$$

۱. در مختصات منحنی‌الخط بردارهای یکه که خودشان نیز به مکان وابسته‌اند، باید مشتق‌پذیر باشند (ر. ک. بخش ۱-۴-۱).

ایا این همواره صفر است؟ (البته، اگر به جای ∇ یک بردار معمولی قرار دهید، صفر خواهد بود).
 ۳. به دلایلی از مشتق به صورت $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$ در کاربردهای فیزیکی به ندرت استفاده می‌شود،
 و به آن نام خاصی داده نشده است — این صرفاً گرادیان دیورژانس است. توجه کنید که
 $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$ همانند لاپلاسی یک بردار نیست:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{v} \neq \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

۴. دیورژانس تاو، همانند تاو گرادیان، همواره صفر است:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad (46-1)$$

این را می‌توانید برای خودتان اثبات کنید. (باز هم، اثبات ساده‌ای با استفاده از اتحاد برداری
 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ وجود دارد.)
 ۵. با استفاده از تعریف ∇ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v} \quad (47-1)$$

بنابراین، تاو یک تاو چیز تازه‌ای نشان نمی‌دهد؛ جمله اول، عبارت شماره (۳) است و دومی هم
 لاپلاسی (یک بردار) است. [در واقع، (۴۷-۱) را عموماً برای تعریف لاپلاسی یک بردار به‌کار می‌برند
 و معادله (۴۳-۱) هم همین را در مختصات دکارتی مشخص می‌کند].

بنابراین، در واقع، دو نوع مشتق مرتبه دوم وجود دارد: لاپلاسی (که اهمیت بنیادی دارد) و
 گرادیان دیورژانس (که کمتر از آن استفاده می‌کنیم). می‌توان به همین ترتیب از مشتق سوم صحبت
 کرد، اما مشتقهای مرتبه دوم برای تمام کاربردهای فیزیکی کافی هستند.

حرف آخر درباره حساب دیفرانسیل برداری این است: تمام اینها از عملگر ∇ و جدی گرفتن
 رفتار برداری آن، حاصل می‌شوند. حتی اگر فقط تعریف ∇ را به یاد داشته باشید از نظر اصولی
 قادر به بازسازی مجدد تمام نتایج خواهید بود.

مسئله ۱-۲۵ لاپلاسی توابع زیر را حساب کنید:

$$T_a = x^2 + 2xy + 3z + 4 \quad (\text{الف})$$

$$T_b = \sin x \sin y \sin z \quad (\text{ب})$$

$$T_c = e^{-4x} \sin 4y \cos 3z \quad (\text{ج})$$

$$\mathbf{v} = x^2 \hat{\mathbf{x}} + 3xz^2 \hat{\mathbf{y}} - 2xz \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{د})$$

مسئله ۱-۲۶ ثابت کنید که دیورژانس تاو همواره صفر است. آن را برای تابع v_a در مسئله ۱-۱۵ امتحان کنید.

مسئله ۱-۲۷ ثابت کنید که تاو گرادیان همواره صفر است. آن را برای تابع (ب) در مسئله ۱-۱۱ امتحان کنید. □

۱-۳ حساب انتگرال

۱-۳-۱ انتگرالهای خطی، سطحی و حجمی

در الکتروستاتیک با انواع متفاوتی از انتگرالها برخورد می‌کنیم که مهمترین آنها انتگرالهای خطی (یا مسیر)، انتگرالهای سطحی (یا شار) و انتگرالهای حجمی است.

(الف) انتگرالهای خطی: انتگرال خطی عبارتی است به شکل

$$\int_{aP}^b v \cdot dl \quad (48-1)$$

که در آن v تابع برداری، dl جابه‌جایی بسیار کوچک بردار [معادله (۱-۲۲)] و انتگرال بر روی مسیری معلوم است به نام P که از نقطه a شروع شده و به نقطه b می‌رسد (شکل ۱-۲۰). اگر مسیر مورد نظر یک حلقه بسته باشد (یعنی $a = b$) دایره‌ای را به صورت زیر بر روی علامت انتگرال قرار می‌دهیم:

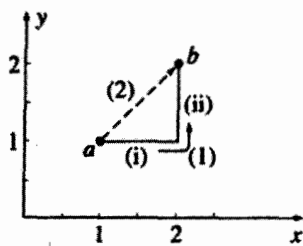
$$\oint v \cdot dl \quad (49-1)$$

در هر نقطه از مسیر ضرب نقطه‌ای v (محاسبه شده در همان نقطه) با جابه‌جایی dl را نسبت به نقطه بعدی در همان مسیر در نظر می‌گیریم. برای یک فیزیکدان بهترین مثال انتگرال خطی، کار انجام شده توسط نیروی F است: $W = \int F \cdot dl$.

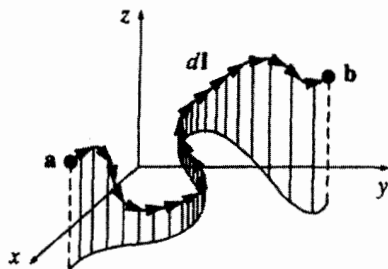
معمولاً، مقدار انتگرال خطی به مسیر انتخابی انتگرال‌گیری بین دو نقطه a و b بستگی دارد. اما گروه خاص مهمی از توابع برداری وجود دارند که انتگرال خطی را مستقل از مسیر می‌سازند و تنها به وسیله نقاط پایانی مسیر محاسبه می‌شوند. گام بعدی در این فصل تعیین این نوع خاص از توابع است (نیروی که دارای این خاصیت باشد پایستار نامیده می‌شود).

مثال ۱-۶

انتگرال خطی تابع $v = y^2 \hat{x} + 2x(y+1)\hat{y}$ را از نقطه $a = (1, 1, 0)$ به نقطه $b = (2, 2, 0)$ در مسیر (۱) و (۲) در شکل ۱-۲۱ محاسبه کنید. انتگرال بسته $\oint v \cdot dl$ را برای حلقه‌ای که از



شکل ۲۱-۱



شکل ۲۰-۱

نقطه a در مسیر (۱) به b رفته و از مسیر (۲) به نقطه a برمی‌گردد محاسبه کنید.

حل: مثل همیشه $dl = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$. مسیر (۱) شامل دو قسمت است. در مسیر افقی $dy = dz = 0$. بنابراین

$$dl = dx \hat{x}, y = 1, \quad \mathbf{v} \cdot dl = y^x dx = dx \Rightarrow \int \mathbf{v} \cdot dl = \int_1^2 dx = 1 \quad (i)$$

در مسیر عمودی $dx = dz = 0$. بنابراین

$$dl = dy \hat{y}, \quad x = 2, \quad \mathbf{v} \cdot dl = 2x(y+1)dy = 4(y+1)dy \quad (ii)$$

$$\int \mathbf{v} \cdot dl = 4 \int_1^2 (y+1)dy = 10$$

در مسیر (۱) داریم

$$\int_a^b \mathbf{v} \cdot dl = 1 + 10 = 11$$

در ضمن در مسیر (۲) $dx = dy$, $x = y$ و $dz = 0$.

بنابراین

$$dl = dx \hat{x} + dx \hat{y}, \quad \mathbf{v} \cdot dl = x^x dx + 2x(x+1)dx = (3x^x + 2x)dx$$

$$\int_a^b \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 (3x^2 + 2x) dx = (x^3 + x^2) \Big|_1^2 = 10$$

هدف در اینجا به دست آوردن همه مقادیر برحسب یک متغیر است. همین راه حل را به جای x می‌توان برحسب y نیز انجام داد.

برای حلقه‌ای که از مسیر (۱) شروع شده و از مسیر (۲) به نقطه اول برمی‌گردد خواهیم داشت

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 11 - 10 = 1$$

(ب) انتگرالهای سطحی: انتگرال سطحی طبق تعریف برابر است با

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} \quad (50-1)$$

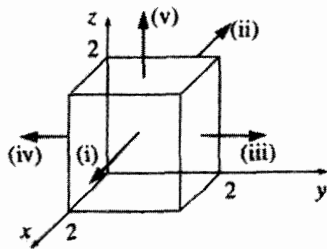
که در آن \mathbf{v} مجدداً تابع برداری و $d\mathbf{a}$ جزء بینهایت کوچکی از مساحت کل با جهتی عمود بر سطح است (شکل ۱-۲۲). واضح است که همیشه دو جهت عمود بر یک سطح وجود دارد. در نتیجه علامت واقعی انتگرال سطحی همیشه مبهم است. اگر یک سطح بسته داشته باشیم (مثل یک بالن) مانند قبل یک دایره به علامت انتگرال اضافه می‌کنیم

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}$$

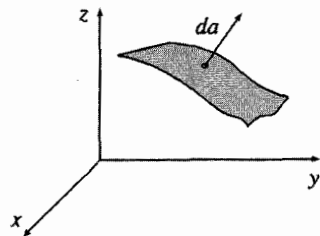
در این حالت جهت رو به بیرون را مثبت در نظر می‌گیرند اما برای یک سطح باز تعیین جهت مثبت اختیاری است. اگر \mathbf{v} جریان یک شاره (جرم بر واحد سطح بر واحد زمان) باشد بنابراین $\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}$ برابر خواهد شد با جرم کل بر واحد زمان که از سطح می‌گذرد — از این پس آن را ”شار” می‌نامیم. معمولاً مقدار انتگرال سطحی بستگی به سطح انتخاب شده دارد. اما نوع خاصی از توابع برداری وجود دارند که انتگرالشان مستقل از سطح است و فقط به وسیله خط مرزی تعیین می‌شود. به زودی این نوع خاص از توابع را نیز تعریف خواهیم کرد.

مثال ۷-۱

انتگرال سطحی تابع $\mathbf{v} = 2xz\hat{x} + (x+2)\hat{y} + y(z^2-3)\hat{z}$ را حول ۵ سطح مکعب (بجز سطح زیرین) در شکل ۱-۲۳ محاسبه کنید. جهت نشان داده شده در شکل به وسیله پیکانها،



شکل ۲۳-۱



شکل ۲۴-۱

جهت مثبت در نظر گرفته شود.

حل:

بنابراین $x = 2$, $da = dy dz \hat{x}$, $\mathbf{v} \cdot da = 2xz dy dz = 4z dy dz$ (i)

$$\int \mathbf{v} \cdot da = 4 \int_0^2 dy \int_0^2 z dz = 16$$

بنابراین $x = 0$, $da = -dy dz \hat{x}$, $\mathbf{v} \cdot da = -2xz dy dz = 0$ (ii)

$$\int \mathbf{v} \cdot da = 0$$

بنابراین $y = 2$, $da = dx dz \hat{y}$, $\mathbf{v} \cdot da = (x + 2) dx dz$ (iii)

$$\int \mathbf{v} \cdot da = \int_0^2 (x + 2) dx \int_0^2 dz = 12$$

بنابراین $y = 0$, $da = -dx dz \hat{y}$, $\mathbf{v} \cdot da = -(x + 2) dx dz$ (iv)

$$\int \mathbf{v} \cdot da = - \int_0^2 (x + 2) dx \int_0^2 dz = -12$$

بنابراین $z = 2$, $da = dx dy \hat{z}$, $\mathbf{v} \cdot da = y(z^2 - 3) dx dy = y dx dy$ (v)

$$\int \mathbf{v} \cdot da = \int_0^2 dx \int_0^2 y dy = 4$$

در نتیجه بدیهی است که شار کل برابر خواهد شد با

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = 16 + 0 + 12 - 12 + 4 = 20$$

(ج) انتگرالهای حجمی: انتگرال حجمی طبق تعریف برابر است با

$$\int_V T d\tau \quad (51-1)$$

که T تابع اسکالر و $d\tau$ جزء بسیار کوچک حجم است. در مختصات دکارتی داریم

$$d\tau = dx dy dz \quad (52-1)$$

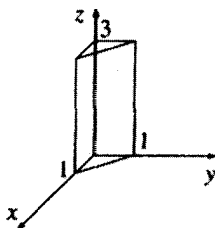
به عنوان مثال، اگر T چگالی یک ماده باشد (که ممکن است این چگالی از نقطه‌ای به نقطه دیگر متغیر باشد)، در آن صورت با محاسبه انتگرال حجمی، جرم کل ماده به دست می‌آید. گاهی اوقات در مسائل با توابع برداری انتگرالهای حجمی روبه‌رو می‌شویم

$$\int \mathbf{v} d\tau = \int (v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}) d\tau = \hat{x} \int v_x d\tau + \hat{y} \int v_y d\tau + \hat{z} \int v_z d\tau \quad (53-1)$$

چون بردارهای یکه ثابت هستند از انتگرال خارج می‌شوند.

مثال ۸-۱

انتگرال حجمی $T = xyz^2$ را روی منشور شکل ۲۴-۱ حساب کنید.



شکل ۲۴-۱

حل: محاسبه سه انتگرال را به هر ترتیب دلخواه می‌توان انجام داد. ابتدا از x شروع می‌کنیم. x از 0 تا $(1-y)$ تغییر می‌کند آن‌گاه y از 0 تا 1 و در نهایت z از 0 تا 3 تغییر می‌کند.

$$\int T \, d\tau = \int_0^3 z^2 \left\{ \int_0^1 y \left[\int_0^{1-y} x \, dx \right] dy \right\} dz = \\ \frac{1}{2} \int_0^3 z^2 \, dz \int_0^1 (1-y)^2 y \, dy = \frac{1}{2} (9) \left(\frac{1}{12} \right) = \frac{3}{8}$$

مسئله ۲۸-۱ انتگرال خطی تابع $v = x^2 \hat{x} + 2yz \hat{y} + y^2 \hat{z}$ را از مبدأ تا نقطه $(1, 1, 1)$ از سه مسیر مختلف زیر محاسبه کنید.

$$(الف) \quad (0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 1)$$

$$(ب) \quad (0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1)$$

(ج) خط مستقیم از مبدأ به نقطه $(1, 1, 1)$.

(د) انتگرال خطی روی حلقه بسته‌ای که از مسیر (الف) شروع و از مسیر (ب) به نقطه اول

برمی‌گردد، چیست؟

مسئله ۲۹-۱ انتگرال سطحی تابع مثال ۷-۱ را بر روی سطح زیرین جعبه حساب کنید. جهت رو به بالا را مثبت فرض کنید. آیا انتگرال سطحی برای این تابع فقط به خط مرزی بستگی دارد؟ شار کل گذرنده از یک جعبه (با در نظر گرفتن سطح زیرین آن) چقدر است؟ (توجه: برای یک سطح بسته جهت مثبت رو به خارج است، از این رو برای سطح زیرین جعبه جهت مثبت رو به پایین است.)

مسئله ۳۰-۱ انتگرال حجمی تابع $T = z^2$ را بر روی یک هرم با کنجهای $(0, 0, 0)$ ، $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ و $(0, 0, 1)$ به دست آورید. □

۲-۳-۱ قضیه بنیادی حسابان

فرض کنید $f(x)$ تابعی یک متغیره است. بنا به قضیه بنیادی حسابان داریم

$$\int_a^b \left(\frac{df}{dx} \right) dx = f(b) - f(a) \quad (54-1)$$

این را به صورت آشنای زیر هم می توان نوشت

$$\int_a^b F(x)dx = f(b) - f(a)$$

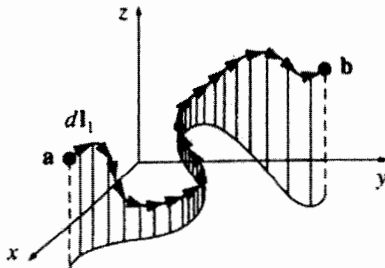
که در آن $df/dx = F(x)$ است. قضیه بنیادی حسابان می گوید که چگونه از $F(x)$ انتگرال بگیریم: شما باید تابعی بیابید که مشتق آن برابر F باشد.

تعبیر هندسی: از معادله (۳۳-۱) داریم، $df = (df/dx)dx$ که تغییر بینهایت کوچک f است اگر از (x) به $(x + dx)$ بروید. قضیه بنیادی (۵۴-۱) می گوید که هر گاه فاصله a تا b شکل ۲۵-۱ را به قطعات بسیار کوچک dx تقسیم کنید و df های ناشی از هر dx را با هم جمع برنید، نتیجه نهایی دقیقاً برابر با تغییرات کلی حاصل در f یعنی $f(b) - f(a)$ بین نقاط a و b است. به عبارت دیگر برای یافتن تغییرات یک تابع دو روش وجود دارد: یا تفاضل تابع را به ازای مقادیر دو نقطه داده شده مشخص می کنیم، یا با روش گام به گام، هر قسمت کوچک را در مسیر داده شده با هم جمع می کنیم: در نهایت هر دو روش به یک نتیجه منجر می شود.

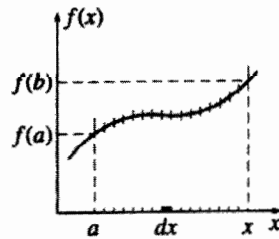
به روش قضیه بنیادی توجه کنید: انتگرال یک مشتق برداری بر روی یک بازه به مقادیر تابع در دو نقطه پایانی (یا هر دو مرز) بستگی دارد. در حسابان برداری سه نوع مشتق گیری وجود دارد. گرادینان، دیورژانس و تاو. هر کدام از این سه، "قضیه بنیادی" مخصوص به خود را دارند. در اینجا درباره اثبات آنها بحثی نمی کنیم، اما سعی می کنیم مفهوم آنها را روشن کنیم (اثبات آنها در پیوست الف آمده است).

۳-۳-۱ قضیه بنیادی گرادینان

تابع نرده ای (اسکالر) و سه متغیره $T(x, y, z)$ را در نظر می گیریم. از نقطه ای مانند a شروع می کنیم و به اندازه فاصله کوچک $d1_1$ جابه جا می شویم (شکل ۲۶-۱). بنابه معادله (۳۷-۱)



شکل ۲۶-۱



شکل ۲۵-۱

تابع T به مقدار

$$dT = (\nabla T) \cdot dl$$

تغییر می‌کند. حال کمی فراتر رفته و به مقدار کوچک dl تغییر مکان می‌کنیم. تغییرات تابع T ناشی از این جابه‌جایی، عبارت است از $(\nabla T) \cdot dl$. به همین ترتیب با جابه‌جاییهای کوچک می‌توان به نقطه $\mathbf{b} = (bx, by, bz)$ رسید. در هر نقطه گرادیان T را حساب کرده و سپس آن را در جابه‌جایی dl ضرب (ضرب نقطه‌ای) می‌کنیم و بدین ترتیب تغییرات T را به دست می‌آوریم. بدون تردید تغییرات کلی T در رفتن از \mathbf{a} به \mathbf{b} در مسیر انتخاب شده را می‌توان با معادله زیر بیان کرد

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla T) \cdot dl = T(\mathbf{b}) - T(\mathbf{a}) \quad (55-1)$$

این معادله همان قضیه بنیادی گرادیان است که مانند قضیه بنیادی معمولی می‌گوید انتگرال (در اینجا "خطی" یا "مسیری" در طول منحنی) یک مشتق (در این مورد "گرادیان") توسط مقادیر تابع در نقاط مرزی \mathbf{a} و \mathbf{b} داده می‌شود.

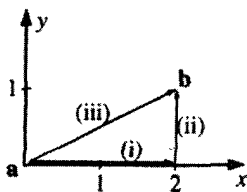
تعبیر هندسی: فرض کنید می‌خواهید ارتفاع برج ایفل را اندازه‌گیری کنید. برای این کار می‌توانید از پله‌ها بالا رفته و با استفاده از یک خط‌کش طول هر پله را محاسبه کنید و با جمع کردن آنها ارتفاع برج را به دست آورید. [این کار همان طرف چپ معادله (55-1) است]، یا می‌توانید با قرار دادن دو فرازیاب در پایین و نوک برج و تفریق دو مقدار، ارتفاع برج را به دست آورید (طرف راست معادله). جواب به دست آمده از هر دو راه باید یکی باشند (طبق قضیه بنیادی حسابان). ضمناً همان‌طور که در مثال ۶-۱ دیدیم انتگرالهای خطی معمولاً به مسیر انتخابی بین \mathbf{a} و \mathbf{b} بستگی دارند. اما طرف راست معادله (55-1) هیچ ارتباطی به مسیر ندارد بجز نقاط پایانی مسیر. ظاهراً گرادیانها دارای این خاصیت هستند که انتگرالهای خطی آنها مستقل از مسیر انتگرال‌گیری است.

نتیجه ۱: $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla T) \cdot dl$ از مسیر انتخابی بین \mathbf{a} و \mathbf{b} مستقل است.

نتیجه ۲: $\oint (\nabla T) \cdot dl = 0$ چون نقاط ابتدا و انتها یکی هستند $T(\mathbf{b}) - T(\mathbf{a}) = 0$.

مثال ۹-۱

تابع $T = xy^2$ را در نظر بگیرید. \mathbf{a} را مبدأ $(0, 0, 0)$ و \mathbf{b} را نقطه $(2, 1, 0)$ بگیرید و قضیه بنیادی گرادیان را امتحان کنید.



شکل ۲۷-۱

حل: گرچه انتگرال مستقل از مسیر است، برای محاسبه انتگرال باید مسیر مشخصی را در نظر بگیریم. این مسیر را محور x انتخاب می‌کنیم (مرحله i) و آن‌گاه به طرف بالا می‌رویم (مرحله ii) (شکل ۲۷-۱). چون همیشه $dl = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$ ؛ در این مورد $\nabla T = y^2 \hat{x} + 2xy \hat{y}$.
 (i) $\nabla T \cdot dl = y^2 dx = 0$ ؛ بنابراین $dy = 0$ ؛

$$\int_i \nabla T \cdot dl = 0$$

(ii) در نتیجه $x = 2$ ؛ $dl = dy \hat{y}$ ، $\nabla T \cdot dl = 2xy dy = 4y dy$

$$\int_{ii} \nabla T \cdot dl = \int_0^1 4y dy = 2y^2 \Big|_0^1 = 2$$

ظاهراً انتگرال خطی کل برابر ۲ است. آیا این با قضیه بنیادی سازگار است؟ بله، زیرا $T(b) - T(a) = 2 - 0 = 2$

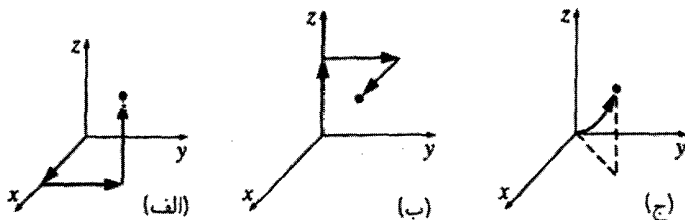
حال برای آنکه متقاعد شوید جواب مستقل از مسیر است، بیایید همین انتگرال را از طریق مسیر iii (یعنی خط مستقیم از a تا b) حساب کنیم:

(iii) بنابراین $y = \frac{1}{2}x$ ، $dy = \frac{1}{2}dx$ ، $\nabla T \cdot dl = y^2 dx + 2xy dy = \frac{1}{4}x^2 dx$

$$\int_{iii} \nabla T \cdot dl = \int_0^2 \frac{1}{4}x^2 dx = \frac{1}{4}x^3 \Big|_0^2 = 2$$

مسئله ۳۱-۱ قضیه بنیادی گرادیان را با استفاده از تابع $T = x^2 + 4xy + 2yz^2$ از نقاط $a = (0, 0, 0)$ و $b = (1, 1, 1)$ برای سه مسیر نشان داده شده در شکل ۲۸-۱ امتحان کنید:

- (الف) $(0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 1)$
- (ب) $(0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1)$
- (ج) مسیر سهمی $x = y$ ؛ $z = x^2$.



شکل ۲۸-۱

۴-۳-۱ قضیه بنیادی دیورژانس

قضیه بنیادی دیورژانس می‌گوید که

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\tau = \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} \quad (۵۶-۱)$$

این قضیه به دلیل اهمیت زیاد، حداقل سه نام مخصوص دارد: قضیه گاوس، قضیه گرین، یا، ساده‌تر قضیه دیورژانس. همانند سایر "فضایای بنیادی" چنین بیان می‌شود که انتگرال یک مشتق (در این مورد دیورژانس) روی یک منطقه (در اینجا روی حجم) برابر است با مقدار تابع در آن مرز (در این مورد، سطحی که کرانه حجم است). توجه داشته باشید که جمله مرزی خود یک انتگرال است (انتگرال سطحی) و این کاملاً منطقی است، زیرا مرز یک خط فقط دو نقطه انتهایی آن است ولی مرز یک حجم یک سطح (بسته) است.

تعبیر هندسی: اگر \mathbf{v} نشانگر جریان یک شارۀ تراکم‌ناپذیر باشد آن‌گاه شار \mathbf{v} [سمت راست معادله (۵۶-۱)] کل شارۀ گذرنده از سطح در واحد زمان است. دیورژانس، "پاشیدگی به بیرون" بردارها را از یک نقطه نشان می‌دهد؛ نقطه‌ای با دیورژانس زیاد همانند "شیر آبی" است که مایع از آن به بیرون تراوش می‌کند. اگر تعداد زیادی از این شیرها در منطقه‌ای پر از شارۀ تراکم‌ناپذیر داشته باشیم مقادیر یکسان مایع از مرزهای منطقه بیرون رانده می‌شوند. در واقع، برای پی بردن به مقدار مایع دو راه وجود دارد: (الف) می‌توان تمام شیرهای آب را شمرد و مقدار آب بیرون ریخته هر یک را یادداشت کرد یا (ب) می‌توان به اطراف مرز رفته مقدار جریان را در هر نقطه حساب و همه آنها را با هم جمع کرد. از هر دو روش به یک جواب می‌رسیم:

$$\int (\text{جریانی که از سطح خارج می‌شود}) = \int (\text{تمام شیرهای موجود در حجم})$$

این در نهایت، مفهوم چیزی است که قضیه دیورژانس بیان می‌کند.

مثال ۱-۱۰

قضیه دیورژانس را با استفاده از یک مکعب یکه واقع در مبدأ (شکل ۱-۲۹) و با استفاده از تابع زیر امتحان کنید.

$$\mathbf{v} = y^2 \hat{x} + (2xy + z^2) \hat{y} + (2yz) \hat{z}$$

حل: در این مورد داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 2(x + y)$$

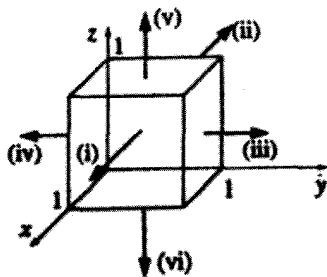
و

$$\int_V 2(x + y) d\tau = 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y) dx dy dz$$

$$\int_0^1 (x + y) dx = \frac{1}{2} + y, \quad \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y\right) dy = 1, \quad \int_0^1 1 dz = 1$$

از این رو

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\tau = 2$$



شکل ۱-۲۹

برای محاسبه انتگرال روی سطح باید شش وجه مکعب را جدا جدا در نظر بگیریم:

$$\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \int_0^1 \int_0^1 y^2 dy dz = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = -\int_0^1 \int_0^1 y^2 dy dz = -\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \int_0^1 \int_0^1 (2x + z^2) dx dz = \frac{4}{3} \quad (3)$$

$$\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = -\int_0^1 \int_0^1 z^2 dx dz = -\frac{1}{3} \quad (4)$$

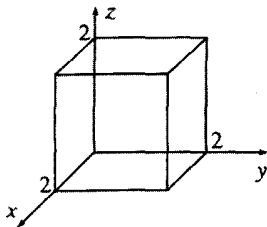
$$\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \int_0^1 \int_0^1 2y dx dy = 1 \quad (5)$$

$$\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = -\int_0^1 \int_0^1 0 dx dy = 0 \quad (6)$$

و شارکل همان‌گونه که انتظار می‌رود برابر است با

$$\oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + 1 + 0 = 2$$

مسئله ۳۲-۱ قضیه دیورژانس را برای تابع $\mathbf{v} = (xy)\hat{x} + (2yz)\hat{y} + (3zx)\hat{z}$ بیازماید.
حجم را مطابق شکل ۳۰-۱ مکعبی به ضلع ۲ را در نظر بگیرید.



شکل ۳۰-۱

۵-۳-۱ قضیه بنیادی تاو

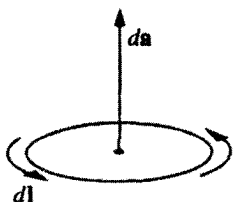
قضیه بنیادی تاو مشهور به قضیه استوکس چنین است

$$\boxed{\int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_P \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}} \quad (57-1)$$

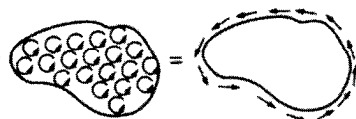
مثل همیشه، انتگرال یک مشتق (در اینجا تاو) بر روی منطقه (در اینجا یک قسمت از سطح) با مقدار تابع در مرز (در اینجا محیط آن قسمت سطح) برابر است. همانند مورد قضیه دیورژانس، جمله مرزی خود یک انتگرال است — در واقع یک انتگرال خطی بسته.

تعبیر هندسی: خاطر نشان می‌کنیم (تکرار می‌کنیم) که تاو “پیچش” یک بردار \mathbf{v} را نشان می‌داد؛ منطقه‌ای با تاو بالا، یک گرداب است — اگر یک چرخ پره‌دار در آنجا بگذارید می‌چرخد. حال انتگرال یک تاو روی یک سطح (یا به طور دقیقتر، شار تاو که از آن سطح می‌گذرد) نشان‌دهنده “مقدار کل پیچش” است و می‌توان این مقدار را با حرکت حول لبه و اندازه‌گیری جریان در مرز (شکل ۱-۳۱) تعیین کرد. ممکن است این تعبیر قضیه استوکس را کمی اجباری تلقی کنید، اما حداقل یادآوری مفیدی هست، اگر چیز دیگری نباشد.

ممکن است به وجود ابهامی در قضیه استوکس پی برده باشید: با در نظر گرفتن انتگرال خطی در مرز کدام جهت باید بچرخیم (ساعتگرد یا پادساعتگرد)؟ در صورت انتخاب راه “غلط” ممکن است یک خطای علامت داشته باشیم. پاسخ آن است که مهم نیست که کدام راه را انتخاب کنیم در صورتی که سازگار عمل کنیم، زیرا یک ابهام در علامت جبران‌کننده برای انتگرال سطحی وجود دارد: جهت da کدام است؟ برای یک سطح بسته (مانند قضیه دیورژانس) da در جهت عمود و به سمت خارج سطح است، اما برای یک سطح باز، خارج کدام است؟ در این موارد، سازگاری با قضیه استوکس با قاعده دست راست تعیین می‌شود. اگر انگشتان شما در جهت انتگرال خطی باشد انگشت شست جهت da را نشان می‌دهد (شکل ۱-۳۲).



شکل ۱-۳۲



شکل ۱-۳۱

اکنون تعداد نامتناهی سطح می‌توان یافت که در مرز با هم مشترک هستند. یک گیره کاغذ را به شکل حلقه در آورید و آن را در کف صابون فرو ببرید. لایه نازک حاصل از صابون یک سطح است که مرز آن را محیط حلقه تشکیل می‌دهد. وقتی در آن بدمید لایه نازک بزرگ می‌شود و در واقع سطح بزرگتری را به وجود می‌آورد. اما مرز همان است. اصولاً یک انتگرال شار به سطحی که از آن انتگرال‌گیری می‌شود بستگی دارد، اما این حالت برای تاو اتفاق نمی‌افتد، زیرا که بنابر قضیه استوکس $\int (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a}$ برابر است با انتگرال خطی \mathbf{v} روی مرز و همان‌گونه که گفتیم این انتگرال به سطح انتخابی بستگی ندارد.

نتیجه ۱: $\int (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a}$ فقط به خط مرزی بستگی دارد و نه به اینکه از چه سطحی استفاده شده است.

نتیجه ۲: برای هر سطح بسته $\oint (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a} = 0$ ، زیرا که خط مرزی همانند دهانه یک بادکنک به سمت یک نقطه جمع می‌شود، در نتیجه سمت راست معادله (۵۷-۱) صفر می‌شود.

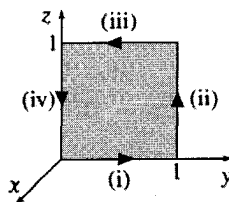
نتایج به دست آمده بالا با نتایج قضیه گرادیان شبیه‌اند. این همسویی را در دنباله بحث مورد توجه قرار می‌دهیم.

مثال ۱-۱۱

فرض کنید $\mathbf{v} = (2xz + 3y^2)\hat{y} + (4yz^2)\hat{z}$. قضیه استوکس را برای مربع شکل ۱-۳۳ امتحان کنید.

حل: در اینجا

$$\nabla \times \mathbf{v} = (4z^2 - 2x)\hat{x} + 2z\hat{z} \quad \text{و} \quad d\mathbf{a} = dy dz \hat{x}$$



شکل ۱-۳۳

برای اینکه بگوییم da در راستای x قرار دارد خود را مقید به انتگرال خطی پادساعتگرد کرده‌ایم. همین طور می‌توانستیم بنویسیم $da = -dy dz \hat{x}$ ، اما در آن صورت باید جهت ساعتگرد را انتخاب می‌کردیم. چون برای این سطح $x = 0$ است

$$\int (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a} = \int_0^1 \int_0^1 4z^2 dy dz = \frac{4}{3}$$

حال، درباره انتگرال خطی چه می‌گویید؟ این انتگرال را باید به چهار جزء تقسیم کنیم

$$x = 0, \quad z = 0, \quad \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 3y^2 dy, \quad \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 3y^2 dy = 1 \quad (1)$$

$$x = 0, \quad y = 1, \quad \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 4z^2 dz \quad \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 4z^2 dz = \frac{4}{3} \quad (2)$$

$$x = 0, \quad z = 1, \quad \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 3y^2 dy, \quad \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 3y^2 dy = -1 \quad (3)$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 0 dz = 0 \quad (4)$$

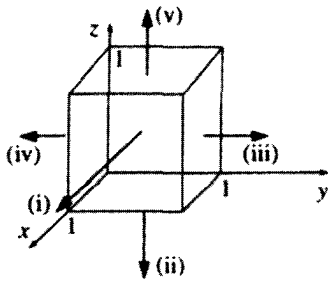
بنابراین

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 1 + \frac{4}{3} - 1 + 0 = \frac{4}{3}$$

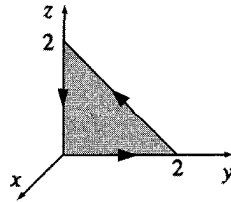
توجه کنید که مرحله (۳) را چگونه عمل کردیم. این گونه به نظر می‌رسد که بنویسیم $d\mathbf{l} = -dy \hat{y}$ زیرا مسیر به سمت چپ می‌رود. از این قرارداد می‌توانید عدول کنید به شرط آنکه انتگرال را از $1 \rightarrow 0$ تعقیب کنید. ترجیحاً همواره می‌نویسیم $d\mathbf{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$ (بدون آنکه علامت منفی به‌کار ببریم) و حدود انتگرال را با توجه به جهت می‌نویسیم. ■

مسئله ۳۳-۱ با استفاده از مثلث هاشورخورده شکل ۱-۳۴ قضیه استوکس را برای تابع $\mathbf{v} = (xy) \hat{x} + (2yz) \hat{y} + (3zx) \hat{z}$ امتحان کنید.

مسئله ۳۴-۱ نتیجه ۱ را با استفاده از همان تابع و خطوط مرزی همانند مثال ۸ امتحان کنید اما انتگرال را روی ۵ سطح مکعب شکل ۱-۳۵ بگیرید. سطح پشتی مکعب، باز است. □



شکل ۳۵-۱



شکل ۳۴-۱

۶-۳-۱ انتگرال گیری جزء به جزء

راهکار انتگرال گیری جزء به جزء از قاعده حاصلضرب مشتقها استفاده می‌کند

$$\frac{d}{dx}(fg) = f \left(\frac{dg}{dx} \right) + g \left(\frac{df}{dx} \right)$$

با انتگرال گیری از دو طرف تساوی و به کارگیری قضیه بنیادی داریم

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(fg) dx = fg \Big|_a^b = \int_a^b f \left(\frac{dg}{dx} \right) dx + \int_a^b g \left(\frac{df}{dx} \right) dx$$

یا

$$\int_a^b f \left(\frac{dg}{dx} \right) dx = - \int_a^b g \left(\frac{df}{dx} \right) dx + fg \Big|_a^b \quad (58-1)$$

معادله بالا انتگرال جزء به جزء نامیده می‌شود. در این معادله از حاصلضرب یک تابع (f) و مشتق تابع دیگر (g) انتگرال گرفته می‌شود و می‌توان مشتق را از g در انتگرال به f تبدیل کرد. در اینجا به یک علامت منفی و یک جمله مرزی نیاز داریم.

مثال ۱۲-۱

انتگرال $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$ را محاسبه کنید.

حل: جمله‌نمایی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$e^{-x} = \frac{d}{dx}(-e^{-x})$$

در این مورد $f(x) = x$, $g(x) = -e^{-x}$ و $df/dx = 1$ ، بنابراین

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx - x e^{-x} \Big|_0^{\infty} = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1$$

با استفاده از قضیه بنیادی به روشی مشابه می‌توان قواعد ضرب برداری را به کار برد. به عنوان مثال با انتگرال‌گیری روی حجم عبارت زیر

$$\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$$

و استفاده از قضیه دیورانس به دست می‌آوریم

$$\int \nabla \cdot (f \mathbf{A}) d\tau = \int f(\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau + \int \mathbf{A} \cdot (\nabla f) d\tau = \oint f \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

یا

$$\int_V f(\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau = - \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla f) d\tau + \oint_S f \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} \quad (59-1)$$

در اینجا نیز عبارت زیر انتگرال حاصلضرب یک تابع (f) در مشتق (در این مورد دیورانس) تابع دیگر (\mathbf{A}) است. چون گذشته انتگرال‌گیری جزء به جزء مشتق زیر علامت انتگرال را از یک تابع (\mathbf{A}) به تابع دیگر (f) تبدیل می‌کند (تبدیل به گرادبان) با این نکته که علامت منفی و جمله مرزی (که در این حالت خود یک انتگرال سطحی است) هم اضافه می‌شود.

ممکن است این سؤال پیش آید که چقدر امکان دارد با انتگرالی مواجه شده که شامل حاصلضرب یک تابع در مشتق دیگری باشد. در جواب باید گفت که زیاد، و انتگرال‌گیری جزء به جزء یکی از مؤثرترین روشها برای حل این‌گونه مسائل در حساب برداری است.

مسئله ۳۵-۱ (الف) نشان دهید

$$\int_S f(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int_S [\mathbf{A} \times (\nabla f)] \cdot d\mathbf{a} + \oint_P f \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (60-1)$$

(ب) نشان دهید

$$\int_V \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\tau = \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) d\tau + \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} \quad (۶۱-۱)$$

□

۴-۱ مختصات منحنی الخط

۱-۴-۱ مختصات قطبی کروی

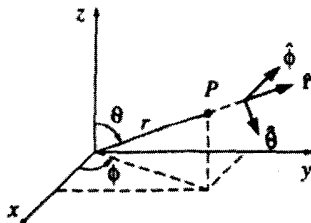
مختصات قطبی کروی (r, θ, ϕ) یک نقطه P را در شکل ۳۶-۱ نمایش داده‌ایم؛ r فاصله از مبدأ است (اندازه بردار مکان)، θ (زاویه نسبت به محور z) را زاویه قطبی و ϕ (زاویه در صفحه افقی نسبت به محور x) را زاویه سمتی می‌نامند. معادله این مختصات را با مختصات دکارتی (x, y, z) می‌توان از روی شکل به صورت زیر به دست آورد

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (۶۲-۱)$$

شکل ۳۶-۱ همچنین سه بردار یکه $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ را که همگی در جهت افزایش مختصات متناظر خویش‌اند نشان می‌دهد. اینها یک مجموعه دو به دو عمود شبیه $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ تشکیل می‌دهند و هر بردار مانند \mathbf{A} را می‌توان برحسب آنها و به صورت معمولی زیر نوشت

$$\mathbf{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi} \quad (۶۳-۱)$$

A_r, A_θ و A_ϕ مؤلفه‌های شعاعی، قطبی و سمتی \mathbf{A} هستند. بردارهای یکه برحسب

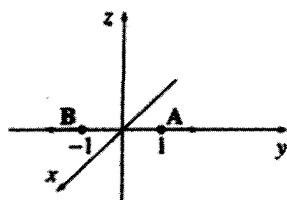


شکل ۳۶-۱

بردارهای یکه در مختصات دکارتی عبارت‌اند از

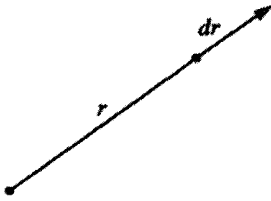
$$\begin{cases} \hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ \hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \\ \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \end{cases} \quad (۶۴-۱)$$

درستی این عبارات را به راحتی می‌توانید امتحان کنید (مسئله ۱-۳۷). برای دسترسی آسان به این عبارات آنها را در صفحات بعد از نمایه قرار داده‌ایم. نکته‌ای که باید در اینجا به آن اشاره کرد این است که: بردارهای \hat{r} ، $\hat{\theta}$ و $\hat{\phi}$ به نقطه خاص P مربوط‌اند و با حرکت P جهت آنها تغییر می‌کند. برای مثال، \hat{r} همیشه در جهت شعاعی رو به بیرون تغییر می‌کند اما این جهت می‌تواند جهت x یا y یا هر جهت دیگری بر حسب مکان مورد نظر باشد. در شکل ۱-۳۷، $\mathbf{A} = \hat{y}$ و $\mathbf{B} = -\hat{y}$ و با وجود این هر دو این بردارها در مختصات کروی با \hat{r} نمایش داده می‌شوند. می‌توان این را با نمایش صریح نقطه مرجع به صورت: $\hat{r}(\theta, \phi)$ ، $\hat{\theta}(\theta, \phi)$ ، $\hat{\phi}(\theta, \phi)$ مد نظر داشت، اما این کار پر زحمتی خواهد بود، و چنانچه درباره مسئله هوشیار باشید مشکلی پیش نمی‌آید. ^۱ به‌ویژه، با ساده‌انگاری، مؤلفه‌های مختصات کروی بردارهای متناظر به نقاط مختلف را با هم ترکیب نکنید. (در شکل ۱-۳۷، $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 0$ است نه $2\hat{r}$ و $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -1$ نه $+1$). توجه داشته باشید برداری که در مختصات کروی نمایش داده می‌شود با مختصات قائم متفاوت است زیرا در این مختصات بردارهای یکه خود تابعی از مکان هستند. (مثلاً $\partial \hat{r} / \partial \theta = \hat{\theta}$) و در نتیجه \hat{r} ، $\hat{\theta}$ ، و $\hat{\phi}$ از انتگرال خارج نمی‌شوند در حالی‌که \hat{x} ، \hat{y} و \hat{z} در معادله (۱-۵۳) این قابلیت را داشتند. در حالت کلی اگر از درستی یک روش مطمئن نیستید، مسئله را در مختصات دکارتی حل کنید تا مشکلی وجود نداشته باشد.

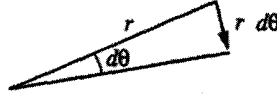


شکل ۱-۳۷

۱. در صفحات اول این کتاب گفتیم که بردارها مکان ندارند، اینجا نیز تأکید می‌کنیم بردارها به خودی خود مستقل از انتخاب دستگاه مختصات هستند. اما نمادگذاری انتخابی ما برای نمایش بستگی به نقطه مورد نظر در مختصات منحنی‌الخط دارد.

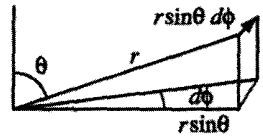


(الف)



(ب)

شکل ۳۸-۱



(ج)

یک جابه‌جایی بینهایت کوچک در جهت \hat{r} به‌سادگی dr است (شکل ۳۸-۱ الف)، یک جزء کوچک طول در جهت x می‌شود dx

$$dl_r = dr \quad (۶۵-۱)$$

از طرف دیگر یک جزء کوچک طول در جهت $\hat{\theta}$ (شکل ۳۸-۱ ب) صرفاً $d\theta$ نیست (که یک زاویه است و حتی واحد صحیح طول را ندارد) بلکه $r d\theta$ است

$$dl_\theta = r d\theta \quad (۶۶-۱)$$

همین‌طور یک جزء کوچک طول در جهت $\hat{\phi}$ (شکل ۳۸-۱ ج) برابر است با

$$dl_\phi = r \sin \theta d\phi \quad (۶۷-۱)$$

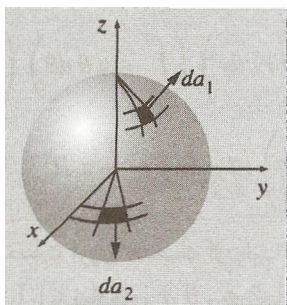
از این‌رو یک جابه‌جایی کوچک کلی dl برابر است با

$$dl = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi} \quad (۶۸-۱)$$

نقش این معادله (مثلاً برای انتگرال روی خط) همانند $dl = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$ در مختصات دکارتی است.

یک جزء حجم بینهایت کوچک $d\tau$ در مختصات کروی حاصلضرب سه جزء بینهایت کوچک طول است

$$d\tau = dl_r dl_\theta dl_\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (۶۹-۱)$$



شکل ۱-۳۹

برای جزء سطح da نمی‌توان یک معادله کلی نوشت زیرا این معادله بستگی به جهتگیری سطح دارد. باید برای هر سطح شکل هندسی آن را تحلیل کرد (این عمل برای مختصات دکارتی و منحنی‌الخط هم لازم است). مثلاً اگر روی سطح یک کره انتگرال می‌گیرید آن‌گاه r ثابت است در حالی که θ و ϕ تغییر می‌کنند (شکل ۱-۳۹)، بنابراین

$$da_1 = dl_\theta dl_\phi \hat{r} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$

از طرف دیگر؛ هرگاه سطح مثلاً در صفحه xy باشد، آن‌گاه θ ثابت (مثلاً $\pi/2$) است در حالی که ϕ و r متغیرند. بنابراین

$$da_2 = dl_r dl_\theta \hat{\theta} = r dr d\phi \hat{\theta}$$

نکته آخر اینکه توجه کنید تغییرات r از صفر تا ∞ ، ϕ از صفر تا 2π ، و θ از صفر تا π (و نه 2π)، که در این صورت هر نقطه دو بار منظور می‌شود) است.

مثال ۱-۱۳

حجم کره‌ای به شعاع R را حساب کنید.

حل:

$$V = \int d\tau = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

۱. راه دیگر آن است که ϕ را از صفر تا π ("نیمکره شرقی") در نظر بگیرید و "نیمکره غربی" را با بسط θ از π تا 2π محسوب کنید. اما این نمادگذاری بدی است، زیرا $\sin \theta$ هم منفی خواهد شد و مجبورید برای محاسبه حجم و سطح قدرمطلق آن را به حساب آورید زیرا این مقادیر الزاماً مثبت هستند.

$$\begin{aligned}
 &= \left(\int_0^R r^r dr \right) \left(\int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \\
 &= \left(\frac{R^r}{r} \right) (2)(2\pi) = \frac{4}{r} \pi R^r
 \end{aligned}$$

تا به حال درباره هندسهٔ مختصات کروی صحبت کرده‌ایم. حال می‌خواهیم مشتقات برداری (گرادیان، دیورژانس، تاور، ولایلاسی) را با نمادهای r ، θ و ϕ "بیان" کنیم. از نظر اصولی این کاری ساده است: در مورد گرادیان می‌دانیم

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{z}$$

مثلاً می‌توانیم از قاعدهٔ زنجیری به صورت زیر استفاده کنیم

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) + \frac{\partial T}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial T}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$$

جمله‌های داخل پرانتز را می‌توان با توجه به معادله‌های (۱-۶۲)، یا وارون آن معادله‌ها (مسئله ۱-۳۶) محاسبه کرد. آنگاه همین کار را برای $\partial T / \partial y$ و $\partial T / \partial z$ انجام می‌دهیم. در آخر باید بردارهای \hat{x} ، \hat{y} ، \hat{z} را برحسب \hat{r} ، $\hat{\theta}$ ، $\hat{\phi}$ با استفاده از مسئله ۱-۳۷ بنویسیم. با این روش محاسبهٔ گرادیان یک ساعت به طول می‌انجامد. در واقع این روشی بود که در آغاز به کار می‌رفت، اما روش غیرمستقیم مؤثرتری هم وجود دارد که در پیوست الف بر اساس نوشتن تمام دستگاه‌های مختصات آورده‌ایم. این روش مستقیم را صرفاً برای نشان دادن اینکه نوشتن مختصات کروی شکل خاصی ندارد بیان کردیم: کاری که می‌کنیم این است که یک کمیت (گرادیان، دیورژانس یا هر چیز دیگر را) در نمادگذاری‌های مختلف به کار می‌بریم؛ این کل داستان است.

در اینجا مشتقات برداری را در مختصات کروی می‌نویسیم

گرادیان:

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \hat{\phi} \quad (70-1)$$

دیورژانس:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \quad (71-1)$$

تاو:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (۷۲-۱)$$

لاپلاسی:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \quad (۷۳-۱)$$

این توابع را در صفحات بعد از نمایه نوشته‌ایم.

مسئله ۳۶-۱ فرمولهای r, θ, ϕ را برحسب x, y, z بنویسید، [به عبارت دیگر وارون معادله (۶۲-۱)].

• مسئله ۳۷-۱ بردارهای $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ را برحسب $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ بنویسید [معادله (۶۴-۱)] را به دست آورید. [جوابهای خود را به چند روش امتحان کنید ($\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} \stackrel{?}{=} \hat{\boldsymbol{\phi}}, \dots$), $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \stackrel{?}{=} 1, \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} \stackrel{?}{=} 0$]. همچنین فرمولهای وارون را به گونه‌ای که $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ را برحسب $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ (و θ و ϕ) مشخص کند بنویسید.

• مسئله ۳۸-۱ (الف) قضیه دیورژانس را با در نظر گرفتن کره‌ای به شعاع R به عنوان حجم برای تابع $v_r = r^2 \hat{\mathbf{r}}$ امتحان کنید.

(ب) همین کار را برای $v_r = (1/r^2) \hat{\mathbf{r}}$ تکرار کنید. (اگر پاسخ برایتان غیرمنتظره بود به مسئله ۱۶-۱ مراجعه کنید.)

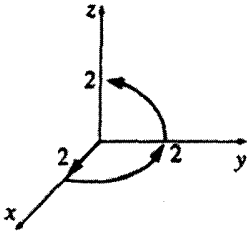
مسئله ۳۹-۱ دیورژانس تابع زیر را حساب کنید.

$$\mathbf{v} = (r \cos \theta) \hat{\mathbf{r}} + (r \sin \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} + (r \sin \theta \cos \phi) \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

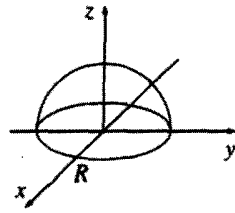
قضیه دیورژانس را با استفاده از نیمکره وارون به شعاع R که قاعده آن در صفحه xy و مرکزش مطابق شکل ۴۰-۱ در مبدأست، به عنوان حجم امتحان کنید.

مسئله ۴۰-۱ گرادیان و لاپلاسی تابع زیر را حساب کنید

$$T = r(\cos \theta + \sin \theta \cos \phi)$$



شکل ۴۱-۱



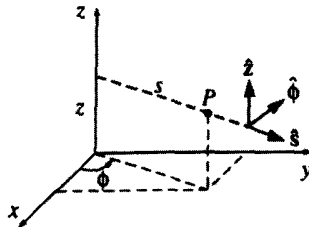
شکل ۴۰-۱

لاپلاسی را با تبدیل T به مختصات دکارتی و با استفاده از معادله (۴۲-۱) امتحان کنید. همچنین قضیه گرادیان را با استفاده از مسیر شکل ۴۱-۱ از $(0, 0, 0)$ تا $(0, 0, 2)$ برای این تابع بیازمایید. □

۲-۴-۱ مختصات استوانه‌ای

مختصات استوانه‌ای (s, ϕ, z) یک نقطه P را در شکل ۴۲-۱ نمایش داده‌ایم. توجه کنید که ϕ همان معنی مختصات قطبی کروی را دارد و z هم همان مختصه دکارتی است. s فاصله از محور z است در حالی که در مختصات کروی r فاصله از مبدأ مختصات بود. رابطه مختصات استوانه‌ای با مختصات دکارتی عبارت است از

$$x = s \cos \phi, \quad y = s \sin \phi, \quad z = z \quad (۷۴-۱)$$



شکل ۴۲-۱

بردارهای یکه عبارت‌اند از (مسئله ۱-۴۱)

$$\begin{cases} \hat{s} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} \\ \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases} \quad (۷۵-۱)$$

یک جابه‌جایی بینهایت کوچک برابر است با

$$dl_s = ds, \quad dl_\phi = s d\phi, \quad dl_z = dz \quad (۷۶-۱)$$

بنابراین

$$dl = ds \hat{s} + s d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z} \quad (۷۷-۱)$$

و جزء حجم برابر است با

$$d\tau = s ds d\phi dz \quad (۷۸-۱)$$

s از صفر تا ∞ و ϕ از 0° تا ۲π و z از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند.
مشتقهای برداری در مختصات استوانه‌ای عبارت‌اند از:

گرادیان:

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial s} \hat{s} + \frac{1}{s} \frac{\partial T}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{z} \quad (۷۹-۱)$$

دیورژانس:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s}(sv_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (۸۰-۱)$$

تاو:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{1}{s} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \hat{s} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_s}{\partial s} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{s} \left[\frac{\partial}{\partial s}(sv_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi} \right] \hat{z}$$

(۸۱-۱)

لاپلاسی:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial T}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (۸۲-۱)$$

این فرمولها را نیز در صفحات بعد از نمایه نوشته‌ایم.

مسئله ۴۱-۱ بردارهای \hat{s} ، $\hat{\phi}$ ، \hat{z} را برحسب \hat{x} ، \hat{y} ، \hat{z} بنویسید [یعنی معادله (۷۵-۱) را تحقیق کنید]. فرمولهای وارون را به‌گونه‌ای که \hat{x} ، \hat{y} ، \hat{z} را برحسب \hat{s} ، $\hat{\phi}$ ، $\hat{\theta}$ مشخص کند بنویسید.

مسئله ۴۲-۱ (الف) دیورژانس تابع زیر را حساب کنید.

$$\mathbf{v} = s(2 + \sin^2 \phi) \hat{s} + s \sin \phi \cos \phi \hat{\phi} + 3z \hat{z}$$

(ب) قضیه دیورژانس را با استفاده از یک ربع استوانه (شعاع ۲ و ارتفاع ۵) مطابق شکل ۴۳-۱ برای این تابع بیازمایید.

□

(ج) \mathbf{v} و ∇ را به‌دست آورید.

۵-۱ تابع دلتای دیراک

۱-۵-۱ دیورژانس \hat{r}/r^2

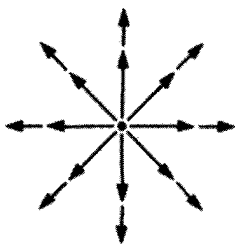
تابع برداری زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \hat{r} \quad (۸۳-۱)$$

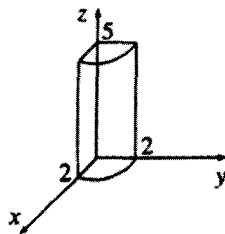
در هر محل، \mathbf{v} به‌صورت شعاعی و به طرف بیرون (شکل ۴۴-۱) است؛ اگر تابعی وجود داشته باشد که دارای دیورژانس بزرگ مثبت باشد، این همان تابع است. با وجود این وقتی واقعاً دیورژانس را محاسبه می‌کنید [با استفاده از معادله (۷۱-۱)] دقیقاً به جواب صفر می‌رسید:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (1) = 0 \quad (۸۴-۱)$$

(به این پارادوکس از طریق دیگری هم می‌توانید برسید و آن زمانی است که مسئله ۱-۱۶ را حل می‌کنید.) با اعمال قضیه دیورژانس به این تابع، وضع پیچیده‌تر می‌شود. فرض کنید انتگرال را روی



شکل ۴۴-۱



شکل ۴۳-۱

کره‌ای به شعاع R که مرکزش در مبدأ واقع است (شکل ۱-۳۸ ب) بگیریم؛ انتگرال سطحی عبارت است از

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} &= \int \left(\frac{1}{R^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot (R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{\mathbf{r}}) \\ &= \left(\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) = 4\pi \quad (۸۵-۱) \end{aligned}$$

اما انتگرال حجمی $\int \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\tau$ ، هر گاه واقعاً معادله (۱-۸۴) را باور داشته باشیم برابر است با صفر. آیا این به معنی غلط بودن قضیه دیورژانس است؟ داستان چیست؟

منشأ مسئله نقطه $r = 0$ است که به‌ازای آن \mathbf{v} نامتناهی می‌شود [و در معادله (۱-۸۴) هم یک تقسیم بر صفر داریم]. این یک واقعیت است که همه جا بجز در مبدأ $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ است، اما در مبدأ وضعیت پیچیده‌تر است. توجه کنید که انتگرال سطحی (۱-۸۵) مستقل از R است؛ اگر قضیه دیورژانس درست باشد (که هست)، برای هر کره‌ای به مرکز مبدأ داریم $\int (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\tau = 4\pi$ و این به مقدار شعاع بستگی ندارد. بدیهی است که تمام مسئله برمی‌گردد به نقطه $r = 0$. بنابراین خصوصیت $\nabla \cdot \mathbf{v}$ آن است که در هر جا بجز در یک نقطه، صفر می‌شود و با وجود این انتگرال آن (روی هر حجم که در برگیرنده آن نقطه نیز هست) برابر است با 4π . هیچ تابع معمولی چنین رفتاری را ندارد. (از طرف دیگر، یک مثال فیزیکی نیز به ذهن می‌رسد: چگالی (جرم واحد حجم) یک ذره نقطه‌ای. این مقدار در هر کجا صفر است بجز روی خود ذره — با وجود این انتگرالش، که همان جرم ذره است، متناهی است.) آنچه را می‌خواهیم توصیف کنیم یک موجود ریاضی است که فیزیکدانان آن را تابع دلتای دیراک می‌نامند. این تابع در موارد متعددی در فیزیک نظری خودنمایی می‌کند. افزون بر این، مسئله خاصی که مد نظر ماست (دیورژانس تابع $\hat{\mathbf{r}}/r^2$) صرفاً یک مسئله غیرمنتظره نیست — این تابع در تمام نظریه الکتروستاتیک نقش دارد. از این رو ارزش آن را دارد که تابع دلتای دیراک را با دقت بررسی کنیم.

۲-۵-۱ تابع دلتای یک بعدی دیراک

تابع دلتای یک بعدی دیراک $\delta(x)$ را می توان به صورت یک "میخ" بسیار بلند و بینهایت باریک به مساحت ۱ مطابق شکل ۴۵-۱ در نظر گرفت. به عبارت دیگر داریم

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \quad (۸۶-۱)$$

و

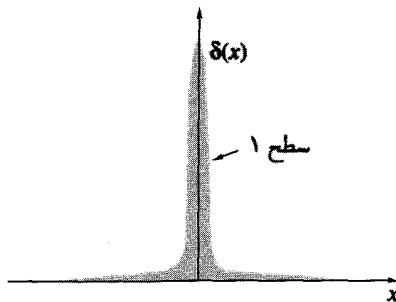
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (۸۷-۱)$$

به لحاظ عملی، $\delta(x)$ به هیچ وجه یک تابع نیست، زیرا مقدار آن در $x = 0$ متناهی نیست. به زبان ریاضی آن را تابع تعمیم یافته، یا توزیع می نامند. این تابع را می توانید حدّ مجموعه‌ای از توابع نظیر مستطیلهای $R_n(x)$ به ارتفاع n و عرض $1/n$ ، یا مثلثهای متساوی الساقین $T_n(x)$ به ارتفاع n و قاعده $2/n$ (شکل ۴۶-۱) در نظر بگیرید.

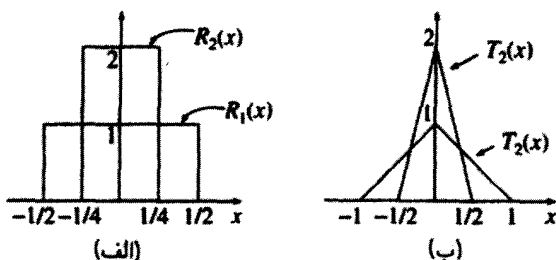
اگر $f(x)$ یک تابع "معمولی" باشد (یعنی، تابع دلتای دیگری نباشد) — برای رعایت احتیاط بهتر است بگوییم اگر $f(x)$ پیوسته باشد، آن گاه حاصلضرب $f(x)\delta(x)$ در هر جا بجز $x = 0$ برابر صفر می شود در نتیجه باید داشته باشیم

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x) \quad (۸۸-۱)$$

(این مهمترین واقعیت برای تابع دلتاست، بنابراین مطمئن شوید که علت درستی آن را فهمیده‌اید: نکته اینجاست که چون حاصلضرب در هر کجا بجز در $x = 0$ برابر صفر است، می توان $f(x)$ را



شکل ۴۵-۱



شکل ۴۶-۱

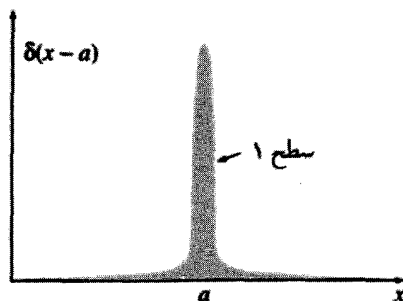
با مقدار آن در مبدأ جایگزین کرد.) به‌ویژه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = f(0) \quad (۸۹-۱)$$

زیر انتگرال، تابع دلتا مقدار $f(x)$ در $x = 0$ را دارد. (در اینجا و در ادامهٔ مطلب نیازی نداریم که انتگرال را از $-\infty$ تا $+\infty$ بگیریم؛ کافی است ناحیه کوچکی از $-\varepsilon$ تا $+\varepsilon$ را که تابع دلتا صفر نیست در نظر بگیریم.)

بدیهی است مطابق شکل ۴۷-۱ می‌توانیم از $x = 0$ به نقطه دیگری در $x = a$ منتقل کنیم

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0 & x \neq a \\ \infty & x = a \end{cases} \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1 \quad (۹۰-۱)$$



شکل ۴۷-۱

معادله (۸۸-۱) می‌شود

$$f(x) \delta(x - a) = f(a) \delta(x - a) \quad (91-1)$$

و معادله (۸۹-۱) را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a) \quad (92-1)$$

مثال ۱۴-۱

انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^3 x^2 \delta(x - 2) dx$$

حل: تابع دلتا، در نقطه $x = 2$ مقدار x^2 را انتخاب می‌کند و بنابراین انتگرال برابر $2^2 = 4$ می‌شود. توجه کنید اگر حد بالایی این مثال ۱ بود (به جای ۳) آن‌گاه جواب صفر می‌شد زیرا می‌بخ در خارج از محدوده انتگرال‌گیری واقع می‌شد. ■

گرچه δ ، خودش قاعده‌تاً به حق یک تابع محسوب نمی‌شود، انتگرالهای روی آن کاملاً پذیرفتنی است. در حقیقت، بهتر آن است که تابع دلتا را چیزی در نظر بگیریم که همواره استفاده از آن با علامت انتگرال موجه است. دو عبارت که شامل تابع دلتا باشند [مثلاً $D_1(x)$ و $D_2(x)$] را مساوی در نظر می‌گیریم، هر گاه برای تمام توابع $f(x)$ ("معمولی") داشته باشیم^۱

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) D_1(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) D_2(x) dx \quad (93-1)$$

مثال ۱۵-۱

نشان دهید که

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x) \quad (94-1)$$

۱. آن‌گونه که به نظر می‌رسد این مساوی گرفتن دلخواه نیست. نکته مهم این است که انتگرالها به‌ازای هر $f(x)$ برابرند. فرض کنید واقعاً D_1 و D_2 مثلاً در حوالی نقطه $x = 17$ متفاوت باشند. آن‌گاه می‌توان تابع $f(x)$ را طوری انتخاب کرد که در نزدیکی $x = 17$ بلند باشد و انتگرالها دیگر مساوی نخواهند بود.

که k یک ثابت (غیرصفر) است. [مخصوصاً داریم $\delta(-x) = \delta(x)$.

حل: برای هر تابع آزمون دلخواه $f(x)$ انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(kx) dx$$

با تغییر متغیر $y \equiv kx$ داریم $x = y/k$ و $dx = 1/k dy$. اگر k مثبت باشد انتگرال هنوز هم از $-\infty$ تا $+\infty$ است، اما اگر k منفی باشد، آن‌گاه $x = \infty$ مستلزم آن است که $y = -\infty$ شود و برعکس و بنابراین ترتیب حد‌ها برعکس می‌شود. اگر بخواهیم ترتیب "معمولی" را انتخاب کنیم باید یک علامت منفی به‌کار ببریم. از این رو

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(kx) dx = \pm \int_{-\infty}^{\infty} f(y/k) \delta(y) \frac{dy}{k} = \pm \frac{1}{k} f(0) = \frac{1}{|k|} f(0)$$

(علامت پایینی را وقتی k منفی است به‌کار می‌بریم و برای این منظور می‌توان قدرمطلق k را به‌کار برد.) در این صورت زیر علامت انتگرال، $\delta(kx)$ همان نقشی را دارد که $(1/|k|)\delta(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(kx) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\frac{1}{|k|} \delta(x) \right] dx$$

در این صورت بنابر معادله (۷۳-۱) داریم $\delta(kx) = (1/|k|) \delta(x)$.

مسئله ۴۳-۱ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

(الف) $\int_{-1}^6 (3x^2 - 2x - 1) \delta(x - 3) dx$

(ب) $\int_0^{\pi} \cos x \delta(x - \pi) dx$

(ج) $\int_0^2 x^2 \delta(x + 1) dx$

(د) $\int_{-\infty}^{\infty} \ln(x + 3) \delta(x + 2) dx$

مسئله ۴۴-۱ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

(الف) $\int_{-1}^2 (2x + 3) \delta(3x) dx$

(ب) $\int_0^2 (x^2 + 3x + 2) \delta(1 - x) dx$

(ج) $\int_{-1}^1 9x^2 \delta(3x + 1) dx$

(د) $\int_{-\infty}^a \delta(x - b) dx$

مسئله ۴۵-۱ (الف) نشان دهید که

$$x \frac{d}{dx} (\delta(x)) = -\delta(x)$$

(راهنمایی: انتگرال جزء به جزء بگیرید.)

(ب) فرض کنید $\theta(x)$ یک تابع پله‌ای به صورت زیر باشد

$$\theta(x) \equiv \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (95-1)$$

□

نشان دهید که $d\theta/dx = \delta(x)$.

۳-۵-۱ تابع دلتای سه‌بعدی

تعمیم سه‌بعدی تابع دلتا کار ساده‌ای است

$$\delta^3(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (96-1)$$

مثل همیشه $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ بردار مکان است که از مبدأ به نقطه (x, y, z) وصل شده است. این تابع دلتای سه‌بعدی در هر کجا جز در $(0, 0, 0)$ که مقدار آن بینهایت می‌شود صفر است. انتگرال حجمی این تابع برابر است با یک:

$$\int_{\text{تمام فضا}} \delta^3(\mathbf{r}) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\delta(y)\delta(z) dx dy dz = 1 \quad (97-1)$$

و تعمیم (۹۲-۱) هم به صورت زیر است

$$\int_{\text{تمام فضا}} f(\mathbf{r}) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{a}) d\tau = f(\mathbf{a}) \quad (98-1)$$

همانند حالت یک‌بعدی، انتگرال‌گیری از δ ما را به مقدار تابع f در محل میخ می‌رساند. حالا در موقعیتی قرار داریم که می‌توانیم پارادوکس بخش ۱-۵-۱ را برطرف کنیم. به یاد دارید که دیورژانس \hat{r}/r^2 در همه جا بجز در مبدأ صفر بود، در حالی که انتگرال آن روی هر حجم

در برگیرندهٔ مبدأ هم یک ثابت بود (برابر با 4π). اینها دقیقاً شرایط تعریف تابع دلتای دیراک را مشخص می‌کنند و بدیهی است که:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}) \quad (99-1)$$

به صورت کلیتر داریم

$$\boxed{\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{J}}}{\mathcal{J}^2} \right) = 4\pi\delta^3(\mathcal{J})} \quad (100-1)$$

که در آن \mathcal{J} بردار فاصله است: $\mathcal{J} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. توجه کنید که در این مورد دیفرانسیل گرفتن نسبت به \mathbf{r} است زیرا \mathbf{r}' مقداری است ثابت. تصادفاً چون

$$\nabla \left(\frac{1}{\mathcal{J}} \right) = -\frac{\hat{\mathbf{J}}}{\mathcal{J}^2} \quad (101-1)$$

است (مسئله ۱۳-۱)، نتیجه می‌گیریم که

$$\nabla^2 \frac{1}{\mathcal{J}} = -4\pi\delta^3(\mathcal{J}) \quad (102-1)$$

مثال ۱-۱۶

مقدار انتگرال زیر را حساب کنید.

$$J = \int_V (r^2 + 2) \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) d\tau$$

که در آن V کره‌ای است به شعاع R و مرکز آن واقع در مبدأ.

حل ۱: با استفاده از معادلهٔ (۹۹-۱) دیورژانس را بازنویسی کرده و به کمک (۹۸-۱) انتگرال را حساب کنید:

$$J = \int_V (r^2 + 2) 4\pi\delta^3(\mathbf{r}) d\tau = 4\pi(0 + 2) = 8\pi$$

این جواب یک سطری نشان‌دهندهٔ توان و زیبایی تابع دلتاست، اما خوب است روش دیگری هم برای حل این مسئله به‌کارگیریم. این روش پر زحمت‌تر است، اما برای نمایش یک راهکار مفید یعنی انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء مفید است (بخش ۱-۳-۶).

حل ۲: با استفاده از معادلهٔ (۱-۵۹) مشتق را از \hat{r}/r^2 به $(r^2 + 2)$ تبدیل می‌کنیم

$$J = - \int \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot [\nabla(r^2 + 2)] d\tau + \oint (r^2 + 2) \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot da$$

گرادیان برابر است با

$$\nabla(r^2 + 2) = 2r\hat{r}$$

بنابراین انتگرال حجمی می‌شود

$$\int \frac{2}{r} d\tau = \int \frac{2}{r} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = 4\pi \int_0^R r dr = 4\pi R^2$$

در ضمن، در مرز کره (که در آن $r = R$) داریم

$$da = R^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r}$$

بنابراین انتگرال روی سطح می‌شود

$$\int (R^2 + 2) \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi(R^2 + 2)$$

با در نظر گرفتن همهٔ این محاسبات، همانند قبل داریم

$$J = -4\pi R^2 + 4\pi(R^2 + 2) = 8\pi$$

مسئله ۱-۴۶ (الف) عبارتی بنویسید که معرف چگالی $\rho(\mathbf{r})$ بار نقطه‌ای، q ، در \mathbf{r}' باشد. مطمئن شوید که انتگرال حجمی ρ برابر q خواهد شد.

(ب) چگالی باریک دوقطبی الکتریکی مرکب از یک بار $-q$ واقع در مبدأ و یک بار نقطه‌ای $+q$ واقع در a چقدر است؟

(ج) جگالی باریک پوسته یکنواخت کروی نازک بسیار کوچک به شعاع R که بار کل آن Q و مرکز آن در مبدأ قرار دارد چقدر است؟ (تذکر: انتگرال در تمام فضا باید برابر با Q باشد).

مسئله ۱-۴۷ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

(الف) $\int_V (r^2 + r \cdot a + a^2) \delta^3(r - a) d\tau$ تمام فضا، که در آن a یک بردار ثابت و a اندازه آن است.

(ب) $\int_V |r - b|^2 \delta^3(r) d\tau$ ، که در آن \mathcal{V} مکعبی به ضلع ۲ و مرکز آن در مبدأ است و $b = 4\hat{y} + 3\hat{z}$.

(ج) $\int_V (r^2 + r \cdot c + c^2) \delta^3(r - c) d\tau$ ، که در آن \mathcal{V} کره‌ای است که مرکز آن در مبدأ و شعاع آن ۶ است، $c = 5\hat{x} + 3\hat{y} + 2\hat{z}$ و c مقدار آن است.

(د) $\int_V r \cdot (d - r) \delta^3(e - r) d\tau$ که در آن $d = (1, 2, 3)$ و $e = (3, 2, 1)$ و \mathcal{V} کره‌ای به شعاع ۱٫۵ است که مرکز آن در $(2, 2, 2)$ واقع است.

مسئله ۱-۴۸ انتگرال زیر را همانند مثال ۱-۱۶ به دو روش مختلف حل کنید

$$J = \int_V e^{-r} \left(\nabla \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \right) d\tau$$

(\mathcal{V} کره‌ای است به شعاع R که مرکز آن روی مبدأ قرار دارد).

□

۱-۶ نظریه میدانهای برداری

۱-۶-۱ قضیه هلمهولتز

از زمان فاراده، قوانین الکتریسته و مغناطیس برحسب میدانهای الکتریکی E و مغناطیسی B بیان می‌شوند. همانند بسیاری از قوانین فیزیکی اینها هم به صورت جمع و جورتر با معادله‌های دیفرانسیل تبیین می‌شوند. چون E و B بردارند، معادلات دیفرانسیل آنها شامل مشتقات برداری یعنی دیورژانس و تاور هستند. ماکسول تمام نظریه الکترومغناطیس را به صورت چهار معادله که به ترتیب دیورژانس و تاور E و B را مشخص می‌کنند در آورد.

فرمولبندی ماکسول یک پرسش ریاضی مهمی را مطرح می‌کند: تا چه حد یک تابع برداری برحسب دیورژانس و تاور آن معین می‌شود؟ به عبارت دیگر فرض کنید به ما گفته‌اند که دیورژانس F (که برحسب مورد E یا B می‌تواند باشد) یک تابع اسکالر مشخص D است،

$$\nabla \cdot F = D$$

و نیز تاو بردار \mathbf{F} هم یک تابع (بردار) معین \mathbf{C} است،

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{C}$$

(برای سازگاری \mathbf{C} باید بدون دیورژانس باشد،

$$\nabla \cdot \mathbf{C} = 0$$

زیرا دیورژانس یک تاو همواره صفر است)، آیا بر اساس این اطلاعات می‌توانیم تابع \mathbf{F} را بیابیم؟ نه کاملاً... به عنوان مثال، همان‌طور که در مسئله ۱-۱۹ دیدید، توابع زیادی هستند که دیورژانس و تاو آنها همه جا صفر است — ساده‌ترین نوع این توابع $\mathbf{F} = 0$ است، ولی توابع دیگری مانند $\mathbf{F} = yz \hat{x} + zx \hat{y} + xy \hat{z}$ و $\mathbf{F} = \sin x \cosh y \hat{x} - \cos x \sinh y \hat{y}$... نیز از این نوع هستند. برای حل کردن معادله‌های دیفرانسیل باید شرایط مرزی را نیز داشته باشیم. در الکتروستاتیک فرض می‌کنیم که میدان در بینهایت به سمت صفر میل می‌کند (دورترین نقطه از بارها).^۱ با دانستن این مطلب قضیهٔ هلمهولتز ثابت می‌کند که می‌توان میدان را به تنهایی به وسیلهٔ دیورژانس و تاو آن را محاسبه کرد. (اثبات قضیهٔ هلمهولتز در پیوست ب کتاب آورده شده است).

۱-۶-۲ پتانسیلها

اگر تاو یک میدان برداری (\mathbf{F}) (در کل فضا) صفر باشد، آن‌گاه \mathbf{F} را می‌توان به صورت گرادینان یک پتانسیل اسکالر (V) نوشت

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \iff \mathbf{F} = -\nabla V \quad (1-۱۰۳)$$

(علامت منفی کاملاً قراردادی است). این نکتهٔ اصلی قضیهٔ زیر است:

قضیهٔ ۱: میدانهای بدون تاو (غیرچرخشی). شرایط زیر هم‌ارزند: (یعنی، \mathbf{F} هنگامی در یکی از معادلات صدق می‌کند که اگر و تنها اگر در تمام معادلات دیگر نیز صدق کند):
(الف) در هر کجا $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.

(ب) $\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ برای هر دو نقطهٔ انتهایی مستقل از مسیر است.

۱. در بعضی مسائل خود بار را بینهایت در نظر می‌گیرند (به عنوان مثال میدان الکتریکی یک سطح بینهایت بزرگ و یا میدان مغناطیسی یک سیم بینهایت طویل را در نظر بگیرید). در چنین مواردی شرایط مرزی عادی کاربردی ندارد و باید از تقارن برای پیدا کردن میدان استفاده کرد.

(ج) برای هر حلقه مسدود $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$ است.

(د) \mathbf{F} گرادیان یک اسکالر است، $\mathbf{F} = -\nabla V$.

پتانسیل اسکالر یکتا نیست زیرا هر ثابتی را می‌توان به V افزود بدون آنکه در گرادیان تأثیر بگذارد. اگر دیورژانس یک میدان برداری \mathbf{F} (در کل فضا) صفر باشد، آنگاه \mathbf{F} را می‌توان تاو یک پتانسیل برداری \mathbf{A} در نظر گرفت

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \iff \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (104-1)$$

نتیجه اصلی این بحث در قضیه زیر آمده است:

قضیه ۲: میدانهای بدون دیورژانس (سیملوله‌ای). شرایط زیر هم‌ارزند:

(الف) در هر کجا $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$.

(ب) $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}$ برای هر خط مرزی مفروض مستقل از سطح است.

(ج) برای هر سطح بسته‌ای $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = 0$ است.

(د) \mathbf{F} تاو یک بردار است، $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$.

پتانسیل برداری یکتا نیست زیرا گرادیان هر تابع اسکالر را می‌توان به \mathbf{A} اضافه کرد بدون آنکه در مقدار تاو اثر بگذارد. چون تاو گرادیان صفر است.

حالا شما باید قادر باشید که تمام ارتباطهای این قضایا را اثبات کنید، بجز این گفته که (الف)،

(ب) یا (ج) مستلزم آن است که (د) برقرار باشد. این اثبات کمی دشوارتر است و بعداً شرح می‌دهیم.

ضمناً در همه موارد میدان برداری \mathbf{F} را (بدون توجه به مقادیر تاو و دیورژانس آن) می‌توان به صورت

مجموع گرادیان یک اسکالر و تاو یک بردار نوشت

$$\mathbf{F} = -\nabla V + \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{همواره}) \quad (105-1)$$

مسئله ۱-۴۹ (الف) فرض کنید $\mathbf{F}_1 = x^2 \hat{z}$ و $\mathbf{F}_2 = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$ ، دیورژانس و تاو \mathbf{F}_1

و \mathbf{F}_2 را حساب کنید. کدام یک را می‌توان به صورت گرادیان یک اسکالر نوشت؟ پتانسیل اسکالری

بیابید که این کار را انجام دهد. کدام یک را می‌توان به صورت تاو یک بردار نوشت؟ یک پتانسیل

بردار مناسب بیابید.

(ب) نشان دهید که $\mathbf{F}_2 = yz \hat{x} + zx \hat{y} + xy \hat{z}$ را، هم می‌توان به صورت گرادیان یک

اسکالر نوشت و هم به صورت تاو یک بردار. پتانسیلهای اسکالر و برداری این تابع را پیدا کنید.

مسئله ۱-۵۰ در قضیه ۱ هلمهولتز نشان دهید که (الف) \Rightarrow (د)، (ج) \Rightarrow (الف)، (ب) \Rightarrow (ج)، (ج) \Rightarrow (ب) و (الف) \Rightarrow (ج).

مسئله ۱-۵۱ در قضیه ۲ هلمهولتز نشان دهید که (الف) \Rightarrow (د)، (ج) \Rightarrow (الف)، (ب) \Rightarrow (ج)، (ج) \Rightarrow (ب) و (الف) \Rightarrow (ج).

مسئله ۱-۵۲ (الف) کدام یک از بردارهای مسئله ۱-۱۵ را می توان به صورت گرادپان یک اسکالر نوشت؟ تابع اسکالری بیابید که چنین کند.

(ب) کدام یک را می توان به صورت تاو یک بردار نوشت؟ چنین برداری را بیابید. \square

مسائل تکمیلی فصل ۱

مسئله ۱-۵۳ با استفاده از یک هشتم حجم کره ای به شعاع R (شکل ۱-۴۸) قضیه دیورژانس تابع زیر را امتحان کنید.

$$\mathbf{v} = r^2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + r^2 \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - r^2 \cos \theta \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

مطمئن شوید که تمام سطح را در نظر گرفته اید.

$$\text{پاسخ: } \frac{R^2}{\pi}.$$

مسئله ۱-۵۴ قضیه استوکس را با استفاده از تابع $\mathbf{v} = ay \hat{\mathbf{x}} + bx \hat{\mathbf{y}}$ (که در آن a و b ثابت اند) و انتخاب یک مسیر دایره ای به شعاع R ، واقع در مرکز صفحه xy امتحان کنید.

$$\text{پاسخ: } \pi R^2 (b - a)$$

مسئله ۱-۵۵ انتگرال خطی تابع زیر را بر روی مسیر مثلثی شکل ۱-۴۹ محاسبه کنید

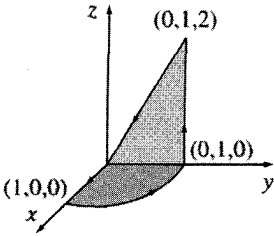
$$\mathbf{v} = 6x \hat{\mathbf{x}} + yz \hat{\mathbf{y}} + (3y + z) \hat{\mathbf{z}}$$

پاسخ خود را با استفاده از قضیه استوکس امتحان کنید.

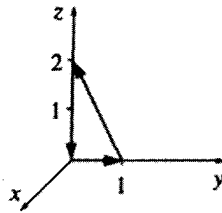
$$\text{پاسخ: } 8/3.$$

مسئله ۱-۵۶ با استفاده از مسیر نشان داده شده در شکل ۱-۵۰ (که مختصات نقاط دکارتی هستند) انتگرال خطی تابع زیر را حساب کنید.

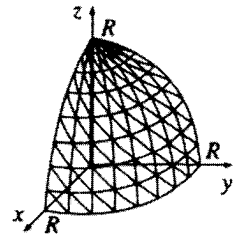
$$\mathbf{v} = (r \cos^2 \theta) \hat{\mathbf{r}} - (r \cos \theta \sin \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} + 3r \hat{\boldsymbol{\phi}}$$



شکل ۴۸-۱



شکل ۴۹-۱



شکل ۵۰-۱

این عمل را با استفاده از مختصات استوانه‌ای و کروی تکرار کنید. با استفاده از قضیهٔ استوکس جواب خود را بیازمایید.
پاسخ: $3\pi/2$.

مسئله ۵۷-۱ با استفاده از سطح مثلثی شکل ۵۱-۱ قضیهٔ استوکس را برای تابع زیر امتحان کنید.

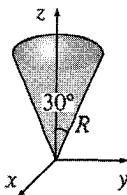
$$\mathbf{v} = y \hat{z}$$

پاسخ: a^2 .

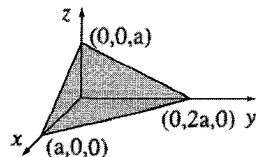
مسئله ۵۸-۱ با استفاده از حجمی به صورت "مخروط بستنی" مطابق شکل ۵۲-۱ قضیهٔ دیورژانس را برای تابع زیر امتحان کنید.

$$\mathbf{v} = r^r \sin \theta \hat{r} + 2r^r \cos \theta \hat{\theta} + r \tan \theta \hat{\phi}$$

پاسخ: $(\pi R^2/12)(2\pi + 3\sqrt{3})$.



شکل ۵۱-۱



شکل ۵۲-۱

مسئله ۱-۵۹. دو راه برای امتحان کردن قضیه بنیادی وجود دارد:

(الف) نتیجه ۲ را با قضیه گرادیان و استوکس ترکیب کنید (در این مورد $v = \nabla T$). نشان دهید که نتیجه حاصل همان خاصیتی است که در مورد مشتقهای دوم می دانستید.

(ب) نتیجه ۲ را با قضیه دیورژانس و استوکس ترکیب کنید و نشان دهید که پاسخ با آنچه از قبل می دانستید سازگار است.

• مسئله ۱-۶۰. گرچه قضایای گرادیان، دیورژانس و تاو قضایای انتگرالی مهم در حسابان برداری هستند، می توان چندین نتیجه هم از آنها گرفت.

(الف) نشان دهید $\int_S T da = \oint_S T dv$ (راهنمایی: قرار دهید $v = cT$ که در آن c یک ثابت است، در قضیه دیورژانس هم از قواعد حاصلضرب استفاده کنید).

(ب) $\int_V (\nabla \times v) d\tau = -\oint_S v \times da$ (راهنمایی: به جای v درقضیه دیورژانس قرار دهید $(v \times c)$).

(ج) $\int_V [T \nabla^2 U + (\nabla T) \cdot (\nabla U)] d\tau = \oint_S (T \nabla U) \cdot da$ (راهنمایی: در قضیه دیورژانس قرار دهید $v = T \nabla U$).

(د) $\int_V (T \nabla^2 U - U \nabla^2 T) d\tau = \oint_S (T \nabla U - U \nabla T) \cdot da$ (راهنمایی: این معادله را قضیه گرین می نامند و خود از معادله (ج) به دست می آید. این معادله هم بعضی وقتها اتحاد گرین نامیده می شود).

(ه) $\int_S \nabla T \times da = -\oint_P T dl$ (راهنمایی: در قضیه استوکس $v = cT$ قرار دهید).

• مسئله ۱-۶۱. انتگرال

$$a \equiv \int_S da \quad (1-61)$$

را گاهی اوقات مساحت برداری سطح S می نامند. اگر S مسطح باشد آن گاه بدیهی است که $|a|$ مساحت معمولی (اسکالر) خواهد بود

(الف) مساحت برداری یک نیمکره به شعاع R را بیابید.

(ب) نشان دهید a برای هر سطح بسته ای صفر است [راهنمایی: از مسئله ۱-۶۰ (الف) استفاده کنید].

(ج) نشان دهید که a برای همه سطوح هم مرز یکسان است.

(د) نشان دهید

$$\mathbf{a} = \frac{1}{V} \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{l} \quad (107-1)$$

این انتگرال حول خط مرزی است (راهنمایی: یک راه برای به دست آوردن این انتگرال آن است که: مخروطی را از رأس روی مبدأ مختصات قرار دهید. سطح جانبی مخروط را به مثلثهای گوه‌ای شکل بسیار کوچک تقسیم کنید، به طوری که رأس همه آنها روی مبدأ باشد و ضلع رو به رأس را $d\mathbf{l}$ بنامید و از تحلیل هندسی ضرب برداری استفاده کنید).
(ه) نشان دهید برای هر بردار ثابت \mathbf{c} داریم

$$\oint (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{l} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (108-1)$$

(راهنمایی: در مسئله ۶۰-۱ قرار دهید $T = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$).

• مسئله ۶۲-۱ (الف) دیورژانس تابع زیر کدام است؟

$$\mathbf{v} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r}$$

ابتدا، مستقیماً مانند معادله (۸۴-۱) محاسبه کنید. نتیجه خود را با استفاده از قضیه دیورژانس همانند معادله (۸۵-۱) بیازمایید. آیا در مبدأ تابع دلتایی نظیر آنچه برای $\hat{\mathbf{r}}/r^2$ بود وجود دارد؟ فرمول کلی دیورژانس $r^n \hat{\mathbf{r}}$ چیست؟

پاسخ: $\nabla \cdot (r^n \hat{\mathbf{r}}) = (n+2)r^{n-1}$ ، غیر از مورد $n = -2$ که در آن صورت پاسخ $4\pi\delta^3(\mathbf{r})$ است.

(ب) تاو $r^n \hat{\mathbf{r}}$ را بیابید. با استفاده از مسئله ۶۰-۱ (ب) کار خود را بیازمایید.
پاسخ: $\nabla \times (r^n \hat{\mathbf{r}}) = 0$.

□

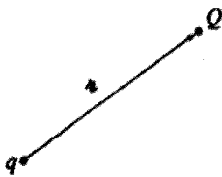
الکتروستاتیک

۱-۲ میدان الکتریکی

۱-۱-۲ مقدمه

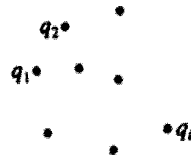
مسئله اساسی که نظریه الکترومغناطیسی به دنبال حل آن است، این است (شکل ۱-۲): فرض کنید بارهای الکتریکی q_1, q_2, q_3, \dots در اختیار داریم (آنها را بارهای چشمه بنامید) نیرویی که این بارها به بار دیگر Q وارد می‌کنند چقدر است؟ (بار Q را بار آزمون می‌نامیم). مواضع بارهای چشمه (به صورت تابعی از زمان) داده می‌شوند و ما باید مسیر حرکت بار Q را تعیین کنیم. در حالت کلی هم بارهای چشمه و هم بار آزمون متحرک هستند.

حل این مسئله با در نظر گرفتن اصل برهم‌نهی آسان می‌شود. این اصل بیان می‌کند که برهم‌کنش بین هر دو بار کاملاً بی‌تأثیر از وجود سایر بارهاست. این بدان معناست که برای محاسبه نیروی وارد بر بار Q ، می‌توان ابتدا نیروی F_1 ناشی از بار q_1 (با چشمپوشی از سایرین) را حساب کرد. سپس نیروی F_2 ناشی از بار q_2 به تنهایی محاسبه می‌شود و این کار تا آخرین بار ادامه می‌یابد. سرانجام این نیروهای جزئی به دست آمده را جمع برداری می‌کنیم: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots$. بنابراین اگر بتوانیم نیروی وارد بر بار Q را از طرف یک بار منفرد پیدا کنیم، عملاً به هدف خود رسیده‌ایم. (بقیه کار در حقیقت تکرار همان روش به دفعات مورد نیاز و آخر سر جمع‌بندی



شکل ۲-۲

• Q



بار آزمون

بار چشمه‌ای

شکل ۱-۲

نتایج به دست آمده است.^(۱)

در وهله اول این کار آسان به نظر می‌رسد: چرا از همان ابتدا فرمولی برای بیان نیروی وارد بر Q از طرف بار q نویسیم و مسئله را خاتمه ندهیم؟ این درست است و در فصل ۱۰ چنین خواهیم کرد، اما در این مرحله اگر شما فرمول مربوطه را ببینید ممکن است نامفهوم به نظر تان برسد، زیرا که نیروی وارد بر بار Q ، نه تنها به فاصله بین دو بار یعنی π بستگی دارد (شکل ۲-۲)، بلکه این نیرو تابعی از سرعت و شتاب نیز هست. (سرعت و شتاب بار q). علاوه بر این، فقط مکان، سرعت و شتاب بار q در حال حاضر چندان مهم نیست. آثار الکترومغناطیس با سرعت نور حرکت می‌کنند بنابراین آن چیزی که برای بار Q تعیین‌کننده است، مکان سرعت و شتاب q در هنگامی است که پیام فرستاده شده است.

بنابراین با وجود آنکه پرسش اساسی (نیروی وارد بر بار Q ناشی از q چیست؟) آسان است، مواجهه ابتدا به ساکن آن چندان سودمند نیست، بلکه بهتر است مرحله به مرحله جلو برویم. در ضمن نظریه‌ای که بر روی آن کار خواهیم کرد، حل مسائل ظریف الکترومغناطیسی را که به صورت چندان ساده‌ای نمایان نمی‌شوند امکان‌پذیر می‌سازد. برای شروع، مورد خاص الکتروستاتیکی یعنی هنگامی را که همه بارهای چشمه‌ای ساکن هستند (گرچه بار آزمون در حرکت باشد) در نظر می‌گیریم.

۲-۱-۲ قانون کولن

نیروی وارد بر بار آزمون Q ناشی از یک بار منفرد نقطه‌ای q که در فاصله π از بار آزمون در حالت سکون قرار دارد چیست؟ پاسخ این پرسش را قانون کولن می‌دهد:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{\pi^2} \hat{\pi} \quad (1-2)$$

۱. اصل برهم‌نهی ممکن است کاملاً واضح جلوه کند، اما مسئله به این سادگیها هم نیست. اگر به عنوان مثال نیروی الکترومغناطیسی متناسب با مربع مجموع بارها می‌بود، این اصل برقرار نمی‌شد زیرا که $q_1^2 + q_2^2 \neq (q_1 + q_2)^2$. (و باید جملات دیگری را در نظر گرفت.) برهم‌نهی ضرورتی منطقی نیست بلکه واقعیتی تجربی است.

ثابت ϵ_0 ضریب گذردهی خلأ نام دارد. برحسب یکاهای SI، که در آن نیرو برحسب نیوتون (N)، فاصله برحسب (m)، و بار برحسب کولن (C) است،

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

به بیانی دیگر، نیرو با حاصلضرب بارها نسبت مستقیم و با مربع فاصله میان دو بار نسبت عکس دارد. مثل همیشه (بخش ۱-۱-۴) π بردار فاصله از Γ (مکان بار q) به Γ (مکان بار Q) است.

$$\pi = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \quad (2-2)$$

π اندازه $\hat{\pi}$ جهت این بردار است. جهت این نیرو در امتداد خط واصل از q به Q است. نیرو جاذبه است، اگر دو بار غیرهمنام باشند و دافعه است اگر دو بار همنام باشند.

محتوای فیزیکی الکتروستاتیک همانا قانون کولن و اصل برهم‌نهی است و بقیه گفته‌ها جز در مواردی از خواص مواد، تعمیم این قواعد بنیادی به شیوه‌های ریاضی است.

مسئله ۱-۲ الف) ۱۲ بار مساوی q در گوشه‌های یک ۱۲ ضلعی منتظم قرار داده شده‌اند (مثلاً بر روی اعداد یک صفحه ساعت). نیروی وارد بر بار آزمون Q که در مرکز قرار دارد چیست؟

ب) فرض کنیم که یکی از ۱۲ بار برداشته شود (باری که روی ساعت ۶ قرار دارد) نیروی وارد بر بار Q چیست؟ استدلال خود را به دقت توضیح دهید.

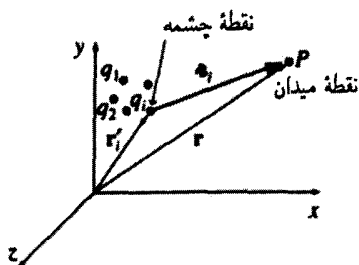
ج) حال ۱۳ بار یکسان q را در ۱۳ رأس یک ۱۳ ضلعی قرار می‌دهیم. نیروی وارد بر بار Q در مرکز چیست؟

د) اگر یکی از ۱۳ بار برداشته شود، نیروی وارد بر بار Q چه می‌شود؟ استدلال خود را توضیح دهید. □

۳-۱-۲ میدان الکتریکی

اگر بارهای q_1, q_2, \dots, q_n را به فاصله‌های $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ از بار Q داشته باشیم، طبق اصل برهم‌نهی بدیهی است که نیروی کل وارد بر بار Q عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 Q}{\pi_1^2} \hat{\pi}_1 + \frac{q_2 Q}{\pi_2^2} \hat{\pi}_2 + \dots \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 \hat{\pi}_1}{\pi_1^2} + \frac{q_2 \hat{\pi}_2}{\pi_2^2} + \frac{q_3 \hat{\pi}_3}{\pi_3^2} + \dots \right) \end{aligned}$$



شکل ۳-۲

یا به عبارتی

$$\boxed{F = QE} \quad (۳-۲)$$

که در آن

$$E(r) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad (۴-۲)$$

E ، میدان الکتریکی بارهای چشمه نامیده می‌شود. توجه داشته باشید که E تابعی از مکان $r = (x, y, z)$ است، به دلیل آنکه بردارهای \hat{r}_i تابع نقطه میدان P هستند (شکل ۳-۲)، اما ارتباطی به بار آزمون Q ندارند. میدان الکتریکی کمیتی برداری است که از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر می‌کند و با توجه به پیکربندی بارهای چشمه، تعیین می‌شود. از لحاظ فیزیکی $E(r)$ نیرو بر واحد بار است که به بار آزمونی که در نقطه P قرار داده می‌شود، وارد خواهد شد.

میدان الکتریکی دقیقاً چیست؟ عمداً با چیزی شروع کردیم که شاید شما آن را کوتاهترین تعبیر برای E در این مقطع از محاسبه میدانهای الکتریکی بنامید. ولی به شما توصیه می‌کنیم که میدان را به عنوان یک کمیت فیزیکی حقیقی که فضای اطراف یک بار الکتریکی را پر می‌کند ببینارید. ماکسول خود بر این باور بود که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی نمایشگر تنشها و کرنشهای واقعی در یک محیط ژله مانند نامرئی به نام "اثر" هستند. نظریه نسبیت خاص ما را بر آن داشته است که اثر و همچنین تعبیر مکانیکی ماکسول از میدانهای الکترومغناطیس را کنار بگذاریم. (همچنین این امکان نیز وجود دارد که الکترودینامیک کلاسیک را به صورت یک نظریه کنش از دور فرمولبندی کنیم و کلاً از مفهوم میدان صرف نظر کنیم.) بنابراین نمی‌توان گفت که میدان چیست — فقط می‌توان از نحوه محاسبات آن و اینکه این میدان چه ارزشی دارد و چه کاربردهایی مطلع شد.

مسئله ۲-۲ (الف) میدان الکتریکی در فاصله z بالای نقطه میانی خط واصل بین دو بار مشابه q ، به فاصله d از یکدیگر را بیابید. بررسی کنید که نتیجه به دست آمده با آنچه برای $d \gg z$ انتظار می‌رفت، همخوانی دارد.

(ب) عملیات قسمت (الف) را با قرار دادن بار $-q$ به جای $+q$ در سمت راست تکرار

□

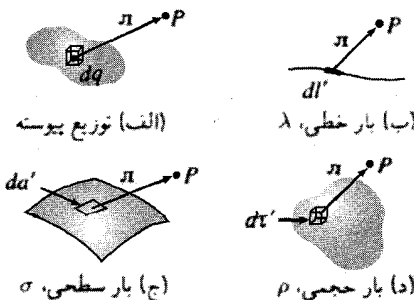
کنید.

۴-۱-۲ توزیع بار پیوسته

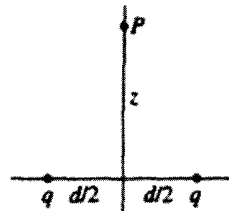
تعریف (۴-۲) را که برای میدان الکتریکی به دست آوردیم، برای فرض استوار است که چشمه ایجادکننده میدان، مجموعه‌ای متشکل از یک تعداد بارهای مجزای q_i است. اگر به جای بارهای مجزا، بار به طور پیوسته در ناحیه‌ای توزیع شده باشد، مجموع به یک انتگرال تبدیل می‌شود. شکل ۵-۲(الف):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{n}} dq \quad (۵-۲)$$

اگر بار روی یک خط [شکل ۵-۲(ب)] با چگالی بار خطی λ (بار بر واحد طول) توزیع شده باشد، در آن صورت $dq = \lambda dl'$ است (که در آن dl' جزء طول روی خط است). اگر بار روی یک سطح با چگالی بار سطحی σ (بار بر واحد سطح) توزیع شده باشد [شکل ۵-۲(ج)] آنگاه $dq = \sigma da'$ (که da' جزء کوچکی از مساحت روی سطح مورد نظر است)؛ و اگر توزیع بار حجمی [شکل ۵-۲(د)] با چگالی بار حجمی ρ (بار بر واحد حجم) داشته باشیم در آن صورت



شکل ۵-۲



شکل ۴-۲

$dq = \rho d\tau'$ (که در آن $d\tau'$ جزء حجم است)

$$dq \rightarrow \lambda dl' \sim \sigma da' \sim \rho d\tau'$$

بنابراین میدان الکتریکی بار خطی برابر است با

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_P \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{\pi^2} \hat{\mathbf{n}} dl' \quad (۶-۲)$$

برای بار سطحی داریم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{\pi^2} \hat{\mathbf{n}} da' \quad (۷-۲)$$

و برای بار حجمی خواهیم داشت

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\pi^2} \hat{\mathbf{n}} d\tau' \quad (۸-۲)$$

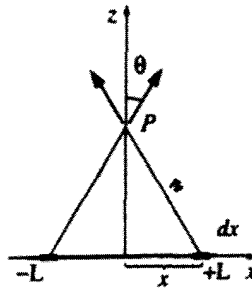
اغلب از معادله (۸-۲) به عنوان قانون کولن یاد می‌شود، به دلیل آنکه اندکی از معادله (۱-۲) یعنی خود معادله کولن تفاوت دارد و همچنین برای اینکه یک بار حجمی به اعتباری عمومی‌ترین و واقعیت‌ترین مورد است. به معنای π در این معادلات با دقت توجه کنید. در معادله (۴-۲)، π_2 نمایانگر بردار واصل از بار چشمه q_i به نقطه میدان \mathbf{r} بود. به همین ترتیب در معادلات (۵-۲) تا (۸-۲)، π نمایانگر برداری از dq (بنابراین از dl' و da' یا $d\tau'$) به نقطه میدان \mathbf{r} است.

مثال ۱-۲

میدان الکتریکی را در فاصله z بالای نقطه میانی یک پاره خط بار به چگالی خطی λ و طول $2L$ بیابید. (شکل ۶-۲).

حل: سودمند خواهد بود که خط را به زوجهای متقارن و متساوی الفاصله از مرکز قسمت کنیم، زیرا در آن صورت مؤلفه‌های افقی دو میدان، همدیگر را خنثی می‌کنند و میدان برابند عبارت

۱. دقت: بردار یکه $\hat{\mathbf{n}}$ ثابت نیست بلکه جهت آن بستگی به نقطه چشمه \mathbf{r}' دارد. بنابراین از زیر انتگرالهای (۵-۲) - (۸-۲) خارج نمی‌شود. در تمرین می‌باید با مؤلفه‌های دکارتی کار کرد ($\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$) و ثابت هستند و خارج می‌شوند) حتی اگر از مختصات کروی برای انتگرال‌گیری استفاده شود.



شکل ۶-۲

خواهد بود از

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\lambda dx}{r^2} \right) \cos\theta \hat{z}$$

در اینجا $\pi = \sqrt{z^2 + x^2}$ و $\cos\theta = z/\pi$ تا L است

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^{L} \frac{\lambda z}{(z^2 + x^2)^{3/2}} dx \\ &= \frac{\lambda z}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x}{z^2 \sqrt{z^2 + x^2}} \right] \Big|_{-L}^L \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{z\sqrt{z^2 + L^2}} \end{aligned}$$

و جهت آن به سمت z های مثبت است.

برای نقطه‌های دور از خط ($z \gg L$) معادله ساده‌تر می‌شود

$$E \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{z^2}$$

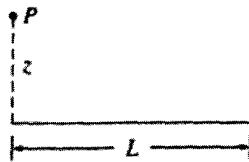
می‌توان فرمول به‌دست آمده را این‌گونه تعبیر کرد: از این فاصله، خط به مانند یک بار نقطه‌ای $q = 2\lambda L$ "به نظر می‌رسد". بنابراین مقدار میدان ناشی از بار نقطه‌ای به صورت $q/(4\pi\epsilon_0 z^2)$ خواهد بود. در حد $L \rightarrow \infty$ ، میدان یک سیم راست نامتناهی به‌دست می‌آید:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{z}$$

یا به طور کلیتر

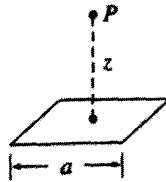
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{s} \quad (9-2)$$

مسئله ۳-۲ میدان الکتریکی را به فاصله z از یک انتهای یک خط با چگالی بار یکنواخت λ و طول L به دست آورید (شکل ۷-۲). بررسی کنید که فرمول به دست آمده با آنچه در مورد $L \gg z$ انتظار دارید همخوانی می‌کند.



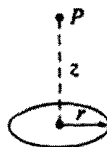
شکل ۷-۲

مسئله ۴-۲ میدان الکتریکی را به فاصله z بالای مرکز یک حلقه مربعی شکل (به اضلاع a) با چگالی یکنواخت λ بیابید (شکل ۸-۲). (پیشنهاد: از نتیجه مثال ۱-۲ استفاده کنید.)

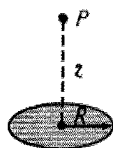


شکل ۸-۲

مسئله ۵-۲ میدان الکتریکی را به فاصله z بالای مرکز یک حلقه دایره‌ای به شعاع r با بار یکنواخت λ بیابید (شکل ۹-۲).



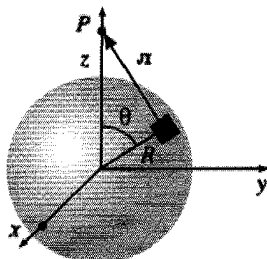
شکل ۹-۲



شکل ۱۰-۲

مسئله ۶-۲ میدان الکتریکی را در فاصله z در بالای مرکز یک قرص دایره‌ای به شعاع R که حاوی بار یکنواخت سطحی σ است حساب کنید (شکل ۱۰-۲). در حد $R \rightarrow \infty$ فرمول شما چه جوابی می‌دهد؟ همچنین حالت $R \gg z$ را نیز بررسی کنید.

مسئله ۷-۲ میدان الکتریکی را در فاصله z از مرکز یک سطح کروی به شعاع R با چگالی بار یکنواخت سطحی σ به دست آورید (شکل ۱۱-۲). هر دو مورد $z > R$ (خارج) و $z < R$ (داخل) را بررسی کنید. پاسخهای خود را برحسب مجموع بار q روی کره بیان کنید. (پیشنهاد: قانون کسینوسها را برای نوشتن π برحسب R و θ به کار ببرید. مطمئن شوید که پاسخ مثبت را برگزیده‌اید. $\sqrt{R^2 + z^2} - 2Rz$ برابر $R - z$ است، اگر $z > R$ باشد و $-R - z$ است اگر $z < R$ باشد.)



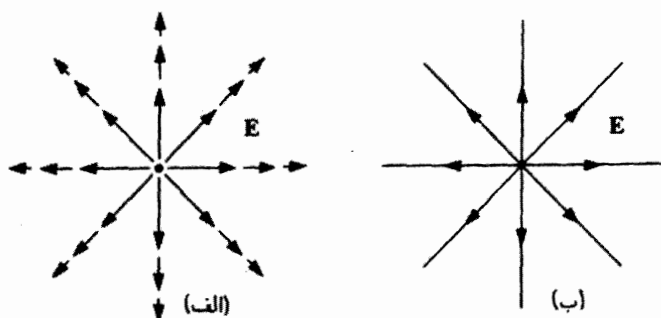
شکل ۱۱-۲

مسئله ۸-۲ از نتیجه به دست آمده در مسئله ۷-۲ برای یافتن میدان در داخل و خارج کره‌ای به شعاع R با چگالی بار یکنواخت حجمی ρ استفاده کنید. پاسخ به دست آمده را برحسب بار کلی کره، q بیان کنید. نمودار $|\mathbf{E}|$ را برحسب فاصله تا مرکز رسم کنید. □

۲-۲ دیورژانس و تاو میدانهای الکتروستاتیک

۱-۲-۲ خطوط میدان و قانون گاوس

قاعدتاً مبحث الکتروستاتیک تمام شده است. معادله (۸-۲) به ما می‌گوید که میدان ناشی از یک توزیع بار را چگونه محاسبه کنیم و معادله (۳-۲) به ما می‌گوید که نیروی وارد بر هر بار Q که در این



شکل ۲-۱۲

میدان قرار بگیرد چیست؟ متأسفانه همان‌گونه که شاید شما نیز در هنگام کار با مسئله ۲-۷ متوجه شده باشید، انتگرالهایی که برای محاسبه E با آنها سروکار داریم، می‌توانند دشوار باشند حتی برای توزیع بارهای ساده. اکثر مباحثی که از این به بعد در الکتروستاتیک بررسی می‌شوند، شامل یافتن راهها و تمهیداتی است که از این انتگرالها بتوان دوری جست. همه کار با دیورژانس و ناو گرفتن از E آغاز می‌شود. دیورژانس E در بخش ۲-۲-۲ مستقیماً از روی فرمول (۸-۲) محاسبه خواهد شد. اما ابتدا از یک روش کیفی که مسلماً روشن‌گرانه‌تر نیز خواهد بود، شروع می‌کنیم. ساده‌ترین مورد، بار نقطه‌ای q واقع در مبدأست

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (۱۰-۲)$$

برای به‌دست آوردن احساسی از این میدان، مانند قبل چند بردار مشخصه را رسم می‌کنیم. به دلیل آنکه میدان به صورت $1/r^2$ کم می‌شود هر قدر از مبدأ دورتر شویم، بردارها کوتاه‌تر می‌شوند [شکل ۲-۱۲(الف)]. جهت این بردارها همواره رو به خارج است. اما روش زیباتری نیز برای نمایش دادن این میدان وجود دارد و آن این است که این بردارها را به یکدیگر متصل کنیم تا از آنها خطوط میدان بسازیم [شکل ۲-۱۲(ب)]. ممکن است تصور کنید که با این عمل اطلاعات راجع به قدرت میدان مذکور که در طول پیکانها نهفته بود از بین می‌روند. اما در واقع چنین نیست. بزرگی میدان توسط چگالی خطوط میدان نشان داده می‌شود، به این صورت که نزدیک به مرکز که خطوط میدان به هم فشرده‌ترند، میدان قوی است و در مکانهای دور از مرکز ضعیف است.

در حقیقت، رسم خطوط میدان در یک صفحه دایره‌ای، تا حدودی گمراه‌کننده است، زیرا چگالی خطوطی که از یک دایره با شعاع r می‌گذرند برابر است با تعداد کل خطوط، تقسیم بر محیط دایره، $(n/2\pi r)$ که نسبت $(1/r)$ را به‌دست می‌دهد نه $(1/r^2)$. ولی اگر شما تصویری سه‌بعدی از این مدل داشته باشید (مانند یک قطعه چوب‌پنبه که سوزنهایی را در همه جهتها به آن

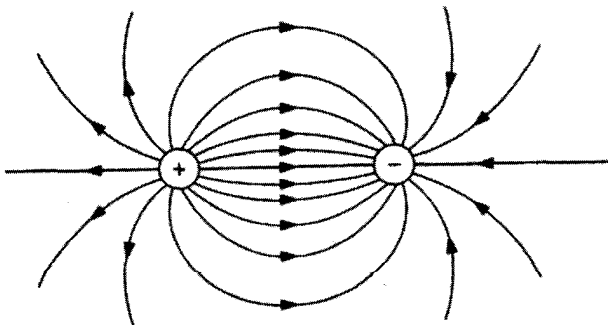
فرو کرده باشید)، در آن صورت چگالی خطوط عبارت از تعداد کل خطوط تقسیم بر محیط کره: $(n/4\pi r^2)$ است که در این صورت نسبت $(1/r^2)$ به دست می آید.

چنین نمودارهایی برای نمایش دادن میدانهای پیچیده تر نیز سودمندند. البته تعداد خطوطی که رسم می کنید بستگی به این دارد که تا چه اندازه مهارت دارید (و البته به تیزی نوک مدادتان نیز وابسته است)، پس باید دقت داشت که تعداد خطوط مفهوم صحیحی از میدان را به دست دهد و باید مطمئن شد که: اگر برای بار q ، ۸ خط در نظر گرفته اید، برای بار $2q$ می باید ۱۶ خط رسم کنید. همچنین فاصله های این خطوط باید متساوی باشد زیرا که این خطوط که از یک بار نقطه ای به طور متقارن در همه جهتها گسیل می شوند؛ خطوط میدان از بار مثبت شروع و به بار منفی ختم می شوند و نمی توانند بی هدف در فضا قطع شوند. بنابراین در مواردی تا بینهایت گسترش می یابند. علاوه بر این خطوط میدان هیچگاه همدیگر را قطع نمی کنند (چرا که در نقطه تقاطع، میدان در آن واحد دارای دو جهت خواهد شد). با به خاطر سپردن این نکته ها، طراحی هر میدان ناشی از پیکربندی ساده بارهای نقطه ای آسان خواهد بود: در آغاز در اطراف بار خطوط را رسم کنید و سپس، بسته به مورد، آنها را به هم وصل کنید و یا تا بینهایت ادامه دهید. (شکلهای ۲-۱۳ و ۲-۱۴).

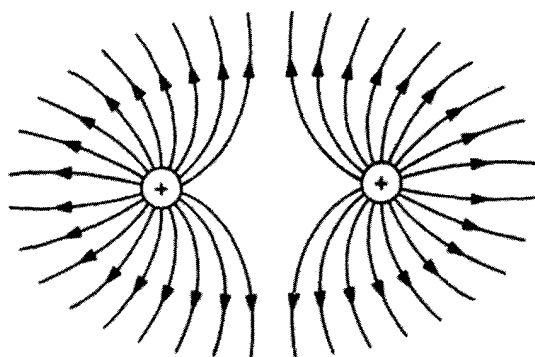
در این مدل شار E گذرنده از سطح S نشان دهنده تعداد خطوط میدان گذرنده از S است

$$\Phi_E \equiv \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (11-2)$$

البته باید به این نکته اشاره کرد که ما فقط می توانیم تعدادی از خطوط نیرو را به عنوان نمونه رسم کنیم — تعداد کل خطوط بینهایت است. اما برای تعداد خطوط نمونه داده شده شار متناسب است با

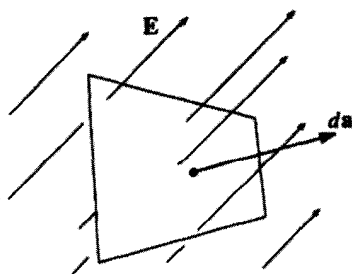


بارهای مساوی و مخالف



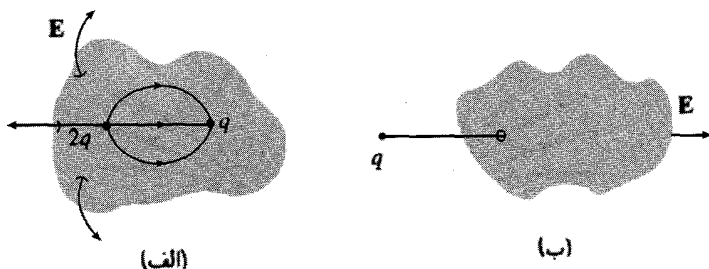
بارهای مساوی

شکل ۱۴-۲



شکل ۱۵-۲

تعداد خطوط رسم شده؛ زیرا همان طور که به خاطر دارید شدت میدان با چگالی خطوط میدان (تعداد بر واحد سطح) متناسب است از این رو $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ با تعداد خطوط عبوری از سطح بسیار کوچک da متناسب است. (ضرب نقطه‌ای مؤلفه da در جهت \mathbf{E} را همان گونه که در شکل ۱۵-۲ دیده می‌شود مشخص می‌کند. فقط در صفحه عمود بر \mathbf{E} چگالی خطوط میدان با تعداد خطوط بر واحد سطح برابر است). این نشان می‌دهد که شار گذرنده از هر سطح بسته، برابر با بار کل درون آن سطح است. خطوط میدان ناشی از یک بار مثبت از سطح خارج می‌شوند و خطوط مربوط به یک بار منفی به داخل سطح می‌روند [شکل ۱۶-۲ (الف)]. از طرف دیگر بار خارج از یک سطح هیچ تأثیری بر شار کل گذرنده از آن سطح ندارد مگر اینکه خطوط میدان ناشی از این بار از یک طرف وارد سطح و از سوی دیگر از سطح مورد نظر خارج شود [شکل ۱۶-۲ (ب)]. این مطلب اساس قانون گاوس است. حال این قانون را به طور کمی مورد بررسی قرار می‌دهیم.



شکل ۱۶-۲

برای مورد بار نقطه‌ای واقع در مبدأ، شار \mathbf{E} گذرنده از یک کره به شعاع r عبارت است از

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot (r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\epsilon_0} q \quad (12-2)$$

از آنجایی که مساحت سطح با نسبت r^2 زیاد می‌شود، میدان با نسبت $1/r^2$ کاهش می‌یابد، لذا شعاع کره از صورت و مخرج حذف می‌شود و حاصلضرب ثابت می‌ماند. در روش تصویر به وسیله خطوط میدان، این کار سودمند است، زیرا که تعداد خطوط گذرنده از هر کره که مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات باشد، بدون توجه به اندازه آن، یکی، است. در حقیقت احتیاجی نیست که سطح ما کروی باشد، هر سطح دیگر، بدون توجه به شکل آن همان تعداد خطوط را شامل می‌شود. در نتیجه شار گذرنده از هر سطحی که بار q را احاطه کند q/ϵ_0 خواهد بود.

حال تصور کنید که به جای یک بار منفرد در مبدأ، یک مجموعه از بار پخش شده، داشته باشیم. طبق اصل برهم‌نهی، میدان حاصل به‌طور ساده عبارت خواهد شد از جمع برداری هر میدان منفرد:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i$$

بنابراین شار گذرنده از هر سطحی که آنها را احاطه می‌کند عبارت است از

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \left(\oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{a} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\epsilon_0} q_i \right)$$

بنابراین می‌توان برای هر سطح بسته‌ای نتیجه گرفت

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{enc} \quad (13-2)$$

که در آن Q_{enc} ، کل بار محصورشده در درون سطح است. بیان بالا به قانون گاوس موسوم است. گرچه این قاعده، اطلاعات مازاد بر آنچه تاکنون در قانون کولن و اصل برهم نهی دیده ایم ندارد، اما چنانکه در بخش ۲-۲-۳ خواهیم دید، از قدرتی تقریباً جادویی برخوردار است. توجه داشته باشیم که تمامی آنچه گفته شد با استفاده از خاصیت بستگی قانون کولن به $1/r^2$ بود. زیرا در غیر این صورت حذف r از صورت و مخرج در معادله (۱۲-۲) اتفاق نمی افتاد و شار E نه تنها به مجموع بار محصورشده در سطح، بلکه به نوع سطح انتخابی نیز وابستگی پیدا می کرد. نیروهای دیگری نیز که از $1/r^2$ پیروی می کنند (منظور، به ویژه قانون گرانش عمومی نیوتون است) به شیوه خودشان از قانون گاوس تبعیت می کنند و کاربردهایی که در اینجا گفته خواهد شد، به طرز مشابه در مورد آنها استفاده دارد. همان طور که پیداست قانون گاوس یک معادله انتگرالی است، اما می توان آن را به سهولت به یک معادله دیفرانسیلی تبدیل کرد. برای توزیع بارهای پیوسته با به کارگیری قضیه دیورژانس داریم

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) d\tau$$

با بازنویسی Q_{enc} برحسب چگالی بار ρ خواهیم داشت

$$Q_{enc} = \int_V \rho d\tau$$

بنابراین قانون گاوس به شکل زیر در می آید

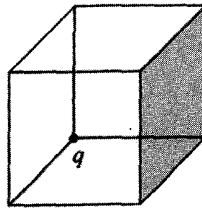
$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) d\tau = \int_V \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) d\tau$$

و از آنجایی که معادله فوق برای هر حجمی برقرار است، توابع زیر انتگرال باید برابر باشند:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho} \quad (14-2)$$

معادله (۱۴-۲)، همان معادله (۱۳-۲) به نگارش دیگر است و می توان آن را قانون گاوس در شکل دیفرانسیلی نامید. شکل دیفرانسیلی شسته و رفته به نظر می رسد. حال آنکه شکل انتگرالی این مزیت را داراست که بارهای نقطه ای خطی و سطحی را طبیعیتر تطبیق می دهد.

مسئله ۹-۲ فرض کنید که از یک منطقه میدان الکتریکی به صورت $\mathbf{E} = kr^2 \hat{\mathbf{r}}$ در مختصات کروی به دست آید (k مقداری ثابت است).



شکل ۱۷-۲

(الف) چگالی بار ρ را به دست آورید.

(ب) مجموع بارهای موجود در کره‌ای به شعاع R را که مرکز آن منطبق بر مبدأ باشد به دست آورید (این کار را به دو روش متفاوت انجام دهید).

مسئله ۱۰-۲ بار q را در گوشه پستی یک مکعب، چنان‌که در شکل ۱۷-۲ نشان داده شده است قرار می‌دهیم. شار الکتریکی گذرنده \mathbf{E} از درون وجه سایه‌زده شده چقدر است؟ □

۲-۲-۲ دیورژانس \mathbf{E}

حال به معادله (۸-۲) برمی‌گردیم و دیورژانس \mathbf{E} را مستقیماً از روی آن محاسبه می‌کنیم، شکل صریح‌تر این معادله عبارت است از

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{تمام فضا}} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (۱۵-۲)$$

(قاعدتاً، انتگرال‌گیری روی حجمی که بار توسط آن اشغال شده انجام می‌گیرد اما می‌توان به همین ترتیب آن را به تمام فضا گسترش داد چرا که در نقاط دیگر $\rho = 0$ است.) با توجه به آنکه بستگی به \mathbf{r} در $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ نهفته است، خواهیم داشت

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

این دقیقاً همان دیورژانسی است که در معادله (۱-۱۰) آن را محاسبه کردیم

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = 4\pi\delta^3(\mathbf{r})$$

بنابراین

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\tau' = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad (۱۶-۲)$$

که همان قانون گاوس به شکل دیفرانسیلی است (۱۴-۲). برای به دست آوردن شکل انتگرالی (۱۳-۲)، از انتگرال قبلی به طور معکوس بهره می‌گیریم و با به کارگیری قضیه دیورژانس و انتگرال‌گیری نهایتاً به دست می‌آوریم

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{محصور}}$$

۳-۲-۲ کاربردهای قانون گاوس

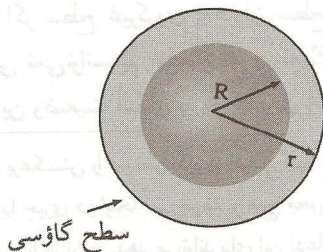
در اینجا برای توجه هر چه بیشتر به قدرت خارق‌العاده قانون گاوس به شکل انتگرالی آن موقتاً از ادامه بحث صرف‌نظر می‌کنیم. هرگاه تقارن اجازه بدهد، قانون گاوس سریعترین و آسانترین وسیله برای محاسبه میدانهای الکتریکی محسوب می‌شود. چند مثال روش را بهتر روشن می‌سازد.

مثال ۲-۲

میدان واقع در بیرون یک کره توپر به شعاع R و بار کل q را به دست آورید.

حل: یک سطح کروی به شعاع $r > R$ (شکل ۱۸-۲) رسم کنید. این سطح موسوم به سطح گاوسی است. قانون گاوس می‌گوید که برای این سطح (به مانند هر سطح دیگر) داریم

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{محصور}}$$



شکل ۱۸-۲

و $Q_{enc} = q$ است. ابتدا این مطلب کمک چندانی نمی‌کند زیرا کمیتی که ما به دنبال آن هستیم (\mathbf{E}) در انتگرال سطح فوق محصور شده است. خوشبختانه با توجه به تقارن می‌توانیم \mathbf{E} را از زیر انتگرال بیرون بکشیم به دلیل آنکه \mathbf{E} قطعاً جهتی رو به سمت خارج و به صورت شعاعی دارد.^۱ همان‌گونه که da نیز دارای این جهت است. بنابراین می‌توان ضرب نقطه‌ای دو بردار را به صورت ضرب اندازه‌هایشان در نظر گرفت

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_S |\mathbf{E}| da$$

و بزرگی \mathbf{E} در سرتاسر سطح گاوسی ثابت است. بنابراین از زیر انتگرال خارج می‌شود

$$\int_S |\mathbf{E}| da = |\mathbf{E}| \int_S da = |\mathbf{E}| 4\pi r^2$$

بنابراین

$$|\mathbf{E}| 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

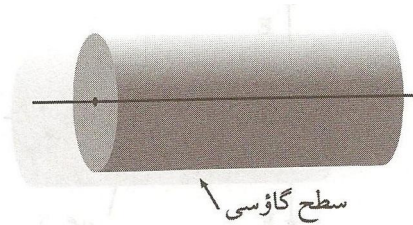
یا

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

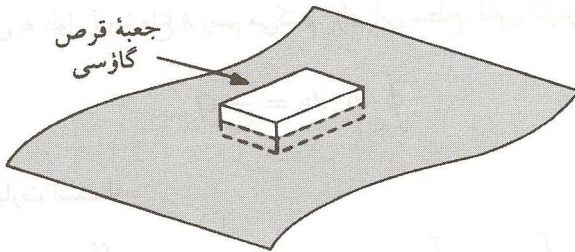
به خصلت جالب توجه این نتیجه دقت کنید. میدان خارج کره دقیقاً با مقدار موردی که تمام بار کره را در مرکز آن متمرکز سازیم، برابر است. ■

قانون گاوس همواره برقرار است، ولی همیشه سودمند نیست. اگر ρ به شکل یکنواخت نباشد (یا تقارن کروی نداشته باشد) یا اگر سطح غیرکروی به‌عنوان سطح گاوس انتخاب می‌شود، شار همچنان q/ϵ_0 باقی می‌ماند ولی نمی‌توانستیم مطمئن شویم که \mathbf{E} و da هم جهت هستند و یا اینکه اندازه آن ثابت است و در این وضعیت امکان بیرون کشیدن $|\mathbf{E}|$ از زیر انتگرال وجود ندارد.

۱. اگر به شعاعی بودن \mathbf{E} شک دارید، برعکسش را در نظر بگیرید. فرض کنید \mathbf{E} از استوا به طرف شرق است اما ست‌گیری استوا کاملاً اختیاری است زیرا چیزی در اینجا نمی‌چرخد و هیچ محور شمال-جنوب طبیعی وجود ندارد. بنابراین هر استدلالی که ادعا کند \mathbf{E} شرق را نشان می‌دهد می‌تواند برای این ادعا که \mathbf{E} نشان‌دهنده غرب یا شمال یا هر جهت دیگری است مورد استفاده قرار گیرد. تنها جهت منحصر به‌فرد در یک کره، جهت شعاعی است.



شکل ۱۹-۲



شکل ۲۰-۲

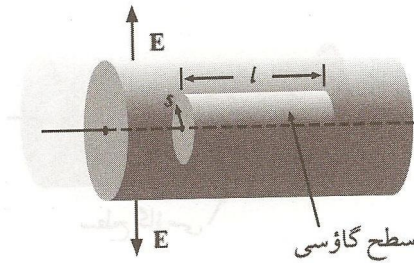
تقارن یک شرط لازم برای به‌کارگیری قانون گاوس به این صورت محسوب می‌شود، دست‌کم سه تقارن سودمند وجود دارند:

۱. تقارن کروی. سطح گاوسی را به شکل کره هم‌مرکز در نظر بگیریم.
۲. تقارن استوانه‌ای. سطح گاوسی را به شکل یک استوانه هم‌محور در نظر بگیریم (شکل ۱۹-۲).
۳. تقارن صفحه‌ای. سطح گاوسی را به شکل مکعبی در نظر بگیرید که صفحه مورد نظر از وسط آن عبور کند. (شکل ۲۰-۲).

گرچه شماره‌های ۲ و ۳ محتاج استوانه‌های طویل نامتناهی و صفحه‌ای است که در همهٔ جهتها تا بینهایت امتداد دارند، ولی ما از آنها برای به‌دست آوردن پاسخهای تقریبی برای استوانه‌های طویل و صفحات بزرگ استفاده خواهیم کرد.

مثال ۲-۳

یک استوانهٔ طویل (شکل ۲۱-۲) دارای چگالی بار متناسب با فاصله از محور است: $\rho = k \cdot s$ که در آن k مقداری ثابت است. میدان الکتریکی را در درون استوانه بیابید.



شکل ۲۱-۲

حل: استوانه گاوسی به طول l و شعاع s رسم می‌کنیم. برای این سطح، قانون گاوس بیان می‌کند که

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{محصور}}$$

بار محصور شده عبارت است از

$$Q_{\text{محصور}} = \int \rho d\tau = \int (ks')(s' ds' d\phi dz) = 2\pi kl \int_0^s s'^2 ds' = \frac{2}{3}\pi kls^3$$

(که در آن جزء حجم نسبت به مختصات استوانه‌ای، معادله (۱-۷۸)، به‌کار گرفته می‌شوند. ϕ از 0 تا 2π و z از 0 تا l انتگرال‌گیری می‌شوند. علامت پریم بر روی متغیر انتگرال‌گیری s' به جهت تمیز دادن آن از شعاع s سطح گاوسی، قرار داده شده است.)
حال تقارن بیان می‌کند که \mathbf{E} می‌بایست جهتی شعاعی و رو به سمت خارج داشته باشد. بنابراین برای قسمت خمیده استوانه گاوسی خواهیم داشت

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int |\mathbf{E}| da = |\mathbf{E}| \int da = |\mathbf{E}| 2\pi sl$$

در اینجا $2\pi sl$ انتهای استوانه (قاعده‌ها) به دلیل آنکه \mathbf{E} و $d\mathbf{a}$ در آنها برهم عمودند، نقشی در اندازه‌گیری ندارند. پس

$$|\mathbf{E}| 2\pi sl = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{2}{3}\pi kls^3$$

در نتیجه

$$\mathbf{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} ks^2 \hat{s}$$

مثال ۲-۴

یک صفحه نامتناهی دارای بار سطحی یکنواخت σ است. میدان الکتریکی آن را بیابید.

حل: یک جعبه گاوسی را با فاصله مساوی از صفحه در بالا و پایین آن رسم کنید و قانون گاوس را برای آن به کار برید (شکل ۲-۲۲).

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{محصور}}$$

در این مورد محصور Q برابر σA است که در آن A مساحت سطوح بالایی یا پایینی مکعب است. طبق تقارن، جهت میدان الکتریکی به سمت خارج صفحه است (برای نقاط بالایی رو به سمت بالا و برای نقاط پایینی رو به سمت پایین است). بنابراین صفحات بالایی و پایینی نتیجه می‌دهند

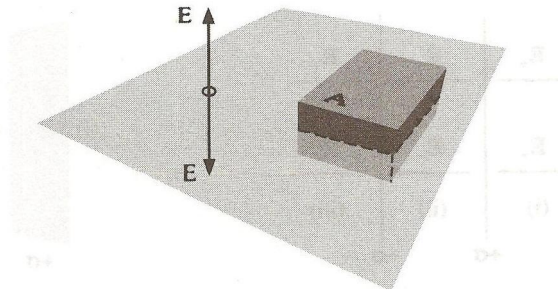
$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 2A|\mathbf{E}|$$

که در آن سطوح جانبی نقشی ندارند. بنابراین

$$2A|\mathbf{E}| = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A$$

یا

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n} \quad (17-2)$$



شکل ۲-۲۲

که در آن \hat{n} بردار یکه‌ای است که جهتش به سمت خارج سطح است. در مسئله ۲-۶ نیز همین نتیجه، با سختی بیشتر گرفته می‌شود.

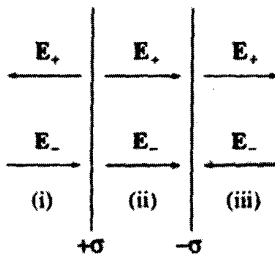
در ابتدا این مسئله که میدان یک صفحه نامتناهی مستقل از فاصله صفحه به دست می‌آید تعجب‌آور است. پس تکلیف نسبت $1/r^2$ در قانون کولن چه می‌شود؟ نکته در اینجاست که هر چه از صفحه دورتر می‌شویم بارهای بیشتری در محدوده دید قرار می‌گیرند (مخروطی از چشم شما به طرف خارج گسترش می‌یابد) و این مطلب اثر کاهش‌یابنده هر قطعه جزئی را جبران می‌کند. میدان یک کره به نسبت $1/r^2$ کاهش می‌یابد؛ میدان یک خط طویل نامتناهی به نسبت $1/r$ کاهش می‌یابد و میدان ناشی از یک صفحه نامتناهی، هیچ‌گاه کاهش نمی‌یابد. ■

گرچه استفاده مستقیم از قانون گاوس برای محاسبه میدانهای الکتریکی محدود به تقارنهای کروی، استوانه‌ای و صفحه‌ای می‌شود، می‌توان ترکیباتی از این تقارن‌ها را نیز در نظر گرفت به طوری که ممکن است این ترکیبات متقارن نباشند. بنابراین با به‌کارگیری اصل برهم‌نهی، مثلاً می‌توان میدان را در مجاورت دو استوانه موازی که به‌طور یکنواخت باردار شده‌اند یا یک کره در نزدیکی یک صفحه باردار نامتناهی محاسبه کرد.

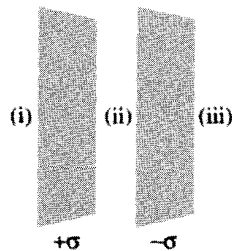
مثال ۲-۵

دو صفحه نامتناهی موازی حاوی چگالی بار مساوی یکنواخت ولی مختلف‌العلامت $\pm\sigma$ هستند (شکل ۲-۲۳). میدان را در این سه منطقه بیابید: (i) در طرف چپ هر دو؛ (ii) میان آن دو؛ (iii) در طرف راست هر دو.

حل: صفحه سمت چپ، میدان $\sigma(1/2\epsilon_0)$ را ایجاد می‌کند، که جهت آن در منطقه (i) به سمت چپ و در مناطق (ii) و (iii) به سمت راست است (شکل ۲-۲۴). صفحه سمت راست که دارای بار منفی است میدان $\sigma(1/2\epsilon_0)$ را ایجاد می‌کند که جهت آن در مناطق (i) و (ii) به سمت



شکل ۲-۲۴



شکل ۲-۲۳

راست و در منطقه (iii) به سمت چپ است. دو میدان در مناطق (i) و (iii) همدیگر را خنثی می‌کنند و در منطقه (ii) به هم اضافه می‌شوند. نتیجه: میدان در میان دو صفحه σ ($1/\epsilon_0$) است و جهت آن به سمت راست است و در سایر نقاط میدان صفر است. ■

مسئله ۱۱-۲ با به‌کارگیری قانون گاوس، میدان الکتریکی درون و بیرون یک پوسته کروی به شعاع R را که دارای چگالی بار سطحی یکنواخت σ است بیابید. پاسخ خود را با مسئله ۷-۲ مقایسه کنید.

مسئله ۱۲-۲ با به‌کارگیری قانون گاوس میدان الکتریکی درون یک کره را که با چگالی بار یکنواخت ρ باردار شده است بیابید. پاسخ خود را با مسئله ۸-۲ مقایسه کنید.

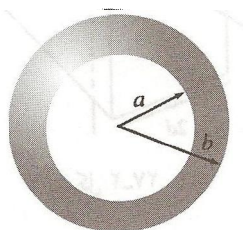
مسئله ۱۳-۲ میدان الکتریکی در فاصله s از یک سیم طویل نامتناهی را که حاوی چگالی بار یکنواخت خطی λ است بیابید. پاسخ خود را با معادله (۹-۲) مقایسه کنید.

مسئله ۱۴-۲ میدان الکتریکی درون یک کره را که دارای چگالی بار متناسب با فاصله از مبدأ، $\rho = kr$ (k عدد ثابت) است بیابید. (راهنمایی: این چگالی بار یکنواخت نیست و برای به‌دست آوردن بار محصورشده، باید انتگرال‌گیری کرد.)

مسئله ۱۵-۲ یک پوسته کروی توخالی دارای چگالی بار

$$\rho = \frac{k}{r^2}$$

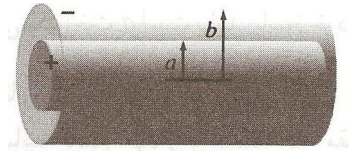
در منطقه $a \leq r \leq b$ است (شکل ۲۵-۲). میدان الکتریکی را در این سه منطقه بیابید: (i) $r < a$; (ii) $a < r < b$; (iii) $|E| \cdot r > b$ را برحسب تابعی از r بیابید.



شکل ۲۵-۲

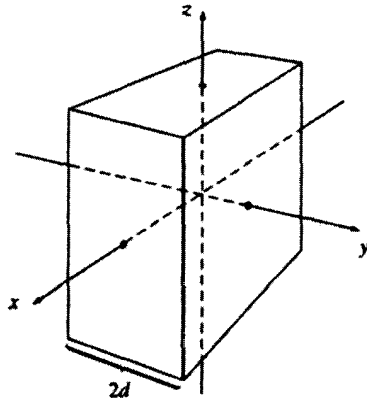
مسئله ۱۶-۲ یک کابل طویل هم‌محور (شکل ۲۶-۲) دارای چگالی بار حجمی یکنواخت ρ در استوانه داخلی (به شعاع a) و چگالی بار یکنواخت سطحی بر روی پوسته خارجی (به شعاع b)

است. این بار سطحی منفی، درست به اندازه‌ای است که کابل کلاً از لحاظ الکتریکی خنثی است. میدان الکتریکی را در این سه منطقه بیابید. (i) درون استوانه داخلی ($s < a$); (ii) میان دو استوانه ($a < s < b$); (iii) خارج کابل ($s > b$) را برحسب تابعی از s بیابید.



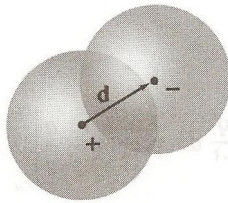
شکل ۲-۲۶

مسئله ۲-۱۷ یک تیغه مسطح نامتناهی به ضخامت $2d$ (شکل ۲-۲۷) دارای چگالی بار حجمی ρ یکنواخت است. میدان الکتریکی را برحسب تابعی از y که در مرکز $y = 0$ است بیابید. E را برحسب y رسم کنید. اگر E در جهت y +ها بود آن را مثبت و اگر در جهت y -ها بود آن را منفی بخوانید.



شکل ۲-۲۷

• مسئله ۲-۱۸ دو کره هریک به شعاع R دارای چگالی بارهای یکنواخت $+\rho$ و $-\rho$ هستند و طوری کنار هم قرار داده شده‌اند که تا اندازه‌ای همپوشان‌اند (شکل ۲-۲۸). بردار رسم شده از مرکز کره منفی به مرکز کره مثبت را d بنامید. نشان دهید که میدان در منطقه همپوشان ثابت است و مقدار آن را بیابید. (راهنمایی: از پاسخ مسئله ۲-۱۲ استفاده کنید). □



شکل ۲۸-۲

۴-۲-۲ تاو \mathbf{E}

نظیر آنچه برای دیورژانس در بخش ۱-۲-۲ انجام دادیم، ابتدا تاو \mathbf{E} را در ساده‌ترین حالت، یعنی یک بار نقطه‌ای واقع در مبدأ، محاسبه می‌کنیم. در این حالت داریم

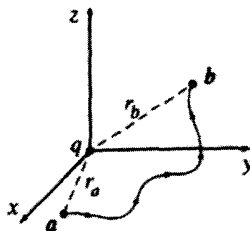
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

نگاهی مختصر به شکل ۱۲-۲ باید ما را متقاعد سازد که تاو این میدان صفر است، ولی بهتر است کمی دقیقتر از یک نگاه اجمالی با مسئله روبه‌رو شویم. انتگرال خطی این میدان را از نقطه \mathbf{a} تا \mathbf{b} محاسبه می‌کنیم

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

در مختصات کروی، $d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin\theta d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$ ، بنابراین

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$



شکل ۲۹-۲

و از آنجا

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{q}{r^2} dr = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \Big|_{r_a}^{r_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_a} - \frac{q}{r_b} \right) \quad (18-2)$$

که در آن r_a فاصله از مبدأ تا نقطه \mathbf{a} و r_b فاصله از مبدأ تا نقطه \mathbf{b} است. انتگرال به دور یک مسیر بسته به وضوح نتیجه صفر را می‌دهد ($r_a = r_b$).

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (19-2)$$

و با به‌کارگیری قضیه استوکس

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (20-2)$$

معادلات (۱۹-۲) و (۲۰-۲) برای یک بار منفرد که در مبدأ داده شده باشد، اثبات شدند. اما این نتایج هیچگونه بستگی به نوع مختصات انتخابی ندارند و همچنین به اینکه بار در کجا قرار گرفته باشد، نیز مربوط نمی‌شوند. علاوه بر اینها، اگر تعداد زیادی بار نیز داشته باشیم، بنابراین اصل برهم‌نهی میدان حاصل عبارت است از جمع برداری هر میدان منفرد:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots$$

بنابراین

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots) = (\nabla \times \mathbf{E}_1) + (\nabla \times \mathbf{E}_2) + \dots = 0$$

در نتیجه معادلات (۱۹-۲) و (۲۰-۲) برای هر نوع توزیع بار ساکن برقرارند.

مسئله ۱۹-۲ $\nabla \times \mathbf{E}$ را مستقیماً از روی معادله (۱۸-۲) با همان روش بخش (۲-۲-۲) محاسبه کنید. اگر به اشکال برخوردید، به مسئله ۱-۶۲ مراجعه کنید. □

۳-۲ پتانسیل الکتریکی

۱-۳-۲ معرفی پتانسیل

میدان الکتریکی \mathbf{E} یک نوع تابع برداری عادی نیست، بلکه نوع خاصی از تابع برداری است که تاو آن همواره صفر است. به عنوان مثال $\mathbf{E} = y\hat{x}$ احتمالاً نمی‌تواند یک میدان الکتروستاتیک باشد؛ به بیان دیگر هیچ مجموعه باری، بدون توجه به مکان یا اندازه‌شان نمی‌تواند چنین میدانی را ایجاد کند. در این بخش قصد داریم با استفاده از این خاصیت یک مسئله برداری (یافتن \mathbf{E}) را به یک مسئله ساده‌تر اسکالر تبدیل کنیم. در بخش ۱-۶-۲ این نتیجه‌گیری را کردیم که هر برداری را که تاو آن صفر باشد می‌توان با گرادیان یک اسکالر برابر گرفت. چیزی که اکنون انجام خواهیم داد تعقیب کردن روشی مشابه بیان فوق در زمینه الکتروستاتیک است.

از آنجایی که $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ است، انتگرال خط \mathbf{E} به دور هر حلقه بسته‌ای برابر صفر است (که از قانون استوکس پیروی می‌کند). از آنجایی که $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ، انتگرال خطی \mathbf{E} از نقطه \mathbf{a} به نقطه \mathbf{b} برای تمامی مسیرها یکسان است. [در نتیجه طبق شکل ۲-۳ می‌توانیم از مسیر (i) خارج شویم و از مسیر (ii) به نقطه شروع برگردیم که در این صورت $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ مخالف صفر می‌شود.] چون $\oint_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ مستقل از مسیر است می‌توان تابعی به صورت زیر تعریف کرد.^۱

$$V(\mathbf{r}) \equiv - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (21-2)$$

در اینجا \mathcal{O} یک مرجع استاندارد است که قبلاً بر سر آن توافق شده است. بنابراین V فقط تابعی از \mathbf{r} می‌شود و آن را پتانسیل الکتریکی می‌نامند.



شکل ۲-۳

۱. برای از بین بردن هر گونه ابهام ممکن، باید بر روی متغیر انتگرال‌گیری بریم قرار داد:

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}'$$

اما این روش نگارش بسیار پر زحمت است. و هر کجا که ممکن باشد پرمیها را برای نقاط چشمه در نظر می‌گیریم. با وجود این وقتی (مثل مثال ۲-۶) صریحاً این انتگرالها را محاسبه می‌کنیم پرمیها را باید در نظر بگیریم.

ظاهراً اختلاف پتانسیل بین نقاط a و b به قرار زیر است

$$\begin{aligned} V(b) - V(a) &= -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \end{aligned} \quad (22-2)$$

حال طبق قضیه اساسی گرادیان داریم

$$V(b) - V(a) = \int_a^b (\nabla V) \cdot d\mathbf{l}$$

بنابراین

$$\int_a^b (\nabla V) \cdot d\mathbf{l} = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

چون معادله فوق برای هر نقطه‌ای برقرار است، توابع زیر انتگرال باید برابر باشند

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V} \quad (23-2)$$

معادله (۲۳-۲) فرم دیفرانسیلی معادله (۲۱-۲) است. این معادله بیان می‌کند که میدان الکتریکی را می‌توان برابر گرادیان یک پتانسیل اسکالر در نظر گرفت.

توجه داشته باشید که مستقل از مسیر بودن (یا معادل آن $\nabla \times \mathbf{E} = 0$) چه نقش دقیق و قاطعی در این مبحث بازی می‌کند. اگر انتگرال خطی \mathbf{E} به مسیر انتخابی، بستگی داشت، در آن صورت معرفی V در معادله (۲۱-۲) بی‌معنی می‌بود، چرا که در آن صورت تعویض مسیر، موجب تغییر مقدار $V(\mathbf{r})$ می‌شد. به هر حال، از علامت منفی در معادله (۲۳-۲) ناراحت نشوید؛ این علامت از معادله (۲۱-۲) وارد شده است و تا اندازه زیادی تابع قرارداد است.

مسئله ۲۰-۲ کدامیک از موارد زیر نمی‌تواند یک میدان الکتروستاتیکی باشد؟

$$\mathbf{E} = k[xy \hat{x} + yz \hat{y} + xz \hat{z}] \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{E} = k[y^2 \hat{x} + (2xy + z^2) \hat{y} + yz \hat{z}] \quad (\text{ب})$$

که در آن k مقدار ثابتی با یکه‌های مناسب است. برای موارد ممکن، با به‌کار بردن مبدأ به‌عنوان نقطه مرجع، پتانسیل را بیابید. صحت پاسخ خود را با محاسبه ∇V بررسی کنید. (راهنمایی: باید

در طول یک مسیر خاص انتگرال‌گیری کنید. اینکه چه مسیری را انتخاب می‌کنید مهم نیست، زیرا جواب مستقل از مسیر است ولی تا زمانی که یک مسیر مشخص را در ذهن نداشته باشید، نمی‌توانید انتگرال‌گیری کنید). □

۲-۳-۲ نکاتی راجع به پتانسیل

الف) واژه پتانسیل. کلمه پتانسیل که به‌طور اجتناب‌ناپذیری در ذهن انرژی پتانسیل را القا می‌کند، بی‌مسماست. ولی بین پتانسیل و انرژی پتانسیل همان‌گونه که در قسمت ۲-۴ نیز خواهید دید ارتباط وجود دارد و این مخصوصاً گیج‌کننده است. متأسفانه نمی‌توان از به‌کار بردن این لغت احتراز کرد. در اینجا باید تأکید کرد که پتانسیل و انرژی پتانسیل دو اصطلاح متفاوت هستند و بنابراین باید اسامی متفاوتی داشته باشند. در ضمن، سطحی که بر روی آن پتانسیل ثابت باشد، سطح هم‌پتانسیل نام دارد.

ب) مزیت فرمولبندی پتانسیل. اگر V را بدانید می‌توانید با یک گرادیدان‌گیری، به آسانی \mathbf{E} را محاسبه کنید: $\mathbf{E} = -\nabla V$. اگر به این مطلب فکر نکنیم، کمی برایمان عجیب جلوه می‌کند زیرا که \mathbf{E} یک کمیت برداری است (با سه مؤلفه)، اما V یک اسکالر است (با یک مؤلفه) چگونه یک تابع می‌تواند تمامی اطلاعات راجع به سه تابع مستقل را در بر داشته باشد؟ پاسخ آن است که سه مؤلفه \mathbf{E} آن چنان هم که به‌نظر می‌رسند از هم مستقل نیستند. در واقع آنها با شرطی که کار را با آن شروع کردیم، $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ، صراحتاً با هم ارتباط دارند. برحسب مؤلفه‌ها داریم

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x},$$

این مطلب یادآور تعبیر ذکرشده از \mathbf{E} در ابتدای بخش ۲-۳-۱ است: میدان الکتریکی \mathbf{E} بردار بسیار خاصی است. آنچه صورتبندی پتانسیل برای ما انجام می‌دهد تبدیل یک مسئله از صورت برداری به‌صورت اسکالر است که در آن زحمت کار با مؤلفه‌ها از بین می‌رود.

ج) نقطه مرجع O . از آنجایی که انتخاب نقطه مرجع O اختیاری است، در تعریف پتانسیل ابهامی به‌وجود می‌آید. با تعویض نقاط مرجع یک مقدار ثابت K به پتانسیل افزوده می‌شود

$$V'(r) = -\int_O^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_O^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_O^O \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = K + V(r)$$

که در آن K عبارت است از انتگرال خطی \mathbf{E} از نقطه مرجع قبلی O به نقطه جدید O' . البته اضافه کردن یک مقدار ثابت به V به روی اختلاف پتانسیل بین دو نقطه بی تأثیر است:

$$V'(\mathbf{b}) - V'(\mathbf{a}) = V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a})$$

زیرا K حذف می شود. (در واقع این امر از روی معادله (۲۲-۲) کاملاً مشخص است زیرا که اختلاف پتانسیل برحسب انتگرال خطی \mathbf{E} از نقطه \mathbf{a} تا \mathbf{b} نوشته می شود.) همچنین از آنجایی که مشتق یک عدد ثابت صفر است، تأثیری بر روی گزاردان پتانسیل نیز نمی گذارد:

$$\nabla V' = \nabla V$$

زیرا کلیه V هایی که فقط انتخاب نقطه مرجعشان متفاوت است به یک میدان \mathbf{E} مربوط می شوند. بدیهی است که پتانسیل به این صورت اهمیت فیزیکی واقعی ندارد، زیرا که می توان در هر نقطه مفروض با انتخاب محل مناسب O مقدار آن را تنظیم کرد. به این معنا می توان شباهتی با ارتفاع برقرار ساخت: اگر از شما پرسیده شود ارتفاع دنور چقدر است احتمالاً جواب می دهید که بالای سطح دریاست، زیرا که یک مرجع رسمی و شناخته شده است ولی ما می توانیم ارتفاع را برحسب واشنگتن دی. سی یا گرینویچ یا هر جای دیگر بسنجیم. این عمل یک مقدار ثابت را به مقدارهای موجود از سطح دریا اضافه (یا از آن کم) می کند ولی چیزی را در دنیای واقعی عوض نمی کند. تنها کمیتی که دارای مفهوم ذاتی است، تفاوت ارتفاع بین دو نقطه است که آن نیز بدون توجه به انتخاب سطح مرجع ثابت باقی می ماند.

با وجود بیان این مطالب باید گفت که در الکتروستاتیک یک نقطه طبیعی برای O وجود دارد (همانند سطح دریا برای سنجش ارتفاع) و آن نقطه بینهایت دور از محل استقرار بار است. قاعدتاً ما در بینهایت پتانسیل را صفر می گیریم. [از آنجایی که $V(O) = 0$ انتخاب یک نقطه مرجع معادل است با انتخاب مکانی که در آن پتانسیل باید صفر شود.] اما در اینجا باید گفت که در یک مورد خاص این قرارداد برقرار نخواهد بود: وقتی که خود توزیع بار تا بینهایت گسترش دارد در این گونه موارد مشکل این است که خود پتانسیل بینهایت می شود. به عنوان مثال میدان ناشی از یک صفحه که به طور بکخواخت باردار شده است، عبارت است از $\hat{n}(\sigma/2\epsilon_0)$ ؛ اگر $O = \infty$ را در نظر بگیریم پتانسیل در ارتفاع z بالای صفحه عبارت است از

$$V(z) = - \int_{\infty}^z \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma dz = - \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma (z - \infty)$$

چاره کار آن است که نقطه مرجع دیگری را انتخاب کنیم. (در این مسئله می توان نقطه مبدأ را برگزید). توجه داشته باشید که این گونه مشکلات فقط در حل مسائل اتفاق می افتد. در "دنیای واقعی" این چنین توزیع باری که تا بینهایت ادامه داشته باشد، وجود ندارد و ما می توانیم همیشه بینهایت را به عنوان نقطه مرجع انتخاب کنیم.

د) پتانسیل از اصل برهم نهی تبعیت می کند. اصل برهم نهی در الکتروستاتیک بدواً برای نیروی وارد بر بار آزمون Q بیان می شود. این اصل می گوید که نیروی کل وارد بر بار Q برابر است با جمع برداری نیروهای وارده از طرف هر بار منفرد

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots$$

با تقسیم معادله فوق بر Q ، به آسانی درمی یابیم که میدان الکتریکی نیز از این اصل پیروی می کند

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots$$

همچنین انتگرال گیری از نقطه مرجع تا نقطه r ، این نتیجه را می دهد که پتانسیل نیز از این اصل پیروی می کند

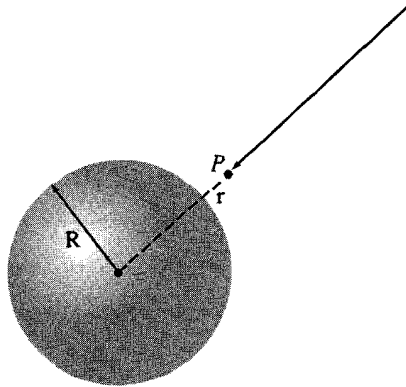
$$V = V_1 + V_2 + \dots$$

این بدان معناست که پتانسیل در هر نقطه ای عبارت است از جمع پتانسیلهای مجزای وابسته به بارهای چشمه. فقط در این قسمت، جمع، جمع معمولی است نه برداری که این موضوع کار کردن را برای ما بسیار آسانتر می سازد.

۵) یكاهای پتانسیل. در دستگاهی که ما انتخاب کرده ایم نیرو برحسب نیوتون، بار برحسب کولن است. بنابراین میدان الکتریکی برحسب نیوتون بر کولن خواهد بود؛ به همین ترتیب پتانسیل برحسب نیوتون-متر بر کولن یا ژول بر کولن اندازه گیری می شود. یک ژول بر کولن یک ولت نام دارد.

مثال ۲-۶

پتانسیل را در داخل و خارج یک پوسته کروی به شعاع R که به طور یکنواخت دارای بار سطحی شده است بیاید (شکل ۲-۳۱).



شکل ۲-۳۱

حل: طبق قانون گاوس میدان در خارج عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

که در آن q مجموع بار موجود بر روی کره است. میدان در درون کره صفر است. بنابراین برای نقاط خارج کره ($r > R$),

$$V(r) = -\int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q}{r'^2} dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'} \Big|_{\infty}^r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

برای یافتن پتانسیل در درون کره ($r < R$) باید انتگرال را به دو قسمت کرد و در هر منطقه، میدان آن منطقه را به کار برد:

$$V(r) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{q}{r'^2} dr' - \int_R^r (\circ) dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'} \Big|_{\infty}^R + \circ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

توجه داشته باشید که چون میدان درون کره صفر است بنابراین $\nabla V = 0$ می شود که در نتیجه پتانسیل مقداری ثابت خواهد شد نه صفر. در این گونه مسائل باید کار را از نقطه مرجع آغاز کرد؛ یعنی جایی که در آن پتانسیل صفر شده است. ممکن است این تصور برایتان به وجود بیاید که در درون کره، می توان پتانسیل را با در دست داشتن میدان در آن منطقه به تنهایی محاسبه کرد. اما این اشتباه است: پتانسیل در درون کره از آنچه در بیرون کره می گذرد نیز تأثیر می پذیرد. اگر یک

پوسته‌کروی باردار دیگر را در شعاع $R > R'$ قرار می‌دادیم پتانسیل در درون کره با شعاع R تغییر می‌کرد هر چند هم که میدان همچنان صفر باقی می‌ماند. قانون گاوس بیان می‌کند که بار خارج یک منطقه (یعنی در r های بزرگتر) هیچ میدانی را در آن منطقه ایجاد نمی‌کند اما وقتی بینهایت را به‌عنوان نقطه مرجع به‌کار می‌بریم چنین قانونی برای پتانسیل برقرار نیست. ■

مسئله ۲۱-۲ پتانسیل را در داخل و خارج یک کره به شعاع R و بار کل q که به‌طور یکنواخت باردار شده است بیابید. بینهایت را به‌عنوان نقطه مرجع انتخاب کنید. در هر منطقه گرادیان V را محاسبه و بررسی کنید که میدان صحیح را به‌دست می‌دهد. $V(r)$ را رسم کنید.

مسئله ۲۲-۲ پتانسیل را در فاصله s از یک سیم طویل نامتناهی که دارای باریک‌نواخت λ است حساب کنید. گرادیان پتانسیل به‌دست آمده را محاسبه و بررسی کنید که میدان ناشی از آن درست است.

مسئله ۲۳-۲ برای توزیع بار مسئله ۱۵-۲ پتانسیل را در مرکز، با به‌کار بردن بینهایت به‌عنوان نقطه مرجع محاسبه کنید.

مسئله ۲۴-۲ برای توزیع بار مسئله ۱۶-۲، اختلاف پتانسیل نقطه‌ای روی محور و نقطه‌ای بر روی استوانه خارجی را به‌دست آورید. توجه داشته باشید که اگر معادله (۲۲-۲) را به‌کار می‌برید نیازی به انتخاب یک نقطه مرجع خاص ندارید. □

۳-۳-۲ معادله پواسون و معادله لاپلاس

در بخش ۱-۳-۲ به این نتیجه رسیدیم که می‌توان میدان الکتریکی را به‌صورت گرادیان یک پتانسیل اسکالر نوشت

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

پرسشی که اکنون مطرح می‌شود این است: معادلات بنیادی مربوط به \mathbf{E} یعنی

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{و} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

چگونه برحسب V نوشته می‌شوند؟ از آنجایی که $-\nabla^2 V = \nabla \cdot (-\nabla V) = \nabla \cdot \mathbf{E}$ بدون توجه به علامت منفی، نتیجه می‌گیریم که دیورژانس \mathbf{E} برابر لاپلاسی V است و بنابراین طبق قانون

گاوس خواهیم داشت

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (24-2)$$

معادله فوق به نام معادله پواسون معروف است. در نواحی که باری وجود ندارد و بنابراین $\rho = 0$ است معادله پواسون به معادله لاپلاس تبدیل می شود

$$\nabla^2 V = 0 \quad (25-2)$$

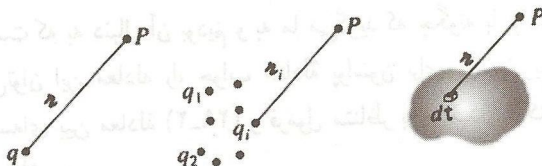
در فصل ۳ در مورد این معادله ها مفصلتر بحث خواهد شد. حال به سراغ معادله تاو می رویم

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (-\nabla V)$$

که مساوی صفر است. اما از آنجایی که تاو گرادیان همیشه صفر است، معادله بالا شرایطی را برای V ایجاد نمی کند. قانون تاو را برای این به کار بردیم که نشان دهیم می توان \mathbf{E} را به صورت گرادیان یک اسکالر بیان کرد. بنابراین نتیجه گیری فوق چندان هم تعجب آور نیست. $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ اجازه می دهد که $\mathbf{E} = -\nabla V$ باشد و در عوض $\mathbf{E} = -\nabla V$ تضمین می کند که $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ است. تنها یک معادله دیفرانسیل (معادله پواسون) برای تعیین V کافی است به دلیل آنکه V اسکالر است. ولی همان طور که دیدیم برای \mathbf{E} هم به تاو و هم به دیورژانس نیاز داشتیم.

۴-۳-۲ پتانسیل یک توزیع بار جایگزیده

در معادله (۲۱-۲)، V را برحسب \mathbf{E} تعریف کردیم. گرچه ما به دنبال یافتن \mathbf{E} هستیم و اگر \mathbf{E} را بدانیم محاسبه V دیگر چیز تازه ای به ما نمی گوید. مطلب این است که ممکن است محاسبه V در ابتدا، ساده تر باشد و از روی آن نیز با یک گرادیان گرفتن می توان \mathbf{E} را محاسبه کرد. معمولاً، می دانیم بار کجاست (یعنی ρ معلوم است) و می خواهیم V را محاسبه کنیم. معادله پواسون معادله ای را بین ρ و V برقرار ساخته است، ولی متأسفانه این معادله در جهت عکس مطلوب ماست. چرا که طبق معادله پواسون اگر V را بدانیم می توانیم ρ را محاسبه کنیم، در حالی که هدف ما محاسبه V با دانستن ρ است. کاری که اکنون باید انجام دهیم معکوس کردن معادله پواسون است. این عمل را همانند موارد مشابه که قبلاً انجام دادیم، با قرار دادن یک بار نقطه ای در مبدأ صورت می دهیم.



شکل ۲-۳۲

با قرار دادن نقطه مرجع در بینهایت، پتانسیل یک بار نقطه‌ای q در مبدأ عبارت خواهد بود از

$$V(r) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q}{r'^2} dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{q}{r'} \right|_{\infty}^r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

در این مثال به وضوح مزیت انتخاب بینهایت به عنوان نقطه مرجع مشاهده می‌شود که حد پایین انتگرال را از بین می‌برد. به علامت V توجه کنید. در واقع علامت منفی در فرمول تعریف‌کننده V [معادله (۲-۲۱)] دقیقاً به این منظور انتخاب شده بود که پتانسیل ناشی از یک بار مثبت، مثبت شود. مفید است یادآور شویم که مناطق با بار مثبت، تپه‌های پتانسیل و نواحی با بار منفی دره‌های پتانسیل و جهت میدان الکتریکی به سمت پایین تپه از مثبت به طرف منفی است. به‌طور کلی پتانسیل بار نقطه‌ای q عبارت است از

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\pi} \quad (2-26)$$

که در آن به مانند همیشه، π فاصله بین بار q و نقطه \mathbf{r} است (شکل ۲-۳۲). با به‌کارگیری اصل برهم‌نهی، پتانسیل یک مجموعه بار عبارت خواهد شد از

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\pi_i} \quad (2-27)$$

یا برای توزیع بار پیوسته

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\pi} dq \quad (2-28)$$

به‌خصوص برای یک بار حجمی داریم

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\pi} d\tau' \quad (2-29)$$

این همان معادله‌ای است که به دنبال آن بودیم و به ما می‌گوید که چگونه با دانستن ρ ، محاسبه V انجام می‌گیرد. می‌توان این معادله را، جواب معادله پواسون برای یک توزیع بار جایگزیده تلقی کرد.^۱ بیایید مقایسه‌ای بین معادله (۲-۲۹) و فرمول متناظر برای میدان الکتریکی برحسب ρ (معادله ۲-۸) داشته باشیم:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r^2} \hat{\mathbf{r}} d\tau'$$

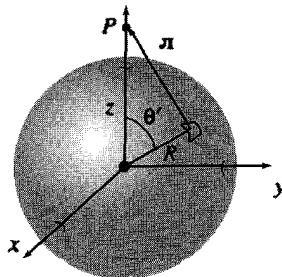
به این نکته اساسی برمی‌خوریم که دیگر از بردار یکه $\hat{\mathbf{r}}$ خبری نیست و بنابراین جایی برای نگرانی از مؤلفه‌ها وجود ندارد. در ضمن، پتانسیلهای مربوط به بارهای خطی و سطحی عبارت‌اند از

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{r} dl' \quad \text{و} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{r} da' \quad (۲-۳۰)$$

در اینجا باید یادآوری شود که تمامی مباحث مذکور در این بخش بر این فرض استوار بودند که نقطه مرجع در بینهایت است. این مطلب به سختی در معادله (۲-۲۹) مشهود است ولی به خاطر داشته باید که ما این معادله را از پتانسیل یک بار نقطه‌ای واقع در مبدأ به دست آوردیم، $(1/4\pi\epsilon_0)(q/r)$ ، و آن نیز وقتی معتبر است که نقطه مرجع در بینهایت باشد. اگر بخواهید این معادله را برای مسائلی که در آنها توزیع بار، خود تا بینهایت ادامه دارد، به کار ببرید، انتگرال واگرا خواهد شد.

مثال ۲-۷

پتانسیل یک پوسته کروی با شعاع R را که به‌طور یکنواخت باردار شده است بیابید (شکل ۲-۳۳).



شکل ۲-۳۳

۱. در مبحث الکتروستاتیک که تاو \mathbf{E} برابر صفر و دیورژانس آن برابر ρ/ϵ_0 است معادله (۲-۲۹) نمونه‌ای از قضیه هلمهولتز است (پیوست ب).

حل: این همان مسئله‌ای است که در مثال ۲-۶ آن را حل کردیم، ولی این بار می‌خواهیم از معادله (۲-۳۰) استفاده کنیم

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma}{r} da'$$

اکنون می‌توانیم نقطه \mathbf{r} را روی محور z ها قرار دهیم و با استفاده از قانون کسینوسها π را برحسب زاویه قطبی θ بیان کنیم

$$r^2 = R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta'$$

جزء سطح بر روی این کره عبارت است $R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 V(z) &= \sigma \int \frac{R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta'}} \\ &= 2\pi R^2 \sigma \int_0^\pi \frac{\sin \theta'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta'}} d\theta' \\ &= 2\pi R^2 \sigma \left(\frac{1}{Rz} \sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta'} \right) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{2\pi R\sigma}{z} \left(\sqrt{R^2 + z^2 + 2Rz} - \sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz} \right) \\ &= \frac{2\pi R\sigma}{z} \left[\sqrt{(R+z)^2} - \sqrt{(R-z)^2} \right] \end{aligned}$$

در این مرحله باید مراقب باشیم که ریشه مثبت را انتخاب کنیم. برای نقاط خارج کره z از R بزرگتر است و بنابراین $\sqrt{(R-z)^2} = z - R$ و برای نقاط داخل کره $z < R$ پس:

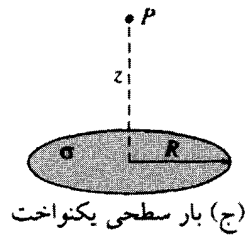
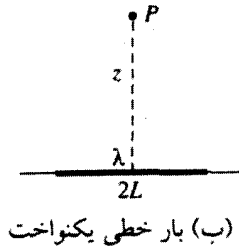
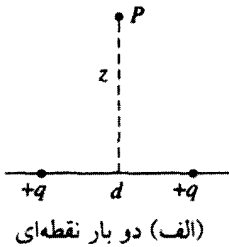
$$V(z) = \frac{R\sigma}{4\pi\epsilon_0 z} [(R+z) - (z-R)] = \frac{R^2\sigma}{\epsilon_0 z} \quad \text{خارج}$$

$$V(z) = \frac{R\sigma}{4\pi\epsilon_0 z} [(R+z) - (R-z)] = \frac{R\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{داخل}$$

برحسب مجموع بار روی پوسته $q = 4\pi R^2\sigma$ ، $V(z) = (1/4\pi\epsilon_0)(q/z)$ [یا به‌طور کلی $V(r) = (1/4\pi\epsilon_0)(q/r)$ برای نقاط خارج کره و $V(r) = (1/4\pi\epsilon_0)(q/R)$ برای نقاط داخل کره.

البته در این مورد خاص راحت تر بود که V را از معادله (۲-۲۱) به جای (۲-۳۰) حساب می کردیم زیرا قانون گاوس، E را راحت تر به دست می داد. اما اگر مثال ۲-۷ را با مسئله ۲-۷ مقایسه کنیم، به قدرت فرمولبندی پتانسیل بهتری می بریم. ■

مسئله ۲-۲۵ با به کارگیری معادله های (۲-۲۷) و (۲-۳۰)، پتانسیل را در فاصله z بالای مرکز توزیع بارهای شکل ۲-۳۴ بیابید. در هر مورد $E = -\nabla V$ را محاسبه کرده و جوابهایتان را به ترتیب با مسئله ۲-۲۲ الف و مثال ۲-۱ و مسئله ۲-۶، مقایسه کنید. فرض کنید که بار سمت راستی در شکل ۲-۳۴ الف) را با بار $-q$ عوض می کردیم در آن صورت مقدار پتانسیل در نقطه P چقدر می شد؟ پتانسیل فوق چه میدانی را پیشنهاد می کند؟ جواب خود را با مسئله ۲-۲ ب مقایسه کنید و هر نوع اختلافی را دقیقاً توضیح دهید.



شکل ۲-۳۴

مسئله ۲-۲۶ یک سطح مخروطی (یک مخروط بستنی توخالی) دارای بار سطحی یکنواخت σ است. ارتفاع مخروط و شعاع قاعده، هر دو h هستند. اختلاف پتانسیل بین نقاط a (رأس) و b (مرکز قاعده) را به دست آورید.

مسئله ۲-۲۷ پتانسیل را روی محور یک استوانه که به طور یکنواخت باردار شده است به فاصله z از مرکز بیابید. طول استوانه L ، شعاع آن R و چگالی بار ρ است. از نتیجه خود برای محاسبه میدان الکتریکی در آن نقطه استفاده کنید (فرض کنید $z > L/2$).

مسئله ۲-۲۸ از معادله (۲-۲۹) برای محاسبه پتانسیل داخل یک کره باردار توپر به شعاع R و بار کل q ، استفاده کنید. پاسخ خود را با مسئله ۲-۲۱ مقایسه کنید.

مسئله ۲-۲۹ با به کارگیری لاپلاسی و استفاده از معادله (۱-۲۱) تحقیق کنید که معادله (۲-۲۹) در معادله پواسون صدق می کند. □

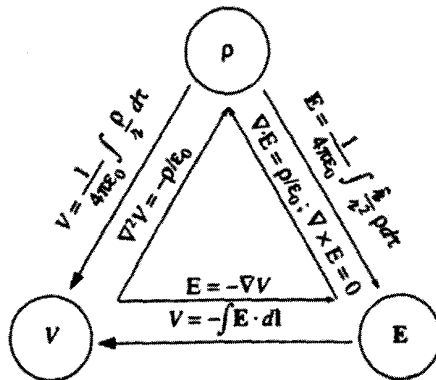
۲-۳-۵ خلاصه؛ شرایط مرزی الکتروستاتیک

مسئله نوعی در الکتروستاتیک آن است که به شما یک توزیع بار چشمه ρ داده می‌شود و شما در صدد یافتن میدان الکتریکی \mathbf{E} که این توزیع بار تولید می‌کند، هستید. گر چه تقارن در مسئله اجازه استفاده از قانون گاوس در حل آن را می‌دهد، ولی عموماً به نفع شماست که ابتدا پتانسیل را محاسبه کنید. بنابراین ρ ، \mathbf{E} و V سه کمیت بنیادی الکتروستاتیک هستند. در بحثهایی که تاکنون کردیم، شش معادله را که این سه کمیت را به هم مربوط می‌سازند به دست آوردیم. این معادله‌ها در شکل ۲-۳۵ یک جا نشان داده شده‌اند. ما فقط با دو مشاهده تجربی شروع کردیم: (۱) اصل برهم نهی — یک قاعده کلی که در مورد تمام نیروهای الکترومغناطیس کاربرد دارد و (۲) قانون کولن که قانون بنیادی الکتروستاتیک محسوب می‌شود. از این رو، سایر نتایج ناشی می‌شوند.

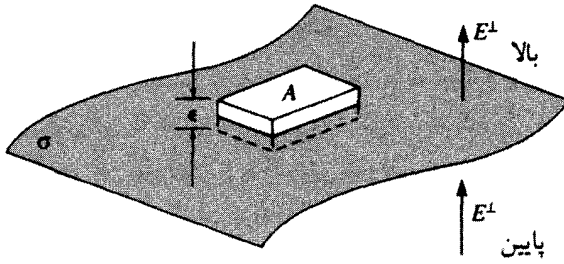
هنگامی که مثالهای ۲-۴ و ۲-۵ را مطالعه کنید یا بر روی مسائل ۲-۷، ۲-۱۱ و ۲-۱۶ کار کنید شاید متوجه این موضوع بشوید که در برخورد با یک بار سطحی، میدان الکتریکی دستخوش یک ناپیوستگی می‌شود. در واقع یافتن مقدار تغییرات \mathbf{E} در چنین مرزهایی، کاری آسان است. اگر سطح گاوسی را به صورت یک مکعب مستطیل که از طول و عرض بر روی سطح گسترش می‌یابد، در نظر بگیریم (شکل ۲-۳۶) طبق قانون گاوس خواهیم داشت

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{محور}} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A$$

که در آن A مساحت سطح بالایی است. (اگر σ از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر کند یا سطح خمیده باشد، باید A را بینهایت کوچک اختیار کنیم.) حال، سطوح جانبی مکعب در حالت حدی، وقتی که ضخامت ϵ به سمت صفر میل می‌کند تأثیری بر شار گذرنده نخواهند داشت و بنابراین



شکل ۲-۳۵



شکل ۲-۳۶

آنچه باقی می ماند عبارت است از

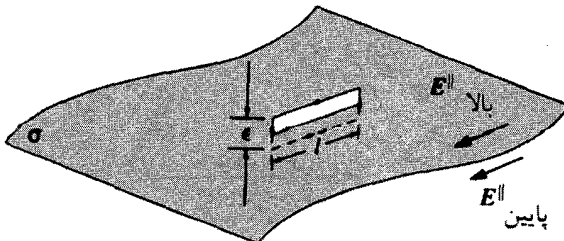
$$E_{\text{بالا}}^{\perp} - E_{\text{پایین}}^{\perp} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \quad (۳۱-۲)$$

که در آن $E_{\text{بالا}}^{\perp}$ عبارت است از مؤلفه‌ای از میدان که عمود بر سطح بلافاصله به سمت بالا و $E_{\text{پایین}}^{\perp}$ نیز دارای همان وضعیت ولی زیر سطح است. برای سازگاری در هر مورد سمت بالا را جهت مثبت انتخاب می‌کنیم. نتیجه: مؤلفه عمودی \mathbf{E} در هر مرز به اندازه σ/ϵ_0 ناپیوسته است. به ویژه جایی که هیچ‌گونه بار سطحی وجود ندارد، E^{\perp} پیوسته خواهد بود، مثلاً در سطح یک کره توپر با بار یکنواخت.

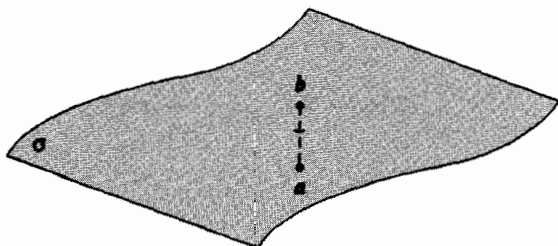
بر عکس مؤلفه مماسی \mathbf{E} ، همواره پیوسته است چرا که اگر معادله (۲-۱۹) را به‌کار ببریم خواهیم داشت

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

برای حلقه مستطیلی شکل ۲-۳۷، چنانچه $\epsilon \rightarrow 0$ باشد دو انتها چیزی نمی‌دهند و سطوح جانبی،



شکل ۲-۳۷



شکل ۳۸-۲

$$\mathbf{E}_{\text{بالا}}^{\parallel} = \mathbf{E}_{\text{پایین}}^{\parallel} \quad (۳۲-۲)$$

که در آن \mathbf{E}^{\parallel} نشاندهنده مؤلفه موازی با سطح میدان است. شرایط مرزی برای \mathbf{E} [معادله‌های (۳۱-۲) و (۳۲-۲)] را می‌توان در یک فرمول خلاصه کرد:

$$\mathbf{E}_{\text{بالا}} - \mathbf{E}_{\text{پایین}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (۳۳-۲)$$

که در آن \hat{n} بردار یکه عمود بر سطح است و جهت آن از پایین به بالا است.^۱ در ضمن، پتانسیل در خلال هر مرزی پیوسته است (شکل ۳۸-۲)، زیرا

$$V_{\text{بالا}} - V_{\text{پایین}} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

از آنجایی که طول مسیر به سمت صفر میل می‌کند، بنابراین انتگرال نیز به سمت صفر میل خواهد کرد

$$V_{\text{بالا}} = V_{\text{پایین}} \quad (۳۴-۲)$$

۱. توجه داشته باشید که هیچ تفاوتی نمی‌کند کدام طرف را پایین یا بالا بنامید، جابه‌جایی این دو نقطه جهت \hat{n} را معکوس می‌کند. اگر شما مایل به در نظر گرفتن میدان که فقط از یک تکه از سطح باردار (اساساً مستوی) ناشی می‌شود هستید، جواب $\hat{n} (\sigma/2\epsilon_0)$ بلافاصله بالای سطح و $\hat{n} (-\sigma/2\epsilon_0)$ بلافاصله پایین است. این گفته از مثال ۴-۲ ناشی می‌شود، چرا که اگر شما به اندازه کافی به آن تکه از سطح نزدیک باشید، آن تکه به نظر مانند یک صفحه بینهایت می‌رسد، ظاهراً می‌بایست تمامی ناپوستگی در \mathbf{E} را به این تکه موضعی از بار نسبت داد.

اما گرادیان V در \mathbf{E} ناپوستگی ایجاد می‌کند؛ چرا که $\mathbf{E} = -\nabla V$. معادله (۲-۳۳) ایجاب می‌کند که

$$\nabla V_{\text{بالا}} - \nabla V_{\text{پایین}} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma \hat{n} \quad (۲-۳۵)$$

یا به عبارت دیگر

$$\frac{\partial V_{\text{بالا}}}{\partial n} - \frac{\partial V_{\text{پایین}}}{\partial n} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma \quad (۲-۳۶)$$

که در آن

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \nabla V \cdot \hat{n} \quad (۲-۳۷)$$

میبین مشتق عمودی V (یعنی آهنگ تغییرات V در جهت عمود بر سطح) است.

توجه داشته باشید که این شرایط مرزی فقط پتانسیلها و میدانهای بالا و پایین سطح را به یکدیگر وابسته می‌کنند. به عنوان مثال، مشتقها در معادله (۲-۳۶) مقادیر حدی در مواردی هستند که از هر طرف سطح به آنها نزدیک می‌شویم.

مسئله ۲-۳۰ (الف) بررسی کنید که نتایج به دست آمده از مثالهای ۲-۴ و ۲-۵ و مسئله ۲-۱۱ با معادله (۲-۳۳) همخوانی دارند.

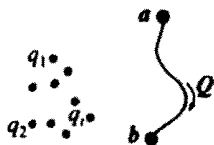
(ب) از قانون گاوس برای به دست آوردن میدان در داخل و خارج یک لوله استوانه‌ای توخالی که دارای بار یکنواخت سطحی σ باشد، استفاده کنید. تحقیق کنید که نتیجه شما با معادله (۲-۳۳) همخوانی دارد.

(ج) بررسی کنید که نتیجه مثال ۲-۷ با شرایط مرزی (۲-۳۴) و (۲-۳۶) همخوانی دارد. □

۴-۲ کار و انرژی در الکتروستاتیک

۴-۲-۱ کار انجام شده برای جابه‌جایی بار

فرض کنید که یک پیکربندی مانا از بارهای چشمه در اختیار داریم و می‌خواهیم بار آزمون Q را مانند شکل ۲-۳۹ از نقطه a به نقطه b منتقل کنیم. پرسش: چه مقدار کار باید انجام دهیم؟ در هر نقطه واقع بر مسیر، نیروی الکتریکی وارد بر Q عبارت است از $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$ ؛ نیرویی که شما باید وارد آورید، مخالف این نیروی الکتریکی است که با $-Q\mathbf{E}$ برابر است. (برای فهمیدن علامت



شکل ۳۹-۲

منفی به این مثال توجه کنید: وقتی که آجری را بلند می‌کنید، جاذبه نیروی mg را به سمت پایین اعمال می‌کند در حالی که شما نیروی mg را به سمت بالا وارد می‌کنید. مسلماً شما می‌توانید نیروی بیشتری به‌کار بگیرید — در این صورت آجر شتاب می‌گیرد و قسمتی از سعی شما صرف تأمین انرژی جنبشی می‌شود. چیزی که در اینجا به دنبال آن هستیم یافتن کمینه نیروی لازم برای انجام این کار است.) بنابراین کار عبارت است از

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -Q \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Q[V(b) - V(a)]$$

توجه کنید که جواب مستقل از مسیر انتخابی از a به b است. در مکانیک چنین نیرویی را پایستار می‌نامیم. با تقسیم طرفین بر Q به‌دست می‌آوریم

$$V(b) - V(a) = \frac{W}{Q} \quad (38-2)$$

به عبارت دیگر اختلاف پتانسیل بین نقاط a و b برابر است با مقدار کاری که به‌ازای واحد بار لازم است تا بتوان یک ذره را از نقطه a به b جابه‌جا کرد. در مورد خاص وقتی بخواهید بار Q را از بینهایت به نقطه r بیاورید، کاری که می‌بایست انجام دهید عبارت است از

$$W = Q[V(r) - V(\infty)]$$

بنابراین اگر نقطه مرجع را در بینهایت قرار داده باشید

$$W = QV(r) \quad (39-2)$$

از این نظر پتانسیل، انرژی پتانسیل (کار لازم برای به‌وجود آوردن سیستم) به‌ازای واحد بار است. درست همان‌طور که میدان، نیرو به‌ازای واحد بار است.)

۲-۴-۲ انرژی یک توزیع بار نقطه‌ای

چه مقدار کار برای گردهم‌آوری گروهی از بارهای نقطه‌ای لازم است؟ فرض کنید بارها را تک‌تک از بینهایت می‌آوریم (شکل ۲-۴۰). کار لازم برای آوردن بار اول، q_1 ، صفر است، زیرا که هنوز میدانی برای مقابله با آن وجود ندارد. حال q_2 را می‌آوریم. طبق معادله (۲-۳۹) مقدار کار $q_2 V_1(r_2)$ لازم است که در آن V_1 پتانسیل ناشی از q_1 و r_2 مکانی است که می‌خواهیم بار q_2 را در آنجا قرار دهیم

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \left(\frac{q_1}{\pi_{12}} \right)$$

(در اینجا π_{12} فاصله بین q_1 و q_2 وقتی که در مکانهای خود قرار گرفته باشند، است) حال q_3 را می‌آوریم. کار مورد نیاز $q_3 V_{1,2}(r_3)$ است که در آن $V_{1,2}$ پتانسیل ناشی از بارهای q_1 و q_2 است یعنی $(1/4\pi\epsilon_0)(q_1/\pi_{13} + q_2/\pi_{23})$. بنابراین

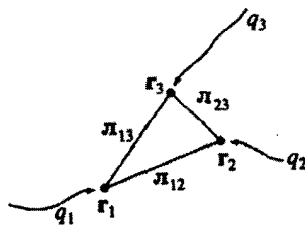
$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left(\frac{q_1}{\pi_{13}} + \frac{q_2}{\pi_{23}} \right)$$

همین‌طور کار لازم برای آوردن q_4 عبارت خواهد شد از

$$W_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_4 \left(\frac{q_1}{\pi_{14}} + \frac{q_2}{\pi_{24}} + \frac{q_3}{\pi_{34}} \right)$$

بنابراین کل کار مورد نیاز برای جمع‌آوری چهار بار اول عبارت است از

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{\pi_{12}} + \frac{q_1 q_3}{\pi_{13}} + \frac{q_1 q_4}{\pi_{14}} + \frac{q_2 q_3}{\pi_{23}} + \frac{q_2 q_4}{\pi_{24}} + \frac{q_3 q_4}{\pi_{34}} \right)$$



شکل ۲-۴۰

قاعده کلی: حاصلضرب هر زوج بار را تقسیم بر فاصله بین آن دو کرده و حاصل را جمع کنید

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^n \frac{q_i q_j}{\pi_{ij}} \quad (40-2)$$

شرط $i > j$ در معادله بالا به دلیل آن آورده شده است که یک زوج بار، دو دفعه به حساب نیایند. یک روش زیباتر برای دستیابی به این مقصود آن است که هر زوج را دو بار حساب کرده و حاصل را به دو تقسیم کنیم

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_i q_j}{\pi_{ij}} \quad (41-2)$$

(البته دقت کنید که از $i = j$ اجتناب شود). توجه داشته باشید که با این روش پاسخ نهایی به ترتیبی که بارها را جمع‌آوری کرده‌ایم، بستگی پیدا نمی‌کند. زیرا که هر زوجی در جمع‌بندی ظاهر می‌شود. بیا باید که ابتدا q_i را از جمع‌بندی خارج کنیم

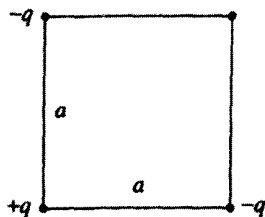
$$W = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n q_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{\pi_{ij}} \right)$$

عبارت داخل پرانتز عبارت است از پتانسیل در نقطه \mathbf{r}_i (محل بار q_i) ناشی از تمام بارهای دیگر و نه فقط بارهای موجود در یک مرحله از فرایند تشکیل توزیع بار. بنابراین

$$W = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n q_i V(\mathbf{r}_i) \quad (42-2)$$

این مقدار کاری است که برای گردآوری یک پیکربندی از بارهای نقطه‌ای لازم است. همچنین می‌توان گفت که این مقدار کاری است که اگر سیستم متلاشی شود، به شما برمی‌گردد. در حال حاضر می‌توان گفت که این مقدار کار نشان‌دهنده انرژی ذخیره‌شده در پیکربندی ایجاد شده است. (اگر مایلید آن را انرژی "پتانسیل" بنامید ولی طبق آنچه قبلاً گفته شد، بهتر است از این واژه پرهیز کنید).

مسئله ۳۱-۲ (الف) سه بار در گوشه‌های یک مربع به ضلع a مانند شکل ۴۱-۲ قرار گرفته‌اند. چه مقدار کار لازم است تا یک بار $+q$ دیگر را از بینهایت آورده و در گوشه چهارم قرار دهیم؟ (ب) چه مقدار کار برای جمع‌آوری هر چهار بار لازم است؟



شکل ۲-۴۱

۲-۴-۳ انرژی یک توزیع بار پیوسته

برای یک چگالی حجمی ρ معادله (۲-۴۲) به صورت زیر در می آید

$$W = \frac{1}{4} \int \rho V d\tau \quad (۲-۴۳)$$

(انتگرالهای متناظر برای بارهای خطی و سطحی نیز به ترتیب $\int \lambda V dl$ و $\int \sigma V da$ خواهند بود.) روش زیبایی برای بازنویسی این نتیجه وجود دارد که در آن ρ و V حذف می شوند. \mathbf{E} جای آنها را می گیرد. ابتدا از قانون گاوس برای بیان کردن ρ بر حسب \mathbf{E} استفاده می کنیم

$$W = \frac{\epsilon_0}{4} \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) V d\tau \quad \text{بنابراین} \quad \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$$

حال با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء [معادله (۱-۵۹)] و انتقال مشتق از \mathbf{E} به V داریم

$$W = \frac{\epsilon_0}{4} \left[- \int \mathbf{E} \cdot (\nabla V) d\tau + \oint V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right]$$

اما $\nabla V = -\mathbf{E}$ بنابراین

$$W = \frac{\epsilon_0}{4} \left(\int_V E^2 d\tau + \oint_S V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right) \quad (۲-۴۴)$$

اما حجمی که بر روی آن انتگرال گیری می کنیم کدام است؟ بهتر است به معادله (۲-۴۳) یعنی فرمولی که با آن شروع کردیم برگردیم. از تعریف آن به وضوح معلوم است که انتگرال گیری ما باید بر روی تمام منطقه ای که بار در آنجا قرار دارد انجام شود. اما عملاً یک حجم اضافی، تأثیری بر روی نتیجه نمی گذارد با در نظر داشتن این مطلب به معادله (۲-۴۴) باز می گردیم. در اینجا اگر حجم

لازم برای استقرار بارها را از کمترین مقدار مجازش بیشتر کنیم چه اتفاقی می‌افتد؟ انتگرال E^2 فقط می‌تواند افزایش یابد (زیرا که تابع زیر انتگرال مثبت است). ظاهراً انتگرال سطح می‌بایست کاهش بیابد تا مجموع بار ثابت بماند. در واقع در فواصل دور از بار E به نسبت $1/r^2$ و V به نسبت $1/r$ و مساحت سطح به نسبت r^2 تغییر می‌کند. به‌طور خلاصه، با این حساب انتگرال سطح به نسبت $1/r$ تغییر خواهد کرد. توجه داشته باشید که معادله (۴۴-۲) انرژی صحیح W را با هر حجمی که به‌کار ببرید به‌دست می‌دهد (تا هنگامی که همه بارها را پوشش دهد)، اما با گزینش حجم‌هایی بزرگ و بزرگتر سهم انتگرال حجم بیشتر می‌شود، حال آنکه سهم انتگرال سطح کمتر می‌شود. پس می‌توان انتگرال‌گیری را بر روی تمام فضا انجام داد. با این کار انتگرال سطح به سمت صفر میل کرده و تنها جمله باقی مانده عبارت خواهد بود از

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{تمام فضا}} E^2 d\tau \quad (45-2)$$

مثال ۸-۲

انرژی یک پوستهٔ کروی با بار q و شعاع R را که به‌طور یکنواخت باردار شده است پیدا کنید.

حل ۱: معادله (۴۳-۲) را برای مورد بارهای سطحی به‌کار ببرید:

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma V da$$

حال مقدار پتانسیل بر روی سطح این کره، ثابت و برابر $(1/4\pi\epsilon_0)q/R$ است. بنابراین

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \int \sigma da = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}$$

حل ۲: از معادله (۴۵-۲) استفاده کنید. درون کره $E = 0$ و بیرون آن

$$E^2 = \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^4} \quad \text{بنابراین} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

و از آنجا

$$W_{\text{کل}} = \frac{\epsilon_0}{4(\pi\epsilon_0)^2} \int_{\text{کل}} \left(\frac{q^2}{r^2} \right) (r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi)$$

$$= \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} q^2 4\pi \int_R^\infty \frac{1}{r^2} \, dr = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}$$

مسئله ۲-۳۲ انرژی ذخیره شده در یک کره توپر به شعاع R و بار q را که به طور یکنواخت باردار شده است بیابید. این کار را به سه روش مختلف انجام دهید.

(الف) معادله (۲-۴۳) را به کار ببرید. پتانسیل را در مسئله ۲-۲۱ پیدا کرده‌اید.

(ب) معادله (۲-۴۵) را به کار ببرید. انتگرال‌گیری را بر روی تمام فضا صورت دهید.

(ج) معادله (۲-۴۴) را به کار ببرید. یک حجم کروی به شعاع a انتخاب کنید. ببینید وقتی

$a \rightarrow \infty$ میل کند چه اتفاقی می‌افتد.

مسئله ۲-۳۳ در اینجا روش چهارمی برای محاسبه انرژی یک کره یکنواخت باردار شده وجود دارد: کره را لایه به لایه ایجاد می‌کنیم، هر دفعه بار بینهایت کوچک dq را از بینهایت دور می‌آوریم، و آن را به طور یکنواخت بر روی سطح پخش می‌کنیم و به این ترتیب شعاع را افزایش می‌دهیم. چه مقدار کار dW برای ایجاد شعاع dr لازم است؟ با انتگرال‌گیری از آن کل کار برای ساختن کره‌ای به شعاع R و بار q را به دست می‌آوریم. □

۲-۴-۴ نکاتی راجع به انرژی الکتروستاتیک

(الف) یک "ناسازگاری" پیچیده. معادله (۲-۴۵) به وضوح بیان می‌کند که انرژی یک توزیع بار مانا همیشه مثبت است. از طرف دیگر معادله (۲-۴۴) [که از آن معادله (۲-۴۵) نتیجه گرفتیم] می‌تواند مثبت یا منفی باشد. برای مثال بر طبق معادله (۲-۴۲) انرژی دو بار مساوی و غیرهمنام که به فاصله π از یکدیگر قرار دارند، $(q^2/\pi)(1/4\pi\epsilon_0) -$ خواهد شد. اشتباه کجاست؟ کدام معادله صحیح است؟

پاسخ این است که هر دو معادله صحیح هستند، اما هر یک به وضعیتهای اندک متفاوتی مربوط می‌شوند. زیرا که معادله (۲-۴۲) کار لازم برای ساختن خود بارهای نقطه‌ای را به حساب نمی‌آورد. ما بارهای نقطه‌ای شروع کردیم و صرفاً کار لازم برای گردآوری آنها به دور هم را به دست آوردیم. این رویه

عقلانه‌ای است، زیرا که معادله (۲-۴۵) بیان می‌دارد که انرژی یک بار نقطه‌ای بینهایت است.

$$W = \frac{\epsilon_0}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \int \left(\frac{q^2}{r^2} \right) (r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{1}{r^2} dr = \infty$$

معادله (۲-۴۵) کاملتر است، زیرا به ما مجموع انرژی ذخیره شده در یک پیکربندی از بارها را می‌گوید، اما معادله (۲-۴۲) در زمینه بارهای نقطه‌ای صحیحتر است، چون که ما (به درستی) ترجیح می‌دهیم که سهم انرژی کل مربوط به ساخت خود بارهای نقطه‌ای را در نظر نگیریم. با این همه در عمل بارهای نقطه‌ای (مثلاً الکترونها) به طور آماده به ما داده می‌شوند و تنها کار ما جابه‌جا کردن آنهاست. از آنجایی که آنها را کنار هم قرار ندادیم، نمی‌توانیم آنها را متلاشی کنیم (هنوز انرژی نامتناهی بارهای نقطه‌ای از موارد گیج‌کننده نظریه الکترومغناطیس محسوب می‌شود که هم بیان کوانتومی و هم بیان کلاسیک را دچار ناتوانی می‌کند. در فصل ۱۱ به این مطلب باز خواهیم گشت). اکنون شاید به این فکر بیفتیم که در کجای این محاسبه‌های ظاهراً بی‌چون و چرای ما این ناسازگاری وارد شد. "خطا" بین معادله‌های (۲-۴۲) و (۲-۴۳) قرار دارد: در معادله اول $V(\mathbf{r}_i)$ پتانسیل ناشی از بارهای دیگر است و نه q_i ، در حالی که در معادله دوم، $V(\mathbf{r})$ پتانسیل کامل است. برای توزیعی پیوسته این دو تفاوتی ندارند، چون مقدار بار درست در نقطه \mathbf{r} بسیار کوچک و سهم آن در پتانسیل صفر است.

(ب) انرژی در کجا ذخیره می‌شود؟ معادلات (۲-۴۳) و (۲-۴۵) دو روش متفاوت برای محاسبه یک چیز را بیان می‌کنند. اولی یک انتگرال بر روی توزیع بار است و دومی یک انتگرال بر روی میدان. این دو می‌توانند شامل مناطقی کاملاً متفاوت باشند. برای مثال در مورد پوسته کروی (مثال ۲-۸) بار محدود به سطح است، حال آنکه میدان الکتریکی در هر نقطه خارج از این سطح موجود است. پس انرژی در کجاست؟ آیا طبق معادله (۲-۴۵) در میدان ذخیره می‌شود یا بر اساس معادله (۲-۴۳) در بار ذخیره می‌شود؟ در اینجا این پرسش را نمی‌توان پاسخ گفت: می‌توانم به شما بگویم که انرژی کل چقدر است و راههای مختلفی برای محاسبه آن در اختیارتان بگذارم، اما نگرانی درباره اینکه انرژی کجاست بی‌مورد است. در قسمت نظریه تابش (فصل ۱۱) مفید (و در نظریه نسبیت عام لازم) است که عنوان شود که انرژی با چگالی زیر در میدان ذخیره می‌شود.

$$\frac{\epsilon_0}{4} E^2 = \text{انرژی در واحد حجم} \quad (۲-۴۶)$$

اما در الکتروستاتیک می‌توان ابراز داشت که انرژی با چگالی $(1/2\rho V)$ در بار ذخیره می‌شود.

(ج) اصل برهم‌نهی. چون انرژی الکتروستاتیک، برحسب میدان تابع درجه دوم است، از اصل برهم‌نهی پیروی نمی‌کند. انرژی یک سیستم مرکب برابر مجموع انرژیهای اجزای آن به‌طور جداگانه نیست، بنابراین «جملات ضربدری» نیز وجود دارند:

$$\begin{aligned} W_{\text{ج}} &= \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 d\tau \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int (E_1^2 + E_2^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) d\tau \\ &= W_1 + W_2 + \epsilon_0 \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\tau \end{aligned} \quad (47-2)$$

به‌عنوان مثال اگر در همه جا بار را دو برابر کنیم انرژی کل چهار برابر می‌شود.

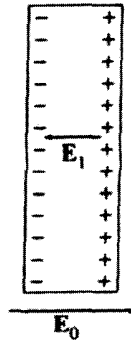
مسئله ۲-۳۴ دو پوستهٔ کروی متحدالمرکز به شعاعهای a و b را در نظر بگیرید. پوستهٔ داخلی بار q و بیرونی بار $-q$ دارد (در هر دو پوسته بار به‌طور یکنواخت توزیع شده است). انرژی این شکل را (الف) با استفاده از معادلهٔ (۲-۴۵) و (ب) با استفاده از معادلهٔ (۲-۴۷) و نتایج مثال ۲-۸ به‌دست آورید. □

۲-۵ رساناها

۲-۵-۱ خواص اصلی

در یک عایق مانند شیشه یا کاتوجو هر الکترون وابسته به یک اتم خاص است. در یک رسانای فلزی بر خلاف این، به‌ازای هر اتم، یک یا چند الکترون آزادند که در درون ماده گردش کنند. (در رساناهای مایع نظیر آب نمک، این یونها هستند که حرکت می‌کنند). یک رسانای کامل ماده‌ای است که در آن تعداد بی‌شماری از بارهای کاملاً آزاد وجود داشته باشد. در زندگی واقعی، رساناهای کامل وجود ندارند، اما مواد بسیاری را می‌شود تقریباً رسانای کامل پنداشت. از این تعریف، خواص الکتروستاتیکی بنیادی رسانای ایده‌آل بلافاصله نتیجه می‌شوند:

(الف) در درون رسانا $\mathbf{E} = 0$ است. چرا؟ زیرا اگر میدانی وجود می‌داشت، بارهای آزاد شروع به حرکت می‌کردند و دیگر الکتروستاتیک نبود. حُب ... این توضیح چندان رضایت‌بخش نیست. شاید نشان دهد که وقتی رساناها حضور دارند دیگر وضعیت الکتروستاتیک نیست. بهتر است بررسی کنیم که وقتی رسانا در معرض میدان خارجی \mathbf{E}_0 قرار می‌گیرد چه اتفاقی می‌افتد (شکل ۲-۴۲). در ابتدا میدان، بارهای آزاد مثبت را به طرف راست و بارهای منفی را به سمت چپ می‌راند. (در



شکل ۲-۴۲

عمل، فقط بارهای منفی — الکترونها — حرکت می‌کنند، اما وقتی آنها دور شدند طرف راست دارای بار مثبت خالص مربوط به هسته‌ها می‌شود — پس مهم نیست که چه بارهایی حرکت می‌کنند؛ نتیجه یکسان است.) وقتی که بارها به لبه‌های جسم می‌رسند بر روی هم انباشته می‌شوند: بارهای مثبت در طرف راست و بارهای منفی در طرف چپ. اکنون، این بارهای القایی، میدان E_1 مربوط به خودشان را ایجاد می‌کنند که جهت آن خلاف جهت E_0 است، یعنی آنکه میدان بارهای القاشده سعی در از بین بردن میدان اصلی دارد. تا زمانی که عمل حذف بین دو میدان کامل نشده باشد جریان بار ادامه پیدا می‌کند و میدان برابند درون رسانا دقیقاً صفر می‌شود. عملاً تمامی این فرایند آبی است.

(ب) در داخل رسانا $\rho = 0$ است. از قانون گاوس نتیجه می‌شود: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$. اگر $\mathbf{E} = 0$ باشد بنابراین ρ نیز صفر است. البته هنوز بارهایی در اطراف وجود دارند اما به همان اندازه که بار مثبت هست بار منفی نیز وجود دارد و بنابراین مجموع بار خالص در درون صفر خواهد بود.

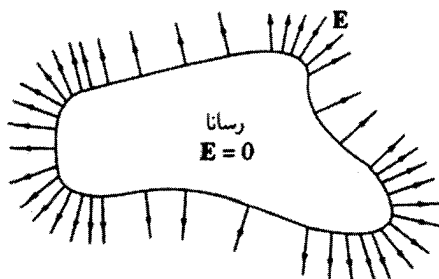
(ج) بارهای موجود در سطح قرار می‌گیرند. این تنها مکانی است که بارها می‌توانند در آن بمانند.

(د) رسانا هم‌پتانسیل است. برای آنکه اگر \mathbf{a} و \mathbf{b} دو نقطه دلخواه درون (یا بر روی سطح) یک رسانا باشند $V(\mathbf{a}) = V(\mathbf{b})$ و بنابراین $V(\mathbf{a}) - V(\mathbf{b}) = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$.

(ه) درست خارج رسانا، \mathbf{E} عمود بر سطح است. در غیر این صورت مانند قسمت (الف) بار سریعاً در درون سطح جریان پیدا می‌کند تا مؤلفه مماسی را از بین ببرد (شکل ۲-۴۳). (بار به صورت عمود بر سطح نمی‌تواند جریان پیدا کند زیرا که مکانش محدود به جسم رساناست).

اینکه بار در یک رسانا باید به طرف سطح جریان داشته باشد ممکن است عجیب به نظر برسد. به دلیل دافعه متقابل، بارها طبیعتاً در دورترین فاصله ممکن قرار می‌گیرند، اما اینکه همه

۱. در خارج رسانا میدان صفر نیست، زیرا در این ناحیه E_0 و E_1 یکدیگر را خنثی نمی‌کنند.



شکل ۲-۴۳

آنها به سطح بروند هدر دادن فضای داخلی به نظر می‌رسد. بدون شک، راهی بهتر از اینکه هر بار از همسایگانش تا جایی که ممکن است دور شود به نظر می‌رسد و آن اینکه برخی از بارها را در سراسر حجم بپاشیم ... اما بدیهی است که چنین نیست. بهترین کار آن است که همه بارها را در روی سطح قرار گیرند، و این موضوع بدون توجه به اندازه و شکل رسانا صادق است.^۱

مسئله را می‌توان در قالب انرژی نیز بیان کرد. مانند هر سیستم دینامیکی آزاد دیگر، بار روی رسانا آرایشی را می‌جوید که انرژی پتانسیل‌اش را کمینه کند. ویژگی (ج) اطمینان می‌دهد که انرژی الکتروستاتیکی یک جسم جامد (با شکل و بار کل معین) وقتی کمینه است که بار روی سطح پخش شده باشد. برای مثال، انرژی کره، چنان‌که در مثال ۲-۸ دیدیم، (q^2/R) است $(1/4\pi\epsilon_0)$ اگر بار به صورت یکنواخت روی سطح آن پخش شود، اما اگر بار به صورت یکنواخت در حجم توزیع شود، مقدار آن (q^2/R) $(3/20\pi\epsilon_0)$ می‌شود که بیشتر است (مسئله ۲-۳۲).

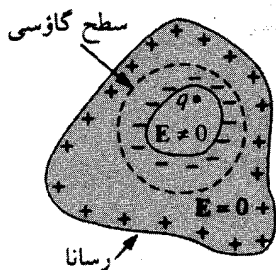
۲-۵-۲ بارهای القایی

اگر بار $+q$ را نزدیک یک رسانای بدون بار ننگه داریم (شکل ۲-۴۴) این دو همدیگر را جذب می‌کنند. دلیل آن است که q ، بارهای منفی را به خود نزدیک و بارهای مثبت را از خود دور می‌کند. (به بیان دیگر، رسانا بار را در جهتی جابه‌جا می‌سازد که میدان q را برای نقاط داخلی یعنی جایی که میدان برابرند باید صفر شود، حذف کند.) از آنجایی که بار القایی منفی به q نزدیکتر است نیروی جاذبه به وجود خواهد آمد (در فصل ۳ این نیرو را محاسبه خواهیم کرد).

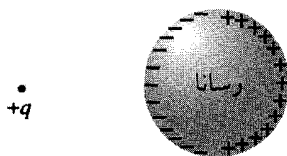
هنگامی که از میدان، پتانسیل یا بار در داخل یک رسانا صحبت می‌شود منظور درون خود

۱. ضمناً وضعیتهای یک‌بعدی و دوبعدی کاملاً متفاوتند: در یک قرص رسانا، بار به محیط آن نمی‌رود. نیز بار روی یک سوزن رسانا به دو انتهای سوزن نمی‌رود. تفصیل بیشتر این دو حالت در مراجع زیر هستند:

R. Friedberg, *Am. J. of Phys.* **61**, 1084 (1993) and D. J. Griffiths and Y. Li, *Am. J. of Phys.* **64**, 706 (1996).



شکل ۴۵-۲



شکل ۴۴-۲

جسم است. اگر در داخل رسانا کاواکی وجود داشته باشد و در داخل آن کاواک مقداری بار موجود باشد، در آن صورت میدان در داخل کاواک صفر نخواهد بود. اما در این حالت کاواک و محتویات آن به دلیل احاطه رسانا از نظر الکتریکی با دنیای خارج بی‌ارتباط هستند (شکل ۴۵-۲). هیچ میدان خارجی نمی‌تواند به داخل رسانا نفوذ کند چرا که در سطح خارجی توسط بارهای القایی خنثی می‌شود. همین‌طور میدان ناشی از بارهای داخل کاواک برای تمام نقاط خارج توسط بارهای القایی رویه داخل از بین می‌رود. (با وجود این، بار جبران‌کننده بر روی رویه خارجی رسانا، عملاً ارتباط q را با دنیای خارج برقرار می‌کند؛ ر.ک مثال ۹-۲). ضمناً مجموع بار القایی بر روی دیواره کاواک با بار داخل مساوی و مختلف‌العلامه‌اند، زیرا که اگر کاواک را با یک سطح گاوسی احاطه کنیم برای تمامی نقاط داخل رسانا $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 0$ (شکل ۴۵-۲) و بنابراین (بنا به قانون گاوس) مجموع بار احاطه‌شده می‌بایست صفر باشد. اما القایی $q + q_{\text{محصور}} = q$ ، بنابراین $q_{\text{القایی}} = -q$.

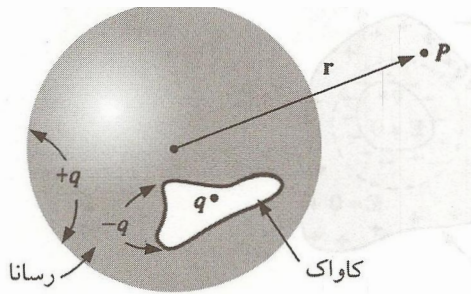
مثال ۹-۲

یک رسانای کروی بدون بار که مرکز آن بر مبدأ منطبق است، کاواکی به شکل دلخواه از آن بیرون آورده شده است (شکل ۴۶-۲). در جایی در داخل کاواک بار $+q$ داریم. پرسش: میدان در خارج کره چیست؟

حل: در نگاه اول ممکن است به نظر برسد که جواب بستگی به شکل کاواک یا نحوه استقرار بار دارد. اما این فکر غلط است. پاسخ بدون توجه به موارد فوق عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

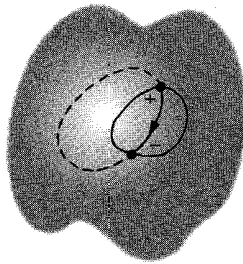
رسانا هر گونه اطلاعات راجع به طبیعت کاواک را از ما پنهان می‌کند و تنها مجموع بار موجود



شکل ۲-۴۶

در آن برای ما معلوم است. چگونه این عمل صورت می‌گیرد؟ بار $+q$ بار $-q$ را به روی دیواره کاواک القا می‌کند و این بار خود را طوری توزیع می‌کند که میدان آن میدان بار q را برای تمام نقاط خارج کاواک خنثی کند. از آنجایی که رسانا دارای هیچ بار خالصی نیست، بار $+q$ خود را به‌طور یکنواخت بر روی سطح کره پخش می‌کند (به این دلیل یکنواخت است که اثر نامتقارنی بار نقطه‌ای $+q$ توسط بار القا $-q$ بر روی سطح داخلی خنثی می‌شود). پس برای نقاط خارج کره تنها چیزی که تداوم می‌یابد میدان بار $+q$ است که به‌طور یکنواخت بر روی سطح خارجی توزیع شده است.

شاید به این فکر بیفتید که این استدلال چالش‌پذیر است: زیرا در واقع سه میدان \mathbf{E}_q ، \mathbf{E}_{q_0} و باقی‌مانده \mathbf{E} در اینجا دخیل‌اند. تنها چیزی که درباره آن اطمینان داریم این است که مجموع این سه میدان در داخل رسانا صفر است، اما ادعا کردیم که تنها دو میدان اول یکدیگر را خنثی می‌کنند، در حالی که میدان سوم جداگانه صفر است. به‌علاوه، حتی اگر دو میدان در داخل رسانا یکدیگر را خنثی کنند، چگونه می‌توان گفت که آنها در خارج رسانا هم یکدیگر را خنثی می‌کنند؟ زیرا گذشته از همه چیز آنها برای نقاط داخل کاواک یکدیگر را خنثی نمی‌کنند. در این لحظه نمی‌توان پاسخ کاملاً قانع‌کننده‌ای داد، ولی این موضوع حقیقت دارد که راهی برای توزیع $-q$ در سطح داخلی وجود دارد که میدان q را در نقطه‌های خارجی خنثی می‌کند. زیرا همین کاواک را می‌توان در رسانای کروی عظیمی به شعاع ۲۷ مایل یا چند سال نوری یا هر چیز دیگر ایجاد کرد. در این مورد بار $+q$ باقیمانده روی سطح خارجی بیش از آن دور است که بتواند میدان قابل‌ملاحظه‌ای ایجاد کند و دو میدان دیگر باید خودشان عمل خنثی کردن را انجام دهند. پس می‌دانیم که می‌توانند این کار را انجام دهند ... اما آیا مطمئن هستیم که این کار را می‌کنند؟ شاید برای کره‌های کوچک طبیعت راه پیچیده‌ای برای خنثی کردن سه‌گانه را ترجیح می‌دهد. نه: چنان‌که در قضایای یکتایی فصل ۳ خواهیم دید، حق انتخاب در الکتروستاتیک بسیار کم است؛ همواره دقیقاً یک راه — نه بیشتر —



شکل ۲-۴۷

برای توزیع بار در روی رسانا وجود دارد که میدان را در داخل آن صفر می‌کند. پس از یافتن یک راه ممکن، اطمینان داریم که اصولاً هیچ راه دیگری وجود ندارد. ■

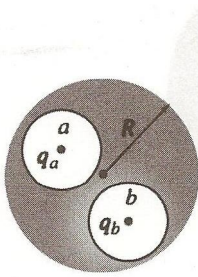
اگر کاواکی که توسط یک رسانا احاطه شده است، بدون بار باشد میدان در داخل آن صفر خواهد بود؛ چرا که هر خط میدانی مجبور است که از دیواره کاواک شروع و به آن ختم شود و جهت آن از بار مثبت به سمت بار منفی باشد (شکل ۲-۴۷). اگر این خط میدان را قسمتی از یک حلقه بسته در نظر بگیریم که ادامه آن در داخل رساناست (جایی که $E = 0$) مقدار $\oint E \cdot dl$ یقیناً مثبت خواهد بود که بر خلاف معادله (۲-۱۹) است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که در داخل یک کاواک خالی، $E = 0$ است و در حقیقت هیچ باری بر روی دیواره کاواک وجود ندارد. (به این دلیل است که اگر در طول یک طوفان تندر در داخل اتومبیل فلزی باشید، ایمن می‌مانید، ممکن است بخته شوید ولی از برق‌گرفتگی مصون هستید. از همین قاعده برای حفاظت وسایل حساس در داخل قفس فاراده که به زمین متصل شده است، استفاده می‌شود. در عمل، لازم نیست که حصار، یک رسانای پیوسته و توپر باشد بلکه در اغلب موارد یک شبکه سیمی نیز همین کار را انجام می‌دهد).

مسئله ۲-۳۵ یک کره فلزی به شعاع R با بار q توسط یک پوسته کروی فلزی هم‌مرکز باکره احاطه شده است (شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b ، مانند شکل ۲-۴۸). پوسته دارای هیچ بار خالصی نیست. (الف) چگالی بارهای سطحی σ را در شعاعهای R و a و b به دست آورید.

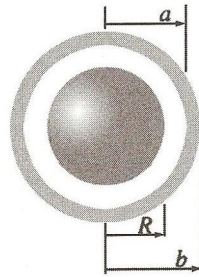
(ب) با به‌کارگیری بینهایت به‌عنوان نقطه مرجع، پتانسیل را در مرکز به دست آورید.

(ج) حال سطح خارجی را با یک سیم به زمین متصل می‌کنیم تا پتانسیل آن را به صفر تقلیل دهد (مرجع در بینهایت) جوابهای (الف) و (ب) چگونه تغییر می‌کنند.

مسئله ۲-۳۶ دو کاواک کروی به شعاعهای a و b در داخل یک کره رسانای خنثی به شعاع R ایجاد شده‌اند (شکل ۲-۴۹). در مرکز هر کاواک یک بار نقطه‌ای قرار می‌دهیم، بارها را q_a و q_b بنامید. (الف) بارهای سطحی σ_a ، σ_b ، σ_R را به دست آورید.



شکل ۴۹-۲



شکل ۴۸-۲

- (ب) میدان در خارج رسانا چیست؟
 (ج) میدان در داخل هر کاواک چیست؟
 (د) نیروی وارد بر بارهای q_a و q_b چقدر است؟
 (ه) اگر بار سوم q_c را نزدیک رسانا بیاوریم، هر یک از این جوابها چگونه تغییر می‌کنند؟ □

۳-۵-۲ بار سطحی و نیروی وارد بر یک رسانا

به دلیل آنکه درون یک رسانا میدان صفر است، شرط مرزی (۲-۳۳) ایجاب می‌کند که میدان بلافاصله در خارج عبارت باشد از

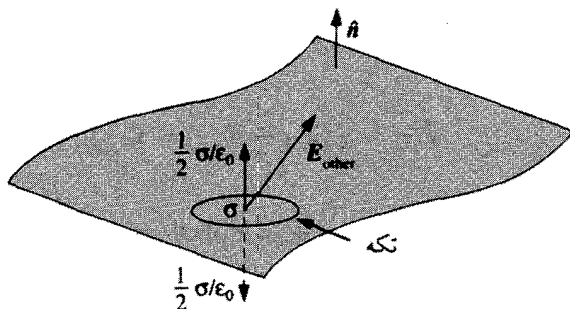
$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (۴۸-۲)$$

که با نتیجه قبلی ما مبنی بر عمود بودن میدان بر سطح، سازگاری دارد. برحسب پتانسیل، معادله (۲-۳۶)، به دست می‌آوریم

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} \quad (۴۹-۲)$$

اگر بتوانید \mathbf{E} یا V را تعیین کنید با استفاده از این معادلات قادر خواهید بود که بار سطحی موجود بر روی رسانا را محاسبه کنید. از این معادلات در فصل بعد به تناوب استفاده خواهد شد.

طبیعتاً در حضور میدان الکتریکی بر بار سطحی نیرویی وارد می‌شود. نیرو در واحد سطح \mathbf{f} برابر $\sigma \mathbf{E}$ است. اما مشکل در اینجاست که میدان الکتریکی در یک بار سطحی ناپیوسته است پس چه مقداری از آن را باید به کار ببریم؛ \mathbf{E}_1 ، \mathbf{E}_2 یا چیزی مابین آن دو؟ پاسخ این است که



شکل ۵۰-۲

باید از متوسط آن دو استفاده بشود:

$$f = \sigma E_{\text{میانگین}} = \frac{1}{2} \sigma (E_{\text{بالا}} + E_{\text{پایین}}) \quad (۵۰-۲)$$

چرا متوسط؟ دلیل آن خیلی ساده است، هر چند بیان آن ممکن است خیلی پیچیده جلوه کند، بیایید توجه خود را بر روی یک تکه کوچک از سطح که مرکز آن نقطه مورد نظر ماست، متمرکز کنیم (شکل ۵۰-۲). تکه را به قدری کوچک اختیار می‌کنیم که الزاماً مستوی و بار سطحی روی آن الزاماً ثابت باشد. میدان حاصل شامل دو قسمت است: یکی مربوط به خود تکه انتخابی و دیگری مربوط به هر چیز دیگر (منظور مناطق سطحی است که می‌توانند به‌عنوان منابع خارجی محسوب شوند):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{تکه}} + \mathbf{E}_{\text{دیگر}}$$

خود تکه نمی‌تواند بر خود نیرویی وارد کند، درست مانند آنکه شما درون سبد بایستید و بخواهید با بالا کشیدن دسته‌هایش خود را از زمین بلند کنید. بنابراین نیروی وارد بر تکه منحصراً ناشی از $\mathbf{E}_{\text{دیگر}}$ خواهد بود، و آن شامل هیچ ناپیوستگی نیست (اگر قطعه را جابه‌جا کنیم، میدان در داخل "حفره" کاملاً یکنواخت باقی می‌ماند). ناپیوستگی کاملاً از بارهای روی تکه ناشی می‌شود که میدان $(\sigma/2\epsilon_0)$ را در هر دو طرف و در جهت خارج سطح ایجاد می‌کند (شکل ۵۰-۲). بنابراین

$$\mathbf{E}_{\text{بالا}} = \mathbf{E}_{\text{دیگر}} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

$$\mathbf{E}_{\text{پایین}} = \mathbf{E}_{\text{دیگر}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

$$\mathbf{E}_{\text{دیگر}} = \frac{1}{4}(\mathbf{E}_{\text{بالا}} + \mathbf{E}_{\text{پایین}}) = \mathbf{E}_{\text{میانگین}}$$

میانگین‌گیری، در واقع فقط وسیله‌ای برای از بین بردن سهم خود تکه است. این بحث در مورد هر بار سطحی صادق است. در مورد خاص یک رسانا، میدان داخل صفر و خارج $\hat{n}(\sigma/\epsilon_0)$ است [معادله (۲-۴۸)]. در نتیجه متوسط آن $\hat{n}(\sigma/2\epsilon_0)$ است و نیرو در واحد سطح عبارت خواهد بود از

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2\epsilon_0}\sigma^2 \hat{n} \quad (۵۱-۲)$$

این یک فشار الکتروستاتیکی به طرف خارج بر روی سطح است که سعی بر کشیدن رسانا به داخل میدان بدون توجه به علامت σ دارد. می‌توان فشار را برحسب میدان فقط بیرون سطح بیان کرد

$$P = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (۵۲-۲)$$

مسئله ۳۷-۲ دو صفحه فلزی بزرگ (با سطح مقطع A) به فاصله d از یکدیگر قرار دارند. فرض کنید بار Q بر روی هریک از دو صفحه قرار دارد. نیروی الکتروستاتیک وارد بر هر صفحه را پیدا کنید.

مسئله ۳۸-۲ یک کره فلزی به شعاع R دارای بار Q است. نیروی دافعه بین نیمکره شمالی و جنوبی آن چیست؟

۴-۵-۲ خازنها

فرض کنید که دو رسانا در اختیار داریم، روی یکی بار $+Q$ و روی دیگری بار $-Q$ قرار داده‌ایم (شکل (۵۱-۲)). از آنجایی که بر روی رسانا V ثابت است، می‌توانیم بدون ابهام از اختلاف پتانسیل



شکل ۵۱-۲

بین آنها صحبت کنیم

$$V = V_+ - V_- = - \int_{(-)}^{(+)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

از نحوه توزیع بار بر روی دو رسانا بی اطلاع هستیم، و در این صورت محاسبه میدان اگر که شکل آنها پیچیده باشد، مشکل می شود. ولی این را نیز می دانیم که: \mathbf{E} با Q متناسب است زیرا که \mathbf{E} با توجه به معادله کولن عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r^2} \hat{\mathbf{r}} d\tau$$

بنابراین اگر ρ را دو برابر کنید، \mathbf{E} نیز دو برابر می شود. (یک لحظه صبر کنید! از کجا می دانیم که دو برابر کردن Q و همچنین $-Q$ ، به سادگی ρ را دو برابر می کند؟ شاید بار به یک پیکربندی کاملاً متفاوتی دست پیدا کند که ρ در بعضی مکانها چهار برابر و در برخی دیگر نصف شود به گونه ای که بار کل بر روی هر رسانا دو برابر شود. واقعیت این است که این نگرانی بی مورد است - دو برابر کردن Q ، در همه جا ρ را دو برابر خواهد کرد؛ بارها را به اطراف جابه جا نمی کند. اثبات این مطلب در فصل ۳ گفته خواهد شد؛ فعلاً باید به این گفته اطمینان کنید).

از آنجایی که \mathbf{E} با Q متناسب است، V نیز با Q متناسب می شود. ضریب تناسب را ظرفیت

می نامیم

$$C \equiv \frac{Q}{V} \quad (۵۳-۲)$$

ظرفیت کمیته کاملاً هندسی است و به اندازه، شکل، و فاصله دو رسانا بستگی دارد. در SI، C برحسب فاراد سنجیده می شود؛ یک فاراد عبارت است از یک کولن بر ولت. ولی یک فاراد عملاً واحد بزرگی است.^۱ واحدهای عملیتر عبارت اند از میکروفاراد و پیکوفاراد (10^{-6} F و 10^{-12} F).

توجه داشته باشید که V طبق تعریف عبارت است از پتانسیل رسانای مثبت منهای پتانسیل رسانای منفی، به همین ترتیب Q نیز بار رسانای مثبت است. همچنین ظرفیت یک کمیت همواره مثبت است. (در ضمن ممکن است از ظرفیت یک رسانای منفرد نیز صحبت شود. در این حالت رسانای دوم یک پوسته کروی خیالی با شعاع نامتناهی و بار منفی است که رسانای اولی را احاطه

۱. در ویرایش دوم گفتیم که حمل یک خازن یک فارادی نیازمند به یک جرتقل است. اکنون دیگر چنین نیست؛ شما می توانید خازن یک فارادی تهیه کنید که به راحتی در یک قاشق سوپخوری جای می گیرد.

کرده است، و هیچ سهمی در میدان ندارد. بنابراین ظرفیت از معادله (۵۳-۲) به دست می‌آید که در آن پتانسیل با در نظر گرفتن بینهایت به عنوان نقطه مرجع، محاسبه شده است).

مثال ۲-۱۰

ظرفیت یک خازن با صفحات موازی را که شامل دو سطح فلزی با مساحت A و به فاصله d از یکدیگر است، پیدا کنید (شکل ۵۲-۲).

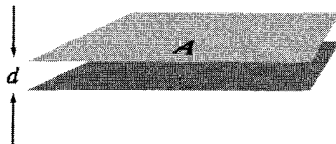
حل: اگر بار $+Q$ را بر روی صفحه بالایی و $-Q$ را بر روی صفحه پایینی قرار دهیم به طور یکنواخت بر روی سطح پخش می‌شوند، به شرط اینکه مساحت به اندازه کافی بزرگ و فاصله بین دو صفحه کوچک باشد.^۱ از این رو چگالی بار سطحی روی صفحه بالایی $\sigma = Q/A$ است و بدین ترتیب طبق مثال ۲-۵، میدان عبارت است از $(Q/A)(1/\epsilon_0)$. بنابراین اختلاف پتانسیل بین صفحات عبارت خواهد شد از

$$V = \frac{Q}{A\epsilon_0} d$$

و از آنجا

$$C = \frac{A\epsilon_0}{d} \quad (54-2)$$

برای مثال اگر صفحات، از مربعهایی به ضلع ۱ سانتی‌متر و به فاصله ۱ میلی‌متر از هم تشکیل شده باشند، ظرفیت سیستم $F \times 10^{-12} \times 9$ خواهد شد. ■



شکل ۲-۵۲

۱. حل دقیق این مثال به راحتی ممکن نیست — حتی برای حالت ساده‌تر صفحات دایره‌ای. مراجعه شود به

مثال ۱۱-۲

ظرفیت دو پوستهٔ کروی هم‌مرکز به شعاعهای a و b را بیابید.

حل: بار $+Q$ را بر روی کره داخلی و $-Q$ را بر روی کره خارجی قرار می‌دهیم، میدان بین دو کره

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

است. بنابراین اختلاف پتانسیل بین آنها عبارت است از

$$V = -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_b^a \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

طبق آنچه گفته شد، V با Q متناسب است و ظرفیت عبارت خواهد شد از

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{(b-a)}$$

برای پر کردن یک خازن باید الکترون‌ها را از صفحهٔ مثبت جدا و به صفحهٔ منفی حمل کنیم. برای انجام این کار باید برخلاف میدان الکتریکی که می‌خواهد آنها را به رسانای مثبت برگرداند و از رسانای منفی دور کند، وارد عمل شوید. چه مقدار کار برای پر کردن یک خازن تا مقدار بار Q ، لازم است؟ فرض کنید که در یک مرحلهٔ میانی فرایند، بار روی صفحهٔ مثبت q است و در نتیجه اختلاف پتانسیل q/C می‌شود. طبق معادلهٔ (۲-۳۸) کار لازم برای حمل بار dq بعدی عبارت است از

$$dW = \left(\frac{q}{C} \right) dq$$

بنابراین مجموع کار لازم برای رساندن بار از $q = 0$ به $q = Q$

$$W = \int_0^Q \left(\frac{q}{C} \right) dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

خواهد بود. اگر بنویسیم $Q = CV$ ، معادله به صورت زیر در می‌آید

$$W = \frac{1}{2} CV^2 \quad (۵۵-۲)$$

که در آن V پتانسیل نهایی خازن است.

مسئله ۳۹-۲ ظرفیت در واحد طول دو لوله استوانه‌ای فلزی هم‌محور به شعاعهای a و b را محاسبه کنید (شکل ۵۳-۲).



شکل ۵۳-۲

مسئله ۴۰-۲ فرض کنید که صفحات یک خازن با صفحات موازی، بر اثر جاذبه متقابل خود، به اندازه بینهایت کوچک ε به هم نزدیک شوند.

(الف) با استفاده از معادله (۵۲-۲) مقدار کار انجام شده توسط نیروهای الکتروستاتیکی را برحسب میدان \mathbf{E} و مساحت صفحات، A ، به دست آورید.

(ب) از معادله (۴۶-۲) برای بیان انرژی از دست رفته توسط میدان در این فرایند استفاده کنید. (این مسئله آسان به نظر می‌رسد، اما در واقع مبنای آن به دست آوردن معادله (۵۲-۲) با استفاده از پایستگی انرژی است). □

مسائل تکمیلی فصل ۲

مسئله ۴۱-۲ میدان الکتریکی را به فاصله z بالای مرکز یک صفحه مربعی به ضلع a که دارای بار سطحی یکنواخت σ است پیدا کنید. صحت جواب خود را در موارد حدی $a \rightarrow \infty$ و $a \gg z$ بررسی کنید.

پاسخ: $(\sigma/2\varepsilon_0) \{ (4/\pi) \tan^{-1} \sqrt{1 + (a^2/2z^2)} - 1 \}$

مسئله ۴۲-۲ اگر میدان الکتریکی در منطقه‌ای توسط معادله زیر (در مختصات کروی)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{A\hat{r} + B \sin \theta \cdot \cos \phi \hat{\phi}}{r}$$

که در آن A و B مقادیر ثابتی هستند داده شود، چگالی بار چیست؟

پاسخ: $\varepsilon_0 (A - B \sin \phi)/r^2$

مسئله ۴۳-۲ نیروی وارد بر نیمکره شمالی از طرف نیمکره جنوبی یک کره را که به طور یکنواخت

باردار شده است بیاید. پاسخ خود را برحسب شعاع R و بار کل Q بیان کنید.

پاسخ: $(1/4\pi\epsilon_0)(3Q^2/16R^2)$

مسئله ۲-۴۴ یک کاسه نیمکره‌ای معکوس شده به شعاع R دارای بار سطحی یکنواخت σ است. اختلاف پتانسیل بین قطب شمال و مرکز آن را به دست آورید.

پاسخ: $(R\sigma/2\epsilon_0)(\sqrt{2} - 1)$

مسئله ۲-۴۵ یک کره به شعاع R و با چگالی بار $\rho(r) = kr$ که در آن k مقداری ثابت است دارای چه انرژی است؟ صحت پاسخ را حداقل با دو روش محاسبه، امتحان کنید.

پاسخ: $\pi k^2 R^4 / 7\epsilon_0$

مسئله ۲-۴۶ پتانسیل الکتریکی نوعی بیکربندی بار توسط معادله زیر داده می‌شود

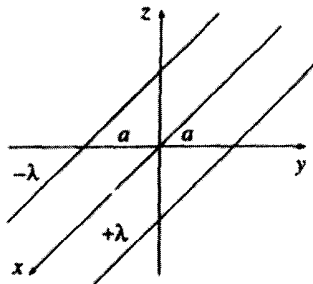
$$V(r) = A \frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

(A و λ مقادیر ثابت هستند). میدان الکتریکی $\mathbf{E}(r)$ ، چگالی بار $\rho(r)$ و بار کل Q را محاسبه کنید.

پاسخ: $\rho = \epsilon_0 A (4\pi\delta^3(r) - \lambda^2 e^{-\lambda r}/r)$

! مسئله ۲-۴۷ دو سیم نامتناهی طویل و موازی با محور x ها، دارای چگالی بارهای $+\lambda$ و $-\lambda$ هستند. (شکل ۲-۵۴).

(الف) پتانسیل را در نقطه دلخواه (x, y, z) با به کارگیری مبدأ به عنوان نقطه مرجع محاسبه کنید.
 (ب) نشان دهید که سطوح هم پتانسیل، استوانه‌های دایره‌ای هستند و محل محور و شعاع استوانه متناظر با یک پتانسیل داده شده V_0 را به دست آورید.



شکل ۲-۵۴

! مسئله ۲-۴۸ در یک دیود خلا، الکترونها از یک کاتد داغ که در پتانسیل صفر نگه داشته شده است متصاعد می شوند و از میان یک شکاف به سمت آند که دارای پتانسیل V_0 است، شتاب می گیرند. بلافاصله ابری از الکترونهای متحرک در درون گاف (به نام بار فضایی) تا اندازه ای تشکیل می شود که میدان در سطح کاتد را به صفر تقلیل می دهد، از آن به بعد یک جریان دائمی I بین دو صفحه به وجود می آید.

فرض کنید که صفحات نسبت به فاصله شان بزرگ باشند (یعنی در شکل ۲-۵۵، $A \gg d^2$) به طوری که بتوان از اثرهای لبه ای صرف نظر کرد. در آن صورت V, ρ و v (سرعت الکترونها) همگی فقط تابعی از x می شوند.

(الف) معادله پواسون را برای منطقه میان دو صفحه بنویسید.

(ب) با فرض اینکه الکترونها از حالت سکون، از کاتد شروع به حرکت بکنند، سرعت آنها در نقطه x که پتانسیل آن $V(x)$ است، چیست؟

(ج) در حالت پایا، I مستقل از x است. در آن صورت معادله میان ρ و v را به دست آورید.

(د) با استفاده از این سه نتیجه، با حذف ρ و v ، معادله دیفرانسیلی برای V به دست آورید.

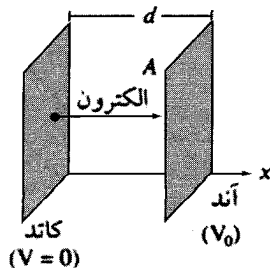
(ه) این معادله را برای V ، برحسب x, V_0 ، و d حل کنید. $V(x)$ را رسم کنید و آن را با

پتانسیل بدون بار فضایی مقایسه کنید. همچنین ρ و v را نیز برحسب x به دست آورید.

(و) نشان دهید که

$$I = KV_0^{3/2} \quad (2-56)$$

و مقدار ثابت K را بیابید. معادله (۲-۵۶) قانون چاپلند-لانگمویر نامیده می شود. این قانون برای اشکال هندسی، که در آن بار فضایی جریان را محدود می کند نیز صادق است. توجه داشته باشید که دیود محدود شده به وسیله بار فضایی غیرخطی است و از قانون اهم پیروی نمی کند.



شکل ۲-۵۵

! مسئله ۲-۴۹ فرض کنید که اندازه‌گیرهای جدید و فوق‌العاده صحیحی صورت گرفته‌اند که خطایی را در قانون کولن آشکار ساخته‌اند و نیروی واقعی از برهم‌کنش بین دو بار به صورت زیر به دست آمده است

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \left(1 + \frac{\pi}{\lambda} \right) e^{-\pi/\lambda} \hat{\mathbf{r}}$$

که در آن λ یک ثابت جدید طبیعت است (λ دارای بُعد طول و بدیهی است دارای مقدار بزرگی — در حدود نصف شعاع جهان شناخته شده کنونی — باشد؛ به طوری که تصحیح لازم کوچک بوده و به همین دلیل است که هیچکس تا کنون متوجه این اختلاف نشده است). در این صورت مجبور هستید که الکتروستاتیک را برای مطابقت با کشف جدید مجدداً فرمولبندی کنید، فرض کنید که اصل برهم‌نهی همچنان صادق است.

(الف) میدان الکتریکی توزیع بار ρ چیست؟ [جایگزین معادله (۲-۸)].

(ب) آیا این میدان الکتریکی، وجود یک پتانسیل اسکالر را مجاز می‌دارد؟ مختصراً توضیح دهید که چگونه به این نتیجه رسیده‌اید (نیازی به اثبات صوری نیست، یک شرح قانع‌کننده کفایت می‌کند).

(ج) پتانسیل بار نقطه‌ای q — متناظر به معادله (۲-۲۶) را به دست آورید. [اگر جوابتان در مورد (ب) “منفی” است، بهتر است که تجدیدنظر کنید!] بینهایت را نقطه مرجع بگیرید.
(د) برای بار نقطه‌ای q در مبدأ نشان دهید که

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} + \frac{1}{\lambda^2} \int_V V d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

که در آن S سطح و V حجم هر کره‌ای به شعاع دلخواه و به مرکز q است.
(ه) نشان دهید که می‌توان به تعمیم زیر برای هر توزیع باری دست یافت

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} + \frac{1}{\lambda^2} \int_V V d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{enc}$$

(در الکتروستاتیک جدید بعد از قانون گاوس این بهترین است.)

(و) نمودار مثلثی (مانند شکل ۲-۳۵) را برای این جهان رسم کنید و همه جا فرمولهای ذی ربط را قرار دهید (فرمول پواسون را به عنوان معادله‌ای برای ρ برحسب V و قانون گاوس (به شکل دیفرانسیلی) را به صورت معادله‌ای برای ρ برحسب \mathbf{E} در نظر بگیرید).

مسئله ۲-۵۰ فرض کنید که میدان الکتریکی $\mathbf{E}(x, y, z)$ به صورت

$$E_x = ax \quad E_y = 0 \quad E_z = 0$$

است که در آن a یک کمیت ثابت است. چگالی بار چیست؟ چگونه این واقعیت را که در مورد چگالی بارهای یکنواخت، میدان جهت خاصی دارد منظور می‌کنید؟ (این مسئله جالبتر از آن است که به نظر می‌آید، و ارزش دقت بیشتری را داراست).

مسئله ۲-۵۱ در الکتروستاتیک، مسائلی که از $1/r^2$ ناشی از قانون کولن تبعیت می‌کنند طبق اصل برهم‌نهی با یکدیگر جمع می‌شوند. نظریهٔ مشابهی را نیز می‌توان برای قانون گرانش نیوتون به‌دست آورد. انرژی گرانشی یک کره به جرم M و شعاع R را محاسبه کنید. فرض کنید توزیع در این کره یکنواخت است. با استفاده از نتایج آن انرژی گرانشی خورشید را به‌دست آورید. خورشید با آهنگ $3.86 \times 10^{26} \text{ W}$ تابش می‌کند. اگر همه این توان از انرژی گرانشی ذخیره‌شده در آن به‌دست آید، خورشید چه مدت دوام می‌آورد؟ (ظاهراً عمر خورشید از این مقدار بسیار بیشتر است □ در نتیجه این منبع توان خورشید نخواهد بود).

روشهای خاص

۱-۳ معادله لاپلاس

۱-۱-۳ مقدمه

هدف نخست الکتروستاتیک، یافتن میدان الکتریکی یک توزیع بار ماناست. این هدف با استفاده از قانون کولن به شکل زیر قابل حصول است

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (1-3)$$

متأسفانه انتگرالهایی از این نوع، حتی برای توزیع بارهای ساده نیز به سختی محاسبه می‌شوند. اغلب می‌توان با استفاده از تقارنهای و به‌کارگیری قانون گاوس به نتیجه رسید. اما معمولاً بهترین روش، محاسبه پتانسیل V در ابتداست که نسبت به \mathbf{E} با فرمول ساده‌تری بیان می‌شود

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (2-3)$$

با وجود این دستیابی تحلیلی به جواب این انتگرال نیز دور از دسترس است. علاوه بر این در مسائل شامل رساناها، ممکن است خود ρ نیز از پیش برای ما معلوم نباشد، چرا که بار آزادانه حرکت می‌کند و تنها چیزی که ما می‌توانیم مستقیماً تحت کنترل در آوریم بار کلی (یا شاید پتانسیل) هر رساناست. در این قبیل موارد، سودمند است که مسئله را به صورت دیفرانسیلی آن برگردانیم و از معادله پواسون (۲-۲) استفاده کنیم

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (3-3)$$

که همراه با شرایط مرزی مناسب، با معادله (۲-۳)، هم‌ارز است. در خیلی از موارد مایل به یافتن پتانسیل در ناحیه‌هایی هستیم که در آنها $\rho = 0$ است (اگر در همه جا $\rho = 0$ باشد، طبعاً $V = 0$ خواهد شد و دیگر چیزی برای گفتن باقی نمی‌ماند — ولی منظور ما این نیست. ممکن است مقدار زیادی بار نیز در مکانهای دیگر وجود داشته باشد اما ما توجه خود را محدود به مناطقی می‌کنیم که در آنها بار وجود ندارد.) در این مورد معادله پواسون به معادله لاپلاس تبدیل می‌شود

$$\nabla^2 V = 0 \quad (4-3)$$

یا اگر بخواهیم در مختصات دکارتی بیان کنیم

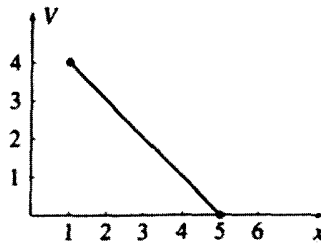
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (5-3)$$

این فرمول به قدری بنیادی است که تقریباً می‌توان گفت که الکتروستاتیک همانا مطالعه فرمول لاپلاس است. هم‌زمان، این معادله همه جا حاضر، در شاخه‌های مهمی از فیزیک مانند گرانش و مغناطیس، نظریه گرما و مطالعه حبابهای صابون کاربرد دارد. در ریاضیات، این فرمول نقش مهمی را در نظریه توابع تحلیلی بازی می‌کند. برای داشتن درکی از معادله لاپلاس و حل آن (که توابع هماهنگ نامیده می‌شوند) از حالت‌های یک و دوبعدی که برای نمایش تمام رفتارهای حالت سه‌بعدی لازم است (گرچه حالت یک‌بعدی به غنای دو حالت دیگر نیست) شروع می‌کنیم.

۲-۱-۳ معادله لاپلاس در یک بعد

فرض کنید که V تابعی فقط از یک متغیر x است. لذا معادله لاپلاس به صورت زیر خواهد شد

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$



شکل ۱-۳

جواب عمومی عبارت است از

$$V(x) = mx + b \quad (۶-۳)$$

که معادله یک خط مستقیم است. این جواب حاوی دو مقدار ثابت m و b غیر مشخص است که برای معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم الزامی هستند. این دو مقدار در موارد خاص تحت شرایط مرزی مسئله ثابت اند. برای مثال ممکن است تصریح شود که در $x = 1$, $V = 4$ و در $x = 5$, $V = 0$ است. در این صورت $m = -1$ و $b = 5$ می شود و در نتیجه $V = -x + 5$ (شکل ۱-۳). توجه شما را به دو جنبه این نتیجه جلب می کنیم؛ گرچه با نوشتن جواب عمومی صریح، اینها در حالت یک بعدی بدیهی به نظر می آیند، اما در حالت های دو و سه بعدی به هیچ وجه بدیهی نیستند: ۱. برای هر a ای، $V(x)$ ، متوسط $V(x+a)$ و $V(x-a)$ است:

$$V(x) = \frac{1}{2}[V(x+a) - V(x-a)]$$

معادله لاپلاس یک نوع روش میانگین گیری است، که به شما می گوید به نقطه x ، میانگین مقدار در چپ و راست x را نسبت دهید. در این معنا جواب های معادله لاپلاس آن طور که باید جالب نیستند ولی با نقاط ابتدا و انتها جور هستند.

۲. معادله لاپلاس دارای هیچ بیشینه یا کمینه موضعی نیست. مقادیر فرینه V باید در ابتدا و انتها رخ دهند. در واقع، این مورد، نتیجه ای از نکته ۱ است. زیرا که اگر بیشینه موضعی می داشتیم V در آن نقطه بزرگتر از اطراف می شد و نتیجتاً نمی توانست مقدار میانگین باشد (به طور معمول، انتظار می رود که مشتق دوم در نقطه بیشینه منفی و در نقطه کمینه مثبت باشد. از طرفی، چون بنابه الزام معادله لاپلاس، مشتق دوم باید صفر باشد، منطقی است که در جوابها نباید فرینه وجود داشته باشد. معذک، این را نمی توان اثبات نامید، زیرا توابعی وجود دارند و در نقاطی بیشینه یا کمینه ای دارند که مشتق دوم در آنجاها صفر است: به عنوان مثال x^2 کمینه ای در $x = 0$ دارد).

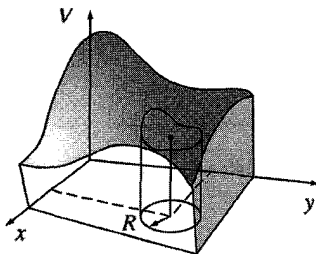
۳-۱-۳ معادله لاپلاس در دو بعد

اگر V به دو متغیر وابسته باشد، معادله لاپلاس به صورت زیر در می آید

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

این دیگر یک معادله دیفرانسیل معمولی نیست (یعنی معادله‌ای که فقط شامل مشتقات معمولی باشد)؛ این یک معادله دیفرانسیل جزئی است. در نتیجه، بعضی از قواعد ساده در این مورد کاربرد نخواهند یافت. برای مثال جواب عمومی این معادله به رغم اینکه یک معادله مرتبه دوم است فقط حاوی دو مقدار ثابت دلخواه و یا به همین دلیل، هر تعداد متناهی نیست. در واقع نمی‌توان برای آن یک جواب عمومی در نظر گرفت. [حداقل نه به شکل جمع و جور نظیر معادله (۳-۶)]. با این وصف می‌توان بعضی از خواص مشترک را برای همه جوابها استنتاج کرد.

دانستن یک مثال فیزیکی وضعیت را روشنتر می‌کند. ورقه نازک لاستیکی (یا لایه صابون) را که از طرفین کشیده شده است در نظر بگیرید. برای تصریح، فرض کنید که یک جعبه مقوایی نازک در اختیار دارید و لبه‌های آن را به صورت موجدار برش می‌دهید و پس از اتمام، قسمت بالایی را برمی‌دارید (شکل ۳-۲). اکنون یک غشای لاستیکی محکم کشیده شده را به روی جعبه بچسبانید که مانند یک پوسته طبل جلوه کند (البته این پوسته طبل تختی نیست مگر اینکه لبه‌های آن را صاف ببرید). حال اگر مختصات (x, y) را بر کف جعبه قرار دهید. ارتفاع $V(x, y)$ ورقه بالای نقطه (x, y) در معادله لاپلاس صدق می‌کند.^۱ (مثال یک بعدی آن، طناب لاستیکی است که بین



شکل ۳-۲

۱. عملاً معادله‌ای که در مورد ورقه لاستیکی صدق می‌کند عبارت است از

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{و} \quad g = \left[1 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

این معادله به شرطی که سطح چندان از حالت یک صفحه منحرف نشده باشد، به معادله لاپلاس (تقریباً) تبدیل می‌شود.

دو نقطه کشیده شده باشد که قطعاً یک خط مستقیم خواهد ساخت.)

توابع هماهنگ در دو بعد، دارای همان خواصی هستند که در یک بعد متذکر شدیم:

۱. مقدار V در نقطه (x, y) میانگین مقدار نقاط "اطرافش" است. به طور دقیقتر، اگر یک دایره به شعاع R حول نقطه (x, y) رسم کنید. مقدار میانگین V بر روی دایره برابر با مقدار آن در مرکز است:

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{\text{دایره}} V dl$$

(این، روش واهلش را بر اساس جوابهای کامپیوتری معادله لاپلاس توصیه می‌کند: مقدار مشخصی برای V در مرز و حدس معقولی برای V در نقاط داخلی در نظر می‌گیریم. در اولین مرحله به هر نقطه میانگین نزدیکترین همسایگان را نسبت می‌دهیم. در دومین گام این فرایند را با استفاده از مقادیر تصحیح شده تکرار می‌کنیم. بعد از چندین تکرار اعداد به مقدار واقعی نزدیک و بدین ترتیب حل عددی معادله لاپلاس، با مقادیر مرزی داده شده، انجام می‌شود.)

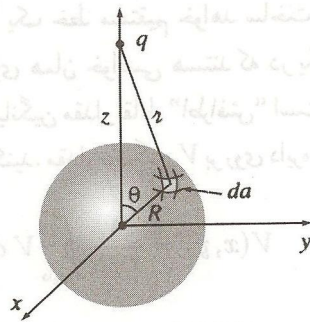
۲. V دارای هیچ بیشینه و یا کمینه موضعی نیست. همه فرینه‌ها در مرزها اتفاق می‌افتند. [مانند قبل، این از شماره (۱) نتیجه می‌شود.] مجدداً، معادله لاپلاس، مشخص‌ترین توابع ممکن را برمی‌گزیند که با شرایط مرزی سازگار باشند: هیچ قله و یا دره‌ای وجود ندارد، فقط صاف‌ترین سطح در دسترس است. به عنوان مثال، اگر توپ پینگ‌پنگی را روی صفحه لاستیکی کشیده شده‌ای (شکل ۲-۳) قرار دهید، به طرف دیگر صفحه غلتیده و می‌افتد - جایی برای قرار گرفتن در آن نمی‌یابد، زیرا معادله لاپلاس وجود چنین مکانی را مجاز نمی‌شمارد. از نقطه نظر هندسی، درست به مانند یک خط مستقیم که کمترین فاصله بین دو نقطه است، تابع هماهنگ نیز در دو بعد، مساحت سطح ایجادشده را برای خط مرزی داده شده کمینه می‌کند.

۳-۱-۴ معادله لاپلاس در سه بعد

در سه بعد، نه می‌توان حل صریحی (مانند حالت یک‌بعدی) ارائه داد و نه می‌توان یک مثال فیزیکی برای راهنمایی به‌کار برد (مانند آنچه در دو بعد انجام شد). با وجود این، آن دو خاصیت همچنان صادق می‌مانند و این دفعه برهانی می‌آوریم:

۱. مقدار V در نقطه r ، متوسط مقدار V روی یک سطح کروی به شعاع R و به مرکز r است

$$V(r) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{S} V da$$



شکل ۳-۳

۲. در نتیجه V نمی‌تواند دارای بیشینه یا کمینه موضعی باشد. مقادیر فرینه V باید در مرزها اتفاق بیفتند، (زیرا که اگر V دارای بیشینه موضعی در Γ بود، در آن صورت می‌توانستیم کره‌ای به دور Γ رسم کنیم که روی آن تمام مقادیر V — و به طریق اولی مقدار متوسط آن — کمتر از اندازه‌شان در Γ باشند.)

اثبات: ابتدا میانگین پتانسیل را بر روی یک سطح کروی به شعاع R ، ناشی از تک بار نقطه‌ای q در خارج کره، حساب می‌کنیم. به همین ترتیب می‌توان مرکز کره را بر مبدأ منطبق ساخت و دستگاه مختصات را طوری انتخاب کرد که q بر روی محور z قرار بگیرد (شکل ۳-۳). پتانسیل در نقطه‌ای روی سطح کره برابر است با

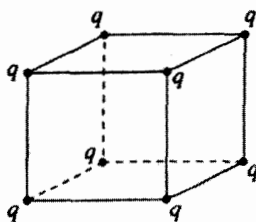
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

که

$$r^2 = z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta$$

بنابراین

$$\begin{aligned} V_{\text{میانگین}} &= \frac{1}{4\pi R^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int [z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta]^{-1/2} R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2zR} \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta} \Big|_0^\pi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2zR} [(z+R) - (z-R)] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z} \end{aligned}$$



شکل ۴-۳

اما این دقیقاً مقدار پتانسیل ناشی از بار q واقع در مرکز کره است. طبق اصل برهم نهی، همین موضوع برای مجموعه‌ای از بارهای خارج کره صادق است. میانگین پتانسیل بارها بر روی کره برابر است با مجموع پتانسیلی که آنها در مرکز ایجاد می‌کنند.

مسئله ۱-۳ میانگین پتانسیل روی یک سطح کروی به شعاع R ناشی از بار q واقع در داخل را حساب کنید. (به عبارت دیگر مانند مورد بالا، فقط $z < R$. البته معادله لاپلاس در این مورد در داخل کره برقرار نیست). نشان دهید که به‌طور کلی:

$$V_{\text{میانگین}} = V_{\text{مرکز}} + \frac{Q_{\text{محصور}}}{4\pi\epsilon_0 R}$$

که در آن $V_{\text{مرکز}}$ عبارت است از پتانسیل در مرکز ناشی از تمام بارهای خارجی و $Q_{\text{محصور}}$ تمامی بارهای محصور شده است.

مسئله ۲-۳ قضیهٔ ارنشاو را در یک جمله توجیه کنید: یک ذرهٔ باردار را نمی‌توان فقط با نیروهای الکتروستاتیکی در تعادل پایدار نگاه داشت. به‌عنوان مثال، یک شبکهٔ مکعبی از بارهای ثابت شکل ۴-۳ را در نظر بگیرید. بدون بررسی دقیق چنین به نظر می‌رسد که یک بار مثبت واقع در مرکز، در هوا معلق خواهد ماند زیرا از هر گوشه دفع می‌شود. نشئت این بطری الکتروستاتیک در کجاست؟ [برای به‌کارگیری همجوشی هسته‌ای به‌عنوان یک چشمهٔ انرژی عملی، لازم است که پلاسما (مخلوطی از ذرات باردار) را تا دمای بسیار بالا گرم کرد - به اندازه‌ای داغ که هرگونه تماس با آن، ظروف معمولی را به بخار تبدیل خواهد کرد. قضیهٔ ارنشاو بیان می‌دارد که یک حصار الکتروستاتیکی نیز مطرح نیست. خوشبختانه می‌توان پلاسمای داغ را به‌صورت مغناطیسی محبوس کرد.]

مسئله ۳-۳ جواب عمومی معادلهٔ لاپلاس در مختصات کروی را برای موردی که V فقط به r وابسته است، بیابید. همین عمل را برای مختصات استوانه‌ای انجام دهید با فرض اینکه V فقط به s وابسته است.

□

۳-۱-۵ شرایط مرزی و قضیه‌های یکتایی

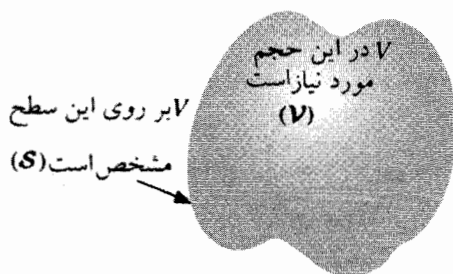
معادله لاپلاس به تنهایی نمی‌تواند V را تعیین کند، بلکه همراه با آن باید یک سری از شرایط مرزی مناسب به‌کار گرفته شوند. این مطلب یک پرسش را در ذهن مطرح می‌کند: شرایط مرزی مناسبی که برای تعیین جواب کافی بوده اما آنقدر قوی هم نیستند که عدم سازگاری ایجاد کنند، کدام‌اند؟ حالت یک‌بعدی آسان است، زیرا که در اینجا جواب عمومی یعنی $V = mx + b$ شامل دو ثابت اختیاری است و در نتیجه به دو شرط مرزی نیازمندیم. برای مثال ممکن است مقدار تابع در دو انتها مشخص شود یا مقدار تابع و مشتق آن در یک انتها معلوم باشد یا مقدار تابع در یک انتها و مشتق آن در انتهای دیگر به ما داده شود. اما فقط مقدار تابع یا فقط مشتق آن در یک انتها به ما اطلاعات کافی نمی‌دهند. همچنین نمی‌توان مشتقها را در دو انتها مشخص کرد ممکن است یا کار زائدی باشد (اگر دو مقدار یکسان باشند) و یا دو مقدار متناقض باشند (اگر آن دو برابر نباشند). در دو یا سه‌بعد با یک معادله دیفرانسیل جزئی مواجه می‌شویم و دانستن اینکه شرایط مرزی قابل قبول کدام‌اند، آسان نیست. آیا شکل یک غشای لاستیکی سفت، به‌عنوان مثال، توسط چهار چوبی که بر روی آن کشیده شده است، به‌طور منحصر به‌فرد تعیین می‌شود یا مانند در شیشه کئسرو، از یک پیکربندی پایدار به دیگری قابل تغییر است؟ پاسخ این است که V توسط مقدارش در مرز به‌طور یکتا معلوم می‌شود. (از قرار معلوم شیشه‌های کئسرو از معادله لاپلاس تبعیت نمی‌کنند). اما شرایط مرزی دیگری نیز می‌توانند به‌کار گرفته شوند (مسئله ۳-۴). اثبات اینکه یک سری شرایط مرزی لازم است، معمولاً به شکل قضیه یکتایی نشان داده می‌شود. از این قبیل قضایا در الکتروستاتیک فراوان است که همگی دارای شکل یکسانی هستند. در اینجا دو تا از مفیدترینشان معرفی می‌شوند.^۱

قضیه اول یکتایی: جواب معادله لاپلاس در یک حجم V اگر V بر روی تمام مرزهای سطح S معلوم باشد، به‌صورت منحصر به‌فرد تعیین می‌شود.

اثبات: در شکل ۳-۵، چنین منطقه‌ای با مرزش نشان داده شده است. (در ضمن می‌تواند نواحی "مجزایی" نیز در درون آن وجود داشته باشد به‌طوری که V بر روی همه آنها مشخص باشد. همچنین مرز بیرونی می‌تواند به بینهایت میل کند، که در این صورت معمولاً V را صفر می‌گیریم.) فرض کنید که دو جواب برای معادله لاپلاس وجود می‌داشت

$$\nabla^2 V_1 = 0 \quad \text{و} \quad \nabla^2 V_2 = 0$$

۱. در اینجا قصد نداریم که وجود جوابها را اثبات کنیم — این کاری دشوار است. در ضمن متن کتاب وجود جواب بر مبنای فیزیکی روشن می‌شود.



شکل ۵-۳

که هر دو دارای یک مقدار بر روی سطح هستند. می‌خواهیم ثابت کنیم که این دو باید مساوی باشند. شیگرد کار آن است که اختلاف را در نظر بگیریم:

$$V_3 \equiv V_1 - V_2$$

این از معادله لاپلاس پیروی می‌کند

$$\nabla^2 V_3 = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = 0$$

و مقدار آن نیز در تمامی مرزها صفر است. (زیرا که V_1 و V_2 در آنجا یکی هستند.) اما معادله لاپلاس اجازه هیچ‌گونه بیشینه یا کمینه موضعی را نمی‌دهد. بنابراین بیشینه و کمینه V_3 ، هر دو صفرند. بنابراین V_3 در همه جا باید صفر باشد و بنابراین

$$V_1 = V_2$$

مثال ۱-۳

نشان دهید که پتانسیل درون یک محیط بسته که کاملاً توسط یک ماده رسانا احاطه شده باشد، ثابت است، به شرط اینکه درون آن محوطه هیچ باری وجود نداشته باشد.

حل: پتانسیل بر روی دیواره کاواک، مقدار ثابت V_0 است [بخش ۲-۵-۱ قسمت (د)]. بنابراین پتانسیل در درون، تابعی است که در معادله لاپلاس صدق می‌کند و دارای مقدار ثابت V_0 بر روی مرز است. بی‌هیچ تأملی می‌توان یک جواب برای این مسئله ارائه داد: در درون محیط $V = V_0$ است. قضیه یکتایی تضمین می‌کند که این تنها جواب است. (نتیجه آنکه میدان درون یک کاواک خالی صفر است که همان نتیجه بخش ۲-۵-۲ است.) ■

قضیه یکتایی مجوزی به تخیل شما می‌دهد: مهم نیست که شما چگونه به جواب دسترسی

پیدا می‌کنید. این جواب اگر (الف) در معادله لاپلاس صدق کند و (ب) دارای مقادیر صحیح در مرزها باشد، در آن صورت درست خواهد بود. در قسمت روش تصویری، قدرت این قضیه را بهتر درک خواهید کرد.

می‌توان به آسانی قضیه اول یکتایی را اصلاح کرد. تصور بر این بود که در منطقه مورد نظر هیچ باری وجود نداشته و بنابراین پتانسیل از قانون لاپلاس پیروی می‌کند، ولی می‌توان به همان ترتیب مقداری بار نیز در آن قرار داد (که در این صورت V از معادله پواسون پیروی می‌کند). روش بحث همان شکل قبلی را داراست. فقط در اینجا:

$$\nabla^2 V_1 = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \nabla^2 V_2 = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

بنابراین

$$\nabla^2 V_3 = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho + \frac{1}{\epsilon_0} \rho = 0$$

مجدداً تفاضل ($V_3 \equiv V_1 - V_2$) در معادله لاپلاس صدق می‌کند و دارای مقدار صفر روی تمام مرزهاست، بنابراین $V_3 = 0$ و در نتیجه $V_1 = V_2$.

نتیجه: پتانسیل در یک حجم V به‌طور منحصر به فرد تعیین می‌شود، اگر (الف) چگالی بار سرتاسر منطقه و (ب) مقدار V بر روی تمامی مرزها مشخص شده باشد.

۳-۱-۶ رساناها و قضیه دوم یکتایی

ساده‌ترین روش برای وضع شرایط مرزی یک مسئله الکتروستاتیک مشخص کردن مقدار V بر روی تمامی سطوح احاطه‌کننده منطقه مورد بحث است. این وضعیت اغلب در عمل اتفاق می‌افتد: در آزمایشگاه، رساناهایی داریم که متصل به یک باتری‌اند که دارای یک پتانسیل معلوم است، و یا متصل به زمین‌اند که برای آزمایشگر به معنای $V = 0$ است. اما موقعیتهای دیگری نیز وجود دارند که در آنها از پتانسیل بر روی مرز بی‌اطلاع هستیم ولی به‌جای آن بار روی سطوح گوناگون رسانا معلوم است. فرض کنید که بار Q_1 را بر روی اولین رسانا و Q_2 را بر روی دومین رسانا و به همین ترتیب تا آخرین رسانا قرار دهیم، ولی در این صورت خود توزیع بار بر روی سطوح رسانا معلوم نیست زیرا به محض آنکه بار بر روی رسانا قرار بگیرد به‌نحوی که غیرقابل کنترل است، بر روی رسانا پخش می‌شود و همچنین در نظر می‌گیریم که مقداری بار یا چگالی مشخص ρ در بین رساناها وجود دارد. آیا اکنون میدان الکتریکی به‌صورت یکتا به‌دست می‌آید؟ یا شاید راههای مختلفی برای ترتیب یافتن بارها بر روی رسانای ذی‌ربط وجود دارند که هر یک منجر به میدان متفاوتی می‌شود؟

قضیه دوم یکتایی: در یک حجم V که با چند رسانا احاطه شده است و با چگالی بار معلوم ρ پر شده است اگر مجموع بار بر روی هر رسانا داده شده باشد میدان به صورت منحصر به فرد به دست می آید، (شکل ۳-۶). (کل منطقه می تواند توسط یک رسانای دیگر احاطه شود یا نشود).

اثبات: فرض کنید که دو میدان وجود دارند که در شرایط مسئله صدق می کنند. هر دو در فضای بین رساناها از قانون گاوس به شکل دیفرانسیلی آن تبعیت می کنند:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

و هر دو، برای یک سطح گاوسی محاط بر رسانا، از قانون گاوس در شکل انتگرالی آن تبعیت می کنند

$$\oint_{\text{سطح رسانای نام}} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_i \quad \oint_{\text{سطح رسانای نام}} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_i$$

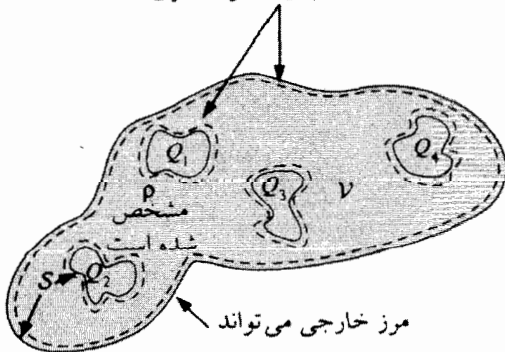
به همین ترتیب برای مرز خارجی (خواه فقط داخل یک رسانا محصور باشد یا در بینهایت باشد) داریم

$$\oint_{\text{مرز خارجی}} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{کل}} \quad \oint_{\text{مرز خارجی}} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{کل}}$$

مانند مورد قبل تفاضل را می آزماییم

$$\mathbf{E}_3 \equiv \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$$

سطحهای انتگرال گیری



شکل ۳-۶

که از قانون زیر در منطقه بین رساناها پیروی می‌کند

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_r = 0 \quad (۷-۳)$$

همچنین بر روی سطح مرزی داریم

$$\oint \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (۸-۳)$$

حال باید از آخرین جزء اطلاعات هم بهره‌گیری کنیم. گرچه نمی‌دانیم که بار Q خود را روی سطح رسانای نام چگونه توزیع می‌کند. می‌دانیم که هر رسانا یک سطح هم‌پتانسیل است و بنابراین V_r بر روی هر سطح رسانایی ثابت است (لزوماً ثابتها برابر نیستند). لزومی ندارد که V صفر شود، زیرا که پتانسیلهای V_1 و V_2 ممکن است برابر نباشند. آنچه ما به قطع می‌دانیم این است که هر دو بر روی هر رسانایی ثابت هستند. با استناد به قاعده ضرب شماره (۵) درمی‌یابیم که

$$\nabla \cdot (V_r \mathbf{E}_r) = V_r (\nabla \cdot \mathbf{E}_r) + \mathbf{E}_r \cdot (\nabla V_r) = -(E_r)^2$$

در اینجا از معادله (۷-۳) و $\mathbf{E}_r = -\nabla V_r$ استفاده شده است. با انتگرال‌گیری بر روی کل منطقه بین رساناها و استفاده از قضیه دیورژانس برای طرف چپ داریم

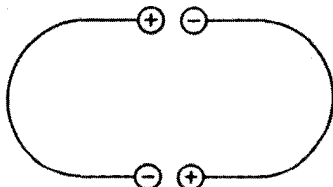
$$\int_V \nabla \cdot (V_r \mathbf{E}_r) d\tau = \oint_S V_r \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{a} = - \int_V (E_r)^2 d\tau$$

انتگرال سطحی تمام مرزهای مناطق مسئله که شامل رساناها و مرز خارجی است را می‌پوشاند. اکنون V_r یک مقدار ثابت بر روی هر سطح است (اگر مرز خارجی در بینهایت باشد، در آنجا $V_r = 0$ می‌شود). بنابراین از زیر انتگرال خارج شده و آنچه باقی می‌ماند، طبق معادله (۸-۳) صفر است. بنابراین

$$\int_V (E_r)^2 d\tau = 0$$

اما این انتگرالده هرگز منفی نیست؛ تنها راه صفر شدن انتگرال آن است که در همه جا $E_r = 0$ باشد. در نتیجه $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$ و قضیه اثبات شده است.

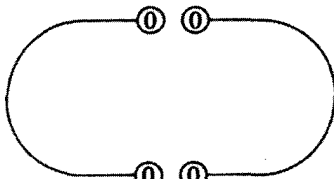
این اثبات ساده نبود و این خطر وجود دارد که خود قضیه معقولتر از اثبات آن به نظر رسد. در صورتی که فکر می‌کنید قضیه دوم یکتایی "بدیهی" است، به مثالی از کتاب پورسل دقت کنید.



شکل ۸-۳



شکل ۷-۳



شکل ۹-۳

شکل ۷-۳ یک پیکربندی الکتروستاتیکی را نشان می‌دهد که متشکل از چهار رسانا با بارهای $\pm Q$ است به طوری که بارهای مخالف نزدیک هم‌اند. این وضعیت بسیار پایدار به نظر می‌رسد. اکنون اگر مطابق شکل ۸-۳ آنها را با سیمهای نازک به هم وصل کنیم، چه اتفاقی می‌افتد؟ از آنجایی که بارهای مثبت بسیار به بارهای منفی نزدیک‌اند (جایی که آنها دوست دارند که قرار بگیرند) ممکن است حدس بزنید که هیچ اتفاقی نیفتاده و پیکربندی به همان صورت پایدار باقی می‌ماند.

این تصور گرچه منطقی به نظر می‌رسد، اما غلط است. پیکربندی شکل ۸-۳ امکان ندارد زیرا که اکنون در واقع دو رسانا وجود دارند و بار کل بر روی هر یک صفر است. یک روش ممکن برای ایجاد توزیع بار صفر بر روی این رساناها آن است که در هیچ جا تجمع بار نداشته باشیم و لذا در همه جا میدان صفر است (شکل ۹-۳). با استفاده از قضیه دوم یکتایی جواب باید چنین باشد: بار در سیمهای نازک جریان می‌یابد و خود را خنثی می‌کند.

مسئله ۴-۳ ثابت کنید وقتی که چگالی ρ داده شود و V یا مشتق عمودی آن $\partial V / \partial n$ بر روی هر سطح مرزی مشخص باشد، میدان به صورت یکتا تعیین می‌شود. سطوح مرزی را رسانا فرض نکنید و یا V را روی هر سطح داده شده ثابت در نظر نگیرید.

مسئله ۵-۳ یک اثبات ظریفتر قضیه دوم یکتایی با استفاده از قضیه گرین صورت می‌پذیرد (مسئله ۱-۶۰) که در آن $T = U = V_3$. جزئیات را شرح دهید. □

۲-۳ روش تصویرها

۱-۲-۳ مسئله کلاسیک تصویر

فرض کنید که بار نقطه‌ای q به فاصله d بالای یک صفحه رسانای نامتناهی متصل به زمین نگاه داشته شده باشد (شکل ۱۰-۳). پرسش: پتانسیل در منطقه بالای صفحه چقدر است؟ قطعاً مقدار آن $(1/4\pi\epsilon_0)q/\pi$ نخواهد بود زیرا q یک مقدار مشخص بار منفی را بر روی سطح نزدیکتر القا خواهد کرد و پتانسیل کل به طور مستقیم بسته به q و همچنین تا حدی هم بسته به بار القا شده است. اما چطور می‌توان قسمت دوم را محاسبه کرد، در حالی که از میزان بار القایی یا از نحوه توزیع آن بی‌اطلاعیم؟

از دیدگاه ریاضی مسئله، حل معادله لاپلاس در ناحیه $z > 0$ با بار نقطه‌ای منفرد q در نقطه $(0, 0, d)$ و در نظر داشتن شرایط مرزی زیر است:

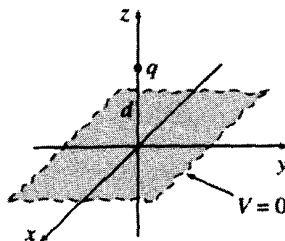
۱. $V = 0$ است وقتی $z = 0$ باشد (زیرا که صفحه رسانا به زمین وصل شده است).

۲. برای نقاط دور از بار $V \rightarrow 0$ (یعنی برای $x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$).

قضیه اول یکتایی (در حقیقت پیامد آن) تضمین می‌کند که فقط یک تابع دارای این شرایط است. اگر با تخمین یا حدس هوشمندانه این تابع را یافتیم، جواب صحیح ما خواهد بود.

شگرد: مسئله اصلی را فراموش کنید، برای چند لحظه می‌خواهیم وضعیت کاملاً متفاوتی را بررسی کنیم. این مسئله جدید متشکل از دو بار نقطه‌ای q و $-q$ به ترتیب در $(0, 0, d)$ و $(0, 0, -d)$ است و هیچ صفحه رسانایی نیز وجود ندارد (شکل ۱۱-۳). برای این پیکربندی می‌توان به راحتی پتانسیل را نوشت

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right] \quad (9-3)$$



شکل ۱۰-۳

[مخرجها به ترتیب نمایانگر فاصله‌های بارهای $+q$ و $-q$ از نقطه (x, y, z) هستند.] در این صورت می‌توان گفت:

۱. وقتی $z = 0$ است، $V = 0$ می‌شود.

۲. برای $d^2 \gg x^2 + y^2 + z^2$ ، $V \rightarrow 0$ میل می‌کند، و تنها بار در ناحیه $z > 0$ ، بار نقطه‌ای $+q$ در $(0, 0, d)$ است. اما این شرایط دقیقاً همان شرایط مسئله اصلی ما هستند. از قرار معلوم نیمه بالایی ($z \geq 0$) پیکربندی دوم دارای دقیقاً همان پتانسیل پیکربندی اول است. (نیمه پایینی $z < 0$ کاملاً متفاوت است اما اهمیتی ندارد زیرا قسمت بالایی چیزی است که ما نیاز داریم). نتیجه: پتانسیل یک بار نقطه‌ای بالای یک رسانای نامتناهی متصل به زمین توسط معادله (۳-۹) که در آن $z \geq 0$ است، داده می‌شود.

توجه داشته باشید که نقش اساسی قضیه یکتایی در این استدلال این است که: بدون آن هیچ‌کس این جواب را نمی‌پذیرفت زیرا که برای یک توزیع بار کاملاً متفاوت به دست آمده است. اما قضیه یکتایی آن را تضمین می‌کند: اگر آن جواب در معادله پواسون در منطقه مورد نظر صدق کند و مقادیر صحیح در مرزها را به دست بدهد، آن‌گاه باید صحیح باشد.

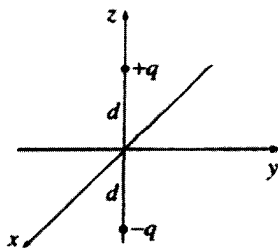
۲-۲-۳ بار سطحی القایی

حال که پتانسیل را می‌دانیم، در صدد محاسبه بار سطحی σ که بر روی رسانا القا شده است، برمی‌آیم. طبق معادله (۲-۴۹):

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}$$

که در آن $\partial V / \partial n$ ، مشتق عمودی V بر روی سطح است و در این مثال جهت عمودی جهت z هاست. بنابراین

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0}$$



شکل ۳-۱۱

از معادله (۹-۳) می‌دانیم که

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{-q(z-d)}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} + \frac{q(z+d)}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \right\}$$

بنابراین

$$\sigma(x, y) = \frac{-qd}{4\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \quad (10-3)$$

همان‌طور که انتظار داشتیم بار القایی (با فرض آنکه q مثبت است) منفی است و در $x = y = 0$ دارای بیشترین مقدار است. برای محاسبه کل بار القایی می‌توان نوشت

$$Q = \int \sigma da$$

این انتگرال‌گیری را می‌توان در صفحه xy و با مختصات دکارتی که در آن $da = dx dy$ است، انجام داد. اما استفاده از مختصات قطبی (r, ϕ) کار را راحت‌تر می‌کند. با داشتن $r^2 = x^2 + y^2$ و $da = r dr d\phi$ می‌آوریم

$$\sigma(r) = \frac{-qd}{4\pi(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

و

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{-qd}{4\pi(r^2 + d^2)^{3/2}} r dr d\phi = \frac{qd}{\sqrt{r^2 + d^2}} \Big|_0^{\infty} = -q \quad (11-3)$$

بنابراین کل بار القاشده بر روی صفحه، $-q$ است که با منطق شما نیز حتماً مطابقت می‌کند.

۳-۲-۳ نیرو و انرژی

به دلیل منفی بودن بار القایی، بار q به سمت صفحه کشیده می‌شود. در اینجا می‌خواهیم نیروی جاذبه آن دو را محاسبه کنیم. از آنجایی که پتانسیل در مجاورت q برابر با پتانسیل مسئله مشابه آن (مورد بارهای $+q$ و $-q$ بدون صفحه رسانا) است، بنابراین میدان و در نتیجه نیرو نیز با آن یکی می‌شوند:

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} \hat{\mathbf{z}} \quad (12-3)$$

توجه: می‌توان بدون دقت این نتیجه را گرفت که همه چیز در دو مسئله یکی هستند. اما انرژی این طور نیست. در مورد دو بار نقطه‌ای بدون رسانا، با توجه به معادله (۲-۴۲) انرژی برابر می‌شود با

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2d} \quad (۱۳-۳)$$

اما برای بار منفرد و صفحه رسانا، انرژی فقط نصف این مقدار است

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d} \quad (۱۴-۳)$$

اما چرا نصف؟ به انرژی ذخیره شده در میدانها فکر کنید [معادله (۲-۴۵)]

$$W = \frac{\epsilon_0}{4} \int E^2 d\tau$$

در مورد اول هر دو منطقه بالایی ($z > 0$) و پایینی ($z < 0$) در این انتگرال سهم هستند و به دلیل تقارن سهم آنها برابر است، اما در مورد دوم تنها منطقه بالایی حاوی میدان غیرصفر است و از این رو انرژی فقط نصف آن وضعیت است.

البته می‌توان با محاسبه کار لازم برای آوردن q از بینهایت نیز انرژی را محاسبه کرد. نیروی لازم [برای مقابله با نیروی الکتریکی معادله (۳-۱۲)]، $\hat{z}(q^2/4z^2)(1/4\pi\epsilon_0)$ است، بنابراین

$$\begin{aligned} W &= \int_{\infty}^d \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^d \frac{q^2}{4z^2} dz \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{q^2}{4z} \right) \Big|_{\infty}^d = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d} \end{aligned}$$

هنگامی که بار q به سمت رسانا آورده می‌شود، فقط بر روی q کار انجام می‌گیرد. درست است که بار القایی روی رسانا حرکت می‌کند، ولی این فاقد ارزش است زیرا که کل رسانا در پتانسیل صفر قرار دارد. برخلاف آن، اگر دو بار نقطه‌ای را به هم نزدیک کنیم (بدون هیچ رسانایی)، بر روی هر دوی آنها کار انجام می‌دهیم و بنابراین انرژی دو برابر بزرگتر خواهد شد.

۴-۲-۳ دیگر مسائل تصویری

روش یادشده منحصر به یک بار نقطه‌ای نزدیک یک رسانای متصل به زمین نیست. هر توزیع بار مانای دیگر که نزدیک چنین صفحه‌ای باشد، با به دست آوردن تصویر آینه‌ای آن، می‌تواند با

این روش بررسی شود و به همین علت نام آن "روش تصویری" گذارده شده است (به خاطر داشته باشید که بارهای تصویری دارای علامت مخالف هستند. این همان عاملی است که تضمین می‌کند، صفحه xy در پتانسیل صفر قرار خواهد گرفت.) همچنین تعدادی مسائل متفرقه وجود دارند که به روشی مشابه حل می‌شوند و در اینجا یک نمونه از جالبترین آنها آورده می‌شود.

مثال ۲-۳

بار نقطه‌ای q به فاصله a از مرکز یک کره رسانای متصل به زمین به شعاع R واقع شده است. (شکل ۱۲-۳). پتانسیل در خارج کره را بیابید.

حل: یک پیکربندی کاملاً متفاوت متشکل از بار نقطه‌ای q را با بار نقطه‌ای دیگر زیر امتحان می‌کنیم

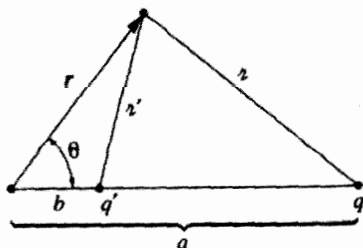
$$q' = -\frac{R}{a}q \quad (۱۵-۳)$$

که در فاصله

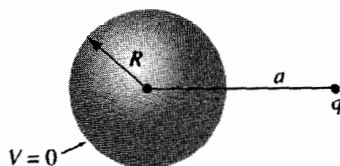
$$b = \frac{R^2}{a} \quad (۱۶-۳)$$

از سمت راست مرکز کره قرار دارد. حال هیچ رسانایی وجود ندارد و فقط دو بار نقطه‌ای داریم. پتانسیل این پیکربندی عبارت است از

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right) \quad (۱۷-۳)$$



شکل ۱۳-۳



شکل ۱۲-۳

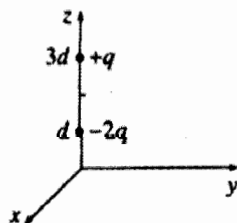
که در آن π و π' به ترتیب فاصله از q و q' هستند. حال این پتانسیل در تمام نقاط روی کره صفر است (مسئله ۷-۳) و بنابراین در ناحیه با شرایط مرزی مسئله اصلی ما همخوانی دارد. نتیجه‌گیری: معادله (۱۷-۳) پتانسیل بار نقطه‌ای نزدیک یک کره رسانای متصل به زمین است. (توجه داشته باشید که b کمتر از R است، بنابراین بار تصویری q' ، مطمئناً درون کره خواهد بود. شما نمی‌توانید بارهای تصویری را در منطقه‌ای که V را محاسبه می‌کنید، قرار دهید، زیرا در آن صورت ρ را تغییر داده‌اید و در حال حل معادله پواسون با چشمه غلط هستید.) به‌ویژه نیروی جاذبه بین بار و کره عبارت خواهد بود از

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(a-b)^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 Ra}{(a^2 - R^2)^2} \quad (18-3)$$

راه حل به‌طور مطبوعی آسان، اما به طریق خارق‌العاده‌ای اتفاقی است. در روش تصویر به همان اندازه که علم دخالت دارد هنر هم نقش دارد، چون باید به دنبال "مسئله کمکی" درستی باشید که به حل آن بپردازید.

اولین کسی که مسئله را به این روش حل کرد از قبل نمی‌دانست که از چه بار تصویری q' استفاده کند و یا آن را کجا بگذارد. احتمالاً او کار را با بار دلخواه یا محل دلخواه در داخل کره آغاز و پتانسیل را بر روی کره محاسبه کرده است و سپس متوجه شده است که با q' و b مناسب پتانسیل بر روی کره صفر می‌شود. اما اینکه هر انتخابی این کار را انجام دهد یک معجزه است — اگر به جای کره از مکعب استفاده کنیم، هیچ تک‌باری در هیچ کجای داخل آن پتانسیل بر روی سطح را صفر نمی‌کند. ■

مسئله ۶-۳ نیروی وارد به بار $+q$ در شکل ۱۴-۳ را بیابید (صفحه xy رسانای متصل به زمین است).



شکل ۱۴-۳

مسئله ۷-۳ (الف) با استفاده از قانون کسینوسها نشان دهید که معادله (۱۷-۳) می‌تواند به صورت

زیر نوشته شود

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}} - \frac{q}{\sqrt{R^2 + (ra/R)^2 - 2ra \cos \theta}} \right] \quad (۱۹-۳)$$

که در آن r و θ مختصات قطبی کروی هستند و محور z در امتداد خطی است که از q می‌گذرد. در این شکل واضح است که در روی کره $r = R$ ، $V = 0$ است.

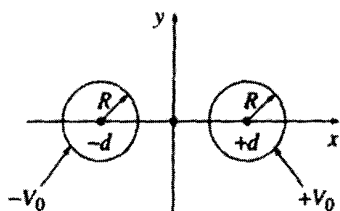
(ب) بار القایی روی سطح کره را به صورت تابعی از θ بیابید و از آن انتگرال‌گیری کنید تا بار القایی کل به دست آید. (این بار کل چقدر باید باشد؟)
(ج) انرژی این پیکربندی را محاسبه کنید.

مسئله ۸-۳ در مثال ۲-۳ فرض کردیم که کرهٔ رسانا به زمین متصل است ($V = 0$). اما با افزودن یک بار تصویری دوم، مورد کره در هر پتانسیل V_0 (البته نسبت به بینهایت) با همان الگوی ساده قابل حل خواهد بود. چه باری را باید به کار برد و آن را در کجا باید قرار داد؟ نیروی جاذبهٔ بین بار نقطه‌ای q و کرهٔ رسانای خنثی را به دست آورید.

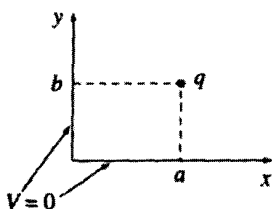
مسئله ۹-۳ بار خطی یکنواخت λ بر روی یک سیم مستقیم نامتناهی، که به فاصلهٔ d از یک صفحهٔ رسانای متصل به زمین است قرار داده شده است. (بهتر است فرض کنیم که سیم موازی محور x هاست و درست بالای آن قرار دارد و صفحهٔ رسانا نیز صفحهٔ xy است.)
(الف) پتانسیل را در منطقهٔ بالای صفحه به دست آورید.
(ب) چگالی بار القایی σ بر روی صفحهٔ رسانا را به دست آورید.

مسئله ۱۰-۳ دو صفحهٔ رسانای نیم‌متناهی متصل به زمین شده، با یکدیگر زاویهٔ قائمه می‌سازند. در منطقهٔ بین آن دو بار q مطابق شکل ۱۵-۳ قرار دارد. پیکربندی تصویری را طراحی و پتانسیل را در این منطقه محاسبه کنید. به چه بارهایی نیازمندید و باید آنها را کجا قرار دهید؟ نیروی وارد بر q چیست؟ چه مقدار کار برای آوردن q از بینهایت لازم بود؟ فرض کنید دو صفحه با یکدیگر زاویه‌ای غیر از 90° می‌ساختند، آیا در این صورت باز قادر به حل مسئله با استفاده از روش تصویری بودید؟ اگر جواب منفی است برای چه زوایای خاصی این روش قابل استفاده است؟

! مسئله ۱۱-۳ دو لولهٔ مسی طولی و مستقیم با شعاعهای R به فاصله $2d$ از هم نگه داشته شده‌اند. یکی در پتانسیل V_0 و دیگری در پتانسیل $-V_0$ قرار دارد (شکل ۱۶-۳). پتانسیل را در



شکل ۱۶-۳



شکل ۱۵-۳

□ تمام نقاط بیابید. (پیشنهاد: از نتیجه مسئله ۲-۴۷ استفاده کنید).

۳-۳ جداسازی متغیرها

در این بخش مستقیماً با خود معادله لاپلاس سروکار خواهیم داشت. در اینجا از روش جداسازی متغیرها که یکی از ابزار مفید و دلخواه فیزیکدانها برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی است، سود می‌بریم. روش در مواقعی که پتانسیل (V) یا چگالی بار (σ) بر روی مرزهای بعضی مناطق مشخص بوده و هدف یافتن پتانسیل در درون باشد، کاربرد دارد. ایده کلی بسیار آسان است: به دنبال راه‌حلهایی باشید که به صورت حاصلضرب توابعی هستند، که هر یک فقط تابعی از یک مختصاتند. جزئیات جبری آن کمی مشکل است، بنابراین روش را با بیان تعدادی مثال توضیح می‌دهیم. با مختصات دکارتی شروع کرده و سپس برای مختصات کروی مسئله را حل خواهیم کرد (مختصات استوانه‌ای را به عنوان تمرین به شما واگذار می‌کنیم، مسئله ۳-۲۳).

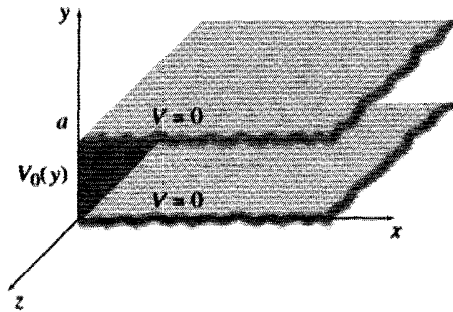
۱-۳-۳ مختصات دکارتی

مثال ۳-۳

دو صفحه فلزی نامتناهی متصل به زمین یکی در $y = 0$ و دیگری در $y = a$ ، به موازات صفحه xz قرار دارند (شکل ۳-۱۷). انتهای چپ در $x = 0$ توسط یک صفحه باریک نامتناهی که نسبت به این دو صفحه عایق‌بندی شده، بسته شده است و در یک پتانسیل خاص (V_0) قرار دارد. پتانسیل را در درون این شکاف بیابید.

حل: پیکربندی بالا مستقل از z است، بنابراین مسئله دوبعدی است. به زبان ریاضی، باید معادله لاپلاس را حل کنیم

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (۳-۲۰)$$



شکل ۳-۱۷

که در اینجا شرایط مرزی آن عبارت‌اند از

$$\begin{cases} V = 0 & \text{وقتی } y = 0 \text{ است} & (1) \\ V = 0 & \text{وقتی } y = a \text{ است} & (2) \\ V = V_0(y) & \text{وقتی } x = 0 \text{ است} & (3) \\ V \rightarrow 0 & \text{وقتی } x \rightarrow \infty & (4) \end{cases} \quad (21-3)$$

(شرط آخر، گرچه به صورت صریح در مسئله عنوان نشده است ولی به دلایل فیزیکی لازم است. وقتی از منطقه باریک در $x = 0$ دورتر و دورتر می‌شوید، پتانسیل باید به صفر میل کند.) از آنجایی که پتانسیل روی تمامی مرزها معلوم است، جواب باید به صورت منحصر به فرد به دست آید. قدم اول آن است که به دنبال جوابهایی به صورت حاصلضرب باشیم

$$V(x, y) = X(x)Y(y) \quad (22-3)$$

در ظاهر امر این محدودیت بی‌معنی است، چرا که اکثریت جوابهای معادله لاپلاس، به چنین شکلی در نمی‌آیند. برای مثال $V(x, y) = (5x + 6y)$ در معادله (۳-۲۰) صدق می‌کند ولی شما نمی‌توانید آن را به صورت حاصلضرب تابعی از x در تابعی از y در آورید. در حقیقت بدین وسیله، درصد یافتن بخش ناچیزی از جوابهای ممکن هستیم و اگر بخت یاری کند، یکی از آنها با شرایط مرزی مسئله ما مطابقت می‌کند. اما این جوابها، نوع بسیار خاصی هستند به طوری که با ترکیب آنها می‌توان به جواب عمومی رسید.

در هر حال با قرار دادن (۲۲-۳) در معادله (۲۰-۳) به دست می آوریم

$$Y \frac{d^1 X}{dx^1} + X \frac{d^1 Y}{dy^1} = 0$$

قدم بعدی، جدا کردن متغیرهاست: (این بدان معناست که تمامی وابستگیها به متغیر x در یک عبارت و به متغیر y در عبارت دیگر جمع آوری شوند). به طور نمونه، این عمل با تقسیم بر V ، تحقق می یابد:

$$\frac{1}{X} \frac{d^1 X}{dx^1} + \frac{1}{Y} \frac{d^1 Y}{dy^1} = 0 \quad (23-3)$$

در اینجا جمله اول فقط وابسته به x است و جمله دوم فقط به y بستگی دارد. به عبارت دیگر معادله ای به صورت زیر داریم

$$f(x) + g(y) = 0 \quad (24-3)$$

حال، فقط یک راه برای برقراری معادله بالا باقی می ماند: f و g هر دو باید مقدار ثابت باشند. زیرا اگر $f(x)$ با تغییر x ، تغییر کند و y را ثابت فرض کنیم، مجموع $f(x) + g(x)$ تغییر خواهد کرد و این برخلاف معادله (۲۴-۳) که صفر بودن مجموع آن دو را می طلبد، است. (دلیل یادشده ساده است ولی تا کاملاً متوجه آن نشده اید از آن نگذرید زیرا تمامی روش بر روی آن استوار است). بنابراین از (۲۳-۳) نتیجه می شود که

$$C_1 + C_2 = 0 \quad \text{با} \quad \frac{1}{Y} \frac{d^1 Y}{dy^1} = C_2 \quad \text{و} \quad \frac{1}{X} \frac{d^1 X}{dx^1} = C_1 \quad (25-3)$$

یکی از این مقادیر ثابت، مثبت و دیگری منفی است (یا شاید هر دو صفرند). به طور کلی باید تمامی حالات ممکن را بررسی کرد، ولی در مورد مسئله خاص خودمان، به دلایلی که هم اکنون گفته خواهند شد کافی است C_1 مثبت و C_2 منفی باشد. بنابراین

$$\frac{d^1 X}{dx^1} = k^1 X, \quad \frac{d^1 Y}{dy^1} = -k^1 Y \quad (26-3)$$

توجه کنید که چه اتفاقی افتاده است: یک معادله دیفرانسیل جزئی، (۲۰-۳) به دو معادله دیفرانسیل معمولی (۲۶-۳) تبدیل شده است. فایده این عمل آن است که معادلات دیفرانسیل

معمولی خیلی آسانتر حل می‌شوند. در حقیقت

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}, \quad Y(y) = C \sin ky + D \cos ky$$

بنابراین

$$V(x, y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \sin ky + D \cos ky) \quad (27-3)$$

این یک جواب مناسب جداشدنی برای معادلهٔ لاپلاس است؛ کار بعدی اعمال شرایط مرزی و نتیجه‌گیری از مقادیر ثابت است. شرط چهارم ایجاب می‌کند که A صفر باشد. ^۱ با جذب ثابت B در C و D ، به دست می‌آوریم

$$V(x, y) = e^{-kx}(C \sin ky + D \cos ky)$$

حال شرط ۱ بیانگر آن است که D مساوی صفر است، بنابراین

$$V(x, y) = Ce^{-kx} \sin ky \quad (28-3)$$

در این صورت شرط ۲ نتیجه می‌دهد که $\sin ka = 0$ باشد. در نتیجه

$$k = \frac{n\pi}{a} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (29-3)$$

در اینجا می‌توانید دلیل انتخاب C_1 مثبت و C_2 منفی را ببینید: اگر X تابعی سینوسی بود، نمی‌توانستیم در بینهایت به صفر میلش بدهیم و اگر Y تابعی نمایی بود نمی‌توانستیم هم در صفر و هم در a آن را صفر کنیم. ضمناً $n = 0$ مطلوب نیست، زیرا در آن صورت پتانسیل همه جا صفر می‌شود و مقادیر منفی n را هم در نظر نمی‌گیریم.

این منتهای کار ما در به‌کارگیری جداسازی متغیرهاست، و بجز در حالتی به‌ارزی یک عدد درست n تابع $V_0(y)$ به شکل $\sin(n\pi y/a)$ در آید، به‌ارزی بعضی n های درست، نمی‌توانیم شرط مرزی آخری در $x = 0$ را اعمال کنیم. اما اکنون با بررسی مرحلهٔ قطعی، روش برای ما قابل

۱. فرض می‌کنیم که k مثبت است ولی این مطلب از عمومیت مسئله نمی‌کاهد. منفی بودن k همان نتیجه (۲۷-۳) را خواهد داد. فقط ثابتها تعویض می‌شوند ($A \leftrightarrow B, C \rightarrow -C$). برحسب موقعیت (نه در این مثال) $k = 0$ را نیز باید در نظر گرفت (به مسئلهٔ ۳-۴۷ مراجعه کنید).

تأیید می‌شود: جداسازی متغیرها به ما یک مجموعه نامتناهی جواب (یکی به ازای هر n) می‌دهد که هیچ‌یک به تنهایی نمی‌تواند در شرط مرزی نهایی صدق کند، بلکه باید آنها را به روشی که کارساز باشد، ترکیب کرد. معادلهٔ لاپلاس خطی است به این معنا که اگر V_1, V_2, V_3, \dots در آن صدق کنند، هر ترکیب خطی از آنها نیز در معادله صدق می‌کند: $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 + \dots$ در آن $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ ثابتهای اختیاری‌اند. برای

$$\nabla^2 V = \alpha_1 \nabla^2 V_1 + \alpha_2 \nabla^2 V_2 + \dots = 0 \alpha_1 + 0 \alpha_2 + \dots = 0$$

با بهره‌گیری از این امر، می‌توان با در نظر گرفتن تمامی راه‌حلهای موجود، به یک ساختار عمومیتر دست یافت:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\pi x/a} \sin(n\pi y/a) \quad (30-3)$$

معادلهٔ (۳۰-۳) هنوز هم با شرط مرزی اول سازگاری دارد. پرسش این است: آیا (با انتخاب زیرکانه ضرایب C_n) موفق به جور کردن شرط مرزی آخر هستیم؟

$$V(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi y/a) = V_0(y) \quad (31-3)$$

شما ممکن است با این مجموع آشنا باشید، زیرا در واقع سری سینوسی فوریه است. قضیهٔ دیریکله^۱ تضمین می‌کند که در واقع هر تابع $V_0(y)$ را که می‌تواند شامل تعداد محدودی ناپوستگی نیز باشد، می‌توان به صورت یک چنین سری بسط داد.

اما عملاً چگونه می‌توان ضرایب C_n موجود در بسط را تعیین کرد؟ روش دستیابی به این مقصود به نام شگرد فوریه موسوم است، هر چند به نظر می‌رسد که اوایلر قبل از وی نیز این روش را به‌کار می‌برده است. روش چنین است: معادلهٔ (۳۱-۳) را در $\sin(n'\pi y/a)$ (که در آن n' عدد صحیح مثبت است) ضرب کرده و از 0 تا a انتگرال‌گیری کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^a \sin(n\pi y/a) \sin(n'\pi y/a) dy = \int_0^a V_0(y) \sin(n'\pi y/a) dy \quad (32-3)$$

1. Boas, M., *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, 2nd ed. (New York: John Wiley, 1983).

جواب انتگرال عبارت خواهد بود از

$$\int_0^a \sin(n\pi y/a) \sin(n'\pi y/a) dy = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n' \neq n \\ \frac{a}{2} & \text{اگر } n' = n \end{cases} \quad (33-3)$$

بنابراین تمامی جملات سری به غیر از آنهایی که برایشان $n' = n$ است حذف می‌شوند و طرف چپ (۳۲-۳) برابر $(a/2)C_n$ خواهد شد. نتیجه^۱:

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a V_0(y) \sin(n\pi y/a) dy \quad (34-3)$$

در نتیجه معادله (۳۰-۳) جواب ماست که در آن ضرایب از معادله (۳۴-۳) داده شده‌اند. به‌عنوان یک مثال واقعی فرض کنید که قطعه باریک واقع در $x = 0$ ، یک صفحه فلزی با پتانسیل ثابت V_0 است. (توجه کنید که نسبت به صفحات متصل به زمین در $y = 0$ و $y = a$ ، عایق‌بندی شده است). بنابراین

$$C_n = \frac{2V_0}{a} \int_0^a \sin(n\pi y/a) dy = \frac{2V_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \quad (35-3)$$

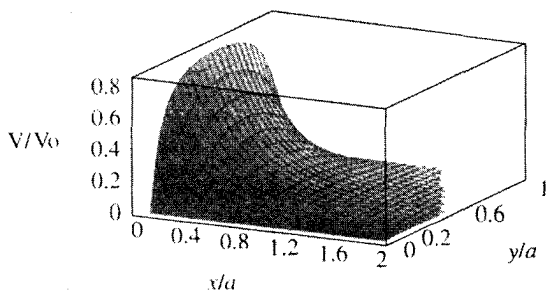
$$= \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \frac{4V_0}{n\pi} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

در نتیجه

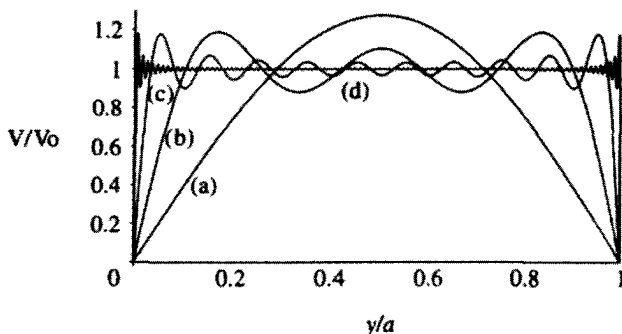
$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} e^{-n\pi x/a} \sin(n\pi y/a) \quad (36-3)$$

شکل ۱۸-۳ نموداری از این پتانسیل است؛ شکل ۱۹-۳ نشان می‌دهد که چگونه چند جمله اول سری فوریه برای ایجاد یک تقریب هر چه بهتر برای ثابت V_0 با هم ترکیب می‌شوند: (الف) فقط $n = 1$ است، (ب) شامل n ‌های ۱ تا ۵ است، (ج) مجموع ۱۰ جمله اول است، و (د) مجموع ۱۰۰ جمله اول است.

۱. به دلایل زیبایی نگارش، از نوشتن پریمها صرف‌نظر کرده‌ایم؛ معادله (۳۴-۳) برای $n = 1, 2, 3, \dots$ صادق است و نوع حرف به‌کار گرفته‌شده برای شاخص (مسلماً) مهم نیست.



شکل ۱۸-۳



شکل ۱۹-۳

اتفاقاً، سری نامتناهی در معادله (۳۶-۳) را می‌توان صراحتاً جمع‌بندی کرد. (می‌توانید امتحان کنید). نتیجه چنین است

$$V(x, y) = \frac{2V_0}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\sin(\pi y/a)}{\sinh(\pi x/a)} \right) \quad (37-3)$$

به این صورت تحقیق آنکه از معادله لاپلاس پیروی شده و چهار شرط مرزی (۲۱-۳) نیز صادق‌اند، آسانتر است. ■

موفقیت این روش مربوط به دو خاصیت خارق‌العاده جوابهای جداشونده (۲۸-۳) است؛ کامل بودن و تعامد. یک مجموعه توابع $f_n(y)$ کامل است، اگر هر تابع $f(y)$ دیگر را بتوان به صورت ترکیب خطی از آنها نوشت:

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(y) \quad (38-3)$$

توابع $\sin(n\pi y/a)$ در بازه $0 \leq y \leq a$ کامل هستند. این واقعیت که توسط قضیه دیریکله تأیید شد، ما را مطمئن ساخت که معادله (۳-۳۱) با انتخاب صحیح ثابتهای C_n ، می‌تواند صادق باشد. (اثبات کامل بودن، برای یک مجموعه توابع خاص، کار بسیار دشواری است، و متأسفانه فیزیکدانها آن را درست تلقی، و اثبات آن را به دیگران واگذار می‌کنند). یک مجموعه توابع، متعامدند در صورتی که انتگرال حاصلضرب هر دو عضو مختلف از مجموعه، صفر باشد:

$$\int_0^a f_n(y)f'_n(y) dy = 0 \quad \text{برای } n' \neq n \quad (3-39)$$

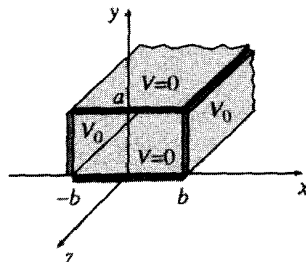
توابع سینوسی [معادله (۳-۳۳)] متعامد هستند؛ این خاصیتی است که شگرد فوریه بر آن استوار است و بر طبق آن تمامی جملات به غیر از یکی را در سری نامتناهی حذف و از آنجا ضرایب C_n آن را به دست آوریم. (اثبات تعامد عموماً بسیار آسان است، یا با انتگرال‌گیری مستقیم یا با تحلیل معادله دیفرانسیلی که توابع ناشی از آن هستند).

مثال ۳-۴

دو صفحه فلزی طول نامتناهی متصل به زمین، مجدداً در $y = 0$ و $y = a$ ، در نقطه‌های $x = \pm b$ به دو صفحه باریک فلزی که در پتانسیل V_0 قرار دارند متصل هستند مانند شکل ۳-۲۰ (یک لایه باریک عایق در هر گوشه، از اتصال کوتاه جلوگیری می‌کند). پتانسیل را در درون این لوله راستگوش بیابید.

حل: بار دیگر پیکربندی بالا مستقل از z است. مسئله، حل معادله لاپلاس زیر است

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$



شکل ۳-۲۰

که در آن شرایط مرزی عبارت‌اند از

$$\left\{ \begin{array}{ll} V = 0 & \text{وقتی } y = 0 \text{ است} \quad (۱) \\ V = 0 & \text{وقتی } y = a \text{ است} \quad (۲) \\ V = V_0 & \text{وقتی } x = b \text{ است} \quad (۳) \\ V = V_0 & \text{وقتی } x = -b \text{ است} \quad (۴) \end{array} \right. \quad (۴۰-۳)$$

مانند گذشته این استدلال منجر به معادله (۲۷-۳) می‌شود

$$V(x, y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \sin ky + D \cos ky)$$

اما در اینجا نمی‌توان A را مساوی صفر گرفت؛ منطقه مورد نظر تا $x = \infty$ امتداد ندارد، بنابراین e^{kx} یک سهم کاملاً قابل قبولی در پتانسیل خواهد داشت. از طرف دیگر وضعیت نسبت به x کاملاً متقارن است. یعنی $V(-x, y) = V(x, y)$ و این بدان معناست که $A = B$. با به‌کار بردن اتحاد زیر

$$e^{kx} + e^{-kx} = 2 \cosh kx$$

و خوراندن $2A$ در C و D به دست می‌آوریم

$$V(x, y) = \cosh kx (C \sin ky + D \cos ky)$$

شرایط مرزی (۱) و (۲) مانند گذشته، نتیجه می‌دهند که $D = 0$ و $k = n\pi/a$ ، بنابراین

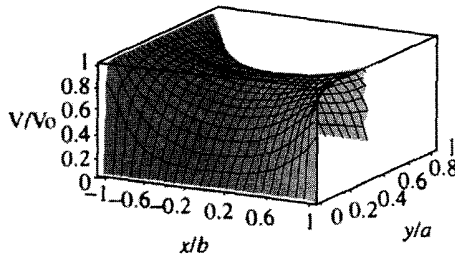
$$V(x, y) = C \cosh(n\pi x/a) \sin(n\pi y/a) \quad (۴۱-۳)$$

از آنجایی که $V(x, y)$ نسبت به x زوج است، اگر در شرط (۳) صدق کند، خود به خود در شرط (۴) نیز صدق خواهد کرد. بنابراین فقط ایجاد یک ترکیب خطی عمومی باقی می‌ماند

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh(n\pi x/a) \sin(n\pi y/a)$$

و ضرایب C_n طوری انتخاب می‌شوند که شرط (۳) صادق باشد

$$V(b, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh(n\pi b/a) \sin(n\pi y/a) = V_0$$



شکل ۲۱-۳

این همان مسئله مطرح در تحلیل فوریه است که قبلاً نیز با آن روبه‌رو شدیم. پاسخ را از روی معادله (۳۵-۳) می‌نویسیم

$$C_n \cosh(n\pi b/a) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \frac{4V_0}{n\pi} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

نتیجه: پتانسیل در این مورد عبارت خواهد بود از

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \frac{\cosh(n\pi x/a)}{\cosh(n\pi b/a)} \sin(n\pi y/a) \quad (42-3)$$

تابع بالا در شکل ۲۱-۳ نمایش داده شده است.

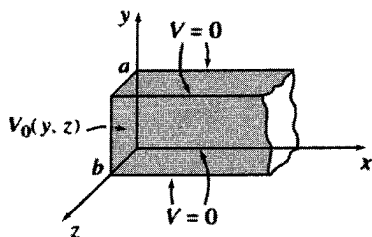
مثال ۵-۳

یک لوله فلزی مکعب‌مستطیل طولی نامتناهی (به اضلاع a و b) به زمین متصل شده است، ولی یک انتهای آن واقع در $x = 0$ دارای پتانسیل مشخص $V_0(y, z)$ است (شکل ۲۲-۳). پتانسیل را در درون لوله بیابید.

حل: این اساساً یک مسئله سه‌بعدی است

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (43-3)$$

که باید با عنایت به شرایط مرزی زیر حل شود



شکل ۲۲-۳

$$\left\{ \begin{array}{ll} V = 0 & \text{وقتی } y = 0 \quad (1) \\ V = 0 & \text{وقتی } y = a \quad (2) \\ V = 0 & \text{وقتی } z = 0 \quad (3) \\ V = 0 & \text{وقتی } z = b \quad (4) \\ V \rightarrow 0 & \text{وقتی } x \rightarrow \infty \quad (5) \\ V = V_0(y, z) & \text{وقتی } x = 0 \quad (6) \end{array} \right. \quad (44-3)$$

مانند همیشه به دنبال جوابهایی به صورت حاصلضرب دو تابع هستیم

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (45-3)$$

با قرار دادن این مقدار در (۴۳-۳) و تقسیم بر V به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

نتیجه آنکه

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = C_1, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = C_2, \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = C_3$$

به طوری که

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

با توجه به تجربه قبل (مثال ۳-۳) C_1 را مثبت و C_2 و C_3 را منفی می‌گیریم. با در نظر گرفتن،
 $C_1 = k^2 + l^2$ به صورت C_1 ، $C_2 = -l^2$ و $C_3 = -k^2$ در می‌آید و بنابراین

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = (k^2 + l^2)X, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 Y, \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} = -l^2 Z \quad (46-3)$$

بار دیگر جداسازی متغیرها یک معادله دیفرانسیل جزئی را به یک سری معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل کرد. جوابها به صورت زیرند

$$X(x) = Ae^{\sqrt{k^2+l^2}x} + Be^{-\sqrt{k^2+l^2}x}$$

$$Y(y) = C \sin ky + D \cos ky$$

$$Z(z) = E \sin lz + F \cos lz$$

شرط مرزی (۵) ایجاب می‌کند که $A = 0$ باشد، از شرط (۱) نتیجه می‌شود $D = 0$ و شرط (۳) می‌گوید که $F = 0$ است و شروط (۲) و (۴) نیز نیاز به آن دارند که $k = n\pi/a$ و $l = m\pi/b$ که در آن m و n اعداد صحیح مثبت هستند. با ترکیب ثابتهای باقیمانده، به دست می‌آوریم

$$V(x, y, z) = Ce^{-\pi\sqrt{(n/a)^2+(m/b)^2}x} \sin(n\pi y/a) \sin(m\pi z/b) \quad (47-3)$$

در جواب بالا همه شرایط مرزی به غیر از شرط (۶) صادق‌اند. این جواب حاوی دو عدد صحیح نامشخص (m و n) است و عمومیت‌ترین ترکیب خطی، یک مجموع دوگانه است

$$V(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} e^{-\pi\sqrt{(n/a)^2+(m/b)^2}x} \sin(n\pi y/a) \sin(m\pi z/b) \quad (48-3)$$

تطبيق دادن آخرین شرط

$$V(0, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} \sin(n\pi y/a) \sin(m\pi z/b) = V_0(y, z) \quad (49-3)$$

با انتخاب مناسب ضرایب $C_{n,m}$ صورت می‌گیرد. برای تعیین این ثابتها رابطه اخیر را در $\sin(n'\pi y/a) \sin(m'\pi z/b)$ که در آن n' و m' اعداد صحیح مثبت دلخواه هستند ضرب و

انتگرال گیری می کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} \int_0^a \sin(n\pi y/a) \sin(n'\pi y/a) dy \int_0^b \sin(m\pi z/b) \sin(m'\pi z/b) dz$$

$$= \int_0^a \int_0^b V_0(y, z) \sin(n'\pi y/a) \sin(m'\pi z/b) dy dz$$

با استفاده از معادله (۳۳-۳) می بینیم که طرف چپ برابر $(ab/4)C_{n',m'}$ می شود، بنابراین

$$C_{n,m} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b V_0(y, z) \sin(n\pi y/a) \sin(m\pi z/b) dy dz \quad (50-3)$$

معادله (۴۸-۳) با ضرایب داده شده در معادله (۵۰-۳)، جواب مسئله ماست. برای مثال اگر انتهای لوله، یک رسانا با پتانسیل ثابت V_0 باشد در آن صورت

$$C_{n,m} = \frac{4V_0}{ab} \int_0^a \sin(n\pi y/a) dy \int_0^b \sin(m\pi z/b) dz$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ یا } m \text{ زوج باشند} \\ \frac{16V_0}{\pi^2 nm} & \text{اگر } n \text{ و } m \text{ فرد باشند} \end{cases} \quad (51-3)$$

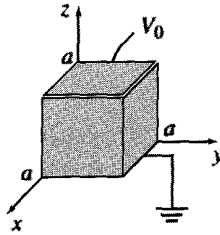
و از آنجا

$$V(x, y, z) = \frac{16V_0}{\pi^2} \sum_{n,m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{nm} e^{-\pi \sqrt{(n/a)^2 + (m/b)^2} x} \sin(n\pi y/a) \sin(m\pi z/b) \quad (52-3)$$

توجه کنید مانند همیشه، جملات متوالی سریعاً کاهش می یابند و یک تقریب معقولانه آن است که فقط چند جمله اول نگه داشته شوند. ■

مسئله ۱۲-۳ پتانسیل را در شکاف نامتناهی مثال ۳-۳ با دانستن شرایط مرزی در $x = 0$ که متشکل از دو نوار فلزی است بیابید: اولی از $y = 0$ تا $y = a/2$ در پتانسیل ثابت V_0 قرار دارد و دیگری از $y = a/2$ تا $y = a$ در پتانسیل $-V_0$ است.

مسئله ۱۳-۳ برای شکاف نامتناهی (در مثال ۳-۳) چگالی بار $\sigma(y)$ را در نوار واقع در $x = 0$ با فرض اینکه رسانایی با پتانسیل ثابت V_0 است، به دست آورید.



شکل ۲۳-۳

مسئله ۱۴-۳ یک لوله مستطیل که موازی محور z (از $-\infty$ تا $+\infty$) است، دارای سه وجه فلزی متصل به زمین است. یکی در $y = a$ و $y = 0$ و $x = 0$ ، وجه چهارم در $x = b$ در پتانسیل مشخص $V_0(y)$ نگه داشته شده است.

(الف) فرمولی کلی برای پتانسیل درون لوله بیابید.

(ب) پتانسیل را صراحتاً در مورد $V_0(y) = V_0$ (که V_0 ثابت است) بیابید.

مسئله ۱۵-۳ یک جعبه مکعبی (با وجوه به طول a) متشکل از پنج صفحه فلزی است که به هم جوش خورده و به زمین متصل شده‌اند، (شکل ۲۳-۳). وجه بالایی از یک ورقه فلزی مجزا تشکیل شده که از بقیه عایق‌کاری شده و توسط باتری در پتانسیل ثابت V_0 نگه داشته شده است. پتانسیل را درون جعبه بیابید.

□

۲-۳-۳ مختصات کروی

در مثالهایی که تاکنون بررسی شدند، مختصات دکارتی کاملاً مناسب بودند زیرا که مرزها صفحه بودند. ولی برای اجسام گرد، استفاده از مختصات کروی بهتر است. در سیستم کروی، معادله لاپلاس به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (۵۳-۳)$$

فرض بر این خواهد بود که مسئله دارای تقارن سمتی است، به طوری که V مستقل از ϕ می‌شود؛^۱

۱. مورد کلی برای پتانسیلهای وابسته به ϕ در کتابهای پیشرفته بحث شده است. به عنوان مثال به کتاب زیر مراجعه کنید

در این صورت معادله (۵۳-۳) تبدیل می‌شود به

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (54-3)$$

مانند گذشته به دنبال جوابهایی به صورت حاصلضرب هستیم

$$V(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (55-3)$$

با قرار دادن آن در (۵۴-۳) و تقسیم بر V داریم

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0 \quad (56-3)$$

از آنجایی که جمله اول فقط به r و جمله دوم فقط به θ وابسته‌اند، مانند گذشته نتیجه می‌گیریم که هر یک باید یک مقدار ثابت باشد

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1), \quad \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \quad (57-3)$$

در اینجا $l(l+1)$ صرفاً یک روش برای نوشتن ثابت جداسازی است. — که علت آن را به زودی خواهیم فهمید.

مانند همیشه، جداسازی متغیرها، معادله دیفرانسیل جزئی را به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل کرده است (۵۷-۳). معادله شعاعی

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1)R \quad (58-3)$$

دارای جواب عمومی به صورت زیر است

$$R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \quad (59-3)$$

و این را به راحتی می‌توانید تحقیق کنید؛ A و B دو ثابت دلخواه هستند که در یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم امری بدیهی است. اما معادله زاویه‌ای

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \sin \theta \Theta \quad (60-3)$$

جدول ۱-۳ چندجمله‌ایهای لژاندر

$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x$
$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$
$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$
$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$
$P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$

ساده نیست. جوابها به صورت چندجمله‌ایهای لژاندر برحسب متغیر $\cos \theta$ هستند

$$\Theta(\theta) = P_l(\cos \theta) \quad (۶۱-۳)$$

که در آن $P_l(x)$ با استفاده از فرمول رودریگز مشخص می‌شود

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l \quad (۶۲-۳)$$

تعدادی از اولین چندجمله‌ایهای لژاندر در جدول ۱-۳ آورده شده است.

توجه داشته باشید $P_l(x)$ (همان‌طور که از اسمش پیداست) یک چندجمله‌ای مرتبه l ام از x است که دارای توانهای زوج است اگر l زوج باشد؛ و دارای توانهای فرد است اگر l فرد باشد. ضریب $(1/2^l l!)$ انتخاب شده است تا تساوی زیر برقرار باشد

$$P_l(1) = 1 \quad (۶۳-۳)$$

فرمول رودریگز فقط برای مقادیر صحیح و نامنفی صادق است، به علاوه، فقط یک جواب می‌دهد، در حالی که معادله (۶۰-۳)، معادله مرتبه دوم است و باید دارای دو جواب مستقل به ازای هر مقدار l باشد. ولی واقعیت این است که این جوابهای دوم معمولاً در زمینه‌های فیزیکی غیرقابل قبول‌اند، زیرا که در $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ بینهایت می‌شوند.^۱ برای مثال جواب دوم برای $l = 0$ عبارت است از

$$\Theta(\theta) = \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) \quad (۶۴-۳)$$

۱. در موارد نادر که محور z به دلایلی قابل دسترسی نیست، جوابهای دوم را می‌توان در نظر گرفت.

می‌توانید بررسی کنید که این جواب در معادله (۳-۶۰) صدق می‌کند.

بنابراین در موردی که تقارن سمتی داریم، کلیتین جواب جدایی‌پذیر که شامل کمترین نیازهای فیزیکی باشد عبارت است از

$$V(r, \theta) = \left(Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

در اینجا لزومی به آوردن یک ثابت کلی برای معادله (۳-۶۱) نیست، چرا که می‌توان آن را در ثوابت A و B خوراند. مانند گذشته جداسازی متغیرها منجر به یک مجموعه نامتناهی جواب برای هر l خواهد شد. جواب عمومی، ترکیب خطی جوابهای جدایی‌پذیر است.

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (۳-۶۵)$$

مثالهای زیر توان این نتیجه مهم را نشان می‌دهند.

مثال ۳-۶

پتانسیل $V_0(\theta)$ بر روی یک سطح تو خالی کروی به شعاع R داده شده است، پتانسیل را در درون کره بیابید.

حل: در این مورد برای تمامی l ها، $B_l = 0$ است، زیرا در غیر این صورت پتانسیل در مبدأ بسیار بزرگ می‌شود. بنابراین

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (۳-۶۶)$$

در $r = R$ ، این باید با تابع معلوم $V_0(\theta)$ مطابقت کند

$$V(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = V_0(\theta) \quad (۳-۶۷)$$

آیا با انتخاب ضرایب A_l مناسب، این معادله برقرار می‌ماند؟ بله، چند جمله‌ایهای لژاندر (مانند سینوسها)، تشکیل یک سری از توابع کامل را برای بازه $-1 \leq x \leq +1$ ($0 \leq \theta \leq \pi$)

می‌دهند. چگونه ثوابت را تعیین می‌کنیم؟ مجدداً با شگرد فوریه، چرا که چندجمله‌ایهای لژاندر (مانند سینوسها) توابع متعامد هستند.^۱

$$\int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x)dx = \int_0^\pi P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{اگر } l \neq l' \\ \frac{2}{2l+1} & \text{اگر } l = l' \end{cases} \quad (68-3)$$

بنابراین، با ضرب کردن طرفین معادله (۶۷-۳) در $P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta$ و انتگرال‌گیری، به دست می‌آوریم

$$A_l R^l \frac{2}{(2l+1)} = \int_0^\pi V_o(\theta)P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

یا

$$A_l = \frac{(2l+1)}{2R^l} \int_0^\pi V_o(\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta \quad (69-3)$$

بنابراین (۶۶-۳)، جواب مسئله با ضرایب داده شده، توسط معادله (۶۹-۳) است. عملاً اگر مقدار یابی انتگرالهایی به شکل (۶۹-۳) به‌طور تحلیلی غیرممکن نباشد، آسان هم نیست و در مواردی که می‌توان آنها را محاسبه کرد، بهتر است که معادله (۶۷-۳) را با "ورانداز کردن" حل کرد.^۲ برای مثال فرض کنید که پتانسیل درون کره به صورت

$$V_o(\theta) = k \sin^l(\theta/2) \quad (70-3)$$

داده شده باشد که در آن k یک ثابت است. با به‌کارگیری فرمول نصف قوس می‌توان معادله را

1. M. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, 2nd ed. Section 12.7 (New York: John Wiley, 1983).

۲. این قطعاً وقتی که $V_o(\theta)$ به‌صورت چندجمله‌ای برحسب $\cos\theta$ بیان می‌شود، صحیح خواهد بود. درجه چندجمله‌ای، بالاترین l مورد نیاز را به دست می‌دهد و ضریب آن نیز A_l متناظر را تعیین می‌کند. با کنار گذاشتن $A_l R^l P_l(\cos\theta)$ و تکرار روش، می‌توان به‌صورت منتظم تا A_o ادامه داد. توجه داشته باشید اگر V_o تابع زوجی نسبت به $\cos\theta$ باشد، تنها جملات مرتبه زوج در جمع‌بندی ظاهر می‌شوند (و به همین ترتیب برای توابع فرد).

بازنویسی کرد

$$V_0(\theta) = \frac{k}{\gamma}(1 - \cos \theta) = \frac{k}{\gamma}[P_0(\cos \theta) - P_1(\cos \theta)]$$

و با قرار دادن آن در معادله (۶۷-۳) سریعاً نتیجه می‌گیریم که $A_0 = k/2$ و $A_1 = -k/(2R)$ و سایر A_l ها صفر هستند و بنابراین

$$V(r, \theta) = \frac{k}{\gamma} \left[r^0 P_0(\cos \theta) - \frac{r^1}{R} P_1(\cos \theta) \right] = \frac{k}{\gamma} \left(1 - \frac{r}{R} \cos \theta \right) \quad (۷۱-۳)$$

مثال ۷-۳

مجدداً پتانسیل $V_0(\theta)$ را بر روی سطح کره‌ای به شعاع R در نظر می‌گیریم و با فرض اینکه در خارج کره هیچ باری وجود ندارد، پتانسیل را در خارج محاسبه می‌کنیم.

حل: در این مورد A_l ها صفر خواهند بود (در غیر این صورت V در بینهایت صفر نمی‌شود).
بنابراین

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (۷۲-۳)$$

در سطح کره نیاز به آن داریم که

$$V(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) = V_0(\theta)$$

با ضرب کردن در $P_l(\cos \theta) \sin \theta$ و انتگرال‌گیری یعنی با استفاده از خاصیت تعامد به دست می‌آوریم

$$\frac{B_l}{R^{l+1}} \frac{2}{2l+1} = \int_0^\pi V_0(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta$$

یا

$$B_l = \frac{2l+1}{2} R^{l+1} \int_0^\pi V_0(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \quad (۷۳-۳)$$

معادله (۷۲-۳) با ضرایب داده شده در معادله (۷۳-۳)، نمایانگر جواب مسئله ماست.

مثال ۳-۸

یک کره فلزی بدون بار به شعاع R در یک میدان یکنواخت الکتریکی $\mathbf{E} = E_0 \hat{z}$ قرار داده شده است. [میدان باعث می‌شود که بارهای مثبت به طرف شمال کره (شکل ۳-۲۴) رفته و بارهای منفی در نیمکره جنوبی باقی بمانند. این بار القایی به نوبه خود میدان در مجاورت کره را مختل می‌سازد] پتانسیل را در منطقه خارج کره بیابید.

حل: کره یک سطح هم‌پتانسیل است یا به عبارتی می‌توان پتانسیل آن را صفر در نظر گرفت. بنابراین بنا به تقارن تمامی صفحه xy در پتانسیل صفر قرار می‌گیرد. ولی این دفعه در z های بزرگ، V به صفر میل نمی‌کند، در واقع در نقاط دور از کره میدان $E_0 \hat{z}$ بوده و بنابراین

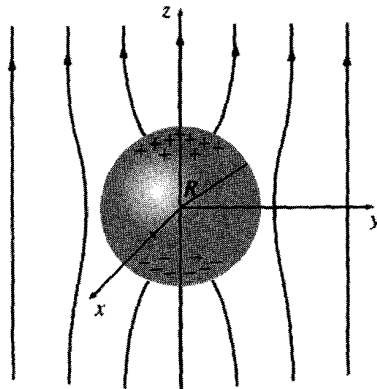
$$V \rightarrow -E_0 z + C$$

از آنجایی که V در صفحه هم‌پتانسیل صفر است، مقدار ثابت C می‌بایست صفر باشد. بنابراین شرایط مرزی برای این مسئله عبارت‌اند از

$$\begin{cases} V = 0 & \text{وقتی } r = R \text{ است} & (1) \\ V \rightarrow E_0 r \cos \theta & \text{برای } r \gg R & (2) \end{cases} \quad (74-3)$$

باید این شرایط مرزی را با تابعی به شکل (۳-۶۵) سازگاری داد. اولین شرط نتیجه می‌دهد

$$A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} = 0$$



شکل ۳-۲۴

$$B_l = -A_l R^{l+1} \quad (۷۵-۳)$$

و بنابراین

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(r^l - \frac{R^{l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

برای $r \gg R$ جمله دوم در پرانتز قابل چشمپوشی است و در نتیجه شرط دوم ایجاب می‌کند که

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta$$

ظاهراً فقط یک جمله وجود دارد: $l = ۱$. در واقع از آنجایی که $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ ، سریعاً می‌فهمیم که $A_1 = -E_0$ و بقیه A_l ها نیز صفر هستند.

در نتیجه:

$$V(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^r}{r^r} \right) \cos \theta \quad (۷۶-۳)$$

جمله اول $(-E_0 r \cos \theta)$ ناشی از میدان خارجی است و بنابراین سهم مربوط به بار القایی

$$E_0 \frac{R^r}{r^r} \cos \theta$$

خواهد شد. برای محاسبه چگالی بار القایی نیز به روش معمول، عمل می‌کنیم

$$\sigma(\theta) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R} = \epsilon_0 E_0 \left(1 + 2 \frac{R^r}{r^r} \right) \cos \theta \Big|_{r=R} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (۷۷-۳)$$

و همان‌طور که انتظارش می‌رفت مقدار آن در نیمکره شمالی مثبت ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) و در نیمکره جنوبی منفی است ($\pi/2 \leq \theta \leq \pi$).



مثال ۹-۳

چگالی بار معلوم $\sigma_0(\theta)$ بر روی سطح یک پوستهٔ کروی به شعاع R توزیع شده است. پتانسیل را در داخل و خارج کره به دست آورید.

حل: می توان آن را با انتگرال گیری، مستقیماً انجام داد

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{H}} \frac{\sigma_0}{R} da$$

اما روش جداسازی متغیرها به مراتب آسانتر است. برای منطقه داخلی داریم

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (r \leq R) \quad (78-3)$$

(بدون جملات شامل B_l ، زیرا که در مبدأ بینهایت می شوند). برای منطقه خارج کره داریم

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (r \geq R) \quad (79-3)$$

(بدون جملات شامل A_l ، زیرا که در بینهایت صفر نمی شوند). این دو تابع با استفاده از شرایط مرزی مناسب در سطح، باید ترکیب شوند. اول آنکه پتانسیل در $r = R$ پیوسته است [معادله (۲-۳۴)]:

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (80-3)$$

نتیجه آنکه ضرایب چندجمله‌ایهای شبیه لژاندر بالا، برابر هستند

$$B_l = A_l R^{2l+1} \quad (81-3)$$

[برای اثبات طرفین معادله (۳-۸۰) را در $P_l(\cos \theta) \sin \theta$ ضرب کرده و از 0 تا π انتگرال گیری کنید و از معادله تعامد (۳-۶۸) نیز استفاده کنید]. دوم آنکه مشتق شعاعی V در سطح دستخوش یک ناپوستگی می شود [معادله (۲-۳۶)]:

$$\left(\frac{\partial V_{\text{out}}}{\partial r} - \frac{\partial V_{\text{in}}}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_0(\theta) \quad (82-3)$$

$$-\sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) - \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sigma_0(\theta)$$

یا با استفاده از معادله (۸۱-۳)

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma_0(\theta) \quad (۸۳-۳)$$

از اینجا می‌توان ضرایب را با شگرد فوریه محاسبه کرد

$$A_l = \frac{1}{2\varepsilon_0 R^{l-1}} \int_0^\pi \sigma_0(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (۸۴-۳)$$

معادلات (۷۸-۳) و (۷۹-۳) با ضرایب داده شده در معادلات (۸۱-۳) و (۸۴-۳)، جواب مسئله ما را تشکیل می‌دهند.

برای مثال، اگر به‌ازای یک k ثابت داشته باشیم

$$\sigma_0(\theta) = k \cos \theta = k P_1(\cos \theta) \quad (۸۵-۳)$$

در آن صورت تمامی A_l ها بجز در $l = 1$ ، صفر می‌شوند و

$$A_1 = \frac{k}{2\varepsilon_0} \int_0^\pi [P_1(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta = \frac{k}{3\varepsilon_0}$$

بنابراین پتانسیل درون کره عبارت خواهد شد از

$$V(r, \theta) = \frac{k}{3\varepsilon_0} r \cos \theta \quad (r \leq R) \quad (۸۶-۳)$$

در حالی‌که برای خارج کره

$$V(r, \theta) = \frac{kR^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos \theta \quad (r \geq R) \quad (۸۷-۳)$$

اگر $\sigma_0(\theta)$ بار القایی روی یک کره فلزی واقع در میدان خارجی $E_0 \hat{z}$ باشد، به طوری که $k = 3\varepsilon_0 E_0$ [معادله ۳-۷۷]، در آن صورت پتانسیل در درون عبارت خواهد شد از $E_0 r \cos \theta = E_0 z$ و میدان نیز $E_0 \hat{z}$ خواهد شد که دقیقاً مساوی و مختلف‌الجهت با میدان خارجی است و همان‌طور که انتظار داریم میدان در درون صفر می‌شود. پتانسیل ناشی از این بار سطحی در خارج کره عبارت است از

$$E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta$$

■ که با نتیجه مثال ۳-۸، سازگاری دارد.

مسئله ۳-۱۶ از فرمول رودریگز، $P_2(x)$ را به دست آورید و تحقیق کنید که $P_2(\cos \theta)$ در معادله زاویه‌ای (۳-۶۰) به ازای $l = 3$ صدق می‌کند. توسط انتگرال‌گیری، مستقیماً ثابت کنید که P_1 و P_2 متعامد هستند.

مسئله ۳-۱۷ (الف) فرض کنید که پتانسیل ثابت V_0 را روی یک کره قرار داده باشیم. با استفاده از نتایج مثالهای ۳-۶ و ۳-۷، پتانسیل را در داخل و خارج کره به دست آورید. (البته شما نتیجه را از قبل می‌دانید. این کار صرفاً برای تحقیق سازگاری روش مزبور است.)
(ب) با استفاده از نتایج مثال ۳-۹، پتانسیل را درون و بیرون یک پوسته کروی با بار سطحی یکنواخت σ_0 ، بیابید.

مسئله ۳-۱۸ پتانسیل بر روی سطح یک کره با معادله $V_0 = k \cos^3 \theta$ داده شده است که در آن k یک مقدار ثابت است. پتانسیل را در داخل و خارج کره و همچنین چگالی بار سطحی $\sigma(\theta)$ را بر روی کره به دست آورید. (فرض کنید که در داخل و خارج کره، باری وجود ندارد.)

مسئله ۳-۱۹ فرض کنید که پتانسیل $V_0(\theta)$ بر روی سطح یک کره داده شده باشد و هیچ باری داخل یا خارج کره موجود نباشد. نشان دهید که چگالی بار بر روی کره توسط معادله

$$\sigma(\theta) = \frac{\varepsilon_0}{2R} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^2 C_l P_l(\cos \theta) \quad (۸۸-۳)$$

داده می‌شود که در آن

$$C_l = \int_0^\pi V_0(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (۸۹-۳)$$

مسئله ۲۰-۳ پتانسیل را خارج یک کره فلزی باردار شده (با بار Q و شعاع R) که در معرض میدان الکتریکی یکنواخت E_0 قرار دارد، بیابید. به‌وضوح توضیح دهید که صفر پتانسیل را در کجا قرار می‌دهید.

مسئله ۲۱-۳ در مسئله ۲۰-۲ پتانسیل را بر روی محور یک قرص دارای بار یکنواخت به‌دست آورید:

$$V(r, 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{r^2 + R^2} - r)$$

(الف) با استفاده از این رابطه، به همراه این واقعیت که $P_1(1) = 1$ است، سه جمله اول بسط (۲۲-۳) را برای پتانسیل قرص در نقاط خارج محور در $r > R$ ، بیابید.

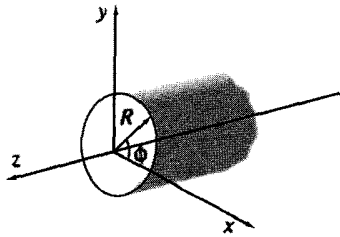
(ب) برای $r < R$ ، با استفاده از (۲۲-۳) توسط همان روش پتانسیل را به‌دست آورید. (توجه: باید ناحیه داخلی را به دو نیمکره تقسیم کنید، بالا و پایین قرص. ضرایب A_n در دو نیمکره را مساوی فرض نکنید).

مسئله ۲۲-۳ یک پوسته کروی به شعاع R ، حامل بار سطحی یکنواخت σ بر روی نیمکره شمالی و $-\sigma$ بر روی نیمکره جنوبی است. پتانسیل را درون و بیرون کره با محاسبه ضرایب A_n و B_n به‌دست آورید.

• مسئله ۲۳-۳ معادله لاپلاس را با روش جداسازی متغیرها در مختصات استوانه‌ای با فرض اینکه بستگی به z وجود ندارد (تقارن استوانه‌ای)، حل کنید. [مطمئن شوید که تمامی جوابها را برای معادله شعاعی به‌دست آورده‌اید. به‌عنوان مثال نتیجه به‌دست آمده باید با مورد یک بار خطی نامتناهی که جواب آن را می‌دانیم تطبیق کند].

مسئله ۲۴-۳ پتانسیل را خارج یک لوله فلزی نامتناهی به شعاع R که عمود بر میدان خارجی E_0 است، بیابید. بار سطحی القایی روی لوله را مشخص کنید. [از نتیجه مسئله ۲۳-۳ استفاده کنید].

مسئله ۲۵-۳ چگالی بار $\sigma(\phi) = a \sin \phi$ بر روی سطح یک استوانه نامتناهی به شعاع R قرار داده شده است (شکل ۲۵-۳). پتانسیل را در داخل و خارج کره به‌دست آورید. [از نتیجه مسئله ۲۳-۳ استفاده کنید].



شکل ۲۵-۳

۴-۳ بسط چندقطبی

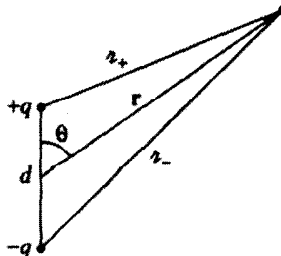
۱-۴-۳ پتانسیلهای تقریبی در فواصل دور

اگر در مکانی خیلی دور از یک توزیع بار موضعی قرار داشته باشید، آن توزیع، یک بار نقطه‌ای به نظر می‌آید و پتانسیل (با تقریب خوبی) $(1/4\pi\epsilon_0)Q/r$ خواهد بود که در آن Q بار کل است. از این امر، در بعضی موارد برای آزمون فرمولهای به دست آمده برای V ، استفاده می‌شود. اما اگر Q صفر باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ ممکن است جواب دهید که در آن صورت پتانسیل، تقریباً صفر می‌شود که البته در جای خود صحیح است. (در واقع در r های بزرگ، حتی اگر Q صفر هم نباشد، پتانسیل خیلی کوچک خواهد بود). اما ما به دنبال اطلاعات بیشتری در این زمینه هستیم.

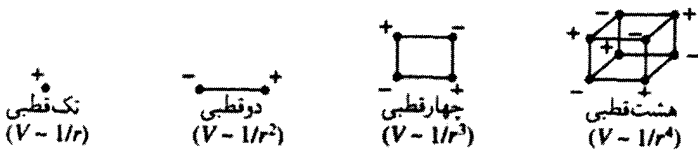
مثال ۱۰-۳

یک دوقطبی الکتریکی (فیزیکی) متشکل از دو بار مساوی ولی مختلف‌العلامه $\pm q$ است که به فاصله d از یکدیگر قرار داده شده‌اند. پتانسیل تقریبی را در نقاطی دور از دوقطبی بیابید.

حل: اگر π_+ را فاصله از بار $+q$ و π_- را فاصله از بار $-q$ در نظر بگیریم (شکل ۲۶-۳)، خواهیم داشت



شکل ۲۶-۳



شکل ۲۷-۳

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\pi_+} - \frac{q}{\pi_-} \right)$$

و با استفاده از قانون کسینوسها

$$\pi_{\pm}^2 = r^2(d/2)^2 \mp r d \cos \theta = r^2 \left(1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{4r^2} \right)$$

از آنجایی که مسئله را برای نواحی $r \gg d$ حل می‌کنیم، جمله سوم قابل صرف نظر کردن است و بسط دو جمله‌ای به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{1}{\pi_{\pm}} \cong \frac{1}{r} \left(1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} \cong \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right)$$

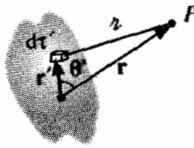
بنابراین

$$\frac{1}{\pi_+} - \frac{1}{\pi_-} \cong \frac{d}{r^2} \cos \theta$$

و در نتیجه

$$V(r) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2} \quad (۹۰-۳)$$

ظاهراً پتانسیل یک دوقطبی در r های بزرگ به نسبت $1/r^2$ کاهش پیدا می‌کند و همان‌طور که قابل پیش‌بینی نیز بود، این پتانسیل از پتانسیل یک توزیع بار با بار کل غیر صفر، سریعتر کاهش می‌یابد. به همین ترتیب اگر یک زوج دوقطبی با بارهای مساوی و غیر همنام را کنار هم بگذاریم (چهار قطبی)، پتانسیل به نسبت $1/r^3$ خواهد شد و برای چهارقطبیهای پشت به پشت (هشت قطبی) به صورت $1/r^4$ می‌شود و الخ. شکل ۲۷-۳، این سلسله مراتب را خلاصه کرده است. برای تکمیل مطلب



شکل ۲۸-۳

تک قطبی الکتریکی (بار نقطه‌ای) که پتانسیل آن، بدیهی است، به نسبت $1/r$ است، نیز آورده شده است.

مثال ۳-۱۰ مربوط به یک پیکربندی بار خیلی خاص است. حال قصد بر این است که بتوان برحسب توانهای $1/r$ ، یک بسط منظم برای پتانسیل یک توزیع بار موضعی دلخواه، به دست آورد. شکل ۲۸-۳ این پیکربندی را نشان می‌دهد. پتانسیل در نقطه r عبارت است از

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r'} \rho(r') d\tau' \quad (91-3)$$

با استفاده از قانون کسینوسها خواهیم داشت

$$r^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \theta' = r^2 \left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos \theta' \right]$$

یا

$$r = r' \sqrt{1 + \epsilon} \quad (92-3)$$

که در آن

$$\epsilon \equiv \left(\frac{r'}{r}\right) \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta'\right)$$

برای نقطه‌ای خارج از توزیع بار، ϵ خیلی از ۱ کوچکتر خواهد بود و این منجر به بسط دو جمله‌ای زیر می‌شود:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} (1 + \epsilon)^{-1/2} = \frac{1}{r'} \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \frac{5}{16}\epsilon^3 + \dots \right) \quad (93-3)$$

یا برحسب r, r', θ'

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right) \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{16} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right)^3 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right) (\cos \theta') + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \theta' - 1)/2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{r'}{r} \right)^3 (5 \cos^3 \theta' - 3 \cos \theta')/2 + \dots \right] \end{aligned}$$

در مرحله آخر توانهای مشابه (r'/r) جمع‌آوری شده‌اند، با کمی دقت در ضرایب (عبارات داخل پرانتزها) می‌فهمیم که آنها چندجمله‌ایهای لژاندر هستند. نتیجه مهم آن عبارت است از

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \theta') \quad (۹۴-۳)$$

که θ' زاویه بین r و r' است. با قرار دادن این عبارت در معادله (۹۱-۳) و با توجه به اینکه r یک ثابت است (در حین انتگرال‌گیری) به دست می‌آوریم

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{(n+1)}} \int (r')^n P_n(\cos \theta') \rho(r') d\tau' \quad (۹۵-۳)$$

و به طور واضحتر

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int \rho(r') d\tau' + \frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta' \rho(r') d\tau' \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^3} \int (r')^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2} \right) \rho(r') d\tau' + \dots \right] \quad (۹۶-۳) \end{aligned}$$

عبارت بالا نتیجه مطلوب، یعنی بسط چندقطبی V برحسب توانهای $1/r$ است. جمله اول ($n=0$) جمله تک‌قطبی نام دارد (با نسبت $1/r$). دومین جمله ($n=1$) جمله دوقطبی نام

۱. ضمناً این روش دومی برای به دست آوردن چندجمله‌ایهای لژاندر است (اولین روش فرمول رودریگز بود)؛ $1/\pi$ تابع عملگر چندجمله‌ایهای لژاندر نامیده می‌شود.

دارد (با نسبت $1/r^2$). سومین جمله، جمله چهارقطبی است. چهارمین جمله، جمله هشت قطبی است و به همین ترتیب ادامه پیدا می‌کند. همان‌طور که پیداست معادله (۳-۹۵) دقیق است، ولی در نظر گرفتن آن به عنوان یک طرح تقریبی مفید است. پایینترین عبارت غیرصفر در بسط، پتانسیل تقریبی در r های بزرگ را می‌سازد و جملات متوالی نشان می‌دهند که اگر دقت بیشتری لازم باشد، چگونه تقریب را تعمیم دهیم.

مسئله ۳-۲۶ یک کره با شعاع R که مرکزش بر مبدأ مختصات منطبق است، دارای چگالی بار زیر است

$$\rho(r, \theta) = k \frac{R}{r^2} (R - 2r) \sin \theta$$

که در آن k ثابت بوده و r و θ ، مختصات کروی‌اند. پتانسیل تقریبی را برای نقاط دور از کره واقع بر محور z به دست آورید. □

۳-۴-۲ جملات تک‌قطبی و دوقطبی

معمولاً در بسط چندقطبی (در r های بزرگ)، جمله تک‌قطبی جمله غالب بسط است:

$$V_{\text{تک‌قطبی}}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (۳-۹۷)$$

که در آن $Q = \int \rho d\tau$ بار کل پیکربندی است. این دقیقاً همان چیزی است که برای پتانسیل تقریبی در فاصله‌های دور از بار انتظار داریم. همچنین برای بار نقطه‌ای Q واقع در مبدأ مختصات، تک‌قطبی $V_{\text{تک‌قطبی}}$ نمایانگر مقدار دقیق پتانسیل در تمامی فضاست و نه فقط تقریب اول پتانسیل در r های بزرگ. در این مورد، چندقطبیهای بالاتر صفر می‌شوند. اگر بار کل صفر شود، در آن صورت جمله غالب در پتانسیل جمله دوقطبی خواهد بود (البته در صورتی که صفر نباشد):

$$V_{\text{دوقطبی}}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta' \rho(r') d\tau'$$

از آنجایی که θ' زاویه بین \mathbf{r} و \mathbf{r}' است (شکل ۳-۲۸)

$$r' \cos \theta' = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$$

و پتانسیل دوقطبی را می‌توان به شکل جمع و جورتر زیر نوشت

$$V_{\text{دوقطبی}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

انتگرال بالا که هیچ‌گونه بستگی به مکان \mathbf{r} ندارد، گشتاور دوقطبی توزیع بار نامیده می‌شود

$$\mathbf{p} \equiv \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (۹۸-۳)$$

و سهم دوقطبی در پتانسیل به شکل زیر در می‌آید

$$V_{\text{دوقطبی}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (۹۹-۳)$$

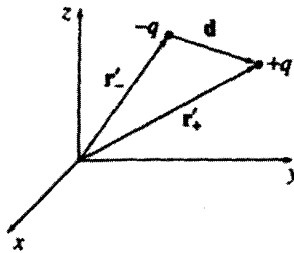
گشتاور دوقطبی توسط هندسه (اندازه، شکل و چگالی) توزیع بار تعیین می‌شود. معادله (۹۸-۳) به روش معمولی قبل (بخش ۲-۱-۴) برای بارهای نقطه‌ای، خطی و سطحی بازنویسی می‌شود. بنابراین، گشتاور دوقطبی مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای عبارت است از

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}'_i \quad (۱۰۰-۳)$$

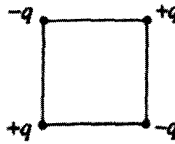
و برای دوقطبی فیزیکی (بارهای مساوی و غیرهمنام، $\pm q$)

$$\mathbf{p} = q\mathbf{r}'_+ - q\mathbf{r}'_- = q(\mathbf{r}'_+ - \mathbf{r}'_-) = qd \quad (۱۰۱-۳)$$

که در آن d برداری است که جهتش از بار منفی به سمت بار مثبت است (شکل ۳-۲۹). آیا این موضوع با آنچه ما برای یک دوقطبی فیزیکی در مثال ۳-۱۰ به دست آوردیم سازگار است؟ بله؛ اگر (۳-۱۰) را در معادله (۳-۹۹) قرار دهید، معادله (۳-۹۰) را به دست خواهید آورد. توجه داشته باشید که این فقط پتانسیل تقریبی دوقطبی است و جملات مرتبه بالاتری نیز وجود دارند. البته اگر از توزیع بار دور و دورتر شوید، دوقطبی $V_{\text{دوقطبی}}$ تقریب بهتر و بهتری خواهد شد، چرا که جملات مرتبه بالاتر با افزایش r سریعتر از بین می‌روند. روی همین اصل در یک r مشخص با کاهش فاصله بین دو بار (d) تقریب دوقطبی بیشتر می‌شود. برای ساختن یک دوقطبی خالص



شکل ۲۹-۳

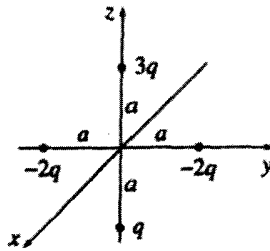


شکل ۳۰-۳

که پتانسیل آن دقیقاً (۳-۹۹) باشد، باید d را به صفر میل دهید. متأسفانه در آن صورت جمله دوقطبی نیز از دست می‌رود، مگر آنکه همزمان بار q را به بینهایت میل دهید! یک دوقطبی فیزیکی، دوقطبی خالص می‌شود، در صورتی که با میل کردن d به صفر، q به بینهایت میل کند و حاصلضرب qd ثابت بماند. [وقتی کسی از واژه دوقطبی استفاده می‌کند، نمی‌توان همیشه اظهار داشت که او از یک دوقطبی فیزیکی (با فاصله محدود بین بارها) صحبت می‌کند، یا یک دوقطبی خالص (نقطه‌ای) مد نظرش است. اگر جای شک باقی است فرض کنید که d (در مقایسه با r) به اندازه‌ای کوچک است که می‌توانید با خیال راحت از معادله (۳-۹۹) استفاده کنید].

گشتاورهای دوقطبی بردار هستند و به همان طریق نیز جمع بسته می‌شوند: اگر دو دوقطبی داشته باشید، p_1 و p_2 ، گشتاور دوقطبی کل، عبارت خواهد شد از $P_1 + P_2$. برای مثال، با چهار بار واقع در گوشه‌های یک مربع، همان‌طور که در شکل ۳-۳۰ نشان داده شده است، گشتاور دوقطبی برابند صفر است. این مطلب را می‌توان با ترکیب زوج بارها (به صورت عمودی، $\uparrow + \downarrow = 0$ یا با افقی $\leftarrow + \rightarrow = 0$) یا با جمع سهم هر یک به طور منفرد و استفاده از معادله (۳-۱۰۰) مشاهده کرد. (این طرح یک چهارقطبی است که قبلاً نیز به آن اشاره شد و پتانسیل ناشی از آن عمدتاً توسط جمله چهارقطبی در بسط چندقطبی به دست می‌آید).

مسئله ۳-۲۷ چهار ذره (یکی با بار q ، یکی با بار $3q$ و دو تا با بار $-2q$) همان‌طور که در شکل ۳-۳۱ نشان داده شده است، هر یک به فاصله a از مبدأ قرار دارند. برای پتانسیل نقطه دور از مبدأ یک فرمول تقریبی ساده بیابید. (جواب خود را برحسب مختصات کروی بیان کنید).



شکل ۳-۳۱

مسئله ۳-۲۸ در مثال ۳-۹ پتانسیل دقیق یک پوستهٔ کروی به شعاع R را که حامل بار سطحی $\sigma = k \cos \theta$ بود به دست آوردم.

(الف) گشتاور دوقطبی این توزیع بار را محاسبه کنید.

(ب) پتانسیل تقریبی را برای نقاط دور از کره به دست آورید و با جواب کامل (۳-۸۷) مقایسه کنید.

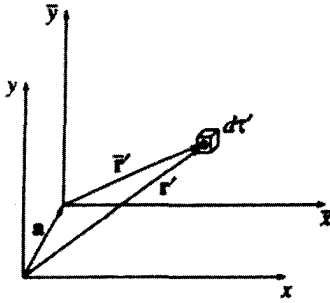
برای چندقطبیهای مرتبه بالاتر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

مسئله ۳-۲۹ برای دوقطبی مثال ۳-۱۰، جمله $1/\pi \pm$ را تا مرتبه $(d/r)^2$ بسط دهید و از این مطلب برای محاسبهٔ جملات چهارقطبی و هشت قطبی در پتانسیل استفاده کنید. □

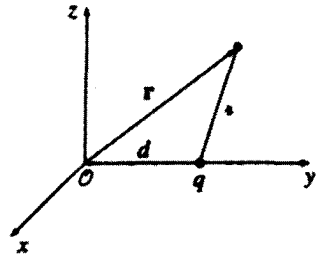
۳-۴-۳ مبدأ مختصات در بسطهای چندقطبی

قبلاً اشاره شد که یک بار نقطه‌ای واقع در مبدأ، تشکیل یک تک قطبی خالص می‌دهد. اگر این بار، در مبدأ واقع نباشد، دیگر یک تک قطبی خالص نیست. به عنوان مثال، بار در شکل ۳-۳۲ دارای یک گشتاور دوقطبی $p = q d \hat{y}$ است و به همان ترتیب یک جملهٔ دوقطبی در پتانسیل خود دارد. پتانسیل تک قطبی $(1/4\pi\epsilon_0)q/\pi$ برای این پیکربندی کاملاً صحیح نیست، بلکه پتانسیل کامل عبارت است از $(1/4\pi\epsilon_0)q/\pi$. به خاطر داشته باشید که بسط چندقطبی، یک سری برحسب توانهای معکوس π (یعنی فاصله تا مبدأ) است، و وقتی که $1/\pi$ را بسط می‌دهیم، تمامی توانها به دست می‌آید، نه فقط توان اول آن.

بنابراین حرکت دادن مبدأ (یا هر چیزی که همان نتیجه را بدهد مثلاً حرکت دادن بار) می‌تواند بسط چندقطبی را کاملاً تغییر دهد. گشتاور تک قطبی Q تغییری نمی‌کند، زیرا که بار کل به‌وضوح مستقل از دستگاه مختصات انتخابی است (در شکل ۳-۳۲ وقتی که بار q از مبدأ حرکت داده شد، جملهٔ تک قطبی تغییری نکرد — ولی قضیه به اینجا ختم نمی‌شود: یک جملهٔ دوقطبی — و در آن مورد همه قطبیهای بالاتر — نیز ظاهر شدند.) معمولاً با جابه‌جایی مبدأ، گشتاور دوقطبی تغییر می‌کند. اما یک استثنای مهم وجود دارد: اگر بار کل صفر باشد، در آن صورت گشتاور دوقطبی مستقل از انتخاب مبدأ خواهد بود. فرض کنید که مبدأ به اندازه a جابه‌جا شود (شکل ۳-۳۳).



شکل ۳۳-۳

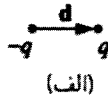


شکل ۳۲-۳

آن‌گاه گشتاور دوقطبی جدید عبارت است از

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \int \bar{r}' \rho(r') d\tau' = \int (r' - a) \rho(r') d\tau' \\ &= \int r' \rho(r') d\tau' - a \int \rho(r') d\tau' = p - Qa \end{aligned}$$

در حالت خاص اگر $Q = 0$ شود، $\bar{p} = p$ خواهد شد. بنابراین اگر گشتاور دوقطبی شکل ۳۳-۳ (الف) را بخواهیم، مقدارش qd خواهد بود، ولی برای گشتاور دوقطبی در شکل ۳۴-۳ (ب) جواب مناسب بستگی به انتخاب مبدأ دارد.



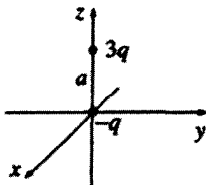
(الف)



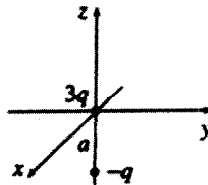
(ب)

شکل ۳۴-۳

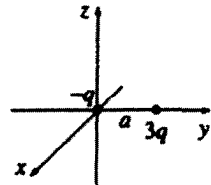
مسئله ۳۰-۳ دو بار نقطه‌ای $3q$ و $-q$ به فاصله a از یکدیگر قرار دارند. برای هر کدام از سه آرایش شکل ۳۵-۳ (۱) گشتاور تک‌قطبی، (۲) گشتاور دوقطبی؛ (۳) پتانسیل مناسب (در مختصات



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۳۵-۳

□ (کروی) در فاصلهٔ بزرگ r (شامل هر دو حالت تک قطبی و دو قطبی) را به دست آورید.

۴-۴-۳ میدان الکتریکی یک دو قطبی

تا کنون راجع به پتانسیل صحبت شد. حال قصد آن است که میدان الکتریکی یک دو قطبی (خالص) محاسبه شود. اگر دستگاه به صورتی برگزیده شود که مبدأ p بر مبدأ مختصات و جهت آن در جهت محور z ها باشد (شکل ۳-۳۶)، در آن صورت پتانسیل در r و θ توسط معادله (۴-۳-۹۹) به صورت زیر داده می شود

$$V_{\text{دو قطبی}}(r, \theta) = \frac{\hat{r} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (۴-۳-۱۰۲)$$

برای به دست آوردن میدان، منفی گرادیان V را می گیریم

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

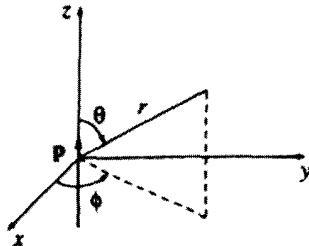
$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

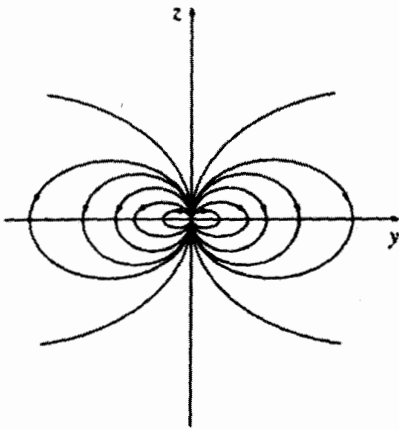
بنابراین

$$\mathbf{E}_{\text{دو قطبی}}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad (۴-۳-۱۰۳)$$

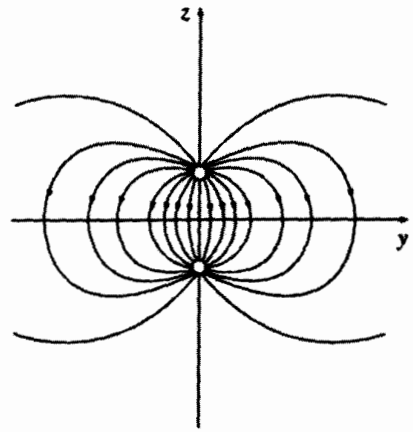
این فرمول صریحاً به یک سیستم مختصاتی ویژه مربوط می شود (کروی) و جهت خاصی برای p فرض می کند (در جهت z). می توان در معادله (۴-۳-۹۹) محاسبه را برحسب مختصات دلخواه



شکل ۳-۳۶



الف) میدان یک دوقطبی خالص



ب) میدان یک دوقطبی فیزیکی

شکل ۳-۳۷

تکرار کرد؛ مسئله ۳-۳۳ را ببینید.

توجه داشته باشید که میدان دوقطبی به نسبت عکس مکعب r است، و البته میدان تک قطبی $(Q/4\pi\epsilon_0 r^2)\hat{r}$ به نسبت عکس مجذور آن است. به همین ترتیب میدان چهارقطبی به نسبت $1/r^4$ و میدان هشت قطبی به نسبت $1/r^5$ هستند، این روند برای مراتب بالاتر نیز ادامه می یابد. (این مطلب دقیقاً بیان کننده این واقعیت است که پتانسیلهای تک قطبی به نسبت $1/r$ ، دوقطبی به نسبت $1/r^2$ ، چهارقطبی به نسبت $1/r^3$ ، و ... هستند، چرا که گرادیان یک عامل $1/r$ دیگر را وارد می سازد).

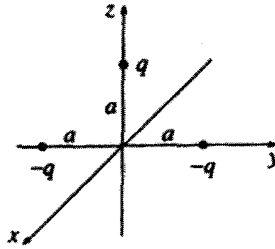
شکل ۳-۳۷ الف) خطوط میدان یک دوقطبی "خالص" را نشان می دهد. [معادله (۳-۱۰۳)]. برای مقایسه، خطوط میدان یک دوقطبی فیزیکی نیز در شکل ۳-۳۷ ب) رسم شده است. توجه کنید که صرف نظر از قسمت مرکزی، این دو شکل چقدر شبیه به هم هستند، در حالی که کاملاً متفاوت اند. فقط برای نقاط $d \gg r$ معادله (۳-۱۰۳) نشانگر وجود تقریب برای میدان دوقطبی فیزیکی است. این وضعیت یا با رفتن به r های بزرگ و یا با فشردن بارها خیلی نزدیک به هم، قابل دستیابی است.^۱

مسئله ۳-۳۱ یک دوقطبی خالص p واقع در مبدأ مختصات و جهتش به سمت z هاست.

۱. حتی در حالت حدی، یک منطقه بسیار کوچک در مبدأ باقی می ماند که در آن میدان یک دوقطبی فیزیکی در جهت "غلط" قرار می گیرد و این را با حرکت به سمت پایین محور z در شکل ۳-۳۵ ب) می توانید ببینید. برای بررسی این نکته مهم روی مسئله ۳-۴۲ کار کنید.

- (الف) نیروی وارد بر بار نقطه‌ای q واقع در نقطه $(a, 0, 0)$ (مختصات دکارتی) چقدر است؟
 (ب) نیروی وارد بر q واقع در نقطه $(0, 0, a)$ چقدر است؟
 (ج) چه مقدار کار لازم است تا بار q از نقطه $(a, 0, 0)$ به نقطه $(0, 0, a)$ برده شود؟

مسئله ۳۲-۳ سه بار نقطه‌ای هر یک به فاصله a از مبدأ، مانند شکل ۳۸-۳ قرار داده شده‌اند. میدان الکتریکی تقریبی را در نقاط دور از مبدأ بیابید. جواب را برحسب مختصات کروی بیان و دو تا از پایینترین مراتب در بسط چندقطبی را نیز شامل آن کنید.



شکل ۳۸-۳

- مسئله ۳۳-۳ نشان دهید که میدان الکتریکی یک دوقطبی (خالص) [معادله (۳-۱۰۳)] را می‌توان مستقل از مختصات به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E}_{\text{دوقطبی}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}] \quad (۳-۱۰۴)$$

□

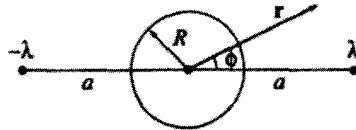
مسائل تکمیلی فصل ۳

- مسئله ۳۴-۳ بار نقطه‌ای q به جرم m به فاصله d از یک صفحه متصل به زمین از حالت سکون رها می‌شود. چقدر طول می‌کشد تا بار به صفحه برخورد کند؟

پاسخ: $(\pi d/q) \sqrt{2\pi\epsilon_0 m d}$

- مسئله ۳۵-۳ دو صفحه رسانای نامتناهی و موازی، به فاصله a از یکدیگر قرار دارند. بار نقطه‌ای q در منطقه بین آن دو به فاصله x از یک صفحه واقع است. نیروی وارد بر q را بیابید. تحقیق کنید که جواب شما برای موارد خاص $x = a/2$ و $a \rightarrow \infty$ صحیح است. به دست آوردن سطح القایی آسان نیست.^۱

1. B. G. Dick, *Am. J. Phys.* **41**, 1289 (1973), M. Zahn, *Am. J. Phys.* **44**, 1132 (1976), J. Pleines and S. Mahajan, *Am. J. Phys.* **45**, 868 (1977),



شکل ۳-۳۹

مسئله ۳-۳۶ دو سیم راست و طویل نامتناهی، حامل بارهای خطی یکنواخت و مخالف $\pm\lambda$ ، در دو طرف یک استوانهٔ رسانا قرار داده شده‌اند (شکل ۳-۳۹). استوانه (که بدون بار است) دارای شعاع R است و سیمها به فاصلهٔ a از محور آن قرار دارند. پتانسیل را در نقطهٔ r بیابید.

$$V(s, \phi) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left\{ \frac{(s^2 + a^2 + 2sa \cos \phi)[(sa/R)^2 + R^2 - 2sa \cos \phi]}{(s^2 + a^2 - 2sa \cos \phi)[(sa/R)^2 + R^2 + 2sa \cos \phi]} \right\} \quad \text{پاسخ:}$$

مسئله ۳-۳۷ کرهٔ رسانایی به شعاع a در پتانسیل V_0 قرار داده شده و توسط یک پوستهٔ کروی به شعاع b که بر روی آن بار سطحی $\sigma(\theta) = k \cos \theta$ قرار دارد، احاطه شده است (k یک مقدار ثابت و θ نیز همان مختصه کروی معمولی است).

(الف) پتانسیل را در دو منطقهٔ زیر بیابید: (۱) $r > b$ و (۲) $a < r < b$.

(ب) مقدار بار سطحی القایی $\sigma_i(\theta)$ را بر روی رسانا بیابید.

(ج) بار کل این سیستم چقدر است؟ صحت جواب خود را با بررسی رفتار V در r های بزرگ

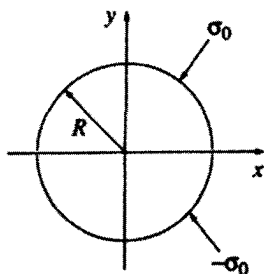
تحقیق کنید.

$$V(r, \theta) = \begin{cases} aV_0/r + (b^3 - a^3)k \cos \theta / 3r^2\epsilon_0 & r \geq b \\ aV_0/r + (r^3 - a^3)k \cos \theta / 3r^2\epsilon_0 & r \leq b \end{cases} \quad \text{پاسخ:}$$

مسئله ۳-۳۸ بار $+Q$ به‌طور یکنواخت در طول محور z ها از $z = -a$ تا $z = +a$ توزیع شده است. نشان دهید که پتانسیل الکتریکی در نقطهٔ r (برای $r > a$) عبارت است از

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^2 P_2(\cos \theta) + \frac{1}{5} \left(\frac{a}{r} \right)^4 P_4(\cos \theta) + \dots \right]$$

مسئله ۳-۳۹ یک پوستهٔ استوانه‌ای به شعاع R حامل بار سطحی یکنواخت σ_0 بر روی نیمهٔ بالایی و بار مخالف $-\sigma_0$ بر روی نیمهٔ پایینی است (شکل ۳-۴۰). پتانسیل الکتریکی را درون و بیرون استوانه بیابید.



شکل ۴۰-۳

مسئله ۴۰-۳ یک میله نازک عایق که از $z = -a$ تا $z = +a$ امتداد دارد دارای چگالی بار خطی است. در هر یک از موارد زیر جمله غالب در بسط چندقطبی را بیابید.

(الف) $\lambda = k \cos(\pi z/2a)$

(ب) $\lambda = k \sin(\pi z/a)$

(ج) $\lambda = k \cos(\pi z/a)$

که در آنها k مقداری ثابت است.

• مسئله ۴۱-۳ نشان دهید که میدان میانگین درون کره‌ای به شعاع R که ناشی از تمامی بارهای درون آن است، عبارت است از

$$E_{\text{میانگین}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{R^2} \quad (۱۰۵-۳)$$

که در آن P ، گشتاور دوقطبی کل است. راههای متعددی برای اثبات این نتیجه جالب و ساده وجود دارد. یکی از آنها از این قرار است:

(الف) نشان دهید که میدان میانگین ناشی از بار منفرد q در نقطه r (درون کره) برابر است با میدان در نقطه r ناشی از کره یکنواخت باردار شده با چگالی بار $\rho = -q/(4/3\pi R^3)$ یعنی

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)} \int \frac{q}{r'^2} \hat{\eta} d\tau'$$

که در آن π برداری است از نقطه r تا $d\tau'$.

(ب) می‌توان از قانون گاوس استفاده کرد (مسئله ۲-۱۲). پاسخ را برحسب گشتاور دوقطبی q ، بیان کنید.

(ج) از اصل برهم‌نهی به منظور تعمیم نتیجه به دست آمده، برای هر توزیع بار دلخواه استفاده کنید.

(د) نشان دهید میدان میانگین روی کره، بر اثر تمامی بارهای خارج کره برابر میدان ناشی از همان بارها در مرکز کره است؟

مسئله ۳-۴۲ (الف) با به کارگیری معادله (۳-۱۰۳)، میدان الکتریکی میانگین ناشی از یک دوقطبی را بر روی کره‌ای به شعاع R که مرکزش بر مبدأ منطبق است، به دست آورید. ابتدا انتگرال‌گیرهای زاویه‌ای را انجام دهید. (توجه: لازم است که قبل از انتگرال‌گیری \hat{r} و $\hat{\theta}$ را برحسب \hat{x} و \hat{y} و \hat{z} بیان کنید. اگر دلیل این کار را نمی‌فهمید نکات گفته شده در بخش ۱-۴-۱ را مجدداً مطالعه کنید). جواب به دست آمده را با قضیه عمومی معادله (۳-۱۰۵) مقایسه کنید. در اینجا، اختلاف مربوط به این واقعیت است که میدان دوقطبی در $r = 0$ بینهایت می‌شود. انتگرال زاویه‌ای صفر است اما انتگرال شعاعی نامتناهی است، بنابراین واقعاً نمی‌دانیم چه تعبیری از جواب داشته باشیم. برای رفع ابهام باید گفت که معادله (۳-۱۰۳) بیرون کره کوچکی به شعاع ϵ کاربرد دارد و بنابراین نقش آن در تعیین میانگین E صفر است، و تمامی جواب می‌بایست از میدان درون کره با شعاع ϵ ، به دست آید.

(ب) برای صادق بودن قضیه عمومی (۳-۱۰۵) میدان درون کره با شعاع ϵ چقدر باید باشد؟ (راهنمایی: از آنجایی که ϵ به‌طور دلخواه کوچک است، در اینجا راجع به چیزی صحبت می‌شود که در $r = 0$ نامتناهی بوده و انتگرال آن بر روی یک حجم بینهایت کوچک متناهی است). پاسخ: $-(p/3\epsilon_0)\delta^3(\mathbf{r})$

[ظاهراً، میدان حقیقی یک دوقطبی عبارت است از

$$\mathbf{E}_{\text{دوقطبی}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}] - \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{p}\delta^3(\mathbf{r}) \quad (3-106)$$

ممکن است این سؤال پیش بیاید که ما چگونه جمله تابع دلتا را هنگام محاسبه میدان در بخش ۳-۴-۴ در نظر نگرفتیم. در جواب باید گفت که تفاوت موجود در معادله (۳-۱۰۳) بجز در $r = 0$ کاملاً معتبر است، اما باید در نظر داشت (با توجه به بخش ۱-۵-۱) که نقطه $r = 0$ مشکل ساز است.^۱

مسئله ۳-۴۳ (الف) فرض کنید کنید که توزیع بار $\rho_1(\mathbf{r})$ ، پتانسیل $V_1(\mathbf{r})$ و توزیع بار $\rho_2(\mathbf{r})$ ، پتانسیل $V_2(\mathbf{r})$ را ایجاد می‌کند [دو وضعیت یادشده، ممکن است هیچ وجه مشترکی نداشته باشند،

1. C. P. Frahm, *Am. J. Phys.* **51**, 826 (1983), or R. Estrada and R. P. Kanwal, *Am. J. Phys.* **63**, 278 (1995).

برای بررسی جزئیات بیشتر و کاربردهای آن به مرجع زیر رجوع کنید.

D. J. Griffiths, *Am. J. Phys.* **50**, 698 (1982).

شاید شماره ۱، یک کره یکنواخت باردار شده و شماره ۲، یک خازن با صفحات موازی باشد. لطفاً توجه کنید که ρ_1 و ρ_2 در یک زمان با هم حضور ندارند، راجع به دو مسئله بحث می‌کنیم که در یکی فقط ρ_1 وجود دارد و در دیگری فقط ρ_2 موجود است. قضیهٔ تقابل گرین را ثابت کنید:

$$\int_{\text{تمام فضا}} \rho_1 V_2 d\tau = \int_{\text{تمام فضا}} \rho_2 V_1 d\tau$$

(راهنمایی: به دو روش $\int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\tau$ را محاسبه کنید، ابتدا با نوشتن $\mathbf{E}_1 = -\nabla V_1$ و روش انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء مشتق را به $\mathbf{E}_2 = -\nabla V_2$ منتقل کنید، سپس $\mathbf{E}_2 = -\nabla V_2$ را نوشته و مشتق را به \mathbf{E}_1 انتقال دهید).

(ب) حال فرض کنید که دو رسانای مجزا در اختیار دارید (شکل ۳-۴۱). اگر رسانای a را به اندازه Q باردار کنید (رسانای b را بدون بارها سازید) پتانسیل حاصل رسانای b ، مثلاً V_{ab} خواهد شد. از طرف دیگر اگر همان بار Q را بر روی رسانای b قرار دهید (رسانای a بدون بار باقی بماند) پتانسیل a فرضاً V_{ba} خواهد گردید. با استفاده از قضیه تقابل گرین نشان دهید که $V_{ab} = V_{ba}$. (یک جواب حیرت‌انگیز، چرا که ما هیچ شکل و مکان خاصی برای رساناها قائل نشده بودیم).



شکل ۳-۴۱

مسئله ۳-۴۴ با استفاده از قضیه تقابل گرین (مسئله ۳-۴۳) مسائل زیر را حل کنید. (راهنمایی: برای توزیع بار شماره ۱، از وضعیت واقعی استفاده کنید. برای توزیع بار دوم q را جابه‌جا کرده و یکی از رساناها را در پتانسیل V_0 قرار دهید).

(الف) دو صفحهٔ یک خازن موازی به زمین متصل شده‌اند و بار نقطه‌ای q بین آن دو به فاصلهٔ x از صفحهٔ شماره ۱، قرار دارد. فاصلهٔ بین دو صفحه d است. بار القایی بر روی هر یک از صفحات را بیابید.

$$Q_1 = q(x/d - 1); Q_2 = -qx/d$$

(ب) دو پوستهٔ کروی هم‌مرکز (به شعاعهای a و b) به زمین متصل شده‌اند و بار نقطه‌ای q بین آن دو (در شعاع r) واقع است. بار القایی بر روی هر یک از کره‌ها را بیابید.

مسئله ۳-۴۵ (الف) نشان دهید که جمله چهارقطبی در بسط چندقطبی پتانسیل می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$V_{\text{چهارقطبی}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sum_{i,j=1}^3 \hat{r}_i \hat{r}_j Q_{ij}$$

که در آن

$$Q_{ij} \equiv \int [3r'_i r'_j - (r')^2 \delta_{ij}] \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

است و در اینجا

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

دلتهای کرونیگر است. Q_{ij} گشتاور چهارقطبی توزیع بار است. به این سلسله مراتب توجه کنید

$$V_{\text{تک قطبی}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}; \quad V_{\text{دوقطبی}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum \hat{r}_i p_i}{r^2}; \quad V_{\text{چهارقطبی}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sum \hat{r}_i \hat{r}_j Q_{ij}; \dots$$

گشتاور تک قطبی (Q) یک عدد است، گشتاور دوقطبی (\mathbf{p})، یک بردار است، گشتاور چهارقطبی (Q_{ij}) تانسور مرتبه دوم است و به همین ترتیب ادامه پیدا می‌کند.

(ب) ۹ مؤلفه Q_{ij} را برای پیکربندی شکل ۳-۳۰ بیابید. (فرض کنید که مربع به ضلع a بوده و در صفحه xy قرار دارد، به طوری که مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق است).

(ج) نشان دهید که اگر گشتاورهای تک قطبی و دوقطبی هر دو صفر شوند گشتاور چهارقطبی مستقل از انتخاب مبدأست. (این مطلب با حفظ سلسله مراتب، مطابقت دارد چرا که پایتترین گشتاور غیرصفر، همیشه مستقل از انتخاب مبدأ خواهد بود).

(د) چگونه گشتاور هشت قطبی را محاسبه می‌کنید؟ جمله هشت قطبی در بسط چندقطبی را بر حسب گشتاور هشت قطبی بنویسید.

مسئله ۳-۴۶ در مثال ۳-۸، میدان الکتریکی بیرون یک رسانای کروی (به شعاع R) که در معرض میدان خارجی یکنواخت \mathbf{E}_0 قرار گرفته بود، محاسبه شد. حال همان مسئله را با استفاده از روش تصویری حل کنید و تحقیق کنید که جواب شما با معادله (۳-۷۶) سازگاری دارد. (راهنمایی:

مثال ۲-۳ را به‌کار ببرید، اما از بار دیگر $-q$ مخالف q استفاده کنید. با در نظر گرفتن $a \rightarrow \infty$ مقدار $E_0 = -(2q/a^2)(1/4\pi\epsilon_0)$ را ثابت بگیرید.

! مسئله ۳-۴۷ برای لولهٔ طویل با مقطع مستطیلی مثال ۳-۴، پتانسیل در ته لوله ($y = 0$) و در وجه آن ($x = \pm b$) صفر است. اما پتانسیل در بالای لوله ($y = a$) غیرصفر و مقدار ثابت V_0 است. پتانسیل درون لوله را بیابید. [راهنمایی: این مسئله نوع تغییر یافتهٔ مسئلهٔ ۳-۱۴ (ب) است اما در مثال ۳-۴ با استفاده از توابع سینوسی در y و هذلولی در x حل شد. مورد غیرمعمول آن است که $k = 0$ را هم باید در نظر بگیرید. با تعیین جواب عمومی معادلهٔ (۳-۲۶) و $k = 0$ شروع کنید.^۱

$$V_0 \left(\frac{y}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cosh(n\pi x/a)}{n \cosh(n\pi b/a)} \sin(n\pi y/a) \right) \quad \text{پاسخ:}$$

! مسئله ۳-۴۸ (الف) لولهٔ فلزی طویل با سطح مقطع مربعی (به ضلع a) که سه ضلع آن اتصال زمین شده‌اند و ضلع چهارم (که از بقیه عایق شده است) دارای پتانسیل ثابت V_0 است. مقدار بار خالص بر واحد طول ضلع مقابل به پتانسیل V_0 را پیدا کنید [راهنمایی: از جواب مسئلهٔ ۳-۱۴ یا ۳-۴۷ کمک بگیرید].

(ب) لولهٔ فلزی طویل با سطح مقطع دایره‌ای (به شعاع R) به ۴ بخش مساوی (در راستای طول لوله) تقسیم شده است که سه بخش آن اتصال زمین شده‌اند و بخش چهارم پتانسیل ثابت V_0 دارد. مقدار بار خالص بر واحد طول بخش روبه‌رو با V_0 را به‌دست آورید.

$$\lambda = -\epsilon_0 V_0 \ln 2 \quad \text{(ب) و (الف):}$$

! مسئله ۳-۴۹ یک دوقطبی الکتریکی ایده‌آل در مبدأ مختصات مانند شکل ۳-۳۶ در جهت z قرار داده شده است. یک بار الکتریکی در حال سکون از نقطه‌ای در صفحهٔ xy رها می‌شود. نشان دهید که دوقطبی در یک قوس دایره‌ای به عقب و جلو تاب می‌خورد. مثل اینکه آونگی در مبدأ قرار داده شده باشد.^۲

□

1. S. Hassani, *Am. J. Phys.* **59**, 470 (1991).

۲. اینها موارد خاص قضیهٔ تامسون-لامیر است. ر. ک.

J. D. Jackson, *Am. J. Phys.* **67**, 107 (1999).

۳. این نتیجهٔ جالب توجه در مرجع زیر به‌دست آمده است.

R. S. Jones, *Am. J. Phys.* **63**, 1042 (1995)

میدانهای الکتریکی در ماده

۱-۴ قطبش

۱-۱-۴ دی‌الکتریکها

در این فصل میدانهای الکتریکی در ماده را مطالعه می‌کنیم. بدیهی است که مواد به اشکال مختلف جامد، مایع، گاز، فلز، چوب، شیشه و غیره وجود دارند و پاسخ این مواد به اعمال میدانهای الکتروستاتیکی متفاوت است. با وجود این اغلب اجسام (با تقریب خوبی) به یکی از دو دسته رساناها و عایقها (یا دی‌الکتریکها) متعلق‌اند. درباره رساناها گفتیم که دارای تعداد "نامحدودی" بارهای آزادند که می‌توانند در ماده حرکت کنند. معنی این گفته در عمل به صورت معمولی آن است که بسیاری از الکترونها (که نوعاً در فلزات یک یا دوتا در هر اتم است) به هسته خاصی وابسته نیستند و به دلخواه در گردش‌اند. برعکس در دی‌الکتریکها، تمام بارها به اتم یا مولکول خاصی وابسته‌اند و تنها می‌توانند در داخل مولکول کمی جابه‌جا شوند. این جابه‌جاییهای میکروسکوپی قابل مقایسه با وضعیت داخل رساناها نیست، اما آثار جمعی آنها رفتار مشخصه دی‌الکتریکها را موجب می‌شود. در حقیقت دو سازوکار اصلی که بر اساس آن میدانهای الکتریکی توزیع بار را در یک اتم یا مولکول دی‌الکتریک به هم می‌زند وجود دارد: کشیدگی و چرخش. این فرایندها را در دو بخش بعدی شرح می‌دهیم.

۲-۱-۴ دوقطبیهای القایی

وقتی میدان الکتریکی E به اتمی خنثی اعمال می‌شود چه اتفاقی می‌افتد؟ حدس اول با توجه به خنثی بودن اتم این است که میدان بر آن هیچ تأثیری ندارد. اما این تصور غلط است. اگر چه اتم به طور کلی از نظر الکتریکی خنثی است اما در آن یک هسته با بار مثبت وجود دارد که اطرافش را ابر الکترونی احاطه کرده است. میدان بر این دو نوع بار بدین صورت اثر می‌کند که هسته در جهت میدان کشیده می‌شود و الکترونها در جهت مخالف آن. از نظر اصولی می‌توان گفت که اگر میدان به اندازه کافی بزرگ باشد می‌تواند اتم را "یونیده" کند (و در این حال ماده رسانا شود). وقتی میدان الکتریکی ضعیفتر باشد به زودی تعادلی برقرار می‌شود، زیرا اگر مرکز ابر الکترونی با هسته منطبق نباشد این بارهای مثبت و منفی یکدیگر را جذب می‌کنند و این نیرو، نگاه‌دارندهٔ اتم است. نیروی میدان E ، الکترونها و هسته را از یکدیگر دور می‌کند در حالی که جاذبهٔ متقابل بارها آنها را به یکدیگر جذب می‌کند و در نتیجه یک وضعیت توازن به وجود می‌آید و اتم با داشتن بارهای مثبت و منفی اندکی جابه‌جا شده قطبیده می‌شود. در این حال اتم دارای یک گشتاور دوقطبی p در جهت میدان E است. در حقیقت این گشتاور دوقطبی القایی تقریباً با میدان متناسب است (در صورتی که میدان خیلی قوی نباشد):

$$p = \alpha E \quad (1-4)$$

ثابت تناسب α را قطبش‌پذیری اتمی می‌نامند. مقدار این ثابت به چگونگی ساختار اتم بستگی دارد. جدول ۱-۴ بعضی مقادیر تجربی تعیین‌شده α را نشان می‌دهد.

جدول ۱-۴ قطبش‌پذیریهای اتمی^۱ ($\alpha/4\pi\epsilon_0$)، برحسب یکاهای $m^3 \cdot 10^{-20}$

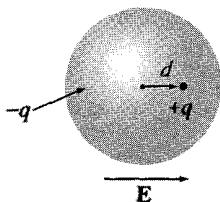
Cs	K	Ar	Na	Ne	C	Be	Li	He	H
۵۹٫۶	۴۳٫۴	۱٫۶۴	۲۴٫۱	۰٫۳۹۶	۱٫۷۶	۵٫۶۰	۲۴٫۳	۰٫۲۰۵	۰٫۶۶۷

مثال ۱-۴

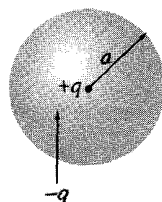
یک الگوی قدیمی اتم بدین صورت است که اتم به صورت یک هسته نقطه‌ای $(+q)$ فرض می‌شود که یک توزیع کروی بار $(-q)$ به شعاع a آن را احاطه کرده است (شکل ۱-۴). قطبش‌پذیری اتمی چنین اتمی را محاسبه کنید.

حل: با اعمال یک میدان خارجی E هسته کمی به سمت راست و ابر الکترونی به سمت چپ

1. Handbook of Chemistry and Physics, 78th ed. (Boca Raton: CRC Press, Inc., 1997).



شکل ۲-۴



شکل ۱-۴

مطابق شکل ۲-۴ کشیده می‌شوند. (به دلیل آنچه در مسئله ۱-۴ خواهید دید، این جابه‌جایی واقعی بسیار کوچک است و منطقی است ادعا کنیم ابر الکترونی بر اثر این جابه‌جایی توزیع کروی خود را از دست نمی‌دهد). در وضعیت تعادل هسته به اندازه فاصله d از مرکز کره جابه‌جا می‌شود. در این نقطه نیروی وارد از میدان خارجی به سمت راست بر آن با نیروی مخالف که توسط میدان داخلی وارد می‌شود توازن می‌کند، یعنی $E = E_e$ که E_e میدان حاصل از ابر الکترونی است. حال میدان در فاصله d از مرکز کره‌ای با توزیع بار یکنواخت برابر است با

$$E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{a^2}$$

(مسئله ۱۲-۲). در حالت تعادل داریم

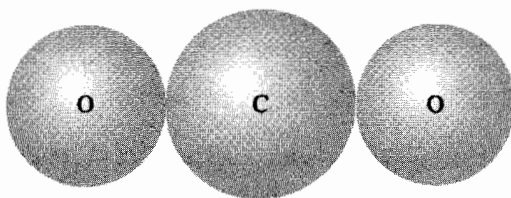
$$p = qd = (4\pi\epsilon_0 a^2)E \quad \text{یا} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{a^2}$$

بنابراین قطبش‌پذیری اتمی برابر است با

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^2 = 3\epsilon_0 v \quad (۲-۴)$$

که در آن v حجم اتم است. گرچه این الگوی اتم دقیق نیست، نتیجه (۲-۴) خیلی هم بد نیست، دقت آن برای بسیاری از اتمهای ساده در محدوده ضریب چهار است. ■

در مورد مولکولها وضعیت چنین ساده نیست، زیرا آنها به‌سادگی در بعضی جهتها قطبیده می‌شوند و در جهتهای دیگر نمی‌شوند. مثلاً کربن دی‌اکسید (شکل ۳-۴) با اعمال میدان در امتداد محورش دارای قطبش‌پذیری $4.5 \times 10^{-20} \text{ C}^2 \cdot \text{m/N}$ می‌شود، در حالی‌که اگر میدان در جهت عمود بر محور اعمال شود این مقدار به $2 \times 10^{-20} \text{ C}^2 \cdot \text{m/N}$ تقلیل می‌یابد. وقتی



شکل ۳-۴

هم که میدان با محور زاویه‌ای می‌سازد باید آن را به دو مؤلفه افقی و قائم تجزیه کنیم و دو اثر را به صورت زیر جمع کنیم

$$\mathbf{p} = \alpha_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \alpha_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}$$

در این مورد گشتاور دو قطبی القایی ممکن است حتی در همان جهت \mathbf{E} هم نباشد. مولکول CO_2 نسبتاً ساده است، زیرا اتمهای آن بر روی یک خط قرار می‌گیرند؛ برای یک مولکول کاملاً غیر متقارن معادله (۳-۴) به صورت رابطه خیلی کلیتری بین \mathbf{E} و \mathbf{p} در می‌آید:

$$\begin{cases} p_x = \alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y + \alpha_{xz} E_z \\ p_y = \alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y + \alpha_{yz} E_z \\ p_z = \alpha_{zx} E_x + \alpha_{zy} E_y + \alpha_{zz} E_z \end{cases} \quad (3-4)$$

مجموعه ۹ ثابت α_{ij} تشکیل تانسور قطبش پذیری مولکول را می‌دهد. مقادیر واقعی این ضرایب به سمتگیری محورهای انتخابی بستگی دارد و بنابراین می‌توان محورها را به گونه‌ای انتخاب کرد که تمام جملات "غیرقطری" یعنی α_{zx}, α_{xy} و غیره صفر شوند و تنها سه قطبش پذیری "اصلی" $\alpha_{xx}, \alpha_{yy}, \alpha_{zz}$ باقی بماند.

مسئله ۳-۴ یک اتم هیدروژن (با شعاع بور نیم آنگستروم) بین دو صفحه فلزی قرار دارد. فاصله بین صفحات یک میلیمتر است و به اختلاف پتانسیل 50° ولت وصل هستند. فاصله d تقریباً چه کسری از شعاع اتمی است؟ ولتاژ لازم در این دستگاه برای یونش اتم را تخمین بزنید [از مقدار α در جدول ۳-۴ استفاده کنید. جابه‌جایی مورد بحث بسیار کوچک است، حتی در یک مقیاس اتمی].

مسئله ۳-۴ بنابر مکانیک کوانتومی، چگالی بار ابر الکترونی در یک اتم هیدروژن در حالت پایه برابر است با

$$\rho(r) = \frac{q}{\pi a^3} e^{-2r/a}$$

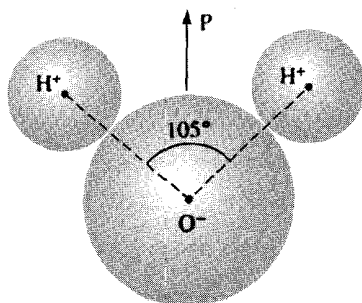
که در آن q بار الکترون و a شعاع بور است. قطبش پذیری چنین اتمی را بیابید. [راهنمایی: ابتدا میدان الکتریکی ابر الکترونی $E_e(r)$ را محاسبه کنید، آن گاه با فرض $r \ll a$ تابع نامی را بسط دهید].^۱

مسئله ۳-۴ بنابه معادله (۱-۴) گشتاور دوقطبی القایی یک اتم تقریباً با میدان خارجی متناسب است. این قاعده بنیادی نیست و نشان دادن استثناها در این مورد ساده است. مثلاً فرض کنید چگالی بار ابر الکترونی با یک شعاع R متناسب با فاصله از مرکز باشد. در این حالت p با چه توانی از E متناسب است؟ شرایط مناسبی برای $\rho(r)$ بیابید به گونه‌ای که معادله (۱-۴) برای میدانهای ضعیف صادق باشد.

مسئله ۴-۴ یک بار نقطه‌ای q به فاصله زیاد r از یک اتم خنثی با قطبش پذیری α قرار دارد. □ نیروی جاذبه بین آنها را بیابید.

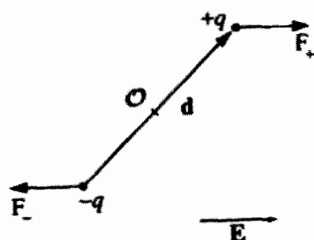
۳-۱-۴ ردیف شدن مولکولهای قطبی

اتم خنثای مورد بحث در بخش ۲-۱-۴ گشتاور دوقطبی نداشت، اما یک گشتاور p القایی بر اثر اعمال میدان در آن به وجود آمد. بعضی مولکولها دارای گشتاور دوقطبی دائمی داخلی هستند. مثلاً در مولکول آب الکترونها دور اتم اکسیژن جمع می‌شوند (شکل ۴-۴) و چون مولکول با زاویه 105° خمیده است، در نتیجه یک بار منفی در رأس و یک بار مثبت در نقطه مقابل آن قرار می‌گیرد. (گشتاور دوقطبی آب به طور غیرعادی بزرگ است: $C.m. = 10^{-30} \times 6.1$ ؛ در واقع این گشتاور است که آب را حلال مؤثری می‌سازد). وقتی چنین مولکولی (به نام مولکول قطبی) در میدان الکتریکی قرار می‌گیرد چه اتفاقی می‌افتد؟



شکل ۴-۴

۱. برای حالات پیچیده‌تر به مقاله زیر رجوع کنید



شکل ۵-۴

اگر میدان یکنواخت باشد نیروی وارد بر بار مثبت، $F_+ = qE$ ، نیروی وارد بر بار منفی، $F_- = -qE$ را حذف می‌کند (شکل ۵-۴). با این وجود گشتاوری به وجود می‌آید که برابر است با

$$N = (r_+ \times F_+) + (r_- \times F_-)$$

$$= [(d/2) \times (qE)] + [(-d/2) \times (-qE)] = qd \times E$$

بنابراین بر یک دوقطبی $p = qd$ در یک میدان یکنواخت E گشتاور زیر اثر می‌کند

$$\boxed{N = p \times E} \quad (۴-۴)$$

جهت N به‌گونه‌ای است که p را به موازات E می‌کشاند؛ یک مولکول قطبی که آزادانه می‌چرخد نوسان می‌کند تا اینکه در امتداد میدان قرار گیرد.

اگر میدان یکنواخت نباشد F_+ با F_- کاملاً متوازن نمی‌شود، علاوه بر گشتاور یک نیروی خالص هم بر دوقطبی اثر می‌کند. البته، E باید تغییرات نسبتاً تندی داشته باشد به‌گونه‌ای که در فضای یک مولکول محسوس باشد، بنابراین عملاً این تغییرات میدان در بررسی رفتار دی‌الکتریکها قابل ملاحظه نیست. با وجود این، فرمول نیروی مؤثر بر دوقطبی در میدان غیریکنواخت تا حدودی جالب توجه است:

$$F' = F_+ + F_- = q(E_+ - E_-) = q(\Delta E)$$

که در آن ΔE تفاوت میدان میان دو انتهای مثبت و منفی است. با فرض کوتاه بودن دوقطبی می‌توانیم از معادله (۳۵-۱) برای تقریب متغیر کوچک در E_x استفاده کنیم

$$\Delta E_x \equiv (\nabla E_x) \cdot d$$

به همین ترتیب برای E_z و E_y معادله وجود دارد. به صورت فشرده‌تر داریم

$$\Delta \mathbf{E} = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

و بنابراین^۱

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} \quad (5-4)$$

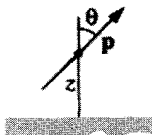
در یک دوقطبی "کامل" با طول بسیار کوچک، گشتاور نسبت به مرکز دوقطبی، حتی وقتی که میدان هم غیریکنواخت باشد؛ از (۴-۴) به دست می‌آید. گشتاور نسبت به هر نقطهٔ دیگر برابر است با $\mathbf{N} = (\mathbf{p} \times \mathbf{E}) + (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$.

مسئله ۵-۴ در شکل ۶-۴ دوقطبیهای (کامل) \mathbf{p}_1 و \mathbf{p}_2 به فاصلهٔ r از یکدیگر قرار دارند. گشتاور مؤثر بر \mathbf{p}_1 ناشی از \mathbf{p}_2 چیست؟ گشتاور مؤثر بر \mathbf{p}_2 ناشی از \mathbf{p}_1 کدام است؟ [در هر مورد گشتاور خود دوقطبی نسبت به مرکز دوقطبی مدنظر است. اگر نامساوی بودن و مخالف بودن جوابها شما را نگران می‌کند به مسئلهٔ ۲۹-۴ رجوع کنید].



شکل ۶-۴

مسئله ۶-۴ یک دوقطبی (کامل) \mathbf{p} به فاصلهٔ z بالای یک صفحهٔ رسانای متصل به زمین (شکل ۷-۴) قرار دارد. زاویهٔ دوقطبی نسبت به عمود بر صفحهٔ θ است. گشتاور مؤثر بر \mathbf{p} را حساب کنید. اگر دوقطبی بتواند آزادانه بچرخد، در کدام سمتگیری به سکون می‌رسد؟



شکل ۷-۴

۱. در متن حاضر معادله (۵-۴) را می‌توان به صورت مناسبتر $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ نوشت. با وجود این بهتر است از همان فرمول (۵-۴) استفاده کنیم، زیرا فرمول را برای موادی که گشتاور دوقطبی آنها (در واحد حجم) خود تابعی از مکان است و عبارت جدید (به‌طور نادرست) ایجاب می‌کند که \mathbf{p} هم دیفرانسیل‌پذیر باشد.

مسئله ۷-۴ نشان دهید که انرژی یک دوقطبی \mathbf{p} ایده‌آل در یک میدان الکتریکی \mathbf{E} از معادله زیر به دست می‌آید

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (۶-۴)$$

مسئله ۸-۴ نشان دهید که انرژی برهم‌کنش بین دو دوقطبی که به فاصله r از یکدیگر قرار دارند برابر است با

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})] \quad (۷-۴)$$

[راهنمایی: به مسئله ۷-۴ و معادله (۱۰-۳) توجه کنید].

مسئله ۹-۴ دوقطبی \mathbf{p} به فاصله r از یک بار نقطه‌ای q طوری قرار گرفته است که \mathbf{p} با بردار \mathbf{r} از q به \mathbf{p} زاویه θ می‌سازد.

(الف) نیروی وارد به \mathbf{p} چقدر است؟

□ (ب) نیروی وارد به q چقدر است؟

۴-۱-۴ قطبش

در دو بخش گذشته اثر یک میدان الکتریکی خارجی را روی یک اتم یا مولکول در نظر گرفتیم. حال می‌توانیم (به‌طور کیفی) پاسخ این پرسش اساسی را بدهیم: وقتی قطعه‌ای از یک ماده‌ی دی‌الکتریک در یک میدان الکتریکی قرار می‌گیرد چه اتفاقی می‌افتد؟ هرگاه ماده از اتمهای خنثی (یا مولکولهای غیرقطبی) تشکیل شده باشد، میدان گشتاورهای دوقطبی کوچکی در هر کدامشان القا می‌کند که در جهت میدان قرار دارند. اگر ماده از مولکولهای قطبی تشکیل شده باشد، بر هر دوقطبی دائمی یک گشتاور اثر می‌کند که می‌خواهد آن را به موازات میدان در آورد. (برخوردهای گرمایی کاتوره‌ای اثری برعکس دارد: بر اثر برخوردهای متوالی مولکولها، به‌خصوص در دماهای بالا، این همسویی‌ها را خنثی می‌کند و با حذف میدان تقریباً دیگر همسویی باقی نمی‌ماند).

توجه کنید که این دو سازوکار به یک نتیجه اساسی می‌انجامند: تعداد زیادی از دوقطبیهای کوچک که در امتداد میدان قرار می‌گیرند باعث می‌شوند دی‌الکتریک قطبیده شود. برای بررسی

۱. در یک مولکول غیرمتقارن گشتاور دوقطبی القایی ممکن است به موازات میدان قرار نگیرد، اما اگر سمتگیری کاتوره‌ای باشد، متوسط مؤلفه‌های عمودی صفر می‌شود. در یک تک‌بلور مسلماً این سمتگیریها کاتوره‌ای نیست و این مورد را باید جداگانه بررسی کنیم.

این اثر، تعریف قطبش به صورت زیر مناسب به نظر می رسد

گشتاور دوقطبی در واحد حجم $\mathbf{P} \equiv$

با این تعریف جدید دیگر نباید نگران نحوه قطبش باشیم. دو سازوکاری هم که قبلاً اشاره کردیم به سادگی آنچه گفتیم نیستند. حتی در مولکولهای قطبی بر اثر جابه جایی تا حدی قطبش وجود دارد (گرچه عموماً چرخش یک مولکول از کشیده شدن آن آسانتر است، بنابراین سازوکار دوم غالب می شود). در بعضی از مواد این امکان هست که قطبش دائمی شود، به طوری که بعد از حذف میدان یا برجا بماند. فعلاً از اینکه علت قطبش چیست صرف نظر می کنیم و میدان ناشی از یک قطعه از ماده ای قطبیده را بررسی می کنیم. آن گاه در بخش ۳-۴ تمام اینها را با هم در نظر می گیریم؛ یعنی میدان اصلی ایجادکننده \mathbf{P} و نیز میدان جدیدی که از \mathbf{P} ناشی می شود.

۲-۴ میدان یک جسم قطبیده

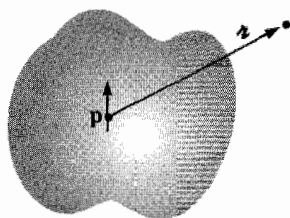
۱-۲-۴ بارهای مقید

فرض کنید یک قطعه از ماده ای قطبیده در اختیار داریم، یعنی جسمی که از تعداد زیادی دوقطبیهای میکروسکوپی همسوسده تشکیل شده است. گشتاور دوقطبی واحد حجم، \mathbf{P} هم معلوم است. پرسش: میدان حاصل از این جسم چیست؟ (نه میدانی که خود عامل ایجاد \mathbf{P} است بلکه میدانی که قطبش ایجاد می کند). خوب، از اینکه میدان حاصل از یک دوقطبی خاص چیست مطلع هستیم، بنابراین چرا جسم را به عنصرهای دوقطبی بسیار کوچک تقسیم نکنیم و با انتگرال گیری میدان کل را حساب نکنیم؟ طبق معمول، ساده تر آن است که برحسب پتانسیل بحث کنیم. برای یک دوقطبی ساده \mathbf{p} داریم [(معادله ۳-۹۹)]

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p}}{r^2} \quad (۸-۴)$$

که برداری است که از دوقطبی به نقطه ای که می خواهیم پتانسیل را پیدا کنیم وصل می شود (شکل ۸-۴). با بحث اخیر یک گشتاور دوقطبی $\mathbf{p} = \mathbf{P} d\tau'$ را داریم که در آن $d\tau'$ جزء حجم است، بنابراین پتانسیل کل می شود

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{حجم}} \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{r'^2} d\tau' \quad (۹-۴)$$



شکل ۸-۴

از نظر اصولی کار شدنی است. اما مختصر دستکاری در انتگرال بالا آن را به صورت مطلوبتری در خواهد آورد. می‌دانیم که

$$\nabla' \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\hat{r}}{r^2}$$

که در آن (برعکس مسئله ۱-۱۳) دیفرانسیل‌گیری نسبت به مختصات چشمه (\mathbf{r}') است، داریم

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) d\tau'$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء و استفاده از قاعده ضرب شماره ۵ نتیجه می‌گیریم که

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_V \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{r} \right) d\tau' - \int_V \frac{1}{r} (\nabla' \cdot \mathbf{P}) d\tau' \right]$$

و یا با استفاده از قضیه دیورژانس

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{1}{r} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a}' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} (\nabla' \cdot \mathbf{P}) d\tau' \quad (10-4)$$

جمله اول همانند پتانسیل حاصل از یک بار سطحی زیر است

$$\sigma_b \equiv \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (11-4)$$

که در آن $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه عمودی است) و جمله دوم هم شبیه پتانسیل یک بار حجمی با چگالی زیر است

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (12-4)$$

با این تعریفها، فرمول (۴-۱۰) می شود

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_b}{\pi} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_b}{\pi} d\tau' \quad (۴-۱۳)$$

معنی این انتگرال آن است که پتانسیل (و نیز میدان) یک جسم قطبیده برابر است با پتانسیل حاصل از یک چگالی بار حجمی $\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ به علاوه چگالی بار سطحی $\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$. به جای آنکه از اثر تمام دوقطبیهای بسیار کوچک مانند معادله (۴-۹)، انتگرال بگیریم می توانیم تنها بارهای مقید را در نظر بگیریم و میدان حاصل از آنها را محاسبه کنیم، همچنانکه میدان هر نوع بار حجمی یا سطحی را حساب می کنیم (به عنوان مثال با استفاده از قانون گاوس).

مثال ۴-۲

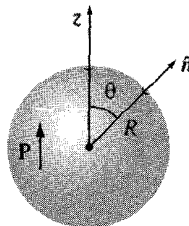
میدان الکتریکی حاصل از کره ای با قطبیدگی یکنواخت و شعاع R را حساب کنید.

حل: محور z را منطبق بر امتداد قطبش می گیریم (شکل ۴-۹). چگالی بار مقید حجمی ρ_b برابر است با صفر، بنابراین \mathbf{P} ، ثابت است، اما

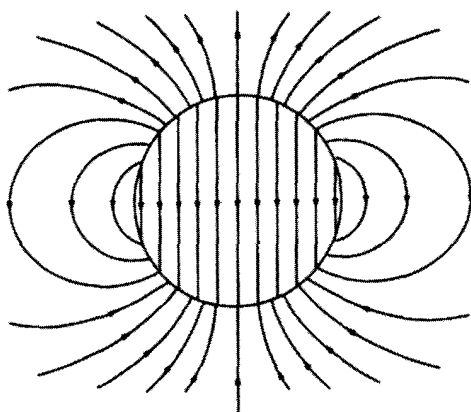
$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = P \cos \theta$$

θ در این معادله مختصه کروی معمولی است. حال در صدد یافتن میدانی هستیم که ناشی از چگالی بار $P \cos \theta$ پخش شده روی سطح کره است. اما پتانسیل حاصل از چنین توزیع باری را در مثال ۳-۹ محاسبه کرده ایم

$$V(r, \theta) = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos \theta & r \leq R \\ \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta & r \geq R \end{cases}$$



شکل ۴-۹



شکل ۱۰-۴

چون $z = r \cos \theta$ است، میدان در داخل کره یکنواخت است

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{P}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}, \quad r < R \quad (14-4)$$

این نتیجه برای دنباله بحث ما بسیار مفید است. پتانسیل خارج کره با پتانسیل حاصل از یک دوقطبی کامل واقع در مبدأ برابر است با

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad r \geq R \quad (15-4)$$

که گشتاور دوقطبی آن، تعجبی ندارد که با گشتاور دوقطبی کل کره برابر است:

$$\mathbf{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{P} \quad (16-4)$$

■ میدان کره یکنواخت قطبیده در شکل ۱۰-۴ نشان داده شده است.

مسئله ۱۰-۴ کره‌ای به شعاع R دارای قطبش $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = k\mathbf{r}$ است که در آن k یک ثابت و \mathbf{r} برداری است با مبدأ واقع در مرکز.

(الف) بارهای مقید σ_b و ρ_b را بیابید.

(ب) میدان داخل و خارج کره را پیدا کنید.

مسئله ۱۱-۴ یک استوانه کوتاه به شعاع R و طول L حامل یک قطبش دائمی یکنواخت P موازی با محورش است. بار مقید را پیدا کنید و میدان الکتریکی این استوانه را، جداگانه به ازای $R \approx L$ و $R \ll L, L \gg R$ رسم کنید. [این اسباب را الکترت میله‌ای می‌نامند که مشابه الکتریکی آهنربای میله‌ای است. در عمل، تنها مواد خاصی (که باریم تیتانات شناخته‌ترین آنهاست) قادرند قطبش الکتریکی دائمی را در خود حفظ کنند. به این دلیل است که نمی‌توان الکترت را از اسباب‌بازی فروشیها خریداری کرد].

مسئله ۱۲-۴ پتانسیل حاصل از یک کره یکنواخت قطبیده را مستقیماً با استفاده از معادله (۹-۴) پیدا کنید (مثال ۲-۴). □

۲-۲-۴ تعبیر فیزیکی بارهای مقید

در بخش قبل دیدیم که میدان حاصل از یک جسم قطبیده مشابه میدانی است که از توزیع مشخصی از "بارهای مقید" σ_b و ρ_b ناشی می‌شود. اما این تفسیر صرفاً ناشی از کار کردن روی انتگرال (۹-۴) است و رهنمودی برای یافتن معنی فیزیکی بارهای مقید نمی‌دهد. بعضی مؤلفان بر این عقیده‌اند که بارهای مقید تعبیری "خیالی" هستند و صرفاً ابزاری برای عملی ساختن محاسبات میدانها به‌شمار می‌روند. این بسیار دور از واقعیت است؛ σ_b و ρ_b به‌درستی نمایانگر تجمع واقعی بار هستند. در این بخش می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه قطبش به چنین تجمع باری منجر می‌شود.

ایده اصلی بسیار ساده است: فرض کنید زنجیره‌ای طویل از دوقطیبه‌ها مطابق شکل ۱۱-۴ داریم. در طول این خط ابتدای هر دوقطبی عملاً انتهای دوقطبی همسایه‌اش را خنثی می‌کند، در نهایت دو بار الکتریکی باقی می‌ماند: بار مثبت در سمت راست و بار منفی در سمت چپ. مثل این است که الکترونی را از یک انتهای آزاد برداریم و آن را تا انتهای دیگر میله ببریم، گرچه یک تک‌الکترون کل مسیر را نمی‌پیماید — مقدار زیادی جابه‌جاییهای کوچک به هم افزوده شده و جابه‌جایی بزرگی را نتیجه می‌دهد. این بارهای خالص موجود در دو انتها را بارهای مقید می‌نامیم تا در نظرمان بماند که اینها را نمی‌توان جابه‌جا کرد؛ در یک ماده‌ی الکتریک هر الکترونی همواره به اتم یا مولکول خاصی وصل است. جز این اختلاف بار مقید تفاوت دیگری با بار غیرمقید ندارد.



شکل ۱۱-۴

برای محاسبه مقدار واقعی بار مقید ناشی از یک قطبش یکنواخت مفروض، لوله‌ای استوانه‌ای از ماده‌ای دی‌الکتریک را به موازات \mathbf{P} در نظر بگیرید. در شکل ۱۲-۴ گشتاور دوقطبی یک قطعه نازک به مساحت قاعده A و طول d یعنی $P(Ad)$ را نشان داده‌ایم. این گشتاور دوقطبی را برحسب بارهای انتها می‌توان به صورت qd هم نوشت. بار مقید که در انتهای راست لوله جمع می‌شود برابر است با

$$q = PA$$

وقتی مقطعی عمودی در دو انتها در نظر بگیریم چگالی بار سطحی می‌شود

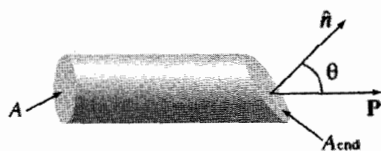
$$\sigma_b = \frac{q}{A} = P$$

در حالی‌که با یک برش غیر عمودی (دلخواه) چون مقدار بار فرقی نکرده است اما سطح مؤثر به میزان $\cos \theta$ تغییر کرده است (شکل ۱۳-۴)، داریم

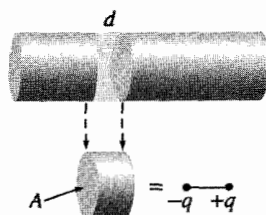
$$\sigma_b = \frac{q}{A_{\text{انتها}}} = P \cos \theta = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

بنابراین اثر قطبش یکنواخت قرار دادن بار مقید $\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ بر روی سطح ماده است. این دقیقاً همان چیزی است که با شیوه‌ای دشوارتر در بخش ۱-۲-۴ یافتیم. اما حالا می‌دانیم که بار مقید از کجا می‌آید.

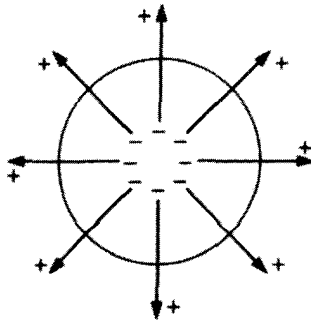
هر گاه قطبش غیر یکنواخت باشد تجمع بارها را علاوه بر روی سطح، در داخل ماده نیز خواهیم داشت. نگاهی گذرا به شکل ۱۴-۴ نشان می‌دهد که یک \mathbf{P} و اگرچه به تجمع بارهای منفی می‌انجامد. در واقع، بار مقید خالص $\int \rho_b d\tau$ در یک حجم معین مساوی و مخالف باری است که



شکل ۱۳-۴



شکل ۱۲-۴



شکل ۴-۱۴

از طریق سطح به بیرون رانده شده است. بار اخیر (به همان دلیلی که در مورد قطبش یکنواخت ذکر کردیم) در واحد سطح برابر است با $\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ ، بنابراین

$$\int_V \rho_b d\tau = -\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a} = -\int_V (\nabla \cdot \mathbf{P}) d\tau$$

چون این معادله برای هر حجمی صادق است داریم

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

یعنی به همان بحث دشوار بخش ۴-۲-۱ می‌رسیم.

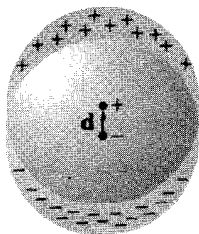
مثال ۴-۳

راه دیگری برای تحلیل کره یکنواخت قطبیده (مثال ۴-۲) وجود دارد که به زیبایی ایده بار مقید را به نمایش می‌گذارد. آنچه را حقیقتاً داریم عبارت است از دو کره باردار: یک کره با بار مثبت و یکی هم منفی. اگر قطبش را در نظر نگیریم دو بار یکدیگر را کاملاً خنثی می‌کنند. اما وقتی ماده به طور یکنواخت قطبیده شود تمام بارهای مثبت کمی به طرف بالا (امتداد z) حرکت می‌کنند و بارهای منفی هم کمی به سمت پایین (شکل ۴-۱۵). در این صورت دیگر به هیچ وجه دو کره برهم منطبق نمی‌شوند: در قسمت بالا عرقچینی از بارهای مثبت و در قسمت پایین هم به همین وضع بارهای منفی داریم. این بار، البته، بار سطحی مقید σ_b است.

در مسئله ۲-۱۸ میدان منطقه همپوش مابین دو کره یکنواخت باردار شده را حساب کردید:

پاسخ عبارت بود از

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{R^2}$$



شکل ۱۵-۴

که در آن q بار کلی کره مثبت و d برداری است از مرکز بار منفی به مرکز بار مثبت. حال می‌توانیم این میدان را برحسب قطبش کره یعنی $\mathbf{P} = q\mathbf{d} = (\frac{3}{4}\pi R^2)\mathbf{P}$ به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{3\epsilon_0}\mathbf{P}$$

برای نقاط خارج مانند این است که تمام بارهای هر کره در مرکز خودش جمع شده است. در این صورت یک دوقطبی داریم که پتانسیل آن برابر است با

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

(به خاطر داشته باشید که d کسر کوچکی از شعاع اتمی است؛ شکل ۱۵-۴ بسیار اغراق‌آمیز رسم شده است). این جوابها مسلماً با نتایج مثال ۲-۴ همخوانی دارند. ■

مسئله ۱۳-۴ یک استوانه بسیار طویل به شعاع a دارای یک قطبش یکنواخت \mathbf{P} عمود بر محور است. میدان الکتریکی داخل استوانه را بیابید. نشان دهید که میدان خارج از استوانه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{a^2}{4\epsilon_0 s^2} [\frac{3}{2}(\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{s}})\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{P}]$$

[توجه: گفته شد یکنواخت نه شعاعی!]

مسئله ۱۴-۴ وقتی یک دی‌الکتریک خنثی قطبیده می‌شود، بار کمی حرکت می‌کند، اما کل بار صفر باقی می‌ماند. این واقعیت را می‌توان به صورت بارهای مقید σ_b و ρ_b بیان کرد. با استفاده از معادله (۱۱-۴) و (۱۲-۴) ثابت کنید که بار مقید کل صفر است. □

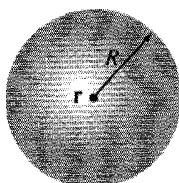
۳-۲-۴ میدان درون یک دی الکتریک

در بیان تفاوت بین دوقطبی "خالص" و دوقطبی "فیزیکی" چندان دقیق نبودیم. در بحث مربوط به نظریه بارهای مقید فرض آن بود که با دوقطبیهای خالص سروکار داریم — در واقع از معادله (۸-۴) شروع کردیم که فرمول پتانسیل مربوط به دوقطبی خالص است. با این حال، دی الکتریک قطبیده واقعی متشکل از دوقطبیهای فیزیکی بسیار بسیار کوچک است. افزون بر این دوقطبیهای مولکولی مجزا از هم را توسط تابع چگالی پیوسته P به کار بردیم. این شیوه را چگونه تصحیح کنیم؟ در بیرون از دی الکتریک مسئله‌ای خاص وجود ندارد: در اینجا از مولکول فاصله زیادی داریم (II) به مراتب از فاصله بین بارهای مثبت و منفی بزرگتر است)، بنابراین پتانسیل دوقطبی به طور کلی حاکم بوده و اثر "دانه‌ای" چشمه به علت فاصله زیاد ناچیز است. در درون دی الکتریک به سختی می‌توان از دوقطبیها فاصله زیادی داشت و روش به کار گرفته شده در بخش ۳-۲-۴ قابل بحث و انتقاد است.

در واقع وقتی با دقت به مسئله فکر می‌کنیم درمی‌یابیم که میدان الکتریکی واقعی در داخل ماده، در یک سطح میکروسکوپی، بسیار پیچیده است و در نزدیکی یک الکترون میدان عظیم است، در حالی که در یک فاصله کوچک از آن میدان ممکن است کوچک یا در جهتی کاملاً متفاوت با حالت قبل باشد. افزون بر این، اندک زمانی بعد، با حرکت اتمها میدان کاملاً تغییر می‌کند. محاسبه این میدان میکروسکوپی واقعی غیرممکن است و اگر هم می‌توانستیم آن را محاسبه کنیم جالب توجه نمی‌بود. همچنان که برای مقاصد ماکروسکوپی آب را شماره‌ای پیوسته در نظر می‌گیریم و از ساختار مولکولی آن بحثی نمی‌کنیم، می‌توانیم از تغییرات میکروسکوپی میدان الکتریکی در داخل ماده هم صرف نظر کنیم و فقط میدان ماکروسکوپی را مدنظر داشته باشیم. این میدان به صورت میدان میانگین برای مناطق به اندازه کافی بزرگ به گونه‌ای که در برگیرنده چندین هزار اتم باشد تعریف می‌شود (و بنابراین افت و خیزهای میکروسکوپی نامطلوب هموار می‌شوند)، در حالی که همین فاصله به اندازه‌ای کوچک است که مطمئن هستیم هر نوع تغییر بزرگی در میدان را از نظر دور نداشته‌ایم. (در عمل این گفته به معنی آن است که میانگین را برای مناطقی پس کوچکتر از ابعاد جسم باید در نظر بگیریم). به طور عادی، میدان ماکروسکوپی به میدانی گفته می‌شود که از دید مردم همان میدان داخل ماده است.^۱

آنچه باقی می‌ماند این است که نشان دهیم چیزی را که با روش بخش ۳-۲-۴ به دست می‌آوریم همان میدان ماکروسکوپی است. بحث پیچیده‌ای است، بنابراین با دقت به آن توجه کنید. فرض کنید می‌خواهیم میدان ماکروسکوپی را در نقطه I داخل دی الکتریک حساب کنیم

۱. اگر معرفی میدان ماکروسکوپی به نظرتان مشکوک می‌آید به یاد پیورید که شما هم دقیقاً همان میانگین میدان را با ملحوظ داشتن چگالی ماده منظور می‌کنید.



شکل ۴-۱۶

(شکل ۴-۱۶). معلوم است که باید میانگین میدانهای ماکروسکوپی را روی حجم مناسبی حساب کنیم. برای این منظور کره کوچکی به مرکز r رسم می‌کنیم که شعاعش حدوداً هزار برابر ابعاد مولکول باشد. در این صورت میدان ماکروسکوپی در نقطه r از دو قسمت تشکیل می‌شود: میدان میانگین کره ناشی از تمام بارهای خارج کره به علاوه میانگین میدان ناشی از بارهای داخلی کره:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{خارج}} + \mathbf{E}_{\text{داخل}}$$

در مسئله ۳-۱۴ (د) ثابت کردید که میدان میانگین حاصل از بارهای خارجی کره برابر با میدانی است که آنها در مرکز کره ایجاد می‌کنند. بنابراین $\mathbf{E}_{\text{خارج}}$ میدان ناشی از دو قطبیهی خارج کره در r است. این بارها به اندازه کافی دور هستند به گونه‌ای که می‌توان معادله (۴-۹) را به کار برد

$$V_{\text{خارج}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{خارج}} \frac{\hat{r} \cdot \mathbf{P}(r')}{r'^2} d\tau' \quad (۴-۱۷)$$

دوقطبیهای داخل کره خیلی نزدیک‌اند و نمی‌توان همین روش را برای آنها به کار برد. اما خوشبختانه آنچه ما نیاز داریم میدان میانگین آنهاست و آن هم [با استناد به معادله (۳-۱۰۵)] برابر است با

$$\mathbf{E}_{\text{داخل}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}}{R^2}$$

و این مقدار مستقل از نحوه توزیع بار در داخل کره است. تنها مقداری که میدان به آن بستگی دارد کل گشتاور دوقطبی، $\mathbf{p} = (4/3\pi R^3)\mathbf{P}$ است:

$$\mathbf{E}_{\text{داخل}} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (۴-۱۸)$$

حال با این فرض که کره به اندازه‌ای کوچک است که \mathbf{P} به طور قابل ملاحظه‌ای در داخل حجم آن تغییر نمی‌کند، جمله‌ای که از انتگرال (۴-۱۷) باقی می‌ماند متناظر با میدان مرکز کره

یکنواخت قطبیده است، یعنی $\mathbf{P} = (\frac{1}{3}\epsilon_0) - [معادله (۱۴-۴)]$. اما این دقیقاً همان چیزی است که از (۱۸-۴) نتیجه می‌شود؛ بنابراین میدان ماکروسکوپی با پتانسیل زیر توصیف می‌شود

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{r'^2} d\tau' \quad (۱۹-۴)$$

و این انتگرال روی کل حجم دی‌الکتریک گرفته می‌شود. بدیهی است که این معادله همان پتانسیلی است که در بخش ۴-۲ بدون اینکه بدانیم به‌کار بردیم، و میانگین میدان ماکروسکوپی را برای نقاط داخل دی‌الکتریک دقیقاً حساب کردیم.

شاید مجبور شده باشید دو بند آخری را دو سه مرتبه بخوانید و درباره آن فکر کنید. توجه کنید که تمام این بررسیها این واقعیت را نشان می‌دهد که میدان میانگین در هر کره (ناشی از بارهای داخل آن) همانند میدان در مرکز کره یکنواخت قطبیده‌ای است که همان گشتاور دوقطبی کل را دارا باشد و این گفته به معنی آن است که نحوه توزیع بار مهم نیست. هرگونه توزیعی را می‌توان با توزیعی یکنواخت از دوقطبیهای کامل جایگزین کرد مشروط بر آنکه تنها خواسته ما یافتن میدان ماکروسکوپی میانگین باشد. تا جایی که بحث میانگین‌گیری روی شکل کروی است میدان ماکروسکوپی قطعاً از شکل هندسی منطقه میانگین‌گیری مستقل است و این نتیجه را از جواب آخری (۱۹-۴) می‌بینیم. شاید بتوان همین نتیجه‌گیری را برای یک شکل مکعبی یا بیضوی یا اشکال دیگر هم تعمیم داد که محاسبات آن دشوارتر می‌شوند اما بحث و نتیجه‌گیری تفاوتی نمی‌کند.

۳-۴ جابه‌جایی الکتریکی

۱-۳-۴ قانون گاوس در حضور دی‌الکتریک

در بخش ۴-۲ دریافتیم که اثر قطبش تولید تجمع بار مقید $\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ در داخل دی‌الکتریک $\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ بر روی سطح آن است. میدان ناشی از قطبش هر محیط دقیقاً میدان این بار مقید است. حالا آمادگی آن را داریم که تمام اینها را با هم یک کاسه کنیم: میدان مربوط به بار مقید به علاوه میدان ناشی از هر چیز دیگر (که برای استفاده از کلمه‌های بهتر آن را بار آزاد می‌نامیم). بار آزاد می‌تواند الکترونهاي واقع بر سطح رسانا یا یونهاي فرو رفته در ماده دی‌الکتریک یا هر چیز دیگر باشد؛ به زبان دیگر هر نوع باری که نتیجه قطبش نباشد. بنابراین در داخل دی‌الکتریک چگالی بار کلی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\rho = \rho_b + \rho_f \quad (۲۰-۴)$$

و قانون گاوس می‌شود

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = \rho_b + \rho_f = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_f$$

که در اینجا \mathbf{E} میدان کل است و نه قسمتی از میدان که ناشی از قطبش است. بهتر است که دو جمله دیورژانس را با هم ترکیب کنیم

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f$$

عبارت داخل پرانتز را با \mathbf{D} نمایش داده

$$\boxed{\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}} \quad (۲۱-۴)$$

و آن را جابه‌جایی الکتریکی می‌نامیم. بنابراین قانون گاوس بر حسب \mathbf{D} می‌شود

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f} \quad (۲۲-۴)$$

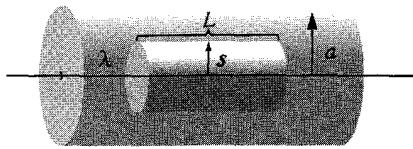
و یا به صورت انتگرالی زیر

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_f \text{ داخلی} \quad (۲۳-۴)$$

که داخلی Q_f عبارت است از بار آزاد کل در داخل حجم. این شیوه‌ای بسیار مفید برای بیان قانون گاوس وقتی با دی‌الکتریک سروکار داریم است، زیرا در آن صرفاً از بار آزاد صحبت می‌شود و بار آزاد هم قابل کنترل است. ببینیم بار مقید از کجا ناشی می‌شود: وقتی بارهای آزاد را در محلی قرار می‌دهیم بنابه سازوکار بخش ۴-۱ قطبش معینی ایجاد می‌شود. در یک مسئله نوعی، معمولاً ρ_f را می‌دانیم اما در آغاز از ρ_b اطلاعی نداریم؛ معادله (۲۳-۴) این امکان را می‌دهد که از اطلاعات موجود استفاده کنیم. به‌ویژه هنگامی که تقارن وجود دارد می‌توانیم بلافاصله \mathbf{D} را با استفاده از روش قانون گاوس حساب کنیم.

مثال ۴-۴

سیم طویل مستقیمی حامل بار خطی یکنواخت λ را عایقی لاستیکی تا شعاع a پوشانده است (شکل ۱۷-۴) جابه‌جایی الکتریکی را حساب کنید.



شکل ۱۷-۴

حل: با رسم یک سطح گاوسی استوانه‌ای به شعاع s و طول L و با اعمال (۲۳-۴) درمی‌یابیم

$$D(2\pi sL) = \lambda L$$

بنابراین

$$\mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi s} \hat{\mathbf{s}} \quad (24-4)$$

توجه کنید که این معادله هم برای داخل عایق و هم برای خارج از آن صادق است. در منطقهٔ اخیر داریم $\mathbf{P} = 0$ و بنابراین

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{\mathbf{s}} \quad s > a$$

در داخل عایق میدان الکتریکی را نمی‌توانیم حساب کنیم، زیرا در این مرحله اطلاعاتی از \mathbf{P} نداریم.

ممکن است به نظر برسد که در به‌دست آوردن معادلهٔ (۲۲-۴)، بار مقید سطحی σ_b را منظور نکرده‌ایم و به تعبیری هم این ادعا درست است. نمی‌توانیم قانون گاوس را دقیقاً روی سطح دی‌الکتریک اعمال کنیم زیرا در اینجا ρ_b عظیم است و دیورژانس \mathbf{E} نیز چنین است اما در هر کجای دیگر بررسی منطقه‌ای امکان‌پذیر است، و در واقع اگر برای گوشهٔ دی‌الکتریک ضخامت متناهی در نظر بگیریم که در داخل آن قطبش به سمت صفر میل می‌کند (احتمالاً الگویی واقعیتر از قطع ناگهانی)، آن‌گاه بار مقید سطحی σ_b وجود ندارد؛ ρ_b سریعاً اما به‌طور یکنواخت در داخل این "پوسته" تغییر می‌کند و قانون گاوس را به‌صورت دیفرانسیلی می‌توان برای هر کجا اعمال کرد. به هر صورت، شکل انتگرالی قانون یعنی معادلهٔ (۲۳-۴) از این "عیب" مبرا است.

مسئله ۱۵-۴ یک پوستهٔ کروی کلفت (شعاع داخلی a و خارجی b) با ماده‌ای دی‌الکتریک با

قطبش دائمی زیر پر شده است

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{k}{r} \hat{\mathbf{r}}$$

که در آن k یک ثابت و r فاصله از مرکز است (شکل ۱۸-۴). (در مسئله بار آزادی وجود ندارد).

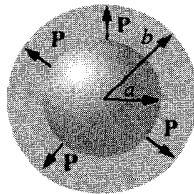
میدان الکتریکی را در هر سه منطقه با روشهای مختلف زیر حساب کنید:

(الف) محل بار مقید را تعیین و با استفاده از قانون گاوس [معادله (۲-۱۳)] میدان حاصل از

آن را حساب کنید.

(ب) معادله (۴-۲۳) را به‌کار برده \mathbf{D} را پیدا کنید و آن‌گاه \mathbf{E} را از روی (۴-۲۱) به‌دست آورید.

[توجه کنید که روش دوم بسیار سریع‌تر بوده و به بررسی بار آزاد در آن نیازی نیست.]

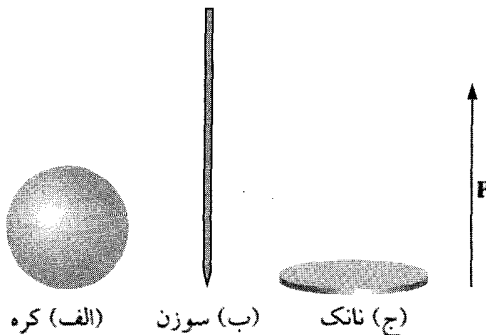


شکل ۱۸-۴

مسئله ۱۶-۴ میدان داخل یک قطعه دی‌الکتریک بزرگ را \mathbf{E}_0 بگیرید به طوری که

$$\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 + \mathbf{P}$$

(الف) حال یک کاواک کروی کوچک در ماده ایجاد می‌کنیم (شکل ۱۹-۴ الف). میدان در



شکل ۱۹-۴

مرکز کاواک را بر حسب \mathbf{E} و \mathbf{P} بیابید. همچنین جابه‌جایی میدان را در مرکز این حفره بر حسب \mathbf{D} و \mathbf{P} پیدا کنید.

(ب) همان محاسبات را برای کاواکی طویل و سوزنی شکل که به موازات \mathbf{P} است تکرار کنید (شکل ۴-۱۹ ب).

(ج) همان محاسبات را برای کاواکی به شکل قرصی نازک که عمود بر \mathbf{P} است انجام دهید (شکل ۴-۱۹ ج). فرض کنید کاواکها به اندازه کافی کوچک‌اند به گونه‌ای که \mathbf{P} ، \mathbf{E} و \mathbf{D} الزاماً یکنواخت باقی می‌مانند. (راهنمایی: جدا کردن یک کاواک همان اثر را دارد که جسمی به همان شکل کاواک با قطبش مخالف اضافه کنیم). □

۴-۳-۲ مشابهت گمراه‌کننده

معادله (۴-۲۲) کاملاً شبیه قانون گاوس است و در آن تنها به جای چگالی بار کلی ρ ، چگالی بار آزاد ρ_f قرار گرفته است و به جای \mathbf{E} ، \mathbf{D} جایگزین شده است. به این دلیل به نظر می‌رسد که \mathbf{D} همانند \mathbf{E} است (صرف‌نظر از ضریب ϵ_0 آن) با این تفاوت که منشأ آن ρ_f است و نه ρ . به عبارت دیگر در حل مسائلی که در آنها دی‌الکتریک وجود دارد بار مقید را فراموش کرده و میدان را به شکل معمولی محاسبه می‌کنیم اما به جای آنکه \mathbf{E} را بیابیم \mathbf{D} محاسبه می‌شود. این بحث و استدلال گمراه‌کننده و غلط است زیرا برای \mathbf{D} "قانون کولن" وجود ندارد

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) \neq \frac{1}{4\pi} \int \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \rho_f(\mathbf{r}') d\tau'$$

شبهت میان \mathbf{E} و \mathbf{D} ظریفتر از اینهاست.

دلیل این ادعا آن است که دیورژانس به تنهایی برای تعیین میدان برداری ناکافی است؛ برای این منظور اطلاع از تانژنت ضروری است. در مورد الکتروستاتیک به دلیل آنکه تانژنت \mathbf{E} همواره صفر است فراموشی این نکته مهم نیست. اما تانژنت \mathbf{D} همواره صفر نیست

$$\nabla \times \mathbf{D} = \epsilon_0 (\nabla \times \mathbf{E}) + (\nabla \times \mathbf{P}) = \nabla \times \mathbf{P} \quad (۴-۲۵)$$

و در حالت کلی دلیلی برای پذیرش این باور که تانژنت \mathbf{P} همواره صفر است وجود ندارد. در مواردی مانند مثال ۴-۴ و مسئله ۴-۱۵ این تانژنت صفر است، اما در بیشتر موارد چنین نیست. مثلاً الکتروت میله‌ای مسئله ۴-۱۱ نمونه‌ای برای صفر نبودن تانژنت است. در این مثال بار آزادی در هیچ جا وجود ندارد. بنابراین اگر واقعاً بر این باور باشیم که تنها چشمه موجد \mathbf{D} بار آزاد، ρ_f است مجبوریم نتیجه بگیریم که \mathbf{D} در همه جا صفر است و از این رو میدان داخلی الکتروت برابر با $\mathbf{P} = (-1/\epsilon_0) \mathbf{E}$

و میدان در خارج آن مساوی $\mathbf{E} = 0$ است که کاملاً نتیجه‌گیری غلط است. (بررسی اینکه در این مسئله کجا $\nabla \times \mathbf{P} \neq 0$ است به خواننده واگذار می‌شود). چون $\nabla \times \mathbf{D} \neq 0$ است و به علاوه \mathbf{D} را نمی‌توان به صورت گرادیان یک کمیت عددی بیان کرد — برای \mathbf{D} "پتانسیل" وجود ندارد. هشتاد: وقتی محاسبه جابه‌جایی الکتریکی را از شما می‌خواهند، نخست به دنبال تقارن بگردید. در صورتی که مسئله حاوی تقارن کروی، استوانه‌ای طویل یا صفحه‌ای باشد \mathbf{D} را می‌توانید مستقیماً با استفاده از (۴-۲۳) و با استفاده از روش گاوس بیابید. (بدیهی است در چنین مواردی $\nabla \times \mathbf{P}$ صفر است. چون تقارن به تنهایی جواب را تعیین می‌کند مجبور نیستید دربارهٔ ناو نگران باشید.) در صورتی که این تقارن موجود نباشد باید به راه‌حل دیگری بیندیشید و به خصوص توجه کنید که \mathbf{D} را به کمک بار آزاد نمی‌توانید به دست آورید.

۳-۳-۴ شرایط مرزی

شرایط مرزی الکتروستاتیکی بخش ۲-۳-۵ را می‌توان برای مؤلفه‌های \mathbf{D} نیز محاسبه کرد. طبق معادله (۴-۲۳)، ناپوستگی در مؤلفه عمودی یک سطح به صورت زیر است

$$D_{\text{بالا}}^{\perp} - D_{\text{پایین}}^{\perp} = \sigma_f \quad (۴-۲۶)$$

از معادله (۴-۲۵) نیز ناپوستگی در مؤلفه موازی را خواهیم داشت

$$D_{\text{بالا}}^{\parallel} - D_{\text{پایین}}^{\parallel} = P_{\text{بالا}}^{\parallel} - P_{\text{پایین}}^{\parallel} \quad (۴-۲۷)$$

در حضور دی‌الکتریکها این معادلات سودمندتر از شرایط مرزی \mathbf{E} هستند [معادلات (۲-۳۱) و (۲-۲۳)]

$$E_{\text{بالا}}^{\perp} - E_{\text{پایین}}^{\perp} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \quad (۴-۲۸)$$

و

$$\mathbf{E}_{\text{بالا}}^{\parallel} - \mathbf{E}_{\text{پایین}}^{\parallel} = 0 \quad (۴-۲۹)$$

باید سعی کنید این معادلات را به‌کار ببرید، به‌عنوان مثال برای حل مسئله‌های ۴-۱۶ و ۴-۱۷.

مسئله ۴-۱۷ برای مسئله ۴-۱۱ سه نمودار دقیق از \mathbf{P} ، \mathbf{E} و \mathbf{D} رسم کنید. L را تقریباً $2a$ در نظر بگیرید [راهنمایی: خطوط \mathbf{E} بر روی بارها خاتمه می‌یابند و خطوط \mathbf{D} بر روی بارهای آزاد].

۴-۴ دی‌الکتریکهای خطی

۴-۴-۱ پذیرفتاری الکتریکی، گذردهی الکتریکی، ثابت دی‌الکتریک

در بخشهای ۴-۲ و ۴-۳ دلیل وجود قطبش، P ، را بررسی نکردیم و تنها آثار قطبش را مطالعه کردیم. با توجه به بحث کیفی بخش ۴-۱ می‌دانیم که قطبش یک دی‌الکتریک ناشی از میدان الکتریکی است که دو قطبهای اتمی یا مولکولی را ردیف می‌کند. در واقع برای بسیاری از مواد قطبش با میدان (به شرط آنکه میدان خیلی قوی نباشد) متناسب است:

$$P = \epsilon_0 \chi_e E \quad (۳۰-۴)$$

ثابت این تناسب، χ_e ، را پذیرفتاری الکتریکی محیط می‌نامیم (نقش ϵ_0 برای آن بوده است که χ_e ضریب بدون بعدی باشد). مقدار χ_e به ساختار میکروسکوپی ماده مورد بحث بستگی دارد. موادی را که از معادله (۳۰-۴) تبعیت می‌کنند دی‌الکتریکهای خطی می‌نامیم.^۱

توجه کنید که E در (۳۰-۴) میدان کل است؛ بخشی از آن ناشی از بارهای آزاد و قسمتی هم مربوط به قطبش است. هرگاه مثلاً قطعه‌ای دی‌الکتریک را در یک میدان خارجی E قرار دهیم، نمی‌توانیم P را مستقیماً از (۳۰-۴) به‌دست آوریم؛ میدان خارجی ماده را قطبیده می‌کند و این قطبش میدان مربوط به خودش را ایجاد می‌کند که در میدان کل سهیم است و این میدان هم به‌نوبه خود قطبش را تعدیل می‌کند و ... خروج از این سیر قهقراپی نامتناهی همیشه آسان نیست. به‌زودی مثالهایی در این باره خواهید دید. ساده‌ترین رهیافت آن است که با جابه‌جایی شروع کنیم، حداقل در مواردی که D را می‌توان مستقیماً از توزیع بار آزاد نتیجه گرفت. در محیطهای خطی داریم

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi_e E = \epsilon_0 (1 + \chi_e) E \quad (۳۱-۴)$$

بنابراین نه تنها P با E متناسب است، بلکه D هم با آن متناسب است

$$P = \epsilon E \quad (۳۲-۴)$$

۱. در کاربردهای نوین اَبِتیک، به‌ویژه، مواد غیرخطی به‌گونه‌ای فزاینده اهمیت یافته‌اند. از این رو، جمله دومی هم در فرمول P به‌صورت تابعی از E ، نوعاً به‌صورت مکعبی وجود دارد. در حالت کلی، معادله (۳۰-۴) را می‌توان به‌عنوان جمله اول (غیرصفر) در بسط تیلور P برحسب توانهای E در نظر گرفت.

به طوری که

$$\epsilon \equiv \epsilon_0 (1 + \chi_e) \quad (۳۳-۴)$$

ϵ را گذردهی الکتريکی ماده می‌نامند. در خلأ که ماده‌ای برای قطبش وجود ندارد پذیرفتاری صفر و گذردهی الکتريکی همان ϵ_0 است. به این دلیل است که ϵ_0 را گذردهی الکتريکی فضای آزاد می‌نامند. (این نامگذاری تعبیر مناسبی نیست زیرا به معنی آن است که خلأ تنها نوع خاصی از دی‌الکتريک خطی است که در آن گذردهی الکتريکی مقدار $C^2/N \cdot m^2 \times 10^{-12}$ را 8.85×10^{-12} دارد.) اگر از ضریب ϵ_0 صرف‌نظر کنیم، کمیت بدون بعد باقیمانده

$$\epsilon_r \equiv 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (۳۴-۴)$$

را گذردهی نسبی یا ثابت دی‌الکتريک می‌نامند. ثابت دی‌الکتريک بعضی مواد در جدول ۲-۴ فهرست شده‌اند. بدیهی است گذردهی الکتريکی و ثابت دی‌الکتريک اطلاعات تازه‌تر از آنچه پذیرفتاری به ما می‌داد در بر ندارد، همچنین چیزی الزاماً تازه در معادله (۳۲-۴) وجود ندارد. تمام فیزیک دی‌الکتريکهای خطی در معادله (۳۰-۴) قرار دارد.^۱

جدول ۲-۴ ثابتهای دی‌الکتريک (مقادیر برای فشار اتمسفر و دمای $20^\circ C$ داده شده‌اند مگر وقتی که غیر از این ذکر شده باشد)

ماده	ثابت دی‌الکتريک	ماده	ثابت دی‌الکتريک
خلأ	۱	بنزن	۲٫۲۸
هلیوم	۱٫۰۰۰۰۶۵	الماس	۵٫۷
نتون	۱٫۰۰۰۰۱۳	نمک	۵٫۹
هیدروژن	۱٫۰۰۰۰۲۵	سیلیسیم	۱۱٫۸
آرگون	۱٫۰۰۰۰۵۲	متانول	۳۳٫۰
هوا (خشک)	۱٫۰۰۰۰۵۴	آب	۸۰٫۱
نیتروژن	۱٫۰۰۰۰۵۵	یخ ($-30^\circ C$)	۹۹
بخار آب ($100^\circ C$)	۱٫۰۰۰۵۸۷	$KTaNbO_3$ ($0^\circ C$)	۳۴۰۰۰

۱. درباره این اصطلاح و نمادگذاری غیرضروری یادآور می‌شویم که معادلات **D** برحسب مؤلفه‌های **E** [معادله (۳۲-۴)] در مورد دی‌الکتريکهای خطی [معادلات ساختمندی نامیده می‌شوند.

مثال ۵-۴

کره‌ای فلزی به شعاع a حامل بار Q است (شکل ۴-۲۰). بر روی این کره تا شعاع b یک ماده دی‌الکتریک خطی با گذردهی الکتریکی ϵ قرار دارد. پتانسیل مرکز کره را (نسبت به بینهایت) به دست آورید.

حل: برای محاسبه V به E نیاز داریم، برای محاسبه E هم باید بار مقید را مشخص کنیم. بار مقید را از روی P حساب می‌کنیم. اما محاسبه P هم منوط به دانستن E است. [معادله (۴-۳۰)]. آنچه را که ما می‌دانیم بار آزاد Q است، و خوشبختانه با توجه به تقارن کروی می‌توانیم D را با استفاده از (۴-۲۳) محاسبه کنیم

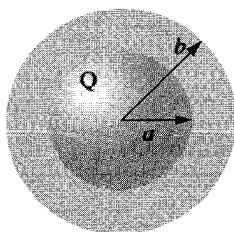
$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad r > a$$

(بديهی است در داخل کره فلزی $E = P = D = 0$ است.) با دانستن D محاسبه E هم با توجه به معادله (۴-۳۲) امکان‌پذیر می‌شود

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}} & a < r < b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} & r > b \end{cases}$$

بنابراین پتانسیل در مرکز کره می‌شود

$$\begin{aligned} V &= -\int_{\infty}^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\infty}^b \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dr - \int_b^a \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \right) dr - \int_a^0 (0) dr \\ &= \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{\epsilon a} - \frac{1}{\epsilon b} \right) \end{aligned}$$



شکل ۴-۲۰

همچنان‌که دیدیم نیازی به محاسبه صریح قطبش یا بار مقید وجود نداشت، اگرچه اینها را به‌سادگی می‌توان حساب کرد

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \frac{\varepsilon_0 \chi_e Q}{4\pi \varepsilon r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

و

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$$

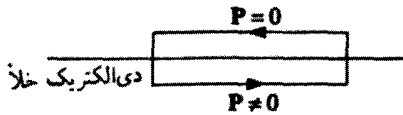
اما چگالی سطحی برابر است با

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0 \chi_e Q}{4\pi \varepsilon b^2} & \text{در سطح خارجی} \\ -\frac{\varepsilon_0 \chi_e Q}{4\pi \varepsilon a^2} & \text{در سطح داخلی} \end{cases}$$

توجه کنید که بار مقید سطحی در a منفی است ($\hat{\mathbf{n}}$ نسبت به دی‌الکتریک به سمت بیرون است، مقدار آن برابر است با $+\hat{\mathbf{r}}$ در b اما $-\hat{\mathbf{r}}$ در a). این امر طبیعی است زیرا بار روی کره فلزی، بار مخالف خود را از تمام مولکولهای دی‌الکتریک جذب می‌کند. این لایه بار منفی است که در داخل دی‌الکتریک میدان را از $\hat{\mathbf{r}}$ $(Q/r^2)/4\pi\varepsilon_0$ به $\hat{\mathbf{r}}$ $(Q/r^2)/4\pi\varepsilon$ تقلیل می‌دهد. از این نظریک دی‌الکتریک تا حدی همانند یک رسانای ناکامل است: روی یک پوسته رسانا بار سطحی القایی به‌گونه‌ای است که میدان حاصل از Q را در ناحیه $a < r < b$ کاملاً خنثی می‌کند؛ دی‌الکتریک بهترین کار خود را می‌کند، اما این خنثی شدن جزئی است. ■

ممکن است این تصور برای شما ایجاد شده باشد که دی‌الکتریکی‌های خطی از عیب شباهت \mathbf{D} و \mathbf{E} میرا هستند. از آنجایی که \mathbf{P} و \mathbf{D} با \mathbf{E} متناسب هستند آیا نمی‌توان نتیجه گرفت که تاو آنها همانند تاو \mathbf{E} باید صفر شوند؟ متأسفانه، چنین نیست، زیرا انتگرال خطی \mathbf{P} بر روی مسیر بسته‌ای که مرز بین یک نوع ماده با نوع دیگر را مشخص می‌کند الزاماً صفر نیست، گرچه انتگرال خطی \mathbf{E} روی همان مسیر باید صفر باشد. دلیل این امر متفاوت بودن عامل تناسب $\varepsilon_0 \chi_e$ در دو طرف است. به‌عنوان مثال در حد فاصل بین دی‌الکتریک قطبیده و خلأ (شکل ۴-۲۱)، \mathbf{P} در یک سمت صفر است اما در طرف دیگر نیست. چون دور این حلقه $\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$ است و از این رو بنابه قضیه استوکس تاو \mathbf{P} در همه جای داخل حلقه صفر نمی‌شود (در واقع، در مرز نامتناهی است). بدیهی است اگر فضا کاملاً از یک دی‌الکتریک خطی همگن^۱ پر شده باشد، این ایراد منتفی

۱. محیط همگن محیطی است که خواص آن (در اینجا منظور پذیرفتاری دی‌الکتریک است) نسبت مکان تغییر نکند.



شکل ۴-۲۱

است؛ در این شرایط نسبتاً خاص

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad \text{و} \quad \nabla \times \mathbf{D} = 0$$

بنابراین \mathbf{D} را می‌توان از روی بار آزاد به همان روشی پیدا کرد که در نبود دی الکتریک به دست می‌آمد

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{خلأ}}$$

که در آن $\mathbf{E}_{\text{خلأ}}$ میدان حاصل از همان توزیع بار آزاد در غیاب هر نوع دی الکتریک است، بنابه (۳۲-۴) و (۳۴-۴) داریم

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} = \frac{1}{\epsilon_r} \mathbf{E}_{\text{خلأ}} \quad (۳۵-۴)$$

نتیجه: زمانی که تمام فضا با یک دی الکتریک خطی همگن پر شده باشد میدان در هر نقطه به نسبت یک روی ثابت دی الکتریک کوچک می‌شود (در حقیقت، نیازی نیست که دی الکتریک تمام فضا را پر کرده باشد؛ در مناطقی که به هر حال میدان صفر است اهمیت زیادی ندارد دی الکتریک را اضافه کنیم یا نه، زیرا در هر صورت قطبشی وجود ندارد).

به‌عنوان مثال، اگر بار آزاد q در یک دی الکتریک بزرگ قرار داده شود، میدان حاصل از این

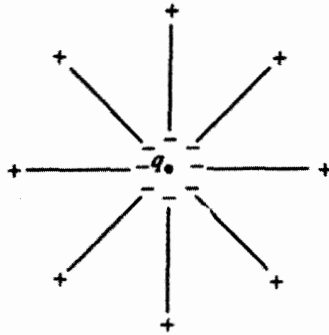
بار برابر است با

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (۳۶-۴)$$

(توجه کنید که ϵ نه ϵ_0)، بنابراین نیرویی که به بارهای اطراف خود وارد می‌سازد کاهش می‌یابد. اما این مسئله هیچ مغایرتی با قانون کولن ندارد، بلکه قطبش جزئی محیط با احاطه کردن بار به وسیله

بارهای مقید با علامت مخالف باعث حفاظت آن می‌شود (شکل ۴-۲۲).^۱

۱. در الکتروستاتیک کوانتومی خلأ می‌تواند قطبیده شود و این بدان معناست که بار مؤثر (باز-بهنجار) الکترون که آن را در آزمایشگاه اندازه‌گیری می‌کنند، مقدار واقعی آن نیست و در حقیقت به فاصله شما از بار بستگی دارد.



شکل ۲۲-۴

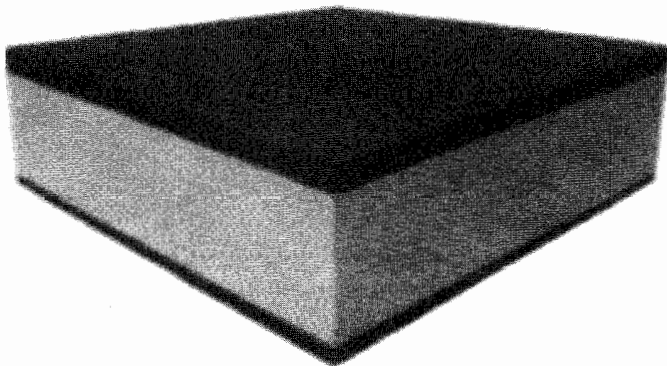
مثال ۶-۴

خازن تخت موازی شکل ۲۳-۴ را با ماده‌ای عایق با ثابت دی‌الکتریک ϵ_r پر می‌کنیم. ظرفیت خازن چقدر تغییر می‌کند؟

حل: چون میدان فقط در بین صفحات وجود دارد، تأثیر وجودی دی‌الکتریک کاستن \mathbf{E} و اختلاف پتانسیل V به میزان $1/\epsilon_r$ است. بنابراین ظرفیت $C = Q/V$ به همان میزان ثابت دی‌الکتریک افزایش می‌یابد:

$$C = \epsilon_r C' \quad (۳۷-۴)$$

این در واقع روش عمومی و کارساز برای افزایش ظرفیت خازن است.



دی‌الکتریک ←

شکل ۲۳-۴

در یک بلور معمولاً قطبش در بعضی جهتها ساده‌تر از بقیه است^۱ و در این مورد به جای (۳۰-۴) معادله خطی عمومیت‌ر زیر برقرار است

$$\begin{cases} P_x = \varepsilon_0 (\chi_{e_{xx}} E_x + \chi_{e_{xy}} E_y + \chi_{e_{xz}} E_z) \\ P_y = \varepsilon_0 (\chi_{e_{yx}} E_x + \chi_{e_{yy}} E_y + \chi_{e_{yz}} E_z) \\ P_z = \varepsilon_0 (\chi_{e_{zx}} E_x + \chi_{e_{zy}} E_y + \chi_{e_{zz}} E_z) \end{cases} \quad (38-4)$$

همان‌طور که معادله (۳-۴) جایگزین معادله (۱-۴) برای مولکولهای غیرمتقارن شد. نه ضریب $\chi_{e_{xy}}$ ، $\chi_{e_{yx}}$ و غیره تانسور گذردهی را تشکیل می‌دهند.

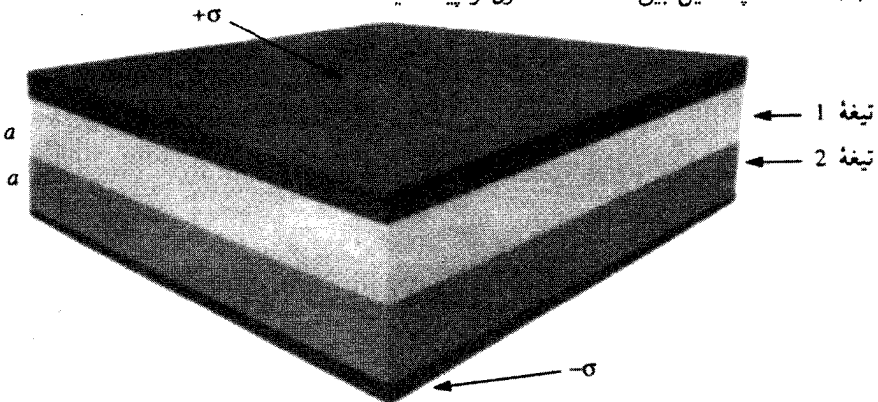
مسئله ۱۸-۴ فضای بین صفحات خازن تخت شکل ۴-۲۴ با دو تیغه از مواد دی‌الکتریک خطی پر شده است. ضخامت هر دی‌الکتریک a و بنابراین ضخامت کل $2a$ است. ثابتهای دی‌الکتریکها به ترتیب ۲ و ۱٫۵ و چگالی سطحی بار آزاد صفحات هم $\pm\sigma$ است.

(الف) جابه‌جایی الکتریکی D هر تیغه را پیدا کنید.

(ب) میدان الکتریکی E در هر تیغه را بیابید.

(ج) قطبش P هر تیغه را به دست آورید.

(د) اختلاف پتانسیل بین صفحات خازن را پیدا کنید.



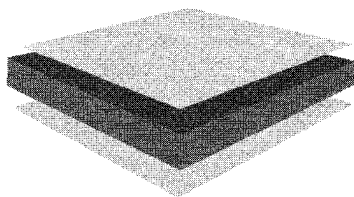
شکل ۴-۲۴

۱. محیطی را همسانگرد می‌نامند که خواص آن (مانند گذردهی) در تمام راستاها یکی باشد. از این رو معادله (۳۰-۴) حالت خاصی از معادله (۲۸-۴) است که برای محیطهای همسانگرد صادق است. فیزیکدانها مایل به کاربرد زبان ساده‌اند، و جز برای حالاتی که شکل دیگری گفته شده باشد از جمله "دی‌الکتریک خطی" منظورشان مسلماً "دی‌الکتریک خطی همسانگرد" است و این هم احتمالاً به معنی "دی‌الکتریک خطی همسانگرد همگن" است.

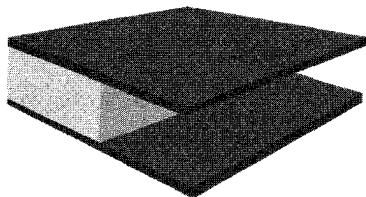
(ه) مقدار و محل همه بارهای مقید را پیدا کنید.

(و) حال که مقدار بارهای آزاد و مقید را می‌دانید مجدداً میدان را در هر تیغه به دست آورده و با نتیجه جواب (ب) مقایسه کنید.

مسئله ۴-۱۹ فرض کنید مقدار یک ماده دی‌الکتریک خطی با ثابت ϵ_r به اندازه‌ای باشد که نصف فضای بین صفحات یک خازن تخت را پر کند (شکل ۴-۲۵). ظرفیت خازن وقتی که توزیع ماده دی‌الکتریک مانند شکل ۴-۲۵ (الف) باشد به چه نسبتی افزایش می‌یابد؟ برای توزیع نظیر شکل ۴-۲۵ (ب) پاسخ چیست؟ به ازای اختلاف پتانسیل معین V بین این صفحات، E ، D و P را در هر ناحیه به دست آورید و بار آزاد و مقید روی تمام سطوح را در هر دو حالت بیابید.



(الف)

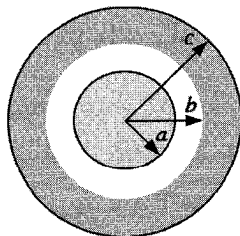


(ب)

شکل ۴-۲۵

مسئله ۴-۲۰ در یک ماده دی‌الکتریک خطی کروی شکل، یک بار آزاد یکنواخت با چگالی ρ قرار می‌دهند. پتانسیل مرکز کره را نسبت به بینهایت پیدا کنید. شعاع کره را R و ثابت دی‌الکتریک را ϵ_r بگیرید.

مسئله ۴-۲۱ یک کابل هم‌محور مسی به شعاع a توسط لوله‌ای مسی به شعاع c احاطه شده است (شکل ۴-۲۶). فضای بین این دو رسانا توسط دی‌الکتریکی با ثابت ϵ_r پر شده است. ظرفیت واحد طول این کابل را پیدا کنید.



شکل ۴-۲۶

۲-۴-۴ مسائل مقدار مرزی با دی الکتریکهای خطی

در دی الکتریک خطی همگن چگالی بار مقید (ρ_b) با چگالی بار آزاد (ρ_f) متناسب است.^۱

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\chi_e}{\epsilon} \mathbf{D} \right) = - \left(\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \right) \rho_f \quad (۳۹-۴)$$

به‌ویژه، بجز در مواردی که بار آزاد در ماده قرار داده شده است، $\rho = 0$ است و بارهای خالص باید روی سطح ماده جمع شوند، در چنین دی الکتریکی پتانسیل از معادله لاپلاس پیروی می‌کند و می‌توان تمام محاسبات بخش ۳ را به‌کار برد. با این وجود بهتر است شرایط مرزی مربوط به بار آزاد را دوباره بنویسیم. از معادله (۲۶-۴) داریم

$$\epsilon_{\text{بایین}} E_{\text{بایین}}^{\perp} - \epsilon_{\text{بالا}} E_{\text{بالا}}^{\perp} = \sigma_f \quad (۴۰-۴)$$

یا (برحسب پتانسیل)

$$\epsilon_{\text{بالا}} \frac{\partial V_{\text{بالا}}}{\partial n} - \epsilon_{\text{بایین}} \frac{\partial V_{\text{بایین}}}{\partial n} = -\sigma_f \quad (۴۱-۴)$$

در صورتی که خود پتانسیل طبق معادله (۳۴-۲) پیوسته است

$$V_{\text{بالا}} = V_{\text{بایین}} \quad (۴۲-۴)$$

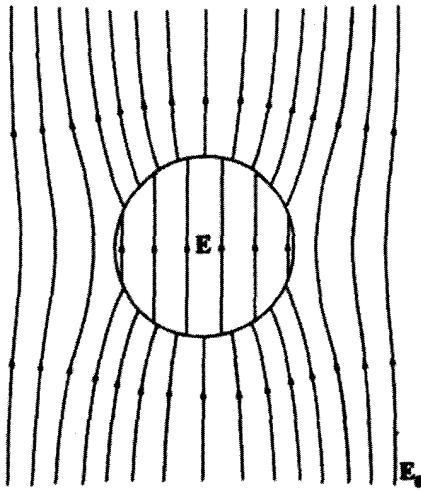
مثال ۷-۴

کره‌ای از یک ماده دی الکتریک خطی همگن را در یک میدان در آغاز یکنواخت \mathbf{E}_0 قرار می‌دهیم (شکل ۴-۲۷). میدان الکتریکی داخل کره را به‌دست آورید.

حل: این مسئله یادآور مثال ۳-۸ است که در آن یک کره رسانای بدون بار در داخل میدانی یکنواخت قرار می‌گرفت. در آن مثال میدان بار القایی \mathbf{E}_0 را در داخل کره کاملاً خنثی می‌کرد؛ در مورد دی الکتریک، خنثی شدن ناشی از بار مقید تا حدودی اتفاق می‌افتد.

مسئله ما حل معادله لاپلاس است برای $V_{\text{داخل}}(r, \theta)$ برای $r \leq R$ و $V_{\text{خارج}}(r, \theta)$ برای

۱. این در مورد بار سطحی (σ_b) به‌کار نمی‌رود، زیرا χ_e در مرز (به‌وضوح) مستقل از مکان نیست.



شکل ۲۷-۴

با اعمال شرایط مرزی $r \geq R$

$$\left\{ \begin{array}{ll} V_{\text{داخل}} = V_{\text{خارج}} & \text{در } r = R \quad (۱) \\ \varepsilon \frac{\partial V_{\text{داخل}}}{\partial r} = \varepsilon_0 \frac{\partial V_{\text{خارج}}}{\partial r} & \text{در } r = R \quad (۲) \quad (۴۳-۴) \\ V_{\text{خارج}} \rightarrow -E_0 r \cos \theta & \text{برای } r \gg R \quad (۳) \end{array} \right.$$

دومین شرط از معادله (۴۱-۴) با توجه به اینکه هیچ بار آزادی روی سطح قرار ندارد به دست آمده است. در داخل کره، با توجه به معادله (۶۵-۳) داریم

$$V_{\text{داخل}}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (۴۴-۴)$$

در خارج کره با استفاده از شرط (۳) داریم

$$V_{\text{خارج}}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (۴۵-۴)$$

شرط (۱) ایجاب می‌کند که

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = -E_0 R \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

بنابراین^۱

$$\begin{cases} A_l R^l = \frac{B_l}{R^{l+1}} & \text{برای } l \neq 1 \\ A_1 R = -E_0 R + \frac{B_1}{R^2} \end{cases} \quad (46-4)$$

از شرط (۲) به دست می‌آوریم

$$\epsilon_r \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = -E_0 \cos \theta - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta)$$

در نتیجه

$$\begin{cases} \epsilon_r l A_l R^{l-1} = -\frac{(l+1)B_l}{R^{l+2}} & \text{برای } l \neq 1 \\ \epsilon_r A_1 = -E_0 - \frac{2B_1}{R^2} \end{cases} \quad (47-4)$$

در نتیجه داریم

$$\begin{cases} A_l = B_l = 0 & \text{برای } l \neq 1 \\ A_1 = -\frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0, \quad B_1 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} R^2 E_0 \end{cases} \quad (48-4)$$

بدیهی است که

$$V_{\text{داخل}}(r, \theta) = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} r \cos \theta = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} z$$

۱. به خاطر داشته باشید که $P_l(\cos \theta) = \cos \theta$ و ضرایب برای هر l باید مساوی باشند، و این را می‌توانید با ضرب کردن در $P_l(\cos \theta) \sin \theta$ و انتگرال‌گیری از 0 تا π و بهره‌گیری از شرط متعام بودن چندجمله‌ایهای لژاندر [معادله (۶۸-۳)] ثابت کنید.

و در نتیجه میدان داخل کره (به طور غیرمنتظره) یکنواخت است

$$\mathbf{E} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_0 \quad (۴۹-۴)$$

مثال ۸-۴

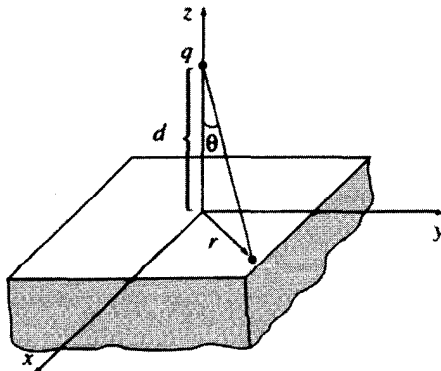
فرض کنید تمام منطقه زیر صفحه $z = 0$ در شکل ۲۸-۴ با ماده دی الکتریک خطی و یکنواختی به پذیرفتاری χ_e پر شده باشد. نیروی وارد بر بار نقطه‌ای q واقع در فاصله d بالای منطقه را پیدا کنید.

حل: بار مقید سطحی واقع بر صفحه xy مساوی و مخالف q است و بنابراین نیرو جاذبه است. [با توجه به معادله (۴-۳۹) بار مقید حجمی وجود ندارد.] نخست با استفاده از (۴-۱۱) و (۴-۳۰) مقدار σ_b را حساب می‌کنیم

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = P_z = \epsilon_0 \chi_e E_z$$

که در آن E_z مؤلفه z میدان کل در داخل دی الکتریک در $z = 0$ است. بخشی از این میدان از q ناشی می‌شود و بخشی هم از بار مقید. با توجه به قانون کولن بخش اول برابر است با

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r^2 + d^2)} \cos\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{(r^2 + d^2)^{3/2}}$$



شکل ۲۸-۴

که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ فاصله از مبدأست. مؤلفه z میدان بار مقید هم برابر است با $-\sigma_b / 2\epsilon_0$ (پانوشت صفحه ۱۱۹ را ببینید). بنابراین

$$\sigma_b = \epsilon_0 \chi_e \left[-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{(r^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{\sigma_b}{2\epsilon_0} \right]$$

و σ_b هم می‌شود:

$$\sigma_b = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\chi_e}{\chi_e + 2} \right) \frac{qd}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \quad (50-4)$$

صرف نظر از ضریب $\chi_e / (\chi_e + 2)$ این جواب کاملاً مشابه بار القایی یک صفحه رسانای نامتناهی با در نظر گرفتن وضعیتی مشابه است [معادله (۳-۱۰)]. بدیهی است که بار مقید کلی برابر است با

$$q_b = -\left(\frac{\chi_e}{\chi_e + 2} \right) q \quad (51-4)$$

بدیهی است که میدان σ_b را می‌توانستیم مستقیماً از طریق انتگرال‌گیری زیر حساب کنیم

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) \sigma_b da$$

اما همانند مورد صفحه رسانا یک راه‌حل زیباتر با استفاده از روش تصویری وجود دارد. در واقع اگر به‌جای دی‌الکتریک یک تک بار نقطه‌ای q_b را در محل تصویر $(0, 0, -d)$ قرار دهیم برای منطقه $z > 0$ داریم

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{q_b}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right] \quad (52-4)$$

ضمناً یک بار $(q + q_b)$ در نقطه $(0, 0, d)$ پتانسیل زیر را در منطقه $z < 0$ تولید می‌کند

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q + q_b}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} \right] \quad (53-4)$$

۱. بنا به اهدافی، یک رسانا را می‌توان حالت حدی یک دی‌الکتریک خطی در نظر گرفت که در آن $\chi_e \rightarrow \infty$. این را می‌توان برای چک کردن استفاده کرد. سعی کنید آن را برای مثالهای ۴-۵، ۴-۶ و ۴-۷ به‌کار برید.

در مجموع، معادله‌های (۵۲-۴) و (۵۳-۴) تابعی می‌سازند که در معادله پواسون برای بار نقطه‌ای q واقع در $(0, 0, d)$ صدق می‌کند، در بینهایت صفر می‌شود و در مرز $z = 0$ پیوسته است و مشتق عمومی آن نشان‌دهنده یک ناپیوستگی متناظر با یک بار سطحی σ_b در $z = 0$ است

$$-\varepsilon_0 \left(\left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0^+} - \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0^-} \right) = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\chi_e}{\chi_e + 2} \right) \frac{qd}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}$$

و این، پتانسیل صحیح مسئله مورد نظر ماست. نیروی وارد بر q هم برابر است با

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_b}{(2d)^2} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{\chi_e}{\chi_e + 2} \right) \frac{q^2}{4d^2} \hat{\mathbf{z}} \quad (54-4)$$

با معادلات (۵۲-۴) و (۵۳-۴) انگیزش جدیدی ایجاد نکرده‌ایم — همانند هر راه‌حل به روش تصویر این یکی اعتبار خود را مدیون کارکرد درست آن است: معادله پواسون را حل می‌کند و شرایط مرزی را در نظر می‌گیرد. با وجود این کشف یک راه‌حل تصویری موضوعی کاملاً حدسی نیست. حداقل دو «قاعده بازی» وجود دارند: (۱) هیچ‌گاه نباید یک بار تصویری را در منطقه‌ای که پتانسیل را حساب می‌کنید قرار دهید. [از این رو معادله (۵۲-۴) پتانسیل را برای نقاط $z > 0$ می‌دهد، اما این بار تصویری q_b در $z = -d$ قرار دارد. وقتی پتانسیل را برای $z < 0$ با استفاده از (۵۳-۴) حساب می‌کنیم بار تصویری $(q + q_b)$ در $z = +d$ واقع است.] (۲) بارهای تصویری هر منطقه باید با بار کل آن جمع شوند. (از این رو بود که می‌دانستیم q_b را برای بار منطقه‌ای که در آن $z \leq 0$ است به‌کار ببریم و $(q + q_b)$ را برای منطقه‌ای که در آن $z \geq 0$ است). ■

مسئله ۲۲-۴ یک ماده دی‌الکتريک خطی به شکل استوانه‌ای بسیار طویل را در یک میدان الکتريکی \mathbf{E}_0 قرار داده‌ایم. میدان حاصل در داخل استوانه را حساب کنید. (شعاع را a ، پذیرفتاری را χ_e و محور استوانه را عمود بر \mathbf{E}_0 در نظر بگیرید).

مسئله ۲۳-۴ میدان داخل یک دی‌الکتريک خطی کروی واقع در یک میدان الکتريکی یکنواخت \mathbf{E}_0 (مثال ۷-۴) را با استفاده از روش تقریبهای متوالی را پیدا کنید. ابتدا فرض کنید میدان داخل فقط \mathbf{E}_0 است و از معادله (۳۰-۴) استفاده کنید تا قطبش \mathbf{P}_0 را به دست آورید. قطبش باعث ایجاد میدان \mathbf{E}_1 (مثال ۲-۴) می‌شود که مقدار \mathbf{P}_1 را به قطبش اضافه می‌کند و باعث تغییر میدان و اضافه شدن \mathbf{E}_2 می‌شود و به همین ترتیب ادامه می‌یابد. میدان نهایی برابر است با $\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots$. مجموع این سری را به دست آورید و پاسخ خود را با معادله (۴۹-۴) مقایسه کنید.

مسئله ۲۴-۴ کره رسانای بدون بار به شعاع a به وسیله پوسته عایقی به شعاع b پوشانده شده

است (با ثابت دی‌الکتریک ϵ_r). این کره را در میدان الکتریکی یکنواخت E_0 قرار می‌دهیم. میدان الکتریکی در پوستهٔ عایق را به دست آورید.

مسئله ۲۵-۴ فرض کنید منطقهٔ بالای صفحهٔ xy مثال ۸-۴ نیز از دی‌الکتریک خطی اما با پذیرفتاری دیگر، ϵ'_0 پر شده باشد. پتانسیل را در همه جای فضا پیدا کنید. \square

۳-۴-۴ انرژی در دی‌الکتریکها

کار لازم برای پر کردن خازنی تا پتانسیل V برابر است با [معادلهٔ (۲-۵۵)]

$$W = \frac{1}{2} CV^2$$

اگر خازن با یک دی‌الکتریک خطی پر شده باشد ظرفیت آن نسبت به ظرفیت خلأ به نسبت ثابت دی‌الکتریک زیاد می‌شود

$$C = \epsilon_r C_{\text{خلأ}}$$

و این را در مثال ۶-۴ دیدیم. بر این اساس کار لازم برای پر کردن خازن دی‌الکتریک، دار هم به همان نسبت اضافه می‌شود. دلیل این افزایش ساده است: برای رسیدن به یک پتانسیل معین، باید بار (آزاد) بیشتری را به خازن منتقل کنیم، زیرا بخشی از میدان توسط بارهای مقید خشی می‌شود.

در فصل ۲ فرمول کلی انرژی ذخیره‌شده در یک دستگاه الکتروستاتیک، معادلهٔ (۲-۴۵) را به دست آوریم

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau \quad (۴-۵۵)$$

برای خازن دی‌الکتریک، دار این انرژی در حضور دی‌الکتریک خطی به صورت زیر تغییر می‌یابد

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \epsilon_r E^2 d\tau = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\tau$$

برای اثبات این معادله فرض کنید محل مادهٔ دی‌الکتریک ثابت بماند و هر دفعه اندکی بار آزاد اضافه کنیم. چون به ρ_f به میزان $\Delta\rho_f$ اضافه می‌شود، قطبش تغییر خواهد کرد و با تغییر آن توزیع

بار مقید هم تغییر می‌یابد؛ ما تنها مایل به محاسبه کار انجام شده روی این اندک بار آزاد افزوده هستیم

$$\Delta W = \int (\Delta \rho_f) V d\tau \quad (56-4)$$

چون $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ می‌توان نوشت $\Delta \rho_f = \nabla \cdot (\Delta \mathbf{D})$ که تغییرات $\Delta \mathbf{D}$ است، بنابراین

$$\Delta W = \int [\nabla \cdot (\Delta \mathbf{D})] V d\tau$$

اما داریم

$$\nabla \cdot [(\Delta \mathbf{D})V] = [\nabla \cdot (\Delta \mathbf{D})]V + \Delta \mathbf{D} \cdot (\nabla V)$$

بنابراین (انتگرال‌گیری جزء به جزء)

$$\Delta W = \int \nabla \cdot [(\Delta \mathbf{D})V] d\tau + \int (\Delta \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E} d\tau$$

بنابه قضیه دیورژانس جمله اول به صورت یک انتگرال سطحی در می‌آید و این انتگرال هرگاه روی تمام فضا گرفته شود، صفر می‌شود. بنابراین کار انجام شده برابر است با

$$\Delta W = \int (\Delta \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E} d\tau \quad (57-4)$$

این معادله برای هر ماده‌ای صادق است. حال اگر محیط یک دی‌الکتริก خطی باشد، آن‌گاه $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ بوده و (برای افزایشهای بینهایت کوچک) می‌توان نوشت

$$\frac{1}{2} \Delta (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \Delta (\epsilon E^2) = \epsilon (\Delta \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} = (\Delta \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E}$$

بنابراین

$$\Delta W = \Delta \left(\frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\tau \right)$$

کار کل انجام شده با در نظر گرفتن بار انباشته شده، از صفر تا پیکربندی نهایی، برابر است با

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\tau \quad (58-4)$$

همانگونه که انتظار داشتیم.^۱

ممکن است این پرسش مطرح شود که چرا (۵۵-۴) که کاملاً به صورت فرمولی کلی در فصل ۲ به دست آوردیم و به نظر می‌رسد که برای دی‌الکتریک صادق نیست، در مورد اخیر با (۵۸-۴) جایگزین می‌شود. نکته این نیست که یکی از دو معادله غلط است بلکه این معادلات برای منظوره‌های متفاوت کاربرد دارند. شناخت این تفاوت مستلزم دقت است، بنابراین مستقیماً به نقطه آغاز برمی‌گردیم: منظور ما از “انرژی یک دستگاه” چیست؟ پاسخ: کار لازم برای گردآوری دستگاه است. بسیار خوب، اما در حضور دی‌الکتریکها برای انجام این فرایند دو راه کاملاً متفاوت وجود دارد: (۱) تمام بارها اعم از آزاد و مقید را یکی یکی گرد هم آوریم و در محل نهایشان آنها را ثابت کنیم. اگر برداشت شما از “گردآوری دستگاه” چنین کاری است آن‌گاه (۵۵-۴) فرمول مورد نظر برای انرژی ذخیره شده است. با وجود این توجه داشته باشید که این کار شامل کار لازم برای کشیدن و یا چرخش مولکولهای دی‌الکتریک نمی‌شود (اگر بارهای مثبت و منفی را توسط فنرهای ظریفی وابسته به هم بگیریم انرژی فنر، $\frac{1}{2}kx^2$ ، که برای قطبش مولکول لازم است در محاسبه منظور نشده است).^۲ (۲) با در نظر گرفتن دی‌الکتریک ناقطبیده بارهای آزاد را یکی یکی طوری گرد هم می‌آوریم که دی‌الکتریک آن‌گونه که درخور است به آن پاسخ دهد. اگر منظور از “گردآوری دستگاه” چنین فرایندی باشد (و به‌طور معمولی هم چنین است زیرا بار آزاد آن چیزی است که در واقع جابه‌جا می‌شود)، آن‌گاه فرمول مورد نظر (۵۸-۴) است. در حالت اخیر انرژی “فنر” به‌طور غیرمستقیم به حساب آمده است، زیرا نیرویی که باید برای بار آزاد به‌کار ببرید به آرایش بار مقید بستگی دارد؛ زیرا وقتی بار آزاد را حرکت می‌دهید به‌طور خودکار این “فنرها” را می‌کشید. به بیان دیگر در روش (۲) انرژی کل دستگاه از سه قسمت تشکیل شده است: انرژی

۱. اگر تعجب کنید که چرا روش ساده‌تر (بخش ۲-۴-۳) و از $W = \frac{1}{2} \int \rho_f V d\tau$ استفاده نکردیم، به دلیل آن است که به‌طور کلی این فرمول نادرست است. با بررسی (۴۲-۲) خواهید دید که آن فرمول فقط برای بار کل صادق است. در دی‌الکتریکهای خطی هم تنها برای بار آزاد صادق است، اما این به‌ندرت آشکار است و ساده‌ترین تأیید آن معکوس کردن (۵۸-۴) است.

۲. خود “فنر” هم ممکن است طبیعت الکتریکی داشته باشد، اما باز هم انرژی آن در (۵۵-۴) که در آن \mathbf{E} میدان ماکروسکوپی است، منظور نشده است.

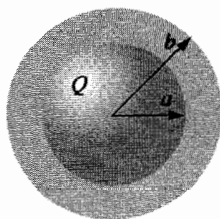
الکتروستاتیکی بار آزاد، انرژی الکتروستاتیکی بار مقید و انرژی “فتر”

$$W_{کل} = W_{آزاد} + W_{مقید} + W_{فتر}$$

دو تای آخر مساوی و مخالف یکدیگرند [در شیوه (۲)، بارهای مقید همواره در حال تعادل هستند و بنابراین کار خالص انجام شده بر روی آنها صفر است]؛ بنابراین روش (۲) با محاسبه $W_{آزاد}$ در واقع $W_{کل}$ را حساب می‌کند در حالی که در روش (۱) به محاسبه $W_{آزاد} + W_{مقید}$ پرداخته و از $W_{فتر}$ صرف نظر می‌شود.

بعضی اوقات (بدون دلیل) گفته می‌شود که (۴-۵۸) نشان دهنده انرژی حتی برای دی‌الکتریکهای غیرخطی است، اما این گفته نادرست است: برای دستیابی به ورای (۴-۵۷) باید خطی بودن را ملحوظ بداریم. در واقع برای بسیاری از دستگاههای غیرخطی تعریف “انرژی ذخیره شده” معنی خود را از دست می‌دهد، زیرا کار انجام شده نه تنها به پیکربندی نهایی بلکه به چگونگی رسیدن به این وضعیت هم بستگی دارد. اگر برای “فترهای” مولکولی اصطکاکی هم در نظر بگیریم آنگاه $W_{فتر}$ را برای گردآوری بارها به گونه‌ای که فتر مجبور به کشیده شدن یا جمع شدنهای مکرر قبل از رسیدن به حالت نهایی خود شود، به هر میزانی می‌توان بزرگ در نظر گرفت. به ویژه اگر بخواهید معادله (۴-۵۸) را برای الکترونها با قطبش دائمی شده اعمال کنید به پاسخهای ناموجهی می‌رسید (مسئله ۴-۲۷ را ببینید).

مسئله ۴-۲۶ یک رسانای کروی به شعاع a دارای بار Q است (شکل ۴-۲۹). این کره را تا شعاع b دی‌الکتریکی به پذیرفتاری χ_e احاطه کرده است. انرژی این پیکربندی را بیابید [معادله (۴-۵۸)].



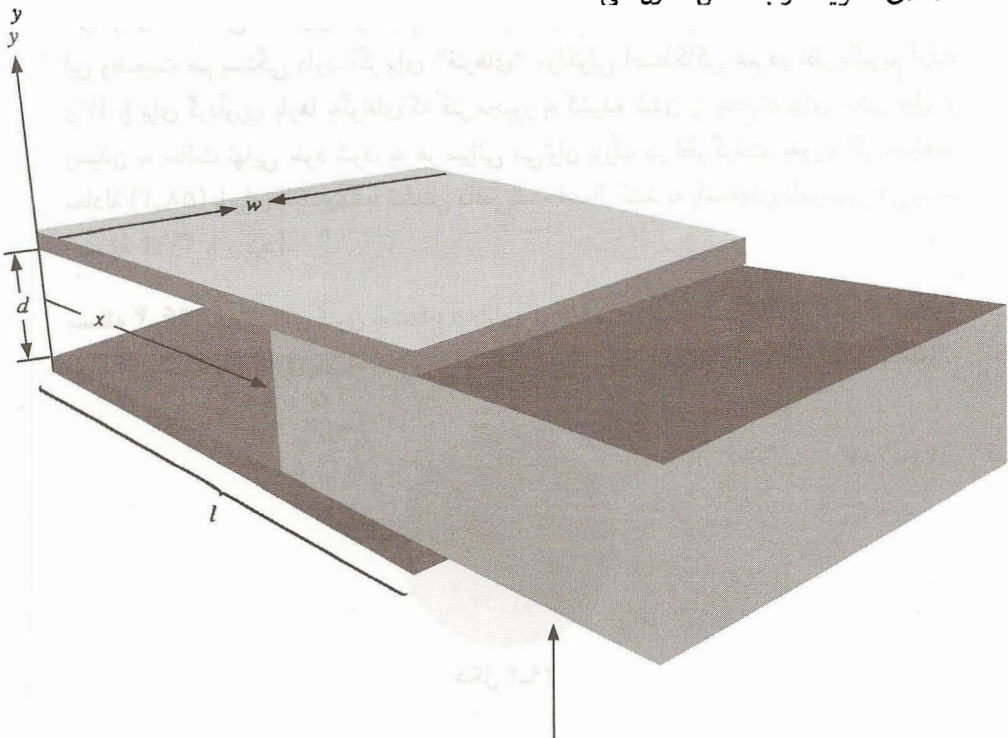
شکل ۴-۲۹

مسئله ۴-۲۷ W را از (۴-۵۵) و (۴-۵۸) برای کره‌ای به شعاع R با قطبش P دائمی شده (مثال ۴-۲) محاسبه کنید. درباره اختلاف پاسخها بحث کنید. انرژی “واقعی” دستگاه کدام است؟

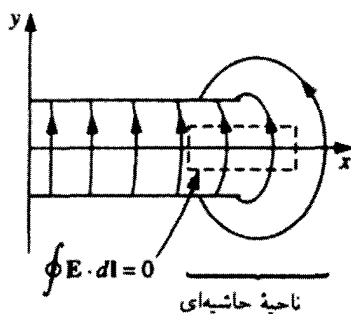
□

۴-۴-۴ نیروهای وارد بر دی الکتریکها

همانگونه که یک رسانا جذب میدان الکتریکی می شود [معادله (۲-۵۱)]، چنین وضعیتی برای دی الکتریک هم به همان دلیل اتفاق می افتد: بار مقید تمایل دارد که در نزدیکیهای بار آزاد مخالف خودش جمع شود. محاسبه واقعی نیروهای وارد بر دی الکتریکها می تواند بسیار پر دردسر باشد. به عنوان مثال یک تیغه دی الکتریک را در نظر بگیرید که بخشی از آن داخل یک خازن تخت موازی قرار گرفته است (شکل ۴-۳۰). همواره بر این نکته تأکید کرده ایم که میدان در داخل خازن یکنواخت و خارج از آن صفر است. در این حالت نیرویی بر دی الکتریک وارد نمی شود با وجود این واقعیت آن است که یک میدان حاشیه ای در گوشه های خازن وجود دارد که در بسیاری از موارد می توان از آن صرف نظر کرد اما در حالت مورد بحث، تمام آثار ناشی از آن است. (در حقیقت میدان نمی تواند به طور ناگهانی در انتهای خازن قطع شود، زیرا در این صورت انتگرال خطی $\oint \mathbf{E}$ حول یک حلقه بسته در شکل ۴-۳۱ صفر نمی شود.) این میدان حاشیه ای غیر یکنواخت است که دی الکتریک را به داخل خازن می کشد.



شکل ۴-۳۰ دی الکتریک در یک خازن تخت موازی. w عرض دی الکتریک، l طول آن، d فاصله بین صفحات خازن، d ضخامت دی الکتریک، h ارتفاع دی الکتریک از سطح پایین خازن.



شکل ۴-۳۱

محاسبه این میدان حاشیه‌ای کار دشواری است، خوشبختانه با اتخاذ روش زیر به محاسبه این میدان نیازی نخواهیم داشت. انرژی سیستم را W در نظر بگیرید. بدیهی است این انرژی به میزان همپوشی بستگی دارد. اگر دی‌الکتریک را به مقدار جزئی dx از خازن خارج کنیم تغییرات انرژی با کار انجام شده برابر می‌شود

$$dW = F_x dx \quad (۴-۵۹)$$

که در آن F_x نیرویی است که باید وارد کنیم تا نیروی الکتریکی F وارد بر دی‌الکتریک را خنثی کند: $F_x = -F$. بنابراین نیروی الکتریکی وارد بر تیغه برابر است با

$$F = -\frac{dW}{dx} \quad (۴-۶۰)$$

حال می‌دانیم که انرژی ذخیره شده در خازن برابر است با

$$W = \frac{1}{2} CV^2 \quad (۴-۶۱)$$

و ظرفیت هم در این حالت برابر است با

$$C = \frac{\epsilon_0 w}{d} (\epsilon_r l - \chi_e x) \quad (۴-۶۲)$$

که در آن l طول صفحات است (شکل ۴-۳۰). با حرکت دی‌الکتریک پتانسیل تغییر می‌کند؛ آنچه ثابت می‌ماند بار کل صفحات است، $Q = CV$. انرژی خازن برحسب Q می‌شود

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (۴-۶۳)$$

و بنابراین

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{dx} = -\frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx} \quad (۶۴-۴)$$

اما می‌دانیم که

$$\frac{dC}{dx} = -\frac{\epsilon_0 \chi_e w}{d}$$

و بنابراین

$$F = -\frac{\epsilon_0 \chi_e w}{2d} V^2 \quad (۶۵-۴)$$

(علامت منفی نشانه آن است که نیرو در خلاف جهت x است؛ دی‌الکتریک به داخل خازن کشیده می‌شود).

این یک اشتباه است که به جای معادله (۶۱-۴) که در آن V ثابت است از معادله (۶۳-۴) که در آن Q ثابت است برای محاسبه نیرو استفاده کنیم. نیروی F مورد نظر برابر است با

$$F = -\frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx}$$

که تنها، علامت آن مخالف نیروی قبلی است. بدیهی است که می‌توانیم خازن را در یک پتانسیل ثابت، با اتصال آن به یک باتری، نگه‌داریم. اما در این حالت با حرکت دی‌الکتریک باتری نیز کار می‌کند؛ در این حالت به جای (۵۹-۴) باید نوشت

$$dW = F_L dx + V dQ \quad (۶۶-۴)$$

که در آن $V dQ$ کار انجام‌شده توسط باتری است. بر این اساس داریم

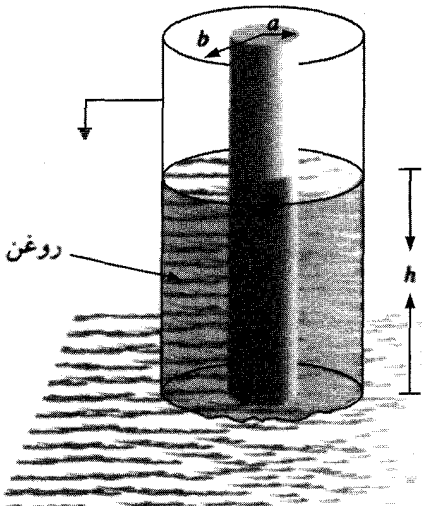
$$F = -\frac{dW}{dx} + V \frac{dQ}{dx} = -\frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx} + V^2 \frac{dC}{dx} = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx} \quad (۶۷-۴)$$

که همان نتیجه (۶۴-۴) و با علامت درست است. (لطفاً دقت کنید که: نیروی وارد بر دی‌الکتریک نمی‌تواند به اینکه Q را یا V را ثابت نگه داشته‌ایم بستگی داشته باشد. این نیرو به‌طور کلی به

توزیع بار آزاد و مقید بستگی دارد. ساده‌تر آن است که نیرو را با یک Q ثابت محاسبه کنیم، زیرا در این صورت درباره کار انجام شده توسط باتری هیچ نگرانی نداریم؛ اما در صورت اصرار می‌توان از هر یک از دو روش استفاده کرد.

توجه داشته باشید که می‌توانستیم نیرو را بدون هیچ شناختی از میدانهای حاشیه‌ای اثر گذار به دست آوریم؛ بدیهی است که بر اساس ساختار الکتروستاتیکی $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ بنا نهاده شده است و بنابراین حضور میدانهای حاشیه‌ای الزامی است؛ در این میان واقعاً چیزی عایدمان نمی‌شود — تنها به‌گونه‌ای هوشمندانه از سازگاری درونی نظریه استفاده می‌کنیم. انرژی ذخیره شده در میدانهای حاشیه‌ای (که در محاسبه منظور نکردیم) با حرکت قطعه ثابت است؛ آنچه تغییر می‌کند انرژی داخل خازن است که در آنجا میدان زیبا و یکنواخت است.

مسئله ۲۸-۴ دو استوانه هم‌محور طویل فلزی (به شعاع داخلی a و خارجی b) به‌طور قائم در یک دی الکتريک روغنی (پذیرفتاری χ_e و چگالی جرمی ρ) قرار دارد. استوانه داخلی را در پتانسیل V و استوانه بیرونی را به زمین وصل کرده‌ایم (شکل ۴-۳۲). تا چه ارتفاع (h) روغن در فضای بین دو استوانه بالا می‌رود؟



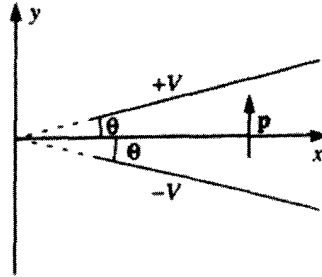
شکل ۴-۳۲

مسائل تکمیلی فصل ۴

مسئله ۲۹-۴ (الف) نیروی وارد بر p_2 ناشی از p_1 را برای پیکربندی مسئله ۴-۵ و همچنین نیروی وارد بر p_1 ناشی از p_2 را محاسبه کنید. آیا جوابها با قانون سوم نیوتون سازگارند؟

(ب) گشتاور کل وارد بر P_2 نسبت به مرکز P_1 را محاسبه و آن را با گشتاور P_1 حول همان نقطه مقایسه کنید [راهنمایی: پاسخ خود را با پاسخ (الف) و نتیجه مسئله ۴-۵ ترکیب کنید].

مسئله ۴-۳۰ یک دوقطبی الکتریکی P واقع در جهت محور y در وسط بین دو صفحه رسانای بزرگ مطابق شکل ۴-۳۳ قرار دارد. هر صفحه زاویه کوچک θ نسبت به محور x می‌سازد و صفحات دارای پتانسیلهای $\pm V$ هستند. جهت نیروی مؤثر بر P کدام است؟ (پاسخ خود را به طور کیفی توضیح دهید).

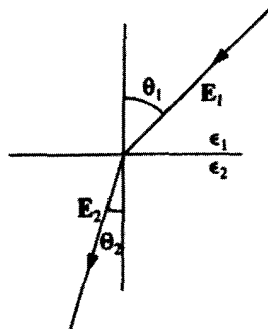


شکل ۴-۳۳

مسئله ۴-۳۱ مرکز یک دی‌الکتریک مکعبی شکل به ضلع a در مبدأ قرار دارد و دارای قطبش "دائمی" $P = kr$ است که در آن k یک ثابت است. تمام بارهای مقید را بیابید و صفر بودن مجموع آنها را بررسی کنید.

مسئله ۴-۳۲ یک بار نقطه‌ای q در مرکز کره‌ای از ماده‌ای دی‌الکتریک خطی (با پذیرفتاری χ_e و شعاع R) قرار دارد. میدان الکتریکی، قطبش و بار مقید را در یک نقطه $r < R$ بیابید. بار مقید کل بر روی سطح چقدر است؟ بار مقید منفی جبران‌کننده در کجا قرار دارد؟

مسئله ۴-۳۳ در حد فاصل بین یک دی‌الکتریک خطی و دی‌الکتریک دیگر خطوط میدان الکتریکی خمیده می‌شوند (شکل ۴-۳۴). نشان دهید که



شکل ۴-۳۴

$$\tan \theta_2 / \tan \theta_1 = \epsilon_2 / \epsilon_1 \quad (۶۸-۴)$$

فرض کنید بار آزادی در مرز وجود ندارد [توجه: معادله (۶۸-۴) مانند قانون اسنل در اپتیک است. آیا یک عدسی همگرا از ماده دی الکتريک می تواند میدان الکتريکی را متمرکز یا پخش کند؟]

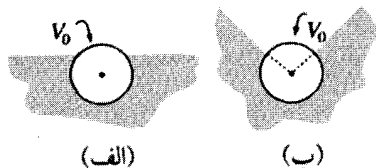
! مسئله ۳۴-۴ یک دوقطبی نقطه ای p در مرکز کره ای از یک ماده دی الکتريک خطی (به شعاع R و ثابت دی الکتريک ϵ_r) قرار دارد. پتانسیل الکتريکی داخل و خارج کره را پیدا کنید.

$$\left[\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon r^2} \left(1 + 2 \frac{r^2}{R^2} \frac{(\epsilon_r - 1)}{(\epsilon_r + 2)} \right), (r \leq R); \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{3}{\epsilon_r + 2} \right), (r \geq R) \right] \text{ پاسخ:}$$

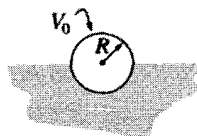
مسئله ۳۵-۴ قضیه یکتایی زیر را ثابت کنید: حجم V حاوی توزیع بار آزاد مشخص و تکه های متفاوتی از مواد دی الکتريک خطی با پذیرفتاری معلوم است. اگر پتانسیل در مرزهای S حجم V معلوم باشد (با قبول $V = 0$ در بینهایت) آنگاه پتانسیل در سرتاسر V به طور یکتا تعیین می شود. [راهنمایی: از $\nabla \cdot (V_r D_r)$ روی V انتگرال بگیرید.]

مسئله ۳۶-۴ نیمی از کره رسانا با پتانسیل V_0 در ماده دی الکتريک خطی با پذیرفتاری χ_e در منطقه $z < 0$ قرار گرفته است (شکل ۳۵-۴). ادعا: پتانسیل در همه جا درست برابر حالتی است که دی الکتريک وجود نداشته باشد! درستی این ادعا را به صورت زیر تحقیق کنید.

- (الف) فرمول را برای پتانسیل پیشنهادی $V(r)$ برحسب جملات V_0 ، R و r بنویسید و از آن برای تعیین میدان، قطبش، بار مقید و توزیع بار آزاد روی سطح کره استفاده کنید.
- (ب) نشان دهید که پیکربندی بار کل است که پتانسیل $V(r)$ را به وجود می آورد.
- (ج) با استفاده از قضیه یکتایی در مسئله ۳۵-۴ بحث را کامل کنید.
- (د) آیا پیکربندی شکل ۳۶-۴ را می توانید با همین پتانسیل حل کنید؟ اگر نه توضیح دهید چرا.



شکل ۳۶-۴



شکل ۳۵-۴

مسئله ۳۷-۴ نیروی وارد بر یک دوقطبی بنابه معادله (۵-۴) برابر است با $(p \cdot \nabla)E$. بنابراین

نیروی کل وارد بر یک قطعه ماده‌ی الکتریک برابر است با

$$\mathbf{F} = \int (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{خارجی}} d\tau \quad (۶۹-۴)$$

[در اینجا $\mathbf{E}_{\text{خارجی}}$ میدان ناشی از هر چیزی بجز دی‌الکتریک است. ممکن است فرض کنید استفاده از میدان کل هم مهم نیست؛ به هر حال، دی‌الکتریک نمی‌تواند بر خودش نیرو وارد کند. با وجود این از آنجایی که میدان دی‌الکتریک در محل بار سطحی مقید ناپیوسته است از مشتق‌گیری، یک تابع دل‌تا حاصل می‌شود و ما باید با یک جمله سطحی جبران‌کننده اضافه کنیم یا (بهتر) اینکه از $\mathbf{E}_{\text{خارجی}}$ استفاده کنیم که در آن این ناپیوستگی وجود ندارد]. با استفاده از (۶۹-۴) نیروی وارد بر کره‌ای کوچک به شعاع a از ماده‌ای دی‌الکتریک با پذیرفتاری χ_e که به فاصله s از سیم نازکی حامل بار خطی λ قرار دارد را حساب کنید.

! مسئله ۳۸-۴ در یک دی‌الکتریک خطی قطبش با میدان متناسب است: $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$. اگر ماده مورد نظر از آنها (یا مولکولهای غیرقطبی) تشکیل شده باشد گشتاور دوقطبی القایی هر اتم یا مولکول نیز متناسب با میدان است $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$. پرسش: چه رابطه‌ای بین قطبش‌پذیری اتمی α و پذیرفتاری χ_e وجود دارد؟

چون \mathbf{P} (گشتاور دوقطبی واحد حجم) برابر است با حاصلضرب \mathbf{p} (گشتاور دوقطبی یک اتم) در N (تعداد اتمها در واحد حجم) $\mathbf{P} = N\mathbf{p} = N\alpha\mathbf{E}$. در وهله اول به نظر می‌رسد که بنویسیم

$$\chi_e = \frac{N\alpha}{\epsilon_0} \quad (۷۰-۴)$$

و در واقع این کار بی‌ربطی نیست به شرط آنکه چگالی اتمها کوچک باشد. اما یک بررسی دقیقتر مسئله‌ای را پیش رو می‌گذارد، زیرا میدان در معادله (۴-۳۰)، میدان ماکروسکوپی کل محیط است در حالی که میدان در معادله (۴-۱) میدان میکروسکوپی ناشی از هر چیز غیر از اتم مورد مطالعه است (قطبش‌پذیری اتمی برای یک اتم منفرد واقع در یک میدان خارجی تعریف شده است). این میدان را $\mathbf{E}_{\text{دیگر}}$ بنامید. فرض کنید فضای اشغالی توسط هر اتم کره‌ای به شعاع R باشد و نشان دهید که

$$\mathbf{E} = \left(1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}\right) \mathbf{E}_{\text{دیگر}} \quad (۷۱-۴)$$

و از آن برای به دست آوردن معادلات زیر استفاده کنید

$$\chi_e = \frac{N\alpha/\epsilon_0}{1 - N\alpha/3\epsilon_0}$$

یا

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{N} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) \quad (۷۲-۴)$$

معادله (۷۲-۴) را فرمول کلاؤسیوس-موسوتی، یا برای کاربردهای اپتیکی معادله لورنتس-لورنز می‌نامند.

مسئله ۴-۳۹ رابطه کلاؤسیوس-موسوتی (۷۲-۴) را برای گازهای فهرست شده در جدول ۴-۱ امتحان کنید. ثابتهای دی‌الکتریک را در جدول ۴-۲ آورده‌ایم. (در این مورد چگالیها به قدری کوچک‌اند که معادلات (۷۰-۴) و (۷۲-۴) غیرقابل تمیزند. برای اطلاع از نتایج تجربی مؤید جمله تصحیحی کلاؤسیوس-موسوتی به کتاب الکتروسیستمه و مغناطیس پورسل (ویرایش اول، مسئله ۹-۲۸ رجوع کنید).^۱

! مسئله ۴-۴۰ معادله کلاؤسیوس-موسوتی به صورت معادله (۳۸-۴) نحوه محاسبه پذیرفتاری یک ماده غیرقطبی را برحسب قطبش پذیری اتمی α نشان می‌دهد. معادله لاتزون هم چگونگی محاسبه پذیرفتاری یک ماده دوقطبی را برحسب گشتاور دوقطبی دائمی مولکولی p مشخص می‌کند. روش اخیر چنین است:

(الف) انرژی یک دوقطبی واقع در یک میدان خارجی \mathbf{E} برابر است با $u = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ معادله (۶-۴). این انرژی از $-pE$ تا $+pE$ بسته به چگونگی سمتگیری دوقطبی، متغیر است. بنا بر مکانیک آماری برای ماده‌ای در حال تعادل در دمای T احتمال داشتن انرژی u یک مولکول متناسب است با ضریب بولتزمن

$$\exp(-u/kT)$$

بنابراین انرژی میانگین دوقطبی برابر است با

$$\langle u \rangle = \frac{\int ue^{-(u/kT)} du}{\int e^{-(u/kT)} du}$$

که حدود انتگرال از $-pE$ تا $+pE$ است. با استفاده از این معادله نشان دهید که قطبش ماده‌ای که دارای N مولکول در واحد حجم است برابر است با

$$P = Np[\coth(pE/kT) - (kT/pE)] \quad (۷۳-۴)$$

این معادله را فرمول لانژون می‌نامند. نمودار P/Np را برحسب تابعی از pE/kT رسم کنید. (ب) توجه کنید که برای میدانهای بزرگ یا دماهای کم تمام مولکولها همسو هستند و ماده غیرخطی است. معمولاً kT بسیار بزرگتر از pE است. نشان دهید که در این وضعیت ماده خطی است و پذیرفتاری آن را برحسب N ، p ، T و k حساب کنید. پذیرفتاری آب ۲۰°C را حساب کنید و نتیجه خود را با مقدار تجربی مندرج در جدول ۲-۴ مقایسه کنید (گشتاور دوقطبی آب $۱۰^{-۳۰} \text{C} \cdot \text{m}$ $\times ۶۱$ است). این جوابها تا حدی متفاوت خواهند بود زیرا باز هم بین \mathbf{E}_1 و \mathbf{E}_2 تفاوتی قائل نشدیم. توافق مورد نظر برای گازهای کم چگالی که در آنها تفاوت بین این دو میدان قابل صرف نظر کردن است بیشتر است. آن را برای بخار آب ۱۰۰°C و فشار ۱ اتمسفر امتحان کنید.

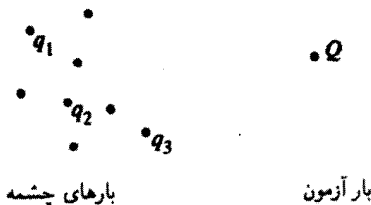
□

مغناطوستاتیک

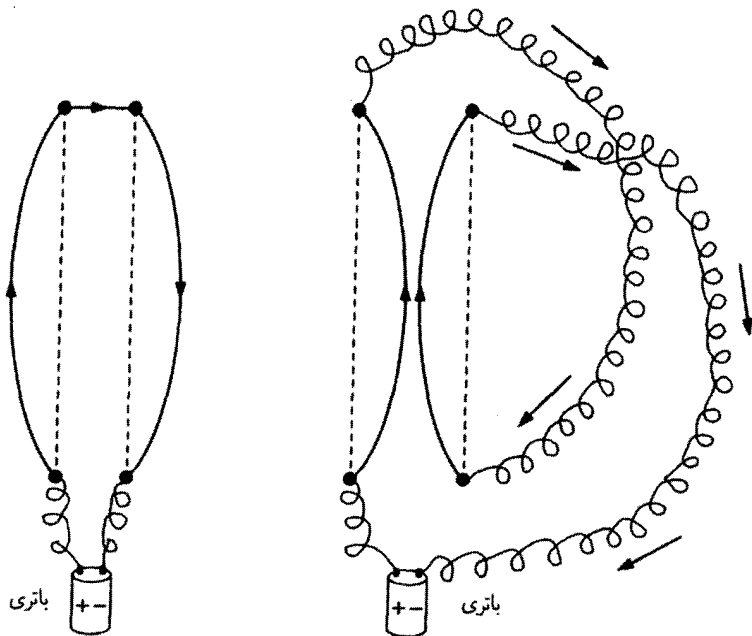
۱-۵ قانون نیروی لورنتس

۱-۱-۵ میدانهای مغناطیسی

مسئله بنیادی الکترودینامیک کلاسیک را به خاطر آورید: مطابق شکل ۱-۵ می‌خواهیم بدانیم بارهای q_1, q_2, q_3, \dots (بارهای "چشمه") برابر دیگر Q (بار "آزمون") چه نیرویی وارد می‌کنند. بنا به اصل برهم‌نهی کافی است نیروی مؤثر از یک بار را حساب کنیم — نیروی کل جمع برداری همه نیروهاست. تا اینجا خود را به ساده‌ترین مورد یعنی الکتروستاتیک که در آن بارهای چشمه



شکل ۱-۵



(الف) جریانهای در جهت مخالف یکدیگر را دفع می‌کنند.

(ب) جریانهای هم‌جهت یکدیگر را جذب می‌کنند.

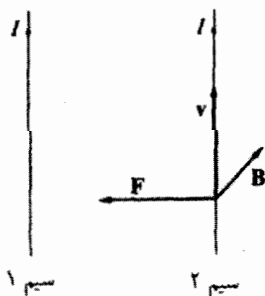
شکل ۲-۵

به حال سکون‌اند محدود کرده‌ایم (گرچه بار Q الزاماً ساکن نیست). حال زمان آن فرا رسیده است که نیروهای اعمالی بین بارهای متحرک را حساب کنیم.

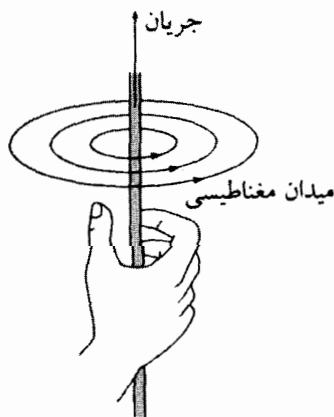
برای روشن شدن مطلب آزمایش زیر را در نظر آورید: دو سیم به فاصله چند سانتیمتر از یکدیگر از سقفی آویخته شده‌اند. وقتی جریانی از یکی از سیمها عبور می‌کند و از طریق سیم دیگر در جهت مخالف برمی‌گردد، دو سیم یکدیگر را دفع می‌کنند [شکل ۲-۵ (الف)]. این مشاهده را چگونه توجیه می‌کنید؟ ممکن است بگویید باتری (یا هر آنچه ایجاد جریان می‌کند) در واقع سیم را باردار می‌کند و بنابراین قسمتهای مختلف یکدیگر را به علت نیروهای دافعه بارهای همانا دفع می‌کند. اما این تعبیر نادرست است. می‌توانید بار آرمونی را نزدیک این سیمها قرار دهید و ببینید که نیروی بر آن وارد نمی‌شود یعنی سیمها از نظر الکتریکی خنثی هستند. (این درست است که الکترونها در سیم حرکت می‌کنند که خود به معنی وجود جریان است، اما در هر قسمتی از سیم به اندازه بارهای مثبت، بارهای منفی وجود دارد. افزون بر این می‌توانید آزمایش را به گونه‌ای ترتیب دهید که جریانهای دو سیم هم‌جهت باشند [شکل ۲-۵ (ب)]; در این صورت دو سیم یکدیگر را جذب می‌کنند.

ماهیت نیروهای دافعه یا جاذبه بین دو سیم، الکتروستاتیکی نیست. این اولین بحث ما دربارهٔ نیروی مغناطیسی است. در حالی که یک بار ساکن در فضای اطراف خودش ایجاد یک میدان الکتریکی E می‌کند، یک بار متحرک علاوه بر چنین میدانی یک میدان مغناطیسی B هم می‌سازد. در واقع، آشکارسازی میدانهای مغناطیسی آسانتر از میدانهای الکتریکی است — آنچه نیاز دارید یک قطب‌نمای پیشاهنگی است. چگونگی عمل فعلاً به کار ما مربوط نیست — کافی است سوزنهایی در امتداد میدان مغناطیسی محلی قرار دهیم. به‌طور معمولی امتداد سوزنها جهت شمال را در میدان مغناطیسی زمین نشان می‌دهند، اما در آزمایشگاه که میدانهای صدها برابر قویتر از میدان مغناطیسی زمین می‌توان ایجاد کرد عقربه‌های مغناطیسی جهت میدان مغناطیسی موجود را نشان می‌دهند.

حال، هرگاه یک عقربه کوچک را در نزدیکی سیم حامل جریانی بگذارید چیز جالبی می‌یابید: میدان در امتداد سیم قرار ندارد، در جهت مخالف آن هم نیست بلکه دور تا دور سیم قرار دارد. در واقع هرگاه انگشت شست خود را در راستای جریان سیم قرار دهید، انگشتهای خم شده دور سیم جهت میدان مغناطیسی را نشان می‌دهند (شکل ۳-۵). چنین میدانی چگونه موجب یک نیروی ربایش روی یک سیم حامل جریان موازی و نزدیک خود می‌شود؟ میدان مغناطیسی در محل سیم دوم رو به داخل صفحه قرار دارد (شکل ۴-۵)، سرعت بارها رو به بالا و نیروی حاصل به سمت چپ است. از این رو قانون عجبیبی برای این جهتها حاصل می‌شود؛ این قانون را در بخش بعدی بیان می‌کنیم. به دنبال آن در بخش ۲-۵ به این سؤال منطقی برمی‌گردیم که: میدان مغناطیسی سیم اولی چگونه محاسبه می‌شود؟



شکل ۴-۵



شکل ۳-۵

۲-۱-۵ نیروهای مغناطیسی

ممکن است به این نتیجه رسیده باشید که ترکیب جهت‌های شکل ۴-۵ برای ضرب خارجی مناسب است. در واقع، نیروی مغناطیسی مؤثر بر بار Q که با سرعت v در یک میدان مغناطیسی B حرکت می‌کند برابر است با^۱

$$\mathbf{F}_{\text{مغناطیسی}} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (۱-۵)$$

این، قانون نیروی لورنتس است. در حضور هر دو میدان، الکتریکی و مغناطیسی، نیروی برآیند وارد بر Q می‌شود

$$\mathbf{F} = Q[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \quad (۲-۵)$$

البته مدعی آن نیستیم که معادله (۱-۵) را به‌طور تجربی تحقیق کردیم. این هم مانند قانون کولن یک اصل موضوع نظریه است که صحت آن را باید از راه آزمایش نتیجه گرفت، همانند آنچه در بخش ۱-۱-۵ دیدیم. کار اصلی ما از این به بعد یافتن میدان مغناطیسی B (و همین‌طور میدان الکتریکی E ماده است، زیرا وقتی بارهای چشمه متحرک باشند قواعد پیچیده می‌شوند). اما قبل از ادامه این کار می‌ارزد که نگاهی دقیق‌تر به خود قانون نیروی لورنتس بیفکنیم، زیرا جمله مغناطیسی (۱-۵) چیز فوق‌العاده‌ای است که به مسیره‌های خاصی برای ذرات منجر می‌شود.

مثال ۱-۵

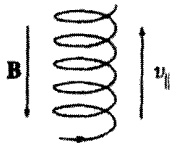
حرکت سیکلوترونی

بهترین نمونه حرکت ذره‌ای باردار در میدان مغناطیسی دایره‌ای است که نیروی مغناطیسی شتاب مرکزگرا آن را ایجاد می‌کند. شکل ۵-۵ یک میدان مغناطیسی یکنواخت به سمت خارج صفحه را نشان می‌دهد؛ اگر حرکت بار Q ساعتگرد و با سرعت v بر مسیری دایره‌ای به شعاع R باشد، نیروی مغناطیسی (۱-۵) به سمت داخل بوده و مقدارش ثابت و برابر QvB است — مقداری که برای حرکت دورانی یکنواخت لازم است:

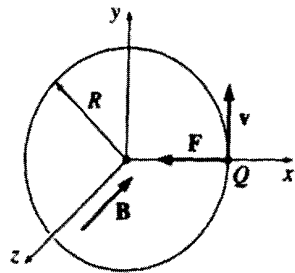
$$QvB = m \frac{v^2}{R} \quad \text{یا} \quad p = QBR \quad (۳-۵)$$

در این معادله m جرم ذره و $p = mv$ تکانه آن است. معادله (۳-۵) به فرمول سیکلوترون معروف است زیرا بیان‌کننده حرکت یک ذره در سیکلوترون یعنی اولین شتابدهنده‌های ذره‌ای جدید است.

۱. چون F و v بردار هستند، B باید یک شبه‌بردار باشد.



شکل ۶-۵



شکل ۵-۵

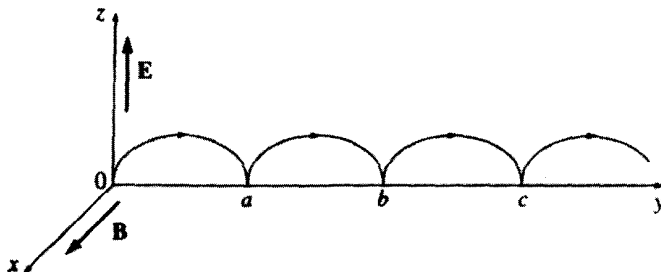
از آن به عنوان روش ساده تعیین تکانه یک ذره با پرتاب ذره در یک میدان مغناطیسی معلوم و اندازه‌گیری شعاع مسیر دوران نیز استفاده می‌شود. در واقع این روش استاندارد تعیین تکانه ذرات بنیادی است.

ما فرض کردیم که بار در صفحه‌ای عمود بر \mathbf{B} حرکت می‌کند. اگر ذره در ابتدا سرعت $v_{||}$ موازی با \mathbf{B} هم داشته باشد این مؤلفه حرکت تحت تأثیر نیروی مغناطیسی (۱-۵) تغییری نمی‌کند، و ذره بر مسیری مارپیچی حرکت می‌کند (شکل ۶-۵). شعاع همچنان از (۳-۵) به دست می‌آید، اما سرعت مورد نظر مؤلفه عمود بر \mathbf{B} است یعنی v_{\perp} .

مثال ۲-۵

حرکت چرخزاد

با اعمال یک میدان الکتریکی یکنواخت عمود بر یک میدان مغناطیسی، مسیر دیگری برای ذرات به دست می‌آید. به عنوان مثال فرض کنید \mathbf{B} در جهت مثبت محور x و \mathbf{E} در امتداد محور z مطابق شکل ۷-۵ باشد. ذره‌ای ساکن از مبدأ رها می‌شود. مسیر ذره چیست؟



شکل ۷-۵

حل: بگذارید نخست مسئله را به صورت کیفی بررسی کنیم. ذره در آغاز ساکن است و بنابراین نیروی مغناطیسی صفر است و میدان الکتریکی ذره را در امتداد z شتاب می‌دهد. با افزایش سرعت یک نیروی مغناطیسی حاصل می‌شود که بنابه (۱-۵) ذره را به سمت راست می‌کشد. هر چقدر سرعت بیشتر شود منطیسی F بزرگتر می‌شود؛ سرانجام این نیرو ذره را به سمت محور y می‌پیچاند. در این نقطه، بار مخالف نیروی الکتریکی حرکت می‌کند و بنابراین از سرعتش کم می‌شود. در این حال نیروی مغناطیسی کاهش می‌یابد و نیروی الکتریکی جایگزین می‌شود و ذره را در نقطه a به سکون وا می‌دارد (شکل ۷-۵). در اینجا کل فرایند تکرار می‌شود و ذره به محل b و غیره منتقل می‌شود.

حال مسئله را به صورت کمی بررسی می‌کنیم. با توجه به عدم وجود نیرو در امتداد x ، در هر لحظه t مکان ذره را می‌توان به صورت بردار $(x(t), y(t), z(t))$ در نظر گرفت. بنابراین سرعت عبارت است از

$$\mathbf{v} = (0, \dot{y}, \dot{z})$$

که علامت نقطه‌ها نشان‌دهنده مشتقها نسبت به زمان‌اند. از این رو

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = B\dot{z}\hat{y} - B\dot{y}\hat{z}$$

و با اعمال قانون نیوتون داریم

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = Q(E\hat{z} + B\dot{z}\hat{y} - B\dot{y}\hat{z}) = m\mathbf{a} = m(\ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z})$$

و یا با در نظر گرفتن مؤلفه‌های \hat{y} و \hat{z} به صورت جداگانه

$$QB\dot{z} = m\ddot{y}, \quad QE - QB\dot{y} = m\ddot{z}$$

برای سادگی می‌نویسیم

$$\omega \equiv \frac{QB}{m} \quad (4-5)$$

ω بسامد سیکلوترونی است؛ در نبود هرگونه میدان الکتریکی ذره با چنین بسامدی دوران می‌کند. بنابراین معادله حرکت به صورت زیر در می‌آید

$$\ddot{y} = \omega \dot{z}, \quad \ddot{z} = \omega \left(\frac{E}{B} - \dot{y} \right) \quad (5-5)$$

جواب عمومی معادلات عبارت‌اند از^۱

$$\begin{cases} y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{E}{B}t + C_3 \\ z(t) = C_2 \cos \omega t - C_1 \sin \omega t + C_4 \end{cases} \quad (6-5)$$

در این لحظه ذره از حالت سکون $[\dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0]$ از مبدأ $[y(0) = z(0) = 0]$ شروع به حرکت می‌کند. با این چهار شرط، ثابتهای C_1, C_2, C_3, C_4 تعیین می‌شوند

$$y(t) = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin \omega t), \quad z(t) = \frac{E}{\omega B}(1 - \cos \omega t) \quad (7-5)$$

این پاسخ چندان آموزنده نیست، اما با قرار دادن

$$R \equiv \frac{E}{\omega B} \quad (8-5)$$

و حذف سینوس و کسینوس با استفاده از $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$ در می‌یابیم

$$(y - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2 \quad (9-5)$$

این فرمول دایره‌ای به شعاع R است که مرکز آن $(0, R\omega t, R)$ با سرعت ثابت در جهت محور y حرکت می‌کند

$$v = \omega R = \frac{E}{B} \quad (10-5)$$

۱. به صورت معادلات دیفرانسیل جفتیده، (۵-۵) را به‌سادگی با دیفرانسیل‌گیری از اولین و با استفاده از دومی برای حذف \ddot{z} حل می‌شود.

این ذره همانند نقطه‌ای واقع بر لبهٔ چرخشی به شعاع R که با سرعت v در امتداد محور ν می‌غلتد حرکت می‌کند. منحنی حاصل از چنین حرکتی یک چرخزاد نامیده می‌شود. توجه کنید که حرکت کلی در جهت \mathbf{E} نیست بلکه بر آن عمود است.

یک جنبه از قانون نیروی مغناطیسی (۱-۵) که توجه خاص ما را جلب می‌کند این است:

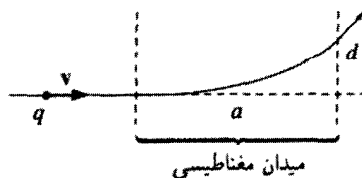
میدان مغناطیسی کاری انجام نمی‌دهد.

زیرا اگر Q به میزان $d\mathbf{l} = \mathbf{v} dt$ حرکت کند، کار مغناطیسی انجام شده برابر است با

$$dW_{\text{مغناطیسی}} = \mathbf{F}_{\text{مغناطیسی}} \cdot d\mathbf{l} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = 0 \quad (11-5)$$

$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}$ بر \mathbf{v} عمود است و بنابراین $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$. نیروهای مغناطیسی می‌توانند جهت حرکت یک ذره را تغییر دهند اما اندازهٔ سرعت آنها را کم یا زیاد نمی‌کنند. این واقعیت که نیروهای مغناطیسی کار انجام نمی‌دهند پیامد بنیادی و مستقیم از قانون نیروی لورنتس است، اما وضعیتهای زیادی را می‌توان یافت که در آن این اظهارات چنان نادرست به نظر می‌رسد که ایجاد تزلزل می‌کند. وقتی یک بالابر مغناطیسی بدنهٔ یک ماشین قراضه را بالا می‌برد بدهی است که چیزی کار انجام می‌دهد و نامعقول به نظر می‌رسد که بر عدم انجام کار توسط نیروی مغناطیسی احتراز ورزیم. عقلانی بودن یا نبودن مطلب را باید کنار بگذاریم. موضوع پیچیده درک این مطلب است که به کدام عامل انجام کار باید اعتبار بخشیم. در ارائهٔ بحث چند مثال را به شما نشان خواهیم داد.

مسئله ۱-۵ ذره‌ای با بار q داخل ناحیهٔ میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B} (ممتد به طرف داخل صفحه) می‌شود. این میدان ذره را همان‌گونه که در شکل ۸-۵ نشان داده شده است نسبت به مسیر اصلی حرکت به اندازهٔ d به سمت بالا منحرف می‌کند. آیا این بار الکتریکی مثبت است یا منفی؟ تکانه ذره را برحسب a ، d ، B و q بیابید.



شکل ۸-۵

مسئله ۲-۵ مسیر حرکت ذره مثال ۲-۵ را که از مبدأ با سرعتهای زیر شروع به حرکت می‌کند بیابید و رسم کنید

$$v(\circ) = (E/B)\hat{y} \quad (\text{الف})$$

$$v(\circ) = (E/2B)\hat{y} \quad (\text{ب})$$

$$v(\circ) = (E/B)(\hat{y} + \hat{z}) \quad (\text{ج})$$

مسئله ۳-۵ در سال ۱۸۹۷ تامسون با اندازه‌گیری نسبت بار-به-جرم "پرتوهای کاندی" (در واقع جریانی از الکترونها با بار q و جرم m) را به صورت زیر کشف کرد:

(الف) نخست باریکه را از میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یکنواخت E و B (که بر یکدیگر و بر مسیر پرتوها عمود بودند) گذراند و میدان الکتریکی را به گونه‌ای تنظیم کرد که باریکه منحرف نشود. در این وضعیت سرعت ذرات (برحسب E و B) چقدر بودند؟

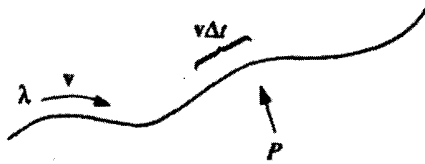
(ب) آنگاه با حذف میدان الکتریکی، شعاع خمیدگی R باریکه را که فقط به واسطه میدان مغناطیسی منحرف شده بود اندازه گرفت. نسبت (q/m) ذرات برحسب E ، B و R چقدر است؟ \square

۳-۱-۵ جریان

جریان در یک سیم عبارت از باری است که در واحد زمان از هر نقطه می‌گذرد. بنا به تعریف بارهای منفی که به سمت چپ حرکت می‌کنند با بارهای مثبت در حال حرکت به راست برابرند. تعریف بالا بیان‌کننده این واقعیت فیزیکی است که در همه پدیده‌های مربوط به بارهای متحرک حاصلضرب بار و سرعت دخیل است. هرگاه علامت بار و v هر دو را عوض کنیم به همان نتیجه قبلی می‌رسیم. بنابراین واقعاً مهم نیست که کدام وضعیت را در نظر بگیریم. (قانون نیروی لورنتس در هر حال صادق است؛ اثر هال (مسئله ۵-۳۹) حالتی استثنایی است.) در عمل این الکترونها منفی هستند که با حرکت خود ایجاد جریان می‌کنند - حرکتی در جهت مخالف جریان. برای احتراز از پیچیدگیهای بیهوده همواره فرض می‌کنیم که بار مثبت در حرکت است، همان‌گونه که همه می‌دانند حدود یک قرن است که بنیامین فرانکلین چنین قرارداد نامطلوبی را برقرار کرده است.^۱ جریان را برحسب آمپر (A) که معادل کولن بر ثانیه است می‌سنجند

$$1A = 1C/s \quad (12-5)$$

۱. اگر در آغاز الکترون را مثبت و پروتون را منفی می‌نامیدیم مشکلی پیش نمی‌آمد. در آزمایشهای فرانکلین با پوست گربه و میلهٔ شیشه‌ای انتخاب کاملاً اختیاری بود.



شکل ۹-۵

بار خطی λ که با سرعت v در سیمی جریان دارد (شکل ۹-۵) جریان زیر را تولید می‌کند

$$I = \lambda v \quad (۱۳-۵)$$

زیرا قطعه‌ای به طول $v\Delta t$ باری به میزان $\lambda v\Delta t$ را از نقطه P در زمان Δt می‌گذراند. جریان در هر نقطه در واقع برداری به صورت زیر است

$$\mathbf{I} = \lambda \mathbf{v} \quad (۱۴-۵)$$

با وجود این، چون مسیر جریان تابع شکل سیم است، اغلب مردم زحمت نشان دادن سرشت برداری \mathbf{I} را به خود نمی‌دهند. بدیهی است که یک سیم خنثی همان اندازه بارهای مثبت ساکن دارد که بارهای متحرک منفی دارد. بارهای مثبت ساکن در ایجاد جریان نقشی ندارند — چگالی بار λ در (۱۳-۵) مربوط به بارهای متحرک است برای وضعیت غیر معمولی که در آن هر دو بار حرکت کنند، آن‌گاه $\mathbf{I} = \lambda_+ \mathbf{v}_+ + \lambda_- \mathbf{v}_-$

نیروی مغناطیسی مؤثر بر یک جزء حامل جریان در سیم برابر است با

$$\mathbf{F}_{\text{مغناطیسی}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dq = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \lambda dl = \int (\mathbf{I} \times \mathbf{B}) dl \quad (۱۵-۵)$$

چون \mathbf{I} و dl هر دو در یک جهت هستند می‌توان نوشت

$$\mathbf{F}_{\text{مغناطیسی}} = \int I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (۱۶-۵)$$

عموماً مقدار I ثابت است و می‌توان آن را از انتگرال بیرون آورد

$$\mathbf{F}_{\text{مغناطیسی}} = I \int (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (۱۷-۵)$$

مثال ۳-۵

به یک حلقه سیم مستطیلی وزنه‌ای به جرم m متصل است. این حلقه از یک انتها آویخته شده و انتهای دیگر آن در یک میدان مغناطیسی یکنواخت B ممتد به طرف داخل صفحه و در ناحیه هاشورزده شکل ۱۰-۵ است قرار دارد. به‌ازای چه مقدار جریان I حلقه، نیروی مغناطیسی به سمت بالا با نیروی وزن حلقه که به سمت پایین است برابر می‌شود؟

حل: قبل از همه درمی‌یابیم که جهت جریان باید ساعتگرد باشد تا $(\mathbf{I} \times \mathbf{B})$ در قسمت افقی سیم رو به بالا باشد، آنگاه داریم

$$F_{\text{مغناطیسی}} = IBa$$

که در آن a پهنای حلقه است. (نیروهای مغناطیسی در قسمت عمودی سیم یکدیگر را خنثی می‌کنند.) برای آنکه مغناطیسی F با وزن مساوی باشد باید داشته باشیم

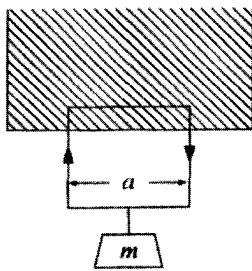
$$I = \frac{mg}{Ba} \quad (۱۸-۵)$$

وزنه در هوا معلق می‌ماند!

حال اگر جریان را افزایش دهیم چه اتفاقی می‌افتد؟ در این حال نیروی مغناطیسی که به سمت بالاست از وزن جسم بیشتر می‌شود و حلقه بالا می‌رود. کسی کاری انجام می‌دهد و به نظر می‌رسد عامل انجام کار میدان مغناطیسی باشد. پس به نوشتن تساوی زیر اغوا می‌شویم

$$W_{\text{مغناطیسی}} = F_{\text{مغناطیسی}}h = IBah \quad (۱۹-۵)$$

که در آن h فاصله‌ای است که حلقه بالا می‌رود. اما می‌دانیم که نیروهای مغناطیسی هرگز کاری



شکل ۱۰-۵

انجام نمی‌دهند. در اینجا چه می‌گذرد؟

وقتی حلقه شروع به بالا رفتن می‌کند بارهای حلقه دیگر حرکت افقی ندارند — سرعت آنها یک مؤلفه u به سمت بالا دارد که همان سرعت حلقه است (شکل ۵-۱۱) و این غیر از مؤلفه افقی w است که به جریان ($I = \lambda w$) مربوط می‌شود. نیروی مغناطیسی که همواره عمود بر سرعت است دیگر مستقیماً به طرف بالا نیست، و به عقب خم می‌شود. این میدان بر جابه‌جایی خالص بار (که در امتداد v است) عمود است، و بنابراین کاری روی q انجام نمی‌دهد. این نیز یک مؤلفه عمودی (qwB) دارد؛ در واقع نیروی مغناطیسی عمودی خالص (λa) در قسمت بالایی حلقه همانند گذشته برابر است با

$$F_{\text{عمودی}} = \lambda a w B = I B a \quad (20-5)$$

اما حالا یک مؤلفه افقی (quB) هم دارد، که مخالف عبور جریان است. صرف‌نظر از اینکه چه عاملی مسئول این جریان است باید بارها در مقابل مؤلفهٔ روبه عقب نیروی مغناطیسی کشیده شوند. بدیهی است نیروی افقی کل وارد بر قسمت بالایی برابر است با

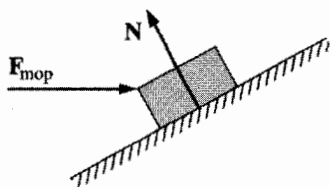
$$F_{\text{افقی}} = \lambda a u B \quad (21-5)$$

در زمان dt بارها فاصله (افقی) $w dt$ را می‌پیمایند، بنابراین کار انجام‌شده (احتمالاً توسط باتری یا ژنراتور) برابر است با

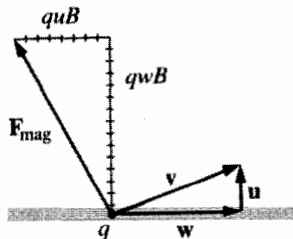
$$W_{\text{باتری}} = \lambda a B \int u w dt = I B a h$$

که دقیقاً همان چیزی است که در معادلهٔ (۵-۱۹) به نیروی مغناطیسی نسبت دادیم. آیا در این فرایند کاری انجام شده است؟ حتماً چه کسی کار انجام داد؟ باتری! در این صورت نقش نیروی مغناطیسی چه بود؟ خوب، نیروی افقی باتری را به حرکت عمودی حلقه و وزنه تغییر جهت داده است.

توجه به یک مشابه مکانیکی می‌تواند سودمند باشد. فرض کنید جعبه‌ای را روی سطح شیب‌داری با اعمال نیروی افقی بالا ببرید (شکل ۵-۱۲). نیروی عمودی N به دلیل عمود بودن بر سطح کاری انجام نمی‌دهد. اما این نیرو یک مؤلفه عمودی دارد (که بالا برنده جسم است)، و یک مؤلفه افقی (به سمت عقب) که برای خنثی کردن آن مجبور به اعمال نیروی F شدید. در این مورد چه کسی کار انجام می‌دهد؟ بدیهی است شما کار انجام می‌دهید، با این وجود، نیروی شما (که کلاً افقی است) نیرویی نیست (یا اقلماً مستقیماً نیست) که جعبه را بالا می‌برد. نیروی عمودی همان



شکل ۱۲-۵



شکل ۱۱-۵

نقش غیرفعال (اما قاطع) نیروی مغناطیسی مثال ۳-۵ را بازی می‌کند: در حالی که خود کاری انجام نمی‌دهد، عامل تغییر جهت نیروی (شما، یا باتری بسته به مورد) از وضعیت افقی به قائم است. ■

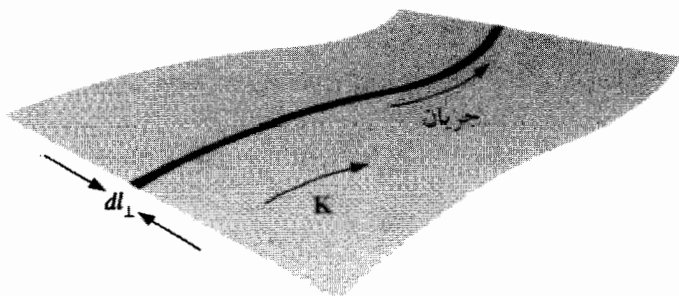
وقتی بارها از سطحی می‌گذرند، آن را برحسب چگالی جریان سطحی K به صورت زیر توصیف می‌کنیم: نواری با جزء طول dl_{\perp} به موازات جریان در نظر بگیرید (شکل ۱۳-۵). هرگاه جریان در این نوار را با dI نشان دهیم، چگالی جریان سطحی برابر است با

$$K \equiv \frac{dI}{dl_{\perp}} \quad (22-5)$$

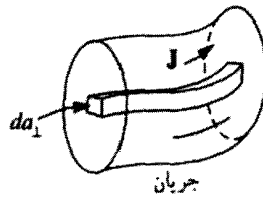
یعنی K جریان به‌ازای واحد پهنای عمود بر جریان است. حال با در نظر گرفتن σ به‌عنوان چگالی بار سطحی (متحرک) که سرعت آن v است داریم

$$K = \sigma v \quad (23-5)$$

چون بار خطی خالص نوار برابر است با σdl_{\perp} و نیز $dI = (\sigma dl_{\perp})v$ در حالت کلی K از نقطه‌ای



شکل ۱۳-۵



شکل ۱۴-۵

به نقطه دیگر سطح با تغییرات σ و یا \mathbf{v} تغییر می‌کند. نیروی مغناطیسی روی جریان سطحی برابر است با

$$\mathbf{F}_{\text{مغناطیسی}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \sigma da = \int (\mathbf{K} \times \mathbf{B}) da \quad (24-5)$$

تذکر: همان‌گونه که برای \mathbf{E} در یک بار سطحی ناپیوستگی وجود دارد، \mathbf{B} هم در یک جریان سطحی ناپیوسته است. در معادله (۲۴-۵) باید توجه داشته باشیم که میدان میانگین را به‌کار ببریم، همان‌گونه که در بخش ۳-۵-۲ عمل کردیم.

وقتی جریان بار در ناحیه‌ای سه‌بعدی توزیع شده باشد، آن را برحسب چگالی جریان حجمی، \mathbf{J} ، بیان می‌کنیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود: لوله کوچکی به مقطع da_{\perp} به موازات جریان در نظر بگیرید (شکل ۱۴-۵). اگر جریان این لوله را با $d\mathbf{I}$ نشان دهیم چگالی جریان حجمی برابر می‌شود با

$$\mathbf{J} \equiv \frac{d\mathbf{I}}{da_{\perp}} \quad (25-5)$$

یعنی، \mathbf{J} جریان واحد سطح عمود بر جریان است. هرگاه چگالی بار حجمی (متحرک) را ρ و سرعت را \mathbf{v} بگیریم داریم

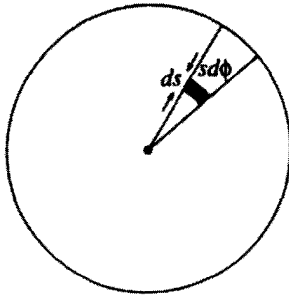
$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad (26-5)$$

نیروی مغناطیسی یک جریان حجمی برابر است با

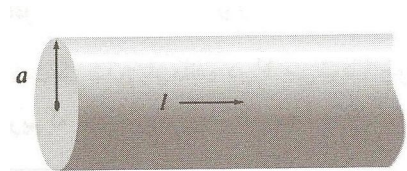
$$\mathbf{F}_{\text{مغناطیسی}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rho d\tau = \int (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d\tau \quad (27-5)$$

مثال ۴-۵

(الف) جریانی به شدت I به‌طور یکنواخت در سیمی با سطح مقطع دایره‌ای به شعاع a توزیع شده است (شکل ۱۵-۵). چگالی جریان حجمی \mathbf{J} را بیابید.



شکل ۱۶-۵



شکل ۱۵-۵

حل: سطح عمود بر جریان برابر است با πa^2 ، بنابراین

$$J = \frac{I}{\pi a^2}$$

این معادله به دلیل یکنواختی چگالی جریان صادق است.
(ب) فرض کنید که چگالی جریان این سیم با فاصله از محور متناسب باشد

$$J = ks$$

(که در آن k یک ثابت است). جریان کل سیم را پیدا کنید.

حل: چون J با s تغییر می‌کند، باید از معادله (۲۵-۵) انتگرال بگیریم. جریان در لوله سایه‌دار (شکل ۱۶-۵) برابر است با $J da_{\perp}$ و $da_{\perp} = s ds d\phi$. پس

$$I = \int (ks)(s ds d\phi) = 2\pi k \int_0^a s^2 ds = \frac{2\pi ka^3}{3}$$

بنابه معادله (۲۵-۵) جریان گذرنده از سطح S را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$I = \int_S J da_{\perp} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (28-5)$$

ضرب نقطه‌ای برای توضیح مؤلفه da کارساز است. بار کلی که در واحد زمان از یک حجم V می‌گذرد برابر است با

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) d\tau$$

از آنجایی که بار پایسته است، آنچه از سطح می‌گذرد با جریان ورودی به آن برابر است

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) d\tau = -\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau = -\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau$$

(علامت منها به معنی آن است که جریان به بیرون باعث کم شدن بار مانده در V می‌شود.) چون این را می‌توان برای هر حجمی به‌کار برد نتیجه می‌گیریم که

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad (29-5)$$

این رابطه که دقیقاً تبیین ریاضی پایستگی بار موضعی است را معادله پیوستگی می‌نامند. آنچه را در بالا برای جریانهای نقطه‌ای، خطی، سطحی و حجمی بیان کردیم می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد

$$\sum_{i=1}^n () q_i \mathbf{v}_i \sim \int_{\text{خط}} () \mathbf{I} dl \sim \int_{\text{سطح}} () \mathbf{K} da \sim \int_{\text{حجم}} () \mathbf{J} d\tau \quad (30-5)$$

این همخوانی که مشابه با $\lambda dl \sim \sigma da \sim \rho d\tau$ برای توزیعهای متفاوت بار است، مولد معادله‌های (15-5)، (24-5) و (27-5) از روی قانون نیروی مغناطیسی لورنتس (1-5) است.

مسئله 4-5 فرض کنید میدان مغناطیسی در یک ناحیه به صورت زیر باشد

$$\mathbf{B} = kz \hat{\mathbf{x}} \quad (k \text{ یک ثابت است})$$

نیروی وارد بر یک حلقه مربعی به ضلع a واقع در صفحه yz را که مرکز آن در مبدأ و حامل جریان I در جهت پاد ساعتگرد (در نگاه از بالا به محور x) است پیدا کنید.

مسئله 5-5 جریانی به شدت I از سیمی به شعاع a می‌گذرد.

(الف) چگالی جریان سطحی K با فرض توزیع یکنواخت جریان روی سطح چقدر است؟

(ب) هرگاه توزیع جریان به‌گونه‌ای باشد که چگالی جریان حجمی با عکس فاصله از محور

متناسب باشد، J چقدر است؟

مسئله 6-5 (الف) یک صفحه گرامافون دارای چگالی یکنواخت "الکتریسته ساکن" برابر σ است. اگر این صفحه با سرعت زاویه‌ای ω بچرخد چگالی جریان سطحی K در یک فاصله r از مرکز آن چقدر است؟

(ب) یک کره صلب به شعاع R که مرکز آن در مبدأست به صورت یکنواخت باردار شده است و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور z می‌چرخد. چگالی جریان \mathbf{J} را در نقطه (r, θ, ϕ) در داخل کره حساب کنید.

مسئله ۷-۵ نشان دهید که برای یک مجموعه بارها و جریانهای مقید در یک حجم V داریم

$$\int_V \mathbf{J} d\tau = d\mathbf{p}/dt$$

که در آن \mathbf{p} گشتاور دوقطبی مغناطیسی کل است. (راهنمایی: $\int_V \nabla \cdot (x\mathbf{J}) d\tau$ را حساب کنید).
□

۲-۵ قانون بیوساوار

۱-۲-۵ جریانهای پایا

بارهای ساکن میدانهای الکتریکی ثابت نسبت به زمان تولید می‌کنند؛ این مقوله موضوع الکتروستاتیک^۱ است. جریانهای پایا، میدانهای مغناطیسی که نسبت به زمان ثابت هستند ایجاد می‌کنند. به این دلیل نظریهٔ جریانهای پایا را مغناطوستاتیک می‌نامند.

بارهای ساکن \iff میدان الکتریکی ثابت: الکتروستاتیک
جریانهای پایا \iff میدان مغناطیسی ثابت: مغناطوستاتیک

منظور از جریان پایا جریان بیوسهٔ بارهاست که همواره بدون افزایش یا کاهش و تغییر، تداوم می‌یابد. (بعضیها آن را ”جریانهای مانا“ می‌نامند که به نظر ایجاد مشکل می‌کند). البته، در عمل همچنان که بار واقعاً ساکن وجود ندارد، جریان واقعاً پایا هم وجود ندارد. از این منظر هم الکتروستاتیک و هم مغناطوستاتیک دنیایی ساختگی را بیان می‌کنند که فقط در کتابهای درسی می‌توان یافت. با وجود این، آنها تقریبهای مناسبی هستند به شرط آنکه افت و خیزهای واقعی کند باشند؛ در واقع بیشتر مقاصد مغناطوستاتیک برای جریانهای خانگی که ثانیه‌ای 60 بار نوسان می‌کنند کاربرد دارد!

۱. در واقع الزاماً تمام بارها ساکن نیستند، اما چگالی بار در هر نقطه ثابت است. به عنوان مثال کرهٔ مسئله ۵-۶ (ب) میدانی الکتروستاتیک برابر با $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (Q/r^2) \hat{\mathbf{r}}$ ، حتی وقتی هم که می‌چرخد تولید می‌کند، زیرا ρ به زمان بستگی ندارد.

توجه داشته باشید که یک بار نقطه‌ای متحرک احتمالاً نمی‌تواند یک جریان پایا بسازد. در یک لحظه که بار در نقطه‌ای است لحظه دیگر در محل دیگر خواهد بود. گرچه این مسئله ممکن است کوچک جلوه کند اما خود در دسرساز است. ملاحظه می‌کنید که هر مبحثی در الکتروستاتیک را با بار نقطه‌ای ساکن شروع کردیم؛ آن‌گاه با استناد به اصل برهم‌نهی آن را برای هر نوع توزیع دلخواه بار تعمیم دادیم. این شیوه برای مغناطوستاتیک قابل تکرار نیست زیرا بار نقطه‌ای متحرک، ایجاد یک میدان ایستا در مکان اولیه نمی‌کند. از این رو مجبوریم از توزیع جریان شروع کنیم و در نتیجه کار مشکلتر می‌شود.

وقتی جریانی پایا از سیمی می‌گذرد، باید در طول سیم مقدارش ثابت باشد؛ در غیر این صورت باید بار در نقطه‌ای انباشته باشد و این جریان نمی‌تواند پایا باشد. به همین منوال برای حالت مغناطوستاتیک باید $\partial \rho / \partial t = 0$ و معادله پیوستگی (۲۹-۵) می‌شود

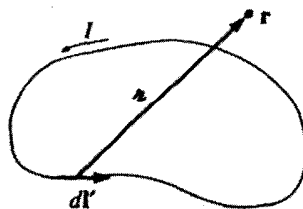
$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (31-5)$$

۲-۲-۵ میدان مغناطیسی یک جریان پایا

میدان مغناطیسی حاصل از یک جریان خطی پایا از قانون بیوساوار به دست می‌آید

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l}' \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (32-5)$$

انتگرال در طول مسیر جریان و در جهت جریان گرفته می‌شود؛ dl' یک جزء طول سیم است و \mathbf{r} ، چون همیشه، برداری است که چشمه را به نقطه \mathbf{r} وصل می‌کند (شکل ۱۷-۵). ثابت μ_0 را



شکل ۱۷-۵

تراوایی فضای آزاد می‌نامند:^۱

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 \quad (33-5)$$

این یکاها به‌گونه‌ای هستند که B برحسب نیوتون بر آمپر-متر (طبق قانون نیروی لورنتس)، یا تسلا^۲ (T) به دست می‌آید

$$1 \text{ T} = 1 \text{ N}/(\text{A} \cdot \text{m}) \quad (34-5)$$

نقطه شروع مغناطوستاتیک قانون بیوساوار است که نقش قانون کولن در الکتروستاتیک را دارد. در واقع قانون $1/\pi^2$ در هر دو مورد صادق است.

مثال ۵-۵

میدان مغناطیسی را در فاصله s از یک سیم طویل حامل جریان پایای I حساب کنید (شکل ۵-۱۸).

حل: در نمودار، جهت $(d\mathbf{l}' \times \hat{\mathbf{r}})$ به طرف خارج صفحه است و بزرگی آن برابر است با

$$dl' \sin \alpha = dl' \cos \theta$$

و نیز داریم $l' = s \tan \theta$ بنابراین

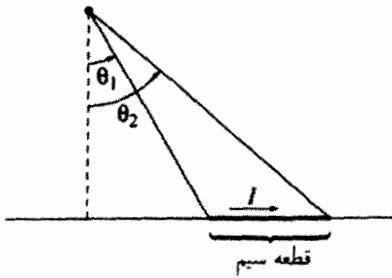
$$dl' = \frac{s}{\cos^2 \theta} d\theta$$

و $s = \pi \cos \theta$ بنابراین

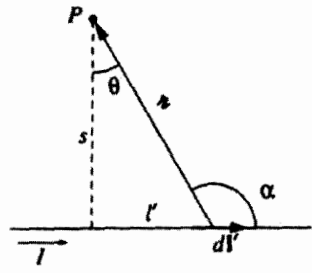
$$\frac{1}{\pi^2} = \frac{\cos^2 \theta}{s^2}$$

۱. این یک عدد دقیق است و نه یک ثابت تجربی. از این عدد [با استفاده از معادله (۳۷-۵)] امیر تعریف می‌شود و از روی امپر هم کولن تعریف می‌شود.

۲. بنابه دلیلی، در این مورد یکای cgs یعنی گاوس بیشتر از یکای SI به کار می‌رود: $1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$. میدان مغناطیسی زمین حدود نیم گاوس است. یک میدان قوی آزمایشگاهی حدود ۱۰۰۰۰ گاوس است.



شکل ۱۹-۵



شکل ۱۸-۵

بنابراین

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{\cos^2 \theta}{s^2} \right) \left(\frac{s}{\cos^2 \theta} \right) \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \quad (۳۵-۵)$$

معادله (۳۵-۵) میدان حاصل از هر سیم مستقیم را برحسب زوایای اولیه و نهایی θ_1 و θ_2 (شکل ۱۹-۵) به دست می‌دهد. بدیهی است هر طول متناهی خودش به تنهایی نمی‌تواند جریانی پایا داشته باشد (وقتی بارها به انتهای سیم می‌رسند چه می‌شود؟)، اما می‌توان آن را قسمتی از یک مدار بسته در نظر گرفت و معادله (۳۵-۵) سهم سیم را در میدان کل نشان می‌دهد. در مورد خاص سیم نامتناهی داریم $\theta_1 \rightarrow -\pi/2$ و $\theta_2 \rightarrow \pi/2$ ، و نیز به دست می‌آید

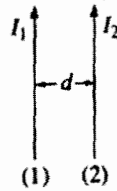
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \quad (۳۶-۵)$$

توجه کنید که میدان با عکس فاصله از سیم متناسب است — دقیقاً همانند میدان الکتریکی بارهای خطی نامحدود. در نواحی زیر سیم، B به طرف داخل صفحه است، و به طور کلی با قاعده دست راست که قبلاً بیان شد میدان سیم را دور می‌زند (شکل ۳-۵).

به عنوان یک مثال کاربردی نیروی جاذبه بین دو سیم بلند موازی را که به فاصله d از یکدیگر قرار دارند و حامل جریانهای I_1 و I_2 هستند حساب می‌کنیم (شکل ۲۰-۵). میدان در محل

سیم (۲) ناشی از (۱) برابر است با

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$



شکل ۵-۲۰

و به طرف داخل صفحه است. قانون نیروی لورنتس [به صورتی درخور برای جریان خطی معادله (۵-۱۷)] نیرویی را که جهت آن به طرف سیم (۱) است پیش بینی می کند که اندازه آن برابر است با

$$F = I_2 \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \right) \int dl$$

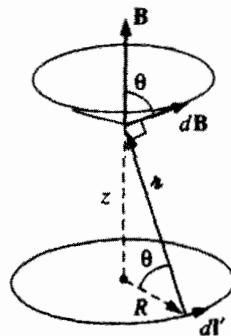
نیروی کل، همان طور که انتظار می رود نامتناهی است، اما نیروی مؤثر به ازای واحد طول برابر است با

$$f = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \quad (۵-۳۷)$$

هرگاه جریانها پادموازی باشند (یکی بالا، یکی پایین) نیرو دافعه است که باز هم با ملاحظات کیفی بخش ۱-۵ سازگار است. ■

مثال ۵-۶

میدان مغناطیسی را در فاصله z از مرکز حلقه ای به شعاع R که حامل جریانی پایا به شدت I است، حساب کنید (شکل ۵-۲۱).



شکل ۵-۲۱

حل: میدان $d\mathbf{B}$ حاصل از قطعه $d\mathbf{l}'$ مطابق شکل است. با انتگرال‌گیری $d\mathbf{l}'$ دور حلقه، $d\mathbf{B}$ مخروطی را می‌پیماید. مؤلفه‌های افقی خنثی می‌شوند و مجموع مؤلفه‌های عمودی می‌شود

$$B(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l}'}{r^2} \cos \theta$$

(توجه کنید که $d\mathbf{l}'$ و $\hat{\mathbf{n}}$ بر یکدیگر عمودند، در این مورد عامل $\cos \theta$ مؤلفه قائم را ایجاد می‌کند.) اما $\cos \theta$ و r^2 هر دو ثابت هستند و $\int d\mathbf{l}'$ هم محیط $2\pi R$ حلقه است، بنابراین

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (38-5)$$

قانون بیوساوار برای جریانهای سطحی و حجمی به صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}}{r^2} da' \quad \text{و} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}}{r^2} d\tau' \quad (39-5)$$

می‌توانید فرمول متناظری برای یک بار نقطه‌ای متحرک با استفاده از (5-30) به صورت زیر در آورید

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{n}}}{r^2} \quad (40-5)$$

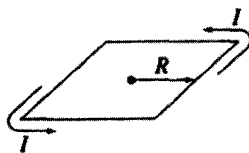
اما این نتیجه‌گیری غلط است.^۱ همان‌گونه که قبلاً گفتیم یک بار نقطه‌ای نمی‌تواند جریان پایا ایجاد کند، و قانون بیوساوار که فقط برای جریانهای پایا صادق است به درستی میدان را مشخص نمی‌کند.

تصادفاً اصل برهم‌نهی هم در مورد میدانهای مغناطیسی همانند میدانهای الکتریکی صادق است: هرگاه مجموعه‌ای از چشمه‌های جریان داشته باشیم، میدان کل برابر است با مجموع (برداری) میدانهای حاصل از هر چشمهٔ جریان.

مسئله ۸-۵ (الف) میدان مغناطیسی را در مرکز یک حلقهٔ مربعی که حامل جریان I است حساب کنید. R را فاصله مرکز مربع از یک ضلع بگیرید (شکل ۵-۲۲).
(ب) میدان را در مرکز یک n ضلعی منتظم که حامل جریان I است بیابید. باز هم فاصلهٔ این نقطه از یک ضلع را R بگیرید.

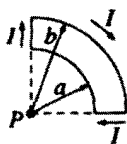
۱. به جرأت چنین ادعایی می‌کنیم و بر نکته‌ای اصولی تأکید می‌کنیم: در واقع معادله (5-40) برای بارهای غیرنسبیتی ($v \ll c$) و در شرایطی که بتوان از پس‌افت صرف‌نظر کرد به‌طور تقریبی درست است (به مثال ۱۰-۴ توجه کنید).

(ج) نشان دهید که به ازای $n \rightarrow \infty$ فرمول حاصل، میدان یک حلقه دایره‌ای را در مرکزش نمایش می‌دهد.

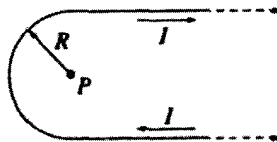


شکل ۲۲-۵

مسئله ۹-۵ میدان مغناطیسی را در نقطه P برای هریک از بیکر بندهای جریان در شکل ۲۳-۵ بیابید.



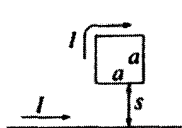
(الف)



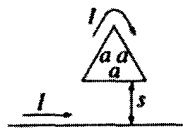
(ب)

شکل ۲۳-۵

مسئله ۱۰-۵ (الف) نیروی وارد بر حلقه مربعی شکل ۲۴-۵ (الف) را که در نزدیکی یک سیم نامتناهی قرار دارد بیابید. هم سیم طولی و هم حلقه مربعی حامل جریان I هستند. (ب) نیروی وارد بر حلقه مثلثی شکل ۲۴-۵ (ب) را بیابید.



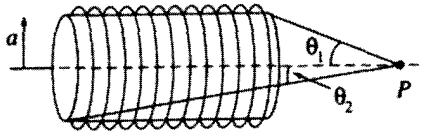
(الف)



(ب)

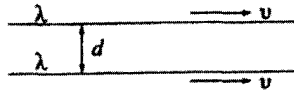
شکل ۲۴-۵

مسئله ۱۱-۵ میدان مغناطیسی را در نقطه P روی محور یک سیمولوله با سیم‌بجهای بسیار نزدیک به هم (حلقه مارپیچی) که در استوانه‌ای به شعاع a و با n دور در واحد طول پیچیده شده و حامل جریان I است بیابید (شکل ۲۵-۵). پاسخ خود را برحسب θ_1 و θ_2 بیان کنید (این ساده‌ترین راه است). حلقه را دایره بگیرید و از نتیجه مثال ۶-۵ استفاده کنید. میدان را روی محور یک سیمولوله نامتناهی (از دو طرف) پیدا کنید.



شکل ۵-۲۵

مسئله ۵-۱۲ فرض کنید بارهای خطی λ با سرعت v از دو سیم نامتناهی موازی که به فاصله d از یکدیگر واقع اند، بگذرند (شکل ۵-۲۶). سرعت v را طوری بیابید که نیروی جاذبه حاصل با نیروی دافعه الکتریکی برابر باشد. با اعمال مقادیر عددی ببینید که آیا چنین سرعتی معقول است؟^۱

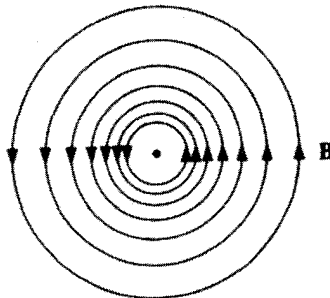


شکل ۵-۲۶

۵-۳ دیورژانس و تاو B

۵-۳-۱ جریانهای مستقیم الخط

میدان مغناطیسی یک سیم مستقیم نامتناهی را در شکل ۵-۲۷ نشان داده‌ایم (جهت جریان به طرف بیرون صفحه است). بدیهی است که این میدان تاو غیر صفر دارد (چیزی که هیچ‌گاه در میدان



شکل ۵-۲۷

۱. اگر نظریه نسبیت خاص را خوانده باشید ممکن است پیچیدگیهایی برای مسئله برایتان متصور شود که در واقع چنین نیست — λ و v هر دو در چارچوب آزمایشگاهی سنجیده می‌شوند و این الکتروستاتیک معمولی است (پانوشت صفحه ۲۷۴ را ببینید).

الکتروستاتیک دیده نمی‌شود؛ بیابید به محاسبه آن بپردازیم.

بنابر معادله (۴۶-۵)، انتگرال B روی مسیر دایره‌ای به شعاع s که سیم در مرکز آن قرار دارد برابر است با

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi s} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \oint dl = \mu_0 I$$

توجه کنید که جواب مستقل از s است؛ علت این است که B به همان میزان افزایش محیط دایره کاهش می‌یابد. در واقع لازم نیست مسیر دایره‌ای باشد، برای هر حلقه در برگرفته سیم به همین جواب می‌رسیم. زیرا اگر از مختصات استوانه‌ای (s, φ, z) استفاده کنیم، برای یک جریان ممتد در امتداد محور z داریم

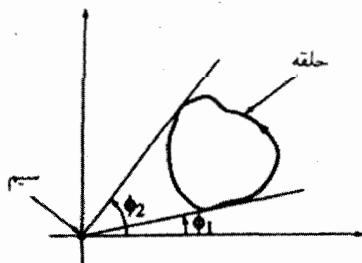
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi} \quad (۴۱-۵)$$

و $d\mathbf{l} = ds \hat{s} + s d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$ بنابراین

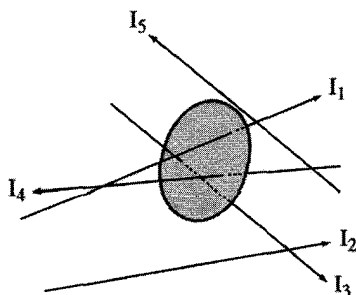
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint \frac{1}{s} s d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = \mu_0 I$$

این جواب را با فرض آنکه حلقه سیم را دقیقاً یک بار دور می‌زند به دست آوردیم؛ اگر تعداد دورها دو برابر شود، آنگاه φ از صفر تا ۴π تغییر می‌کند، و اگر حلقه سیم را به هیچ وجه دربرنگیرد، آنگاه φ از φ_۱ تا φ_۲ رفته و برمی‌گردد به طوری که $\int d\phi = 0$ (شکل ۲۸-۵).

حال فرض کنید یک دسته از سیمهای مستقیم داریم. هر سیمی که داخل حلقه قرار گیرد به میزان $\mu_0 I$ سهم دارد و آنهایی که خارج حلقه باشند هیچ سهمی ندارند (شکل ۲۹-۵). در



شکل ۲۸-۵



شکل ۲۹-۵

این صورت انتگرال خطی چنین است

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{محصور}} \quad (۴۲-۵)$$

که در آن $I_{\text{محصور}}$ به معنی جریان کل محصور در مسیر انتگرال‌گیری است. هرگاه جریان بار را با چگالی جریان حجمی \mathbf{J} نمایش دهیم، آن‌گاه جریان محصور در حلقه می‌شود

$$I_{\text{محصور}} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (۴۳-۵)$$

که انتگرال روی سطحی که کران آن حلقه است، گرفته می‌شود. با اعمال قضیه استوکس به معادله (۴۲-۵) داریم

$$\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

و از این رو

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (۴۴-۵)$$

در واقع با کمترین زحمت فرمولی کلی برای تاو \mathbf{B} به دست آوردیم. اما ایراد این یافته آن است که کاربردش محدود به جریان خطی مستقیم نامتناهی (و یا ترکیبی از آنها) است. در بیشتر موارد با سیم مستقیم نامتناهی سروکار نداریم، و حق نداریم از معادله (۴۴-۵) استفاده کنیم. در بخش بعدی با استفاده از قانون بیوساوار، دیورژانس و تاو \mathbf{B} را حساب می‌کنیم.

۲-۳-۵ دیورژانس و تاور B

قانون بیوساوار برای مورد کلی یک جریان حجمی عبارت است از

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}}{r'^2} d\tau' \quad (۴۵-۵)$$

این فرمول، میدان مغناطیسی را در نقطه $\mathbf{r} = (x, y, z)$ برحسب انتگرال روی توزیع جریان $\mathbf{J}(x', y', z')$ به دست می دهد (شکل ۵-۳۰). بهتر آن است در همین مرحله تصریح کنیم که

\mathbf{B} تابعی از (x, y, z) است،

\mathbf{J} تابعی از (x', y', z') است،

$$\mathbf{n} = (x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}},$$

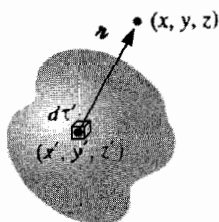
$$d\tau' = dx' dy' dz'$$

انتگرال روی مختصات پریم دار گرفته می شود؛ دیورژانس و تاور را روی مختصات بدون پریم می گیریم. با اعمال دیورژانس به معادله (۴۵-۵) به دست می آوریم

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \left(\mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{n}}}{r'^2} \right) d\tau' \quad (۴۶-۵)$$

با توجه به قاعده حاصلضرب شماره (۶) داریم

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{n}}}{r'^2} \right) = \frac{\hat{\mathbf{n}}}{r'^2} \cdot (\nabla \times \mathbf{J}) - \mathbf{J} \cdot \left(\nabla \times \frac{\hat{\mathbf{n}}}{r'^2} \right) \quad (۴۷-۵)$$



شکل ۵-۳۰

اما $\nabla \times \mathbf{J} = 0$ ، زیرا \mathbf{J} به متغیرهای بدون پریم (x, y, z) وابسته نیست، در صورتی که $\nabla \times (\hat{\mathbf{r}}/\pi^2) = 0$ باشد (مسئله ۱-۶۲)، بنابراین

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \quad (۴۸-۵)$$

یعنی دیورژانس میدان مغناطیسی صفر است.
با اعمال تاو به معادله (۴۵-۵) به دست می‌آوریم

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left(\mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{\pi^2} \right) d\tau' \quad (۴۹-۵)$$

باز هم استراتژی ما بسط انتگرالده، با استفاده از قاعده ضرب مناسب است — در این مورد شماره ۸ است

$$\nabla \times \left(\mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{\pi^2} \right) = \mathbf{J} \left(\nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{\pi^2} \right) - (\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{\pi^2} \quad (۵۰-۵)$$

از جمله‌هایی که در آنها مشتقات \mathbf{J} وجود دارند صرف نظر کرده‌ایم، زیرا \mathbf{J} به (x, y, z) وابسته نیست). انتگرال جمله دوم صفر می‌شود و این را در بند بعدی نشان می‌دهیم. جمله اول هم شامل دیورژانسی است که برای محاسبه آن در فصل ۱ مشکل داشتیم [معادله (۱-۱۰۰)]

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{\pi^2} \right) = 4\pi \delta^3(\mathbf{r}) \quad (۵۱-۵)$$

از این رو داریم

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') 4\pi \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau' = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

و این نشان می‌دهد که معادله (۴۴-۵) مختص جریانهای مستقیم الخط نیست و برای مغناطوستاتیک کلاً صادق است. برای تکمیل بحث باید ثابت کنیم که انتگرال جمله دوم در معادله (۵۰-۵) صفر می‌شود. از آنجایی که مشتق فقط روی $\hat{\mathbf{r}}/\pi^2$ عمل می‌کند، می‌توانیم از ∇ به ∇' با در نظر گرفتن یک علامت منها، روی آوریم

$$-(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{\pi^2} = (\mathbf{J} \cdot \nabla') \frac{\hat{\mathbf{r}}}{\pi^2} \quad (۵۲-۵)$$

۱. نکته در اینجاست که π فقط به اختلاف مختصات بستگی دارد و $(\partial/\partial x)f(x-x') = -(\partial/\partial x')f(x-x')$

مؤلفه x آن (با استفاده از قاعده حاصلضرب Δ) می‌شود

$$(\mathbf{J} \cdot \nabla') \left(\frac{x - x'}{r^2} \right) = \nabla' \cdot \left[\frac{(x - x')}{r^2} \mathbf{J} \right] - \left(\frac{x - x'}{r^2} \right) (\nabla' \cdot \mathbf{J})$$

برای جریانهای پایا، دیورژانس \mathbf{J} صفر است [معادله (۳۱-۵)]، بنابراین

$$\left[-(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{r}}{r^2} \right]_{\mathbf{x}} = \nabla' \cdot \left[\frac{(x - x')}{r^2} \mathbf{J} \right]$$

و لذا، این سهم انتگرال (۴۹-۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\int_V \nabla' \cdot \left[\frac{(x - x')}{r^2} \mathbf{J} \right] d\tau' = \oint_S \frac{(x - x')}{r^2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}' \quad (۵۳-۵)$$

(دلیل استفاده از ∇' به جای ∇ امکان انتگرالگیری جزء به جزء است). اما روی چه ناحیه‌ای انتگرال می‌گیریم؟ روی حجمی که در قانون بیوساوار مشخص می‌شود (۴۵-۵) — حجمی بزرگ که همه جریان را در بر می‌گیرد. شما می‌توانید در صورت تمایل آن را بزرگتر هم بکنید: در خارج از آن حجم همه جا $\mathbf{J} = 0$ است و بنابراین چیزی به انتگرال اضافه نمی‌شود. نکته اساسی این است که روی کرانه، جریان صفر است (تمام جریان در داخل است) و از این رو انتگرال سطحی (۵۳-۵) صفر می‌شود.

۳-۳-۵ کاربردهای قانون آمپر

معادله تاور B یعنی

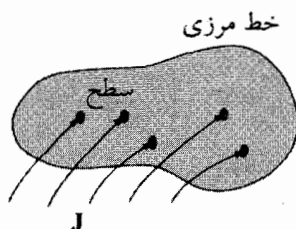
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (۵۴-۵)$$

را قانون آمپر (به صورت دیفرانسیلی) می‌نامند. این معادله را با اعمال یکی از قضایای بنیادی — در این مورد خاص، قانون استوکس، می‌توان به صورت انتگرالی در آورد

$$\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

اما $\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ جریان کل گذرنده از درون سطح است (شکل ۳۱-۵) که آن را بصورت I می‌خوانیم

۱. هرگاه \mathbf{J} خود تا بی‌نهایت ادامه داشته باشد (چنانکه در مورد سیم مستقیم نامتناهی بود)، انتگرال سطحی نوعاً صفر می‌شود، از این رو در تحلیل به دقت بیشتری نیاز داریم.



شکل ۳۱-۵

جریان داخل حلقه آمپر. از این رو

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{محصور}} \quad (۵۵-۵)$$

این، صورت انتگرالی قانون آمپر است؛ این معادله معادله (۴۲-۵) را به هر جریان پایای دلخواه تعمیم می‌دهد. توجه کنید که معادله (۵۵-۵) همان ابهام علامتی قضیه استوکس (بخش ۱-۳-۵) را با خود دارد؛ از کدام مسیر حلقه را بپیماییم؟ و کدام جهت از درون سطح متناظر با جریان "مثبت" است؟ جواب چون همیشه قاعده دست راست است: اگر انگشتهای دست راست شما در جهت انتگرال‌گیری قرار گیرند، آنگاه انگشت شست جهت جریان مثبت را نشان می‌دهد. همان‌گونه که قانون بیوساوار در مغناطوستاتیک متناظر با قانون کولن در الکتروستاتیک است، نقش قاعده آمپر هم متناظر با قانون گاوس است

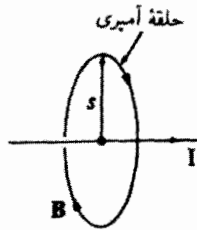
$$\left. \begin{array}{l} \text{الکتروستاتیک: کولن} \leftarrow \text{گاوس} \\ \text{مغناطوستاتیک: بیوساوار} \leftarrow \text{آمپر} \end{array} \right\}$$

به‌ویژه در مورد جریان‌هایی با تقارن مناسب، قانون آمپر به‌صورت انتگرالی ابزاری فوق‌العاده کارآمد برای محاسبه میدان مغناطیسی است.

مثال ۵-۷

میدان مغناطیسی حاصل از یک سیم مستقیم طولی حامل جریان I را در فاصله s از آن بیابید (شکل ۳۲-۵)، (این مسئله را در مثال ۵-۵ با استفاده از قانون بیوساوار حل کردیم).

حل: می‌دانیم که جهت \mathbf{B} بر دایره‌ای که دور سیم و طبق قاعده دست راست می‌گذرد قرار دارد. بنابر تقارن، مقدار \mathbf{B} حول یک حلقه آمپری به شعاع s و به مرکز سیم، ثابت است. بنابراین طبق



شکل ۳۲-۵

قانون آمپر داریم

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint dl = B 2\pi s = \mu_0 I_{\text{محور}} = \mu_0 I$$

یا

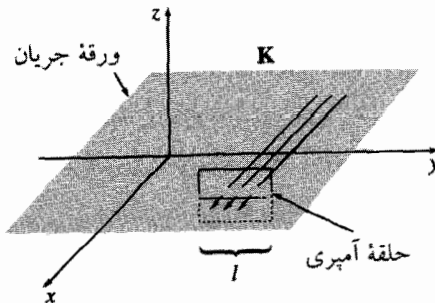
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

این همان نتیجه‌ای است که از قبل [با معادله (۳۶-۵)] داشتیم، اما این بار با زحمت کمتری به دست آمد.

مثال ۸-۵

میدان مغناطیسی یک جریان سطحی یکنواخت و نامتناهی $\mathbf{K} = K \hat{x}$ گذرنده از صفحه xy را حساب کنید (شکل ۳۳-۵).

حل: قبل از هر چیز ببینیم جهت B کدام است؟ آیا مؤلفه x دارد؟ خیر: با مختصر توجه به قانون بیوساوار (۳۹-۵) درمی‌یابیم که B بر K عمود است. آیا مؤلفه z دارد؟ باز هم خیر. این را از آنجا



شکل ۳۳-۵

می فهمیم که هر میزان سهم عمودی از یک جزء در y + با جزء متناظری در y - خنثی می شود. اما استدلال بهتری وجود دارد. فرض کنید جهت میدان به طرف بیرون صفحه باشد. با معکوس کردن جهت جریان، میدان به سمت داخل صفحه قرار می گیرد (در قانون بیوساوار با تغییر علامت جریان، جهت میدان عوض می شود). اما مؤلفه z میدان B احتمالاً به جهت جریان در صفحه xy بستگی ندارد. (در این باره فکر کنید!) بنابراین B تنها می تواند y داشته باشد و با توجه به قاعده دست راست متقاعد می شویم که جهت آن در بالای صفحه به سمت چپ و در پایین آن به سمت راست است. با توجه به این نکات یک حلقه آمبری مستطیلی مطابق شکل ۵-۳۳ و به موازات صفحه z y که به فاصله مساوی در بالا و پایین صفحه قرار دارد را در نظر می گیریم. با اعمال قانون آمپر درمی یابیم که

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2Bl = \mu_0 I_{\text{محور}} = \mu_0 Kl$$

(یک Bl به جزء بالا و دیگری به پایین متعلق است)، از این رو $B = (\mu_0/2)K$ ، یا دقیقتر

$$\mathbf{B} = \begin{cases} +(\mu_0/2)K \hat{y} & z < 0 \text{ برای} \\ -(\mu_0/2)K \hat{y} & z > 0 \text{ برای} \end{cases} \quad (56-5)$$

توجه کنید که میدان مستقل از فاصله از صفحه است همان گونه که میدان الکتریکی یک بار سطحی یکنواخت مثال ۲-۴ چنین بود. ■

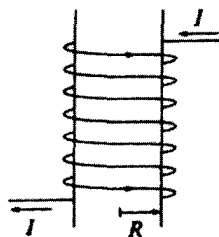
مثال ۵-۹

میدان مغناطیسی یک سیمولوله طویل متشکل از n دور سیم نزدیک هم پیچیده شده در واحد طول به دور استوانه ای به شعاع R را که از آن جریان ثابت I می گذرد پیدا کنید (شکل ۵-۳۴). [علت نزدیک به هم پیچیدن سیمها، اطمینان از دایره ای بودن آنهاست. اگر این کار برایتان زحمت دارد (چون، یک جریان خالص I در امتداد محور سیمولوله خواهیم داشت که مستقل از نزدیکی یا دوری سیم پیچها از یکدیگر است)، یک ورقه نازک آلومینیومی که دور استوانه پیچیده شده است در نظر بگیرید که جریان سطحی معادل $K = nI$ دارد (شکل ۵-۳۵). یا سیم پیچهای دوتایی در نظر بگیرید که به یک انتهای استوانه رفته و دوباره به پایین برمی گردد و بدین ترتیب جریان کل صفر می شود. اما در واقع این کارهای غیر ضروری نمی تواند میدان (تقریباً) بزرگ داخل سیمولوله را نادیده بگیرد، و تأثیر میدان جریان طولی را حداکثر می توان به صورت تصحیحی کوچک در نظر گرفت.]

حل: قبل از هر چیز این پرسش مطرح می شود که جهت B کدام است؟ آیا میدان مؤلفه ای شعاعی دارد؟ خیر. زیرا اگر فرض کنیم B_θ مثبت است، هر گاه جهت جریان را معکوس کنیم، آن گاه B_θ



شکل ۳۵-۵



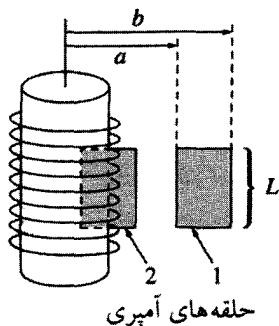
شکل ۳۴-۵

منفی خواهد بود. اما تغییر جهت I از نظر فیزیکی معادل سرو ته کردن سیملوله است، و بدیهی است که بدین سان جهت میدان شعاعی عوض نمی‌شود. دربارهٔ مؤلفه «دایره‌ای» چه؟ باز هم خیر. زیرا B_ϕ حول یک حلقهٔ آمپری هم‌مرکز با سیملوله ثابت خواهد بود (شکل ۳۶-۵)، و بنابراین

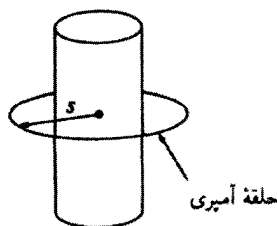
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_\phi (\gamma \pi s) = \mu_0 I_{\text{محور}} = 0$$

چون این حلقه جریانی را در برنمی‌گیرد.

بنابراین میدان مغناطیسی یک سیملولهٔ طویل نامتناهی با سیم‌پیچهای نزدیک به هم موازی محور خواهد بود. از روی قاعده دست راست جهت این میدان در داخل سیملوله به سمت بالا و در بیرون آن به سمت پایین است. افزون بر این در فاصله‌های زیاد این میدان به صفر میل می‌کند. با این ملاحظات قانون آمپر را برای دو حلقهٔ مستطیلی شکل ۳۷-۵ اعمال می‌کنیم. حلقهٔ ۱ کاملاً



شکل ۳۷-۵



شکل ۳۶-۵

خارج سیمولوله و دو طرف آن به فاصله‌های a و b از محور قرار دارد

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = [B(a) - B(b)]L = \mu_0 I_{\text{محور}} = 0$$

بنابراین

$$B(a) = B(b)$$

بدیهی است که میدان بیرون استوانه به فاصله از محور بستگی ندارد. اما می‌دانیم که این میدان در فاصله‌های زیاد s به صفر میل می‌کند. از این رو باید همه جا صفر باشد! (این نتیجه حیرت‌انگیز را از قانون بیوساوار نیز می‌توان گرفت، اما با دشواری بیشتر. به مسئله ۴۴-۵ توجه کنید). برای حلقه ۲ که نصف آن داخل و نصف دیگر بیرون استوانه است، قانون آمپر می‌دهد

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = BL = \mu_0 I_{\text{محور}} = \mu_0 nIL$$

که در آن B میدان در داخل سیمولوله است. (در خارج سیمولوله B صفر است). نتیجه‌گیری:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 nI\hat{\mathbf{z}} & \text{داخل سیمولوله} \\ 0 & \text{بیرون سیمولوله} \end{cases} \quad (57-5)$$

توجه کنید که میدان داخلی یکنواخت است؛ از این منظر نقش سیمولوله در مغناطوستاتیک همانند نقش خازن با صفحات موازی در الکتروستاتیک است: ابزار ساده‌ای برای تولید میدان یکنواخت و قوی. ■

قانون آمپر هم همانند قانون گاوس (برای جریانهای پایا)، همواره صادق است اما همیشه مفید نیست، تنها در مواردی که به دلیل تقارن در مسئله بتوانیم B را از داخل انتگرال $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ بیرون آوریم قادریم آن را از طریق قانون آمپر محاسبه کنیم. در چنین مواردی اعمال قانون آمپر کار را بسیار ساده می‌کند و در غیر این صورت برای محاسبه B باید به قانون بیوساوار متوسل شویم. بعضی توزیعهای جریان قابل استفاده با کاربرد قانون آمپر عبارت‌اند از:

۱. خطوط نامتناهی مستقیم (به‌عنوان نمونه: مثال ۷-۵).

۲. صفحات نامتناهی (به‌عنوان نمونه: مثال ۸-۵).

۳. سیملوله نامتناهی (به عنوان نمونه: مثال ۵-۹).

۴. چنبره (به عنوان نمونه: مثال ۵-۱۰).

نمونه آخر از این سری، کاربرد مهم و شگفت‌انگیزی از قانون آمپر است که در مثال زیر ذکر می‌کنیم. همانند مثالهای ۵-۸ و ۵-۹، قسمت دشوار کار تعیین جهت میدان است (که برای تمام چهار مثال انجام شده است)؛ کاربرد واقعی قانون آمپر تنها در یک سطر انجام می‌گیرد.

مثال ۵-۱۰

یک پیچۀ چنبره‌ای از حلقه‌های دایره‌ای یا "دونات" تشکیل شده است که دور آن سیم طولی پیچیده شده است (شکل ۵-۳۸). سیم پیچها یکنواخت و بسیار نزدیک به یکدیگرند به گونه‌ای که هر دور از آنها را می‌توان حلقه‌ای بسته در نظر گرفت. شکل سطح مقطع حلقه مهم نیست. در شکل ۵-۳۸ این مقطع را برای سادگی مستطیلی در نظر گرفته‌ایم، اما می‌توان دایره‌ای یا شکل نامتقارن تری همانند شکل ۵-۳۹ نیز در نظر گرفت، تنها باید شکل سیم پیچها همه جا یکنواخت باشد. با این شرایط میدان مغناطیسی چنبره در تمام نقطه‌های داخل و خارج، بیرامونی است.

اثبات: بنابه قانون بیوساوار میدان در یک نقطه \mathbf{r} ناشی از جزء جریان در \mathbf{r}' عبارت است از

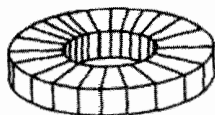
$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{I} \times \boldsymbol{\pi}}{r^2} dl'$$

می‌توان \mathbf{r} را در صفحه xz نیز در نظر گرفت (شکل ۵-۳۹)، بنابراین مؤلفه‌های دکارتی آن عبارت‌اند از $(x, 0, z)$ ، در حالی که مختصات چشمه عبارت‌اند از

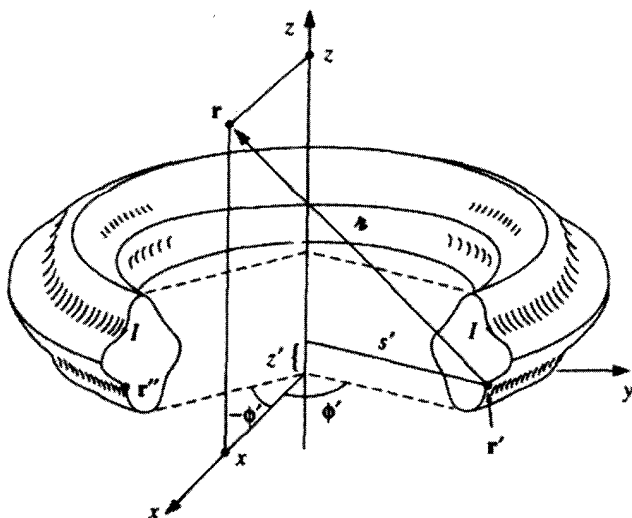
$$\mathbf{r}' = (s' \cos \phi', s' \sin \phi', z')$$

آن‌گاه

$$\boldsymbol{\pi} = (x - s' \cos \phi', -s' \sin \phi', z - z')$$



شکل ۵-۳۸



شکل ۳۹-۵

چون جریان مؤلفه ϕ ندارد، $\mathbf{I} = I_s \hat{s} + I_z \hat{z}$ ، یا (در مختصات دکارتی)

$$\mathbf{I} = (I_s \cos \phi', I_s \sin \phi', I_z)$$

و بنابراین

$$\mathbf{I} \times \boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ I_s \cos \phi' & I_s \sin \phi' & I_z \\ (x - s' \cos \phi') & (-s' \sin \phi') & (z - z') \end{bmatrix}$$

$$= [\sin \phi' (I_s (z - z') + s' I_z)] \hat{x}$$

$$+ [I_z (x - s' \cos \phi') - I_s \cos \phi' (z - z')] \hat{y} + [-I_s x \sin \phi'] \hat{z}$$

اما یک جزء جریان، با همان s' ، همان $\boldsymbol{\pi}$ ، همان $d\mathbf{l}'$ ، همان I_s و همان I_z ، اما با ϕ' منفی به طور متقارن در \mathbf{r}'' قرار دارد (شکل ۳۹-۵). با توجه به اینکه علامت $\sin \phi'$ تغییر می‌کند، تأثیرات \hat{x} و \hat{z} در \mathbf{r}'' و \mathbf{r}' یکدیگر را خنثی می‌کنند و فقط جمله مربوط به \hat{y} باقی می‌ماند. بنابراین میدان در نقطه \mathbf{r} در راستای \hat{y} قرار دارد، و به طور کلی میدان در راستای $\hat{\phi}$ است.

حال که پیرامونی بودن میدان را می‌دانیم تعیین مقدار آن کار بسیار ساده‌ای است. فقط باید

قانون آمپر را برای دایره‌ای به شعاع s حول چنبره به‌کار ببریم:

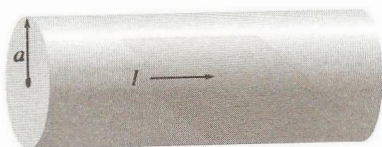
$$B \cdot 2\pi s = \mu_0 I_{\text{محور}}$$

و بنابراین

$$B(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 N I}{2\pi s} \hat{\phi} & \text{برای نقاط داخل سیم پیچ} \\ 0 & \text{برای نقاط خارج سیم پیچ} \end{cases} \quad (58.5)$$

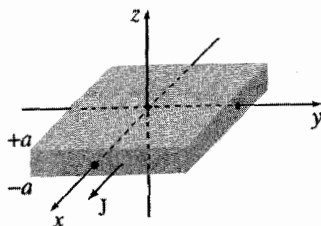
که در آن N تعداد کل سیم پیچهاست.

- مسئله ۱۳-۵ جریان پایای I در طول سیم استوانه‌ای طویل به شعاع a برقرار است (شکل ۴۰-۵). میدان مغناطیسی نقاط داخل و خارج سیم را در حالت‌های زیر حساب کنید.
- (الف) جریان به‌طور یکنواخت روی سطح خارجی سیم توزیع شده است.
- (ب) توزیع جریان به‌گونه‌ای است که J متناسب با s ، فاصله از محور، است.



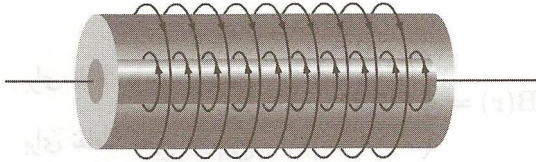
شکل ۴۰-۵

- مسئله ۱۴-۵ در یک تیغهٔ مربعی ضخیم که از $z = -a$ تا $z = +a$ امتداد دارد جریان حجمی یکنواخت $\mathbf{J} = J\hat{x}$ برقرار است (شکل ۴۱-۵). میدان مغناطیسی را برحسب z برای نقاط داخل و خارج قطعه پیدا کنید.



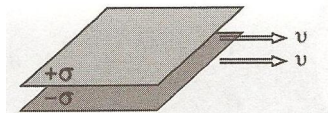
شکل ۴۱-۵

مسئله ۱۵-۵ دو سیمولوه هم محور طویل، هر یک حامل جریان I که مطابق شکل ۴۲-۵ در جهت مخالف اند، داریم. تعداد دور سیم در واحد طول سیمولوه داخلی (به شعاع a) را n_1 و از آن بیرونی (به شعاع b) را n_2 بنامید. B را در هر یک از سه ناحیه زیر به دست آورید: (۱) داخل سیمولوه داخلی؛ (۲) بین دو سیمولوه؛ (۳) خارج از هر دو.



شکل ۴۲-۵

مسئله ۱۶-۵ یک خازن تخت بزرگ با چگالی بار سطحی ثابت σ برای صفحه بالایی و $-\sigma$ برای صفحه پایینی را با سرعت ثابت v حرکت می دهیم (شکل ۴۳-۵).
 (الف) میدان مغناطیسی را در بین صفحات و نیز در بالا و پایین آنها بیابید.
 (ب) نیروی مغناطیسی بر واحد سطح صفحه بالایی به دست آورید و نیز جهت آن را مشخص کنید.
 (ج) به ازای چه مقدار سرعت v نیروی مغناطیسی با نیروی الکتریکی مساوی می شود؟



شکل ۴۳-۵

! مسئله ۱۷-۵ نشان دهید که میدان مغناطیسی یک سیمولوه طویل صرف نظر از شکل مقطع سیم پیچهایش همواره به موازات محورش قرار دارد، مشروط بر آنکه شکل سیم پیچها در طول سیمولوه ثابت بماند. بزرگی میدان نقاط داخل و خارج چنین سیمولوه ای چقدر است؟ نشان دهید که میدان یک چنبره (شکل ۵۸-۵) وقتی شعاع آن بقدری بزرگ باشد که یک قطعه از آن را بتوان مستقیم در نظر گرفت، با میدان یک سیمولوه برابر می شود.

مسئله ۱۸-۵ در محاسبه جریان داخل یک حلقه آمپری به طور کلی باید انتگرال زیر محاسبه شود

$$I_{محور} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

مشکل آن است که بینهایت سطح با یک خط مرزی مشترک می‌توان یافت. کدام یک از این سطوح را به‌کار ببریم؟ □

۴-۳-۵ مقایسه مغناطوستاتیک و الکتروستاتیک

دیورژانس و تاو میدان الکتروستاتیکی عبارت‌اند از

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho & \text{(قانون گاوس)} \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 & \text{(بی‌نام)} \end{cases}$$

که معادلات ماکسول برای الکتروستاتیک هستند. از اینها و با این شرط مرزی که در نقاط دور از همه بارها $\mathbf{E} \rightarrow 0$ ، معادلات ماکسول میدان را با معلوم بودن چگالی بار چشمه، ρ ، تعیین می‌کند؛ اطلاعات حاصل همانند اطلاعاتی است که با اعمال قانون کولن و اصل برهم‌نهی به‌دست می‌آوریم. دیورژانس و تاو میدان مغناطوستاتیک عبارت‌اند از

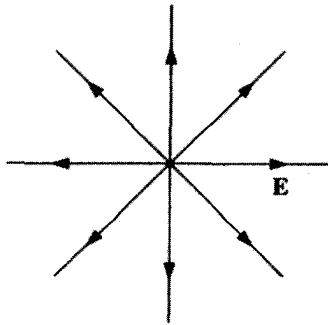
$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{(بی‌نام)} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} & \text{(قانون آمپر)} \end{cases}$$

اینها معادلات ماکسول برای مغناطوستاتیک‌اند. باز هم از آنها و با شرط مرزی $\mathbf{B} \rightarrow 0$ برای نقاط دور از تمام جریانها، میدان مغناطیسی به‌دست می‌آید؛ معادلات ماکسول با قانون بیوساوار (و نیز اصل برهم‌نهی) هم‌ارزند. معادلات ماکسول و قانون نیرو

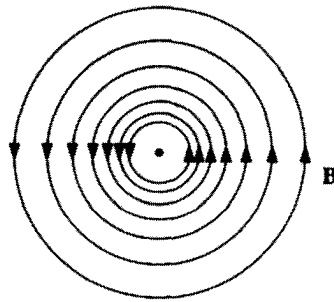
$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

فرمولبندی جالبی برای الکتروستاتیک و مغناطوستاتیک را ارائه می‌دهند.

میدان الکتریکی به‌طور شعاعی از بار (مثبت) به اطراف گسترده می‌شود؛ خط میدان مغناطیسی به دور جریان می‌پیچد (شکل ۵-۴۴). خطوط میدان الکتریکی از بار مثبت شروع و به بار منفی ختم می‌شوند؛ خطوط میدان مغناطیسی جایی شروع یا ختم نمی‌شوند زیرا برای این منظور به دیورژانس غیرصفر نیاز دارند. این خطوط یا حلقه‌های بسته می‌سازند و یا تا بینهایت ادامه می‌یابند. به بیانی دیگر برای \mathbf{B} چشمه‌های نقطه‌ای وجود ندارد در حالی‌که برای \mathbf{E} چنین نیست؛ بار الکتریکی هیچ مشابه مغناطیسی‌ای ندارد. این همان محتوای فیزیکی گزاره $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ است. کولن و دیگران بر این باور بودند که مغناطیس ناشی از بارهای مغناطیسی (که آنها را تک‌قطبیهایی



(الف) میدان الکتروستاتیکی
یک بار نقطه‌ای



(ب) میدان مغناطوستاتیکی
یک سیم بلند

شکل ۴۴-۵

مغناطیسی، می‌نامیم) اند، و در بعضی کتابهای قدیمتر می‌توان مراجعی یافت که از قانون کولن در مغناطیس و نیروهای جاذبه یا دافعه بین آنها صحبت می‌شود. اولین بار آمپر هرگونه اثر مغناطیسی را به بارهای الکتریکی در حال حرکت (جریانها) نسبت داد. تا جایی که ما می‌دانیم آمپر درست فکر می‌کرد؛ مع‌ذالک، این پرسش تجربی همچنان مطرح است که آیا در طبیعت تک‌قطبیهای مغناطیسی یافت می‌شوند (بدیهی است که چنین چیزی به‌ندرت اتفاق می‌افتد، یا کسی موردی را سراغ داشته باشد^۱)، و در واقع بعضی نظریات جدید دربارهٔ ذرات بنیادی وجود آنها را توجیه می‌کند. در بحثی که ما دنبال می‌کنیم، B بدون واگرایی است و تک‌قطبی مغناطیسی هم وجود ندارد. بار الکتریکی متحرک است که میدان مغناطیسی تولید می‌کند و نیروی مغناطیسی را بار متحرک دیگری "احساس" می‌کند.

نیروهای الکتریکی نوعاً به میزان زیادی بزرگتر از نیروهای مغناطیسی هستند. این نکته به نظریه مربوط نیست بلکه به بزرگی ϵ_0 و μ_0 مربوط می‌شود. به‌طور کلی تنها هنگامی که بارهای چشمه و بار آزمون هر دو با سرعتهایی قابل مقایسه با سرعت نور حرکت می‌کنند نیروهای مغناطیسی از نظر بزرگی به نیروهای الکتریکی می‌رسند. (این قاعده را مسائل ۱۲-۵ و ۱۶-۵ روشن می‌کنند.) پس چگونه به اثرات مغناطیسی پی می‌بریم؟ پاسخ این است که هم در ایجاد میدان مغناطیسی

۱. هیچ‌گاه آشکارسازی مشهودی ((B. Cabrera, *Phys. Rev. Lett.* 48, 1378 (1982)) نه اتفاق افتاده و نه کوششی در این مورد صورت گرفته است. برای اطلاع از تاریخچه اختصاری ایده‌های مربوط به مغناطیس فصل ۱ کتاب زیر را ببینید.

(بیوساوار) و در آشکارسازی آن (لورنتس) آنچه مهم است جریان (بار ضربدر سرعت) است و سرعت کم را با مقادیر زیاد برای بار متحرک می‌توان جبران کرد. معمولاً این بار همزمان تولید چنان نیروی الکتریکی عظیمی می‌کند که نیروی مغناطیسی را تحت الشعاع قرار می‌دهد. اما اگر سیم را با انتخاب بارهای مساوی و مخالف به حالت خنثی نگاه داریم، نیروی الکتریکی خنثی می‌شود و تنها نیروی مغناطیسی باقی می‌ماند. به نظر می‌رسد کار استانداردهای برای نیل به هدف است، اما در واقع این چیزی است که دقیقاً در یک سیم حامل جریان اتفاق می‌افتد.

مسئله ۵-۱۹ (الف) چگالی ρ بارهای متحرک در یک قطعه مس را با فرض آنکه هر اتم یک الکترون آزاد دارد بیابید. [به ثابتهای فیزیکی لازم توجه کنید].

(ب) سرعت میانگین الکترونها را در یک سیم مسی به قطر ۱ میلیمتر و حامل جریان ۱ آمپر محاسبه کنید. [توجه: این در واقع مثل یک گام حلزون است. پس چگونه می‌توانید مکالمه تلفنی راه دور داشته باشید؟]

(ج) نیروی جاذبه میان دو تا از این سیمها که به فاصله ۱ سانتیمتری یکدیگر واقع‌اند چقدر است؟
(د) اگر می‌توانستید به‌گونه‌ای یونهای مثبت ساکن را از سیمها خارج کنید نیروی دافعه الکتریکی چقدر می‌شد؟ چند برابر نیروی مغناطیسی؟

مسئله ۵-۲۰ آیا قانون آمپر با قاعده کلی معادله (۱-۴۶) که می‌گوید دیورژانس تاو همواره صفر است، سازگار است؟ نشان دهید که قانون آمپر نمی‌تواند به‌طور کلی، خارج از محدوده مغناطوستاتیک صادق باشد. آیا چنین "نقصی" در سه معادله دیگر ماکسول هم وجود دارد؟

مسئله ۵-۲۱ فرض کنید تک‌قطبهای مغناطیسی وجود دارند. معادلات ماکسول و قانون نیرو را در این حالت چگونه باید تعدیل کرد؟ اگر فکر می‌کنید راههای متعددی برای نیل به این هدف وجود دارد، آنها را فهرست‌بندی کنید و بگویید از نظر تجربی بهترین راه کدام است. □

۴-۵ پتانسیل برداری مغناطیسی

۱-۴-۵ پتانسیل برداری

همان‌گونه که در الکتروستاتیک معادله $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ما را به یک پتانسیل نرده‌ای (V) به صورت

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

هدایت می‌کرد معادله $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ما را به فکر یک پتانسیل برداری \mathbf{A} در مغناطوستاتیک

به صورت زیر رهنمون می شود

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}} \quad (59-5)$$

صحت معادله اولی از قضیه ۱ (در بخش ۱-۶-۲) و معادله دوم از قضیه ۲ (که اثبات آن در مسئله ۵-۳۰ خواسته شده است) نتیجه می شود. فرمولبندی پتانسیل مستقیماً ما را به $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ می رساند (زیرا دیورژانس تاو همواره صفر است)؛ آنچه می ماند قانون آمپر است:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (60-5)$$

اما پتانسیل الکتریکی یک ابهام ذاتی دارد: هر تابعی را که گرادیان آن صفر است (یعنی هر ثابتی) را می توان به V افزود، بدون آنکه \mathbf{E} تغییر کند. به همین منوال هر تابعی با تاو صفر (یعنی گرادیان هر کمیت نرده ای) را می توان به پتانسیل مغناطیسی افزود، بدون آنکه \mathbf{B} تغییر کند. از این آزادی عمل می توان برای صفر شدن دیورژانس \mathbf{A} استفاده کرد

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0} \quad (61-5)$$

برای اثبات اینکه، این کار همیشه ممکن است، فرض کنید پتانسیل اصلی مورد نظر، \mathbf{A}_0 ، بدون دیورژانس نباشد. اگر گرادیان λ را به آن بیفزاییم ($\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla \lambda$) دیورژانس جدید می شود

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \nabla^2 \lambda$$

از معادله (۶۱-۵) نتیجه می گیریم که λ باید به گونه ای باشد که در معادله زیر صدق کند

$$\nabla^2 \lambda = -\nabla \cdot \mathbf{A}_0$$

اما این معادله از نظر ریاضی با معادله پواسون (۲-۲۴) هم ارز است

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

با در نظر گرفتن این نکته، به جای ρ/ϵ_0 به عنوان "چشمه" قرار می دهیم $\nabla \cdot \mathbf{A}_0$. و می دانیم که چگونه باید معادله پواسون را حل کنیم - چیزی که همه الکتروستاتیک درباره آن است ("با دانستن توزیع بار، یافتن پتانسیل"). در حالت خاص، هنگامی که ρ در بینهایت صفر می شود، جواب معادله (۲-۲۹) عبارت است از

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r} d\tau'$$

و به همین دلیل، اگر $\nabla \cdot \mathbf{A}_0$ در بینهایت به صفر میل کند، در آن صورت

$$\lambda = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}_0}{r} d\tau'$$

اگر $\nabla \cdot \mathbf{A}_0$ در بینهایت صفر نشود، برای پیدا کردن مقدار مناسب λ به ابزارهای دیگری نیاز داریم، همان‌گونه که پتانسیل الکتریکی را وقتی توزیع بار تا بینهایت ادامه می‌داشت به دست می‌آوردیم. اما نکته اساسی همچنان باقی است: همواره می‌توان پتانسیل برداری را بدون دیورژانس کرد. به عبارت دیگر، تعریف $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ مشخص‌کننده \mathbf{A} است، اما چیزی درباره دیورژانس نمی‌گوید — ما این آزادی عمل را داریم که وضعیت مناسب را انتخاب کنیم، و صفر ساده‌ترین انتخاب است. با این شرطی که برای \mathbf{A} گفتیم، قانون آمپر (۵-۶۰) می‌شود

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (۶۲-۵)$$

این هم باز چیزی جز معادله پواسون نیست — یا چیزی جز سه معادله پواسون، هر یک برای یک مؤلفه دکارتی^۱ نیست. با فرض صفر بودن \mathbf{J} در بینهایت به جواب زیر می‌رسیم

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{r} d\tau' \quad (۶۳-۵)$$

برای جریانهای خطی و سطحی داریم

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I}}{r} dl' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{1}{r} dl'; \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}}{r} da' \quad (۶۴-۵)$$

اگر جریان در بینهایت صفر نباشد، برای به دست آوردن \mathbf{A} به راههای دیگری نیاز داریم؛ بعضی از این راهها را در مثال ۵-۱۲ و در مسائل انتهای این بخش آورده‌ایم.

۱. در مختصات دکارتی، $\nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{x} + (\nabla^2 A_y)\hat{y} + (\nabla^2 A_z)\hat{z}$ ، بنابراین معادله (۶۲-۵) به $\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$ ، $\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$ ، $\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$ تبدیل می‌شود. در مختصات منحنی‌الخط بردارهای یک خودشان هم تابعی از مکان هستند و باید از آنها مشتق گرفت و بنابراین مثلاً نمی‌توان نوشت $\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$. ایمنترین راه محاسبه لاپلاسی یک بردار برحسب مؤلفه‌های منحنی‌الخط استفاده از $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$ است. همچنین به خاطر داشته باشید هرانتگرالی نظیر (۶۳-۵) را با استفاده از مختصات منحنی‌الخط محاسبه می‌کنید، اول باید \mathbf{J} را برحسب مؤلفه‌های دکارتی آن بنویسید (بخش ۱-۴-۱).

گفتنی است که \mathbf{A} به اندازه V مفید نیست. دلیل این ادعا برداری بودن آن است، و گرچه معادلات (۶۳-۵) و (۶۴-۵) تا حدی از قانون بیوساوار آسانترند، هنوز هم مجبورید از مؤلفه‌ها استفاده کنید. راه جالب‌رهایی از این مشکل، استفاده از یک پتانسیل نرده‌ای است

$$\mathbf{B} = -\nabla U \quad (۶۵-۵)$$

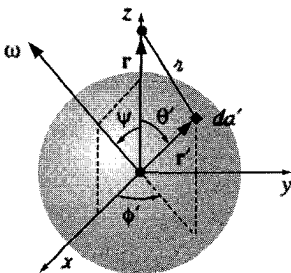
اما این معادله با قانون آمپر قابل مقایسه نیست، چون تاو یک گرادیان همواره صفر است. (می‌توان از یک پتانسیل نرده‌ای مغناطوستاتیک استفاده کرد، مشروط بر اینکه نواحی عاری از جریان را با وسواس زیاد در نظر بگیرید، اما به‌عنوان یک ابزار نظری کمتر مورد توجه است. مسئله ۲۸-۵ را ببینید). افزون بر این چون نیروهای مغناطیسی کار انجام نمی‌دهند، برای \mathbf{A} توجیهی برحسب انرژی پتانسیل واحد بار نمی‌توان ارائه داد. (در بعضی زمینه‌ها می‌توان آن را به‌عنوان تکانه واحد بار توجیه کرد).^۱ با وجود این، پتانسیل برداری از اهمیت نظری اساسی برخوردار است و این را در فصل ۱۰ خواهیم دید.

مثال ۱۱-۵

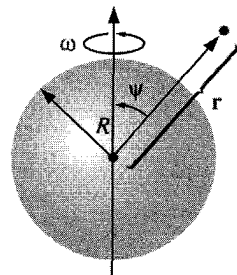
یک پوستهٔ کروی به شعاع R دارای بار سطحی با چگالی ثابت σ را با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخانند. پتانسیل برداری حاصل را در نقطه \mathbf{r} بیابید (شکل ۴۵-۵).

حل: منطقی است که محور قطبی را حول ω در نظر بگیریم، اما در واقع اگر \mathbf{r} را در امتداد z بگیریم، انتگرال‌گیری ساده‌تر می‌شود و بنابراین ω به اندازه زاویه ψ می‌چرخد. همچنین می‌توانیم محور x را به‌گونه‌ای بگیریم که ω در صفحه xz واقع باشد (شکل ۴۶-۵). بنابه معادله (۶۴-۵) داریم

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{r} da'$$



شکل ۴۶-۵



شکل ۴۵-۵

که در آن $\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}$ ، $\pi = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}$ و $da' = R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$ اما سرعت نقطه \mathbf{r}' در یک جسم صلب دوار برابر است با $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ ؛ در این مورد خاص

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \omega \sin \psi & 0 & \omega \cos \psi \\ R \sin \theta' \cos \phi' & R \sin \theta' \sin \phi' & R \cos \theta' \end{vmatrix}$$

$$= R\omega[-\cos \psi \sin \theta' \sin \phi'] \hat{\mathbf{x}} + (\cos \psi \sin \theta' \cos \phi' - \sin \psi \cos \theta') \hat{\mathbf{y}} + (\sin \psi \sin \theta' \sin \phi') \hat{\mathbf{z}}$$

توجه کنید که تمام جملات، بجز یکی، حاوی $\sin \phi'$ یا $\cos \phi'$ است. چون

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = 0$$

این جملات صفر می‌شوند و انتگرال می‌شود

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 R^2 \sigma \omega \sin \psi}{2} \left(\int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}} d\theta' \right) \hat{\mathbf{y}}$$

با قرار دادن $u \equiv \cos \theta'$ می‌شود

$$\int_{-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rru}} du = -\frac{(R^2 + r^2 + Rru)}{3R^2 r^2} \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rru} \Big|_{-1}^{+1}$$

$$= -\frac{1}{3R^2 r^2} [(R^2 + r^2 + Rr)|R - r| - (R^2 + r^2 - Rr)(R + r)]$$

اگر نقطه \mathbf{r} داخل کره باشد، آنگاه $R > r$ و این عبارت به صورت $(2r/3R^2)$ در می‌آید؛ اگر \mathbf{r} خارج کره باشد، در آن صورت $R < r$ و نتیجه عبارت است از $(2R/3r^2)$. با توجه به اینکه $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega r \sin \psi \hat{\mathbf{y}}$ ، سرانجام داریم

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \sigma}{3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) & \text{برای نقاط داخل کره} \\ \frac{\mu_0 R^2 \sigma}{3r^2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) & \text{برای نقاط خارج کره} \end{cases} \quad (66-5)$$

بعد از حل انتگرال، آن را به مختصات "طبیعی" شکل ۴۵-۵ که در آن ω بر محور z منطبق است و نقطه r در وضعیت (r, θ, ϕ) قرار دارد تبدیل می‌کنیم

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \omega \sigma}{3} r \sin \theta \hat{\phi} & (r \leq R) \\ \frac{\mu_0 R^3 \omega \sigma}{3} \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\phi} & (r \geq R) \end{cases} \quad (۶۷-۵)$$

میدان در داخل این پوستهٔ کروی یکنواخت است

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{2\mu_0 R \omega \sigma}{3} (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \omega \hat{z} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \omega \quad (۶۸-۵)$$

مثال ۱۲-۵

پتانسیل برداری یک سیم‌لولهٔ طویل به شعاع R را با n دور سیم‌پیچ در واحد طول و دارای جریان I بیابید.

حل: این دفعه نمی‌توان از معادلهٔ (۶۴-۵) استفاده کرد، زیرا جریان هم تا بینهایت ادامه دارد، اما با روش زیر مسئله حل می‌شود. توجه کنید که

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi \quad (۶۹-۵)$$

که در آن Φ شار \mathbf{B} گذرنده از حلقه مورد نظر است. این همان قانون آمپر به صورت انتگرالی (۵۵-۵) است

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{محصور}}$$

در واقع این همان معادله است که در آن $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ و $\Phi \rightarrow \mu_0 I_{\text{محصور}}$. در صورت وجود تقارن می‌توانیم \mathbf{A} را از Φ به همان روشی که \mathbf{B} را از $I_{\text{محصور}}$ در بخش ۳-۳ به دست آوردیم تعیین کنیم. مسئله مورد بحث (با داشتن یک میدان مغناطیسی طولی یکنواخت $\mu_0 nI$ در داخل سیم‌لوله و میدان صفر در خارج آن) همانند مسئلهٔ قانون آمپر یک سیم کلفت با توزیع جریان یکنواخت

است. پتانسیل برداری به صورت "پیرامونی" است (همانند میدان مغناطیسی یک سیم است)؛ با انتخاب "حلقه آمپری" به صورت دایره‌ای به شعاع s در داخل سیمولوله داریم

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = A(2\pi s) = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 nI(\pi s^2)$$

و بنابراین

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 nI}{2} s \hat{\phi}, \quad s < R \quad (۷۰-۵)$$

با در نظر گرفتن این حلقه در خارج سیمولوله، شار برابر است با

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 nI(\pi R^2)$$

زیرا میدان فقط تا R وجود دارد. از این رو

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 nI}{2} \frac{R^2}{s} \hat{\phi}, \quad s > R \quad (۷۱-۵)$$

اگر درباره صحت جواب شک دارید امتحان کنید: آیا $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ می‌شود؟ آیا $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ می‌شود؟
■ اگر چنین است همه چیز درست است.

جهت \mathbf{A} نوعاً همان جهت جریان است. به‌عنوان نمونه در مثالهای ۱۱-۵ و ۱۲-۵ هر دو سمتی بودند. در واقع اگر تمام جریان در یک جهت باشد، آن‌گاه بنابه معادله (۶۳-۵)، \mathbf{A} هم باید در همان جهت باشد. از این رو پتانسیل یک سیم مستقیم محدود (مسئله ۲۲-۵) در جهت جریان است. بدیهی است در حالتی که جریان تا بینهایت ادامه داشته باشد نمی‌توانید مستقیماً معادله (۶۳-۵) را به‌کار ببرید (مسائل ۲۵-۵ و ۲۶-۵ را ببینید). افزون بر این، همواره می‌توان مقدار ثابت دلخواهی را به بردار \mathbf{A} افزود — این کار به‌منزله تغییر نقطه مرجع برای V است که تغییری در دیورژانس و تاو \mathbf{A} ایجاد نمی‌کند [در معادله (۶۳-۵) ثابت را به‌گونه‌ای انتخاب کردیم که \mathbf{A} در بینهایت صفر شود]. از نظر اصولی شما حتی می‌توانید یک پتانسیل برداری انتخاب کنید که بدون دیورژانس نباشد. علی‌رغم تمام اینها نکته اساسی به قوت خود باقی است: معمولاً جهت \mathbf{A} همان جهت جریان است.

مسئله ۲۲-۵ پتانسیل برداری مغناطیسی یک طول محدود از سیم مستقیمی حامل جریان I را بیابید. [سیم را روی محور z و از نقطه z_1 تا z_2 در نظر بگیرید و از معادله (۵-۶۴) استفاده کنید]. سازگاری جواب خود را با معادله (۵-۳۵) کنترل کنید.

مسئله ۲۳-۵ چگالی جریان لازم برای ایجاد پتانسیل برداری $\mathbf{A} = k\hat{\phi}$ را (که در آن k یک ثابت است) در مختصات استوانه‌ای پیدا کنید.

مسئله ۲۴-۵ هرگاه \mathbf{B} یکنواخت باشد، نشان دهید که $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -1/2(\mathbf{r} \times \mathbf{B})$. به عبارت دیگر نشان دهید که $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ و $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. آیا این نتیجه یکتاست و یا توابع دیگری با همین دیورژانس و تاور وجود دارند؟

مسئله ۲۵-۵ (الف) به هر تبدیری که به فکرتان می‌رسد، پتانسیل برداری را در فاصله s از یک سیم مستقیم نامتناهی و حامل جریان I بیابید. از $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ و $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ اطمینان حاصل کنید.

(ب) پتانسیل مغناطیسی را در داخل سیم به فرض آن که شعاع آن R و حامل جریان با توزیع یکنواخت باشد، بیابید.

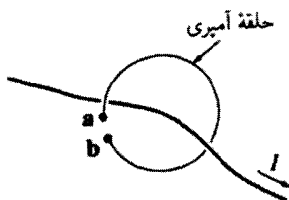
مسئله ۲۶-۵ پتانسیل برداری را در بالا و پایین جریان صفحه تخت مثال ۸-۵، پیدا کنید.

مسئله ۲۷-۵ (الف) با استفاده از دیورژانس، سازگاری معادله (۵-۶۳) را با معادله (۵-۶۱) امتحان کنید.

(ب) با استفاده از تاور، سازگاری معادله (۵-۶۳) را با معادله (۵-۴۵) امتحان کنید.

(ج) با استفاده از لاپلاسی، سازگاری معادله (۵-۶۳) را با معادله (۵-۶۲) امتحان کنید.

مسئله ۲۸-۵ فرض کنید می‌خواهید یک پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی U معادله (۵-۶۵) را در نزدیکی یک سیم حامل جریان تعریف کنید. در آغاز باید محلی خارج از خود سیم را در نظر بگیرید (در آنجا $\nabla \times \mathbf{B} \neq 0$)؛ اما این کافی نیست. با اعمال قانون آمپر برای مسیری دایره‌ای که از \mathbf{a} شروع و به \mathbf{b} برمی‌گردد (شکل ۵-۴۷) نشان دهید که پتانسیل نرده‌ای نمی‌تواند تک‌مقدار باشد (یعنی $U(\mathbf{a}) \neq U(\mathbf{b})$)، حتی هنگامی که هر دو یک نقطه فیزیکی را نمایش دهند). به‌عنوان یک نمونه، پتانسیل نرده‌ای یک سیم مستقیم نامتناهی را بیابید. (برای اجتناب از یک پتانسیل چند مقداره، باید خود را به نواحی اتصال ساده که در یک طرف سیم یا طرف دیگر آن می‌مانند مقید کنید، (هرگز تمام جهات دور سیم را در نظر نگیرید).)



شکل ۴۷-۵

مسئله ۲۹-۵ با استفاده از نتیجه مثال ۱۱-۵ میدان داخل کره‌ای باردار به شعاع R و بار متشابه‌التوزیع Q را که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد حساب کنید.

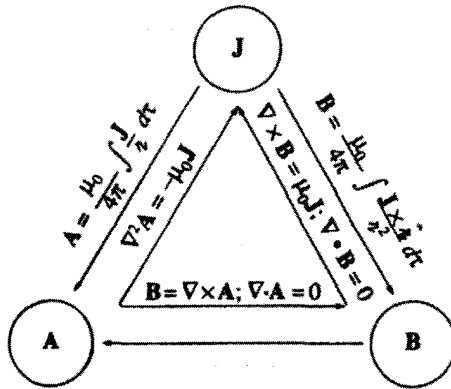
مسئله ۳۰-۵ (الف) اثبات قضیه ۲ بخش ۱-۶-۲ را کامل کنید. یعنی نشان دهید که هر بردار میدان \mathbf{F} بدون دیورژانس را می‌توان به صورت تاو یک پتانسیل برداری \mathbf{A} نوشت. کاری که باید بکنید این است که A_x, A_y, A_z را به‌گونه‌ای بیابید که: (۱) $\partial A_z / \partial y - \partial A_y / \partial z = F_x$; (۲) $\partial A_x / \partial z - \partial A_z / \partial x = F_y$; (۳) $\partial A_y / \partial x - \partial A_x / \partial y = F_z$. یکی از راههای انجام کار این است: $A_x = 0$ بگیرید و A_y و A_z را از (۲) و (۳) به دست آورید. توجه کنید که "ثابتهای انتگرال‌گیری" در اینجا خودشان توابعی از y و z اما مستقل از x هستند. عبارات حاصل را در (۱) قرار داده و با توجه به این واقعیت که $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ است، به دست آورید

$$A_y = \int_0^x F_z(x', y, z) dx'; \quad A_z = \int_0^y F_x(0, y', z) dy' - \int_0^x F_y(x', y, z) dx'$$

(ب) با مشتق‌گیری مستقیم نشان دهید که \mathbf{A} حاصل از (الف)، در معادله $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{F}$ صدق می‌کند. آیا \mathbf{A} بدون دیورژانس است؟ [این یک امر غیرعادی است و تعجب‌آور است اگر چنین باشد - گرچه می‌دانیم برداری وجود دارد که تاو آن \mathbf{F} و دیورژانس آن صفر است.] (ج) به‌عنوان مثال قرار دهید $\mathbf{F} = y\hat{x} + z\hat{y} + x\hat{z}$. آن‌گاه \mathbf{A} را حساب کنید، و متقاعد شوید که $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{F}$ (برای بحث بیشتر به مسئله ۵۱-۵ رجوع کنید). □

۲-۴-۵ خلاصه مطالب؛ شرایط مرزی مغناطوستاتیک

در فصل ۲، با رسم نمودار مثلثی معادلات بین سه مقدار بنیادی الکتروستاتیک یعنی چگالی بار ρ ، میدان الکتریکی \mathbf{E} و پتانسیل V را خلاصه کردیم. نمودار مشابهی برای مغناطوستاتیک که بستگی چگالی جریان \mathbf{j} ، میدان \mathbf{B} و پتانسیل \mathbf{A} را نشان دهد را هم می‌توان رسم کرد (شکل ۴۸-۵). در این نمودار یک "حلقه مفقوده" وجود دارد: معادله \mathbf{A} برحسب \mathbf{B} . به نظر نمی‌رسد که هیچ‌گاه به چنین فرمولی نیاز داشته باشید، اما در صورت تمایل مسائل ۵۰-۵ و ۵۱-۵ را ببینید.



شکل ۴۸-۵

همان‌گونه که میدان الکتریکی در یک بار سطحی ناپوستگی دارد، میدان مغناطیسی هم در جریان سطحی چنین وضعی دارد. فقط این بار مؤلفه مماسی است که تغییر می‌کند. زیرا هرگاه معادله (۴۸-۵) به صورت انتگرال

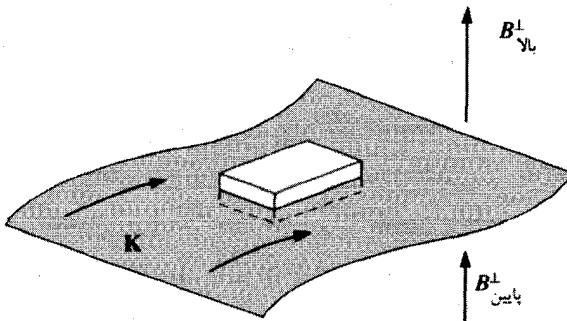
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

را برای مکعب مستطیل کوچک قرار داده روی سطح (شکل ۴۹-۵) به کار ببریم، داریم

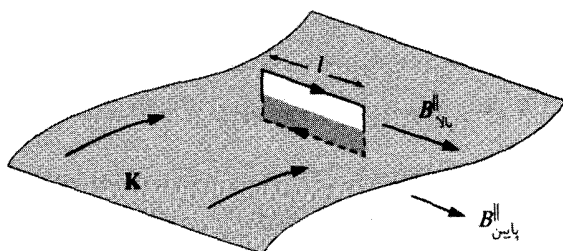
$$B_{\text{بالا}}^{\perp} = B_{\text{پایین}}^{\perp} \quad (۷۲-۵)$$

نظیر مؤلفه‌های مماسی با استفاده از یک حلقه آمپری که عمود بر جریان قرار دارد (شکل ۵۰-۵) داریم

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = (B_{\text{بالا}}^{\parallel} - B_{\text{پایین}}^{\parallel})l = \mu_0 I_{\text{محصور}} = \mu_0 K l$$



شکل ۴۹-۵



شکل ۵-۵

یا

$$B_{\parallel}^{\text{بالا}} - B_{\parallel}^{\text{پایین}} = \mu_0 K \quad (۷۳-۵)$$

بنابراین مؤلفه‌ای از \mathbf{B} که به موازات سطح اما عمود بر جریان است به میزان $\mu_0 K$ ناپیوسته است. یک حلقه آمپری مشابه که به موازات جریان رسم شود نشان می‌دهد که مؤلفه موازی، پیوسته است. این نتایج را می‌توان به صورت فرمول زیر ساده کرد

$$B_{\parallel}^{\text{بالا}} - B_{\parallel}^{\text{پایین}} = \mu_0 (\mathbf{K} \times \hat{n}) \quad (۷۴-۵)$$

که در آن \hat{n} یک بردار یکه عمود بر سطح و به طرف بالاست. همانند پتانسیل نرده‌ای در الکتروستاتیک، پتانسیل برداری در گذار از هر مرزی پیوسته است

$$\mathbf{A}_{\parallel}^{\text{بالا}} = \mathbf{A}_{\parallel}^{\text{پایین}} \quad (۷۵-۵)$$

زیرا $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ تضمین‌کننده آن است که مؤلفه عمودی پیوسته باشد، و $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ به صورت

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi$$

به معنی آن است که مؤلفه‌های مماسی پیوسته‌اند (شار گذرنده از یک حلقه آمپری به ضخامت ناچیز صفر است). اما مشتق \mathbf{A} هم ناپیوستگی \mathbf{B} را دارد

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{\parallel}^{\text{بالا}}}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{A}_{\parallel}^{\text{پایین}}}{\partial n} = -\mu_0 K \quad (۷۶-۵)$$

۱. توجه کنید که در معادلات (۷۵-۵) و (۷۶-۵) بدون دیورژانس بودن \mathbf{A} پیش فرض است.

مسئله ۳۱-۵ (الف) معادله (۷۴-۵) را برای ترکیب مطرح شده در مثال ۹-۵ امتحان کنید.
 (ب) معادله‌های (۷۵-۵) و (۷۶-۵) را برای ترکیب مطرح شده در مثال ۱۱-۵ امتحان کنید.

مسئله ۳۲-۵ با استفاده از معادلات (۶۱-۵)، (۷۴-۵) و (۷۵-۵) معادله (۷۶-۵) را اثبات کنید.
 [راهنمایی: روی سطح، مختصات دکارتی را به گونه‌ای در نظر گرفته‌ایم که z بر سطح عمود و x موازی جریان باشد].
 □

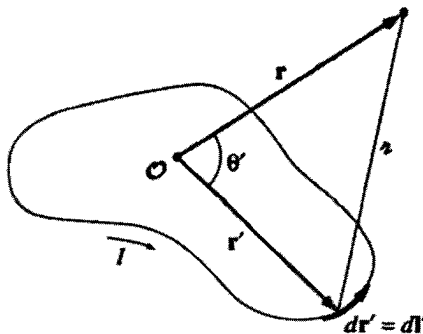
۳-۴-۵ بسط چندقطبی پتانسیل برداری

برای داشتن یک فرمول تقریبی برای پتانسیل برداری یک توزیع جریان موضعی که در نقاط دور دست صادق باشد از بسط چندقطبی استفاده می‌شود. به یاد داشته باشید که ایده بسط چندقطبی این است که پتانسیل را به صورت سری توانی $1/r$ بنویسیم که در آن r فاصله از نقطه مورد نظر است (شکل ۵۱-۵)؛ به‌ازای مقادیر به اندازه کافی بزرگ r کمترین مقادیر غیرصفر بر سری غالب هستند، و از جملات بزرگتر می‌توان صرف نظر کرد. همان‌گونه که در بخش ۳-۴-۱ (شکل ۹۴-۳) دیدیم

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \theta'}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \theta') \quad (۷۷-۵)$$

و بنابراین، پتانسیل برداری یک حلقه جریان را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{1}{r} d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n P_n(\cos \theta') d\mathbf{l}' \quad (۷۸-۵)$$



شکل ۵۱-۵

و یا به گونه‌ای صریحتر

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \oint d\mathbf{l}' + \frac{1}{r^2} \oint r' \cos \theta' d\mathbf{l}' \right. \\ \left. + \frac{1}{r^3} \oint (r')^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2} \right) d\mathbf{l}' + \dots \right] \quad (79-5)$$

همانند بسط چندقطبی V ، اولین جمله (که به صورت $1/r$ است) را جمله تک‌قطبی، دومی (که به صورت $1/r^2$ است) را دوقطبی، سومی را چهارقطبی، و به همین ترتیب می‌نامیم. اما جمله تک‌قطبی مغناطیسی همواره صفر است، زیرا انتگرال برابر است با جابه‌جایی برداری کل حول یک حلقه بسته:

$$\oint d\mathbf{l}' = 0 \quad (80-5)$$

این بازتاب واقعی است که در طبیعت تک‌قطبیهای مغناطیسی وجود ندارد (چیزی که در معادلهٔ ماکسول $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ هم گنجانده شده است که خود در برگیرنده تمام نظریهٔ پتانسیل برداری است).

در غیاب هر نوع سهم تک‌قطبی، جملهٔ مهم و اصلی دوقطبی است (جز مورد نادری که آن هم صفر است).

$$\mathbf{A}_{\text{دوقطبی}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint r' \cos \theta' d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{l}' \quad (81-5)$$

این انتگرال را با در نظر گرفتن معادلهٔ (۱۰۸-۱) و قرار دادن $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{r}}$ ، به صورت بهتری می‌توان بازنویسی کرد

$$\oint (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{l}' = -\hat{\mathbf{r}} \times \int d\mathbf{a}' \quad (82-5)$$

و آنگاه

$$\mathbf{A}_{\text{دوقطبی}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (83-5)$$

که در آن m گشتاور دوقطبی مغناطیسی است

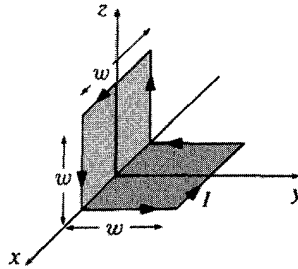
$$m \equiv I \int da = Ia \quad (۸۴-۵)$$

در اینجا a "مساحت برداری" حلقه است (مسئله ۱-۶۱)؛ برای حلقه تخت، a مساحت معمولی سطح بسته است که جهت آن طبق قاعده دست راست (انگشتها در جهت جریان) تعیین می شود.

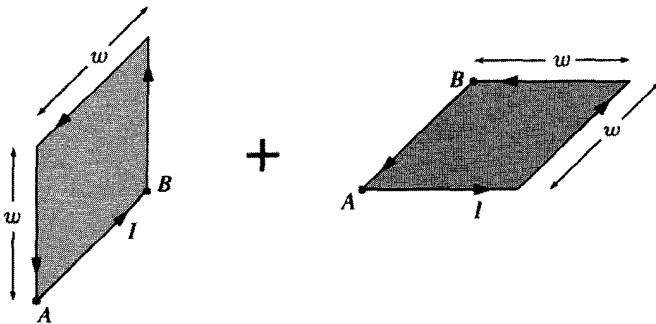
مثال ۵-۱۳

گشتاور دوقطبی مغناطیسی "حلقه کتابی شکل" را که در شکل ۵۲-۵ نشان داده ایم بیابید. هر یک از اضلاع w و حامل جریان I است.

حل: این سیم را می توان به منزله دو حلقه مربعی تخت (شکل ۵۳-۵) در نظر گرفت. دو ضلع "اضافی" AB مجموعاً خنثی می شوند، زیرا دارای دو جریان مساوی و مختلف الجهد هستند.



شکل ۵۲-۵



شکل ۵۳-۵

گشتاور دوقطبی کل برابر است با

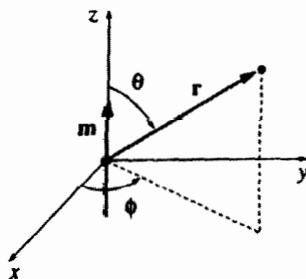
$$\mathbf{m} = Iw^x \hat{y} + Iw^y \hat{z}$$

و بزرگی آن برابر است با $\sqrt{2}Iw^2$ و در جهت خط $z = y$ با زاویه 45° است.

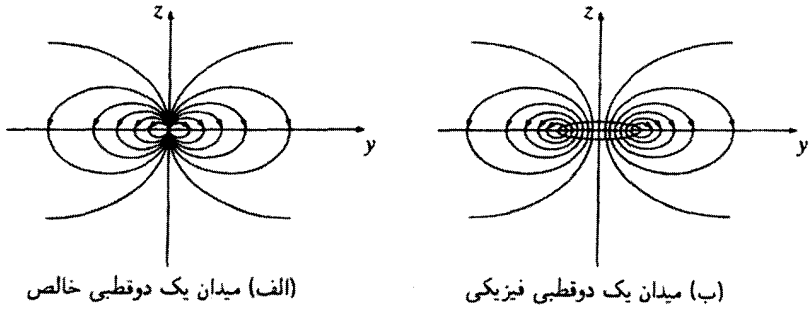
از معادله (۵-۸۴) روشن است که گشتاور دوقطبی مغناطیسی مستقل از نحوه انتخاب مبدأ است. شاید به یاد داشته باشید که گشتاور دوقطبی الکتریکی تنها وقتی که کل بار صفر است مستقل از مبدأ است (بخش ۳-۴-۳). از آنجایی که گشتاور تک‌قطبی مغناطیسی همواره صفر است، مستقل بودن گشتاور دوقطبی مغناطیسی از مبدأ واقعاً تعجب‌آور نیست.

گرچه جمله مربوط به دوقطبی حرف اول را در بسط چندقطبی می‌زند (جز حالتی که $\mathbf{m} = 0$)، و بنابراین تقریب خوبی را برای پتانسیل واقعی ارائه می‌دهد، معمولاً این پتانسیل دقیق نیست؛ چهارقطبی، هشت‌قطبی و مراتب بالاتر هم دخالت دارند. ممکن است بپرسید که آیا امکان دارد توزیع جریان را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که پتانسیل «صرفاً» دوقطبی و در آن صورت معادله (۵-۸۳) در باره‌اش کامل باشد؟ جواب هم مثبت است هم منفی: همانند مشابه الکتریکی می‌توان چنین فرضی را پذیرفت، اما الگو تا حدی ساختگی است. برای این منظور باید حلقه بینهایت کوچکی را در مبدأ در نظر بگیرید، اما از طرفی برای متناهی بودن گشتاور دوقطبی مجبورید جریان را تا بینهایت زیاد کنید به طوری که حاصلضرب $m = Ia$ ثابت بماند. در عمل، پتانسیل دوقطبی تقریبی مناسب برای مواردی است که فاصله r به میزان زیادی از بزرگی حلقه تجاوز می‌کند.

محاسبه میدان مغناطیسی یک دوقطبی (خالص) را می‌توان با قرار دادن \mathbf{m} در مبدأ و انتخاب جهت آن به سوی z (شکل ۵-۵۴) به ساده‌ترین صورت انجام داد. بنا به معادله (۵-۸۳)، پتانسیل



شکل ۵-۵۴



شکل ۵۵-۵

در نقطه (r, θ, ϕ) عبارت است از

$$\mathbf{A}_{\text{دوقطبی}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} \hat{\phi} \quad (۸۵-۵)$$

و بنابراین

$$\mathbf{B}_{\text{دوقطبی}}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad (۸۶-۵)$$

عجیب آنکه این میدان از نظر ساختاری همانند میدان یک دوقطبی الکتریکی [معادله (۳-۱۰۳)] است! با وجود این در نگاه دقیق میدان یک دوقطبی مغناطیسی فیزیکی یعنی یک حلقه جریان کوچک با میدان دوقطبی الکتریکی فیزیکی موقعی که بارهای مثبت و منفی به فاصله کم از یکدیگر قرار دارند، کاملاً متفاوت است. شکل ۵۵-۵ را با شکل ۳-۳۷ مقایسه کنید.

• مسئله ۳۳-۵ نشان دهید که میدان مغناطیسی یک دوقطبی را می‌توان به صورت مستقل از مختصات زیر نوشت

$$\mathbf{B}_{\text{دوقطبی}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \mathbf{m}] \quad (۸۷-۵)$$

مسئله ۳۴-۵ یک حلقه سیم به صورت دایره که مرکزش در مبدأ، شعاعش R و حامل جریان I باد ساعتگرد از دید ناظری در جهت مثبت z است در صفحه xy قرار دارد.
 (الف) گشتاور دوقطبی مغناطیسی آن چقدر است؟
 (ب) میدان مغناطیسی (تقریبی) آن در نقاط دور از مبدأ چقدر است؟

(ج) نشان دهید که برای نقاط واقع بر محور z با شرط $R \gg z$ ، پاسخ شما با میدان دقیق (مثال ۵-۶) سازگار است.

مسئله ۳۵-۵ یک صفحه گرامافون به شعاع R و دارای بار سطحی با چگالی ثابت σ با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. گشتاور دوقطبی مغناطیسی آن را بیابید.

مسئله ۳۶-۵ گشتاور دوقطبی مغناطیسی پوستهٔ کروی دوار مثال ۵-۱۱ را پیدا کنید. نشان دهید که به‌ازای $R > r$ پتانسیل با پتانسیل یک دوقطبی کامل برابر است.

مسئله ۳۷-۵ میدان مغناطیسی دقیق را در فاصلهٔ z از بالای مرکز حلقهٔ مربعی به ضلع w که حامل جریان I است حساب کنید. تحقیق کنید که به‌ازای $w \gg z$ جواب حاصل به میدان یک دوقطبی با گشتاور دوقطبی مناسب تبدیل می‌شود. □

مسائل تکمیلی فصل ۵

مسئله ۳۸-۵ ممکن است به این فکر افتاده باشید که چون جریانهای موازی یکدیگر را جذب می‌کنند، جریان در داخل یک تک‌سیم هم باید در امتداد محور متمرکز شود. با وجود این در عمل جریان در روی سیم به‌طور یکنواخت توزیع می‌شود. این را چگونه توجیه می‌کنید؟ هرگاه بارهای مثبت (با چگالی ρ_+) در حال سکون باشند و بارهای منفی (با چگالی ρ_-) با سرعت v حرکت کنند (و هیچ‌یک از اینها به فاصله از محور بستگی نداشته باشند)، نشان دهید که در آن بار جبرانی در کجا قرار دارد؟^۱ [توجه کنید که برای سرعت‌های نوعی (مسئله ۵-۱۹) دو چگالی بار اساساً با جریان تغییر نمی‌کنند (چون $\gamma \approx 1$). ولی در پلاسما که بارهای مثبت نیز آزادانه حرکت می‌کنند این به اصطلاح اثر تنگش می‌تواند بسیار قابل ملاحظه باشد.

مسئله ۳۹-۵ جریان I از میلهٔ مستطیلی رسانایی به سمت راست حرکت می‌کند در حالی که یک میدان مغناطیسی یکنواخت B به سمت بیرون صفحه هم وجود دارد (شکل ۵-۵۶).

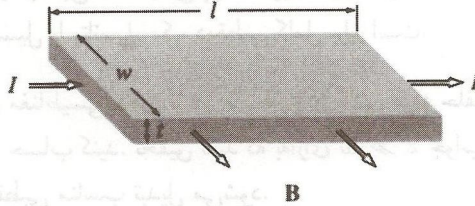
(الف) اگر بارهای متحرک مثبت باشند، میدان مغناطیسی آنها را در کدام جهت منحرف می‌کند؟ نتیجهٔ این انحراف تجمع بار در بالا و پایین صفحه است و این خود باعث ایجاد یک نیروی الکتریکی می‌شود که برخلاف اثر نیروی مغناطیسی است. وقتی این دو نیرو کاملاً برابر باشند تعادل

۱. برای بررسی بیشتر رجوع کنید به

برقرار است. (این پدیده را اثر هال می‌نامند).

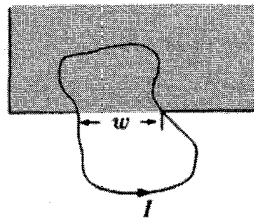
(ب) اختلاف پتانسیل حاصل (ولتاژ هال) بین بالا و پایین میله را برحسب B ، v (سرعت بارها) و ابعاد صفحه بیابید.^۱

(ج) اگر بارهای متحرک منفی باشند در محاسبات شما چه تغییری ایجاد می‌شود؟ [اثر هال راه کلاسیک تعیین علامت حاملان بار متحرک در یک ماده است.]



شکل ۵-۵۶

مسئله ۵-۴۰ یک حلقهٔ سیمی تخت که شکل نامنتظمی دارد به‌گونه‌ای قرار گرفته است که بخشی از آن در یک میدان مغناطیسی یکنواخت B واقع است (در شکل ۵-۵۷ این میدان در قسمت سایه‌دار عمود بر صفحهٔ حلقه قرار دارد). حلقه حامل جریان I است. نشان دهید که نیروی خالص مغناطیسی مؤثر بر حلقه برابر است با $F = IBw$ که در آن w مطابق شکل پاره‌خطی قطع شده است. این نتیجه را برای موردی که خود ناحیهٔ میدان مغناطیسی هم شکل نامشخص دارد تعمیم دهید. جهت نیرو به کدام طرف است؟

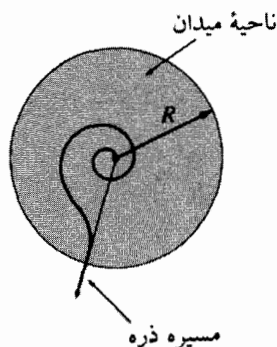


شکل ۵-۵۷

مسئله ۵-۴۱ یک میدان مغناطیسی با تقارن دایره‌ای (یعنی B فقط به فاصله از محور بستگی

۱. پتانسیل داخل میله یک مسئلهٔ مقدار-مرزی جالب را سبب می‌شود. به مقاله زیر رجوع کنید:

دارد) که عمود بر صفحه کتاب است، ناحیه سایه‌دار شکل ۵-۵۸ را اشغال کرده است. هر گاه شار کل $(\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a})$ صفر باشد نشان دهید که یک ذره باردار که از مرکز صفحه به بیرون حرکت می‌کند بر اثر وجود میدان در یک مسیر شعاعی از میدان خارج خواهد شد (مشروط بر اینکه اصلاً بتواند خارج شود — اگر سرعت اولیه خیلی بزرگ باشد ممکن است برای همیشه دور بزند). در مسیر معکوس، ذره‌ای که از بیرون به سمت مرکز پرتاب شده باشد به هدف خواهد خورد، هر چند که برای رسیدن به آن مسیر عجیبی را دنبال کند. [راهنمایی: تکانه زاویه‌ای کل ذره را با استفاده از قانون نیروی لورنتس حساب کنید].



شکل ۵-۵۸

مسئله ۵-۴۲ نیروی جاذبه مغناطیسی بین دو نیمکره شمالی و جنوبی یک پوسته کروی باردار دوار (مثال ۵-۱۱) را حساب کنید.

پاسخ: $(\pi/4)\mu_0 \sigma^2 \omega^2 R^4$

! مسئله ۵-۴۳ حرکت ذره‌ای به جرم m و بار q_e را در میدان یک تک قطبی مغناطیسی ساکن (فرضی) q_m واقع در مبدأ به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

(الف) شتاب بار q_e را بر حسب q, q_m, m, r (مکان ذره) و \mathbf{v} (سرعت ذره) حساب کنید.

(ب) نشان دهید که تندی که $v = |\mathbf{v}|$ یک مقدار ثابت حرکت است.

(ج) نشان دهید که کمیت برداری

$$\mathbf{Q} \equiv m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - \frac{\mu_0 q_e q_m}{4\pi} \hat{\mathbf{r}}$$

یک مقدار ثابت حرکت است. [راهنمایی: از این معادله نسبت به زمان مشتق بگیرید و با استفاده از (الف) نشان دهید که مشتق برابر صفر است.]

(د) با استفاده از مختصات کروی (r, θ, ϕ) با در نظر گرفتن محور قطبی (z) در امتداد Q .

(۱) $Q \cdot \hat{\phi}$ را حساب کنید و نشان دهید که θ یک مقدار ثابت حرکت است (بنابراین q_e

روی سطح مخروطی حرکت می‌کند - چیزی که اولین بار در ۱۸۹۶ یوانکاره کشف کرد).

(۲) $Q \cdot \hat{r}$ را حساب کنید، و نشان دهید که اندازه Q برابر است با

$$Q = -\frac{\mu_0 q_e q_m}{4\pi \cos \theta}$$

(۳) $Q \cdot \hat{\theta}$ را حساب کنید، و نشان دهید

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{k}{r^2}$$

و ثابت k را به دست آورید.

(ه) با نوشتن v^2 در مختصات کروی، معادله مسیری را به صورت زیر به دست آورید

$$\frac{dr}{d\phi} = f(r)$$

[یعنی تابع $f(r)$ را تعیین کنید].

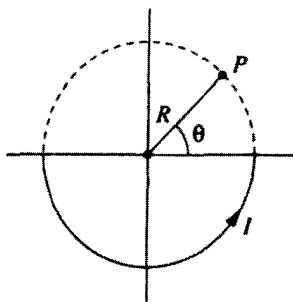
(و) این معادله را برای تعیین $r(\phi)$ حل کنید.

! مسئله ۴۴-۵ با استفاده از قانون بیوساوار (که مناسبترین صورت آن رابطه (۵-۳۹) برای جریانهای سطحی است) میدان داخل و خارج یک سیمولوله نامتناهی به شعاع R و با n دور سیم در واحد طول را که حامل جریان دائمی I است حساب کنید.

مسئله ۴۵-۵ از یک سیم نیمدایره‌ای شکل، جریان ثابت I می‌گذرد (بدیهی است این سیم باید به سیمهای دیگری برای کامل شدن مدار وصل باشد ولی این موضوع در بحث ما دخالتی ندارد). میدان مغناطیسی را در یک نقطه P در نیمدایره متقابل حساب کنید (شکل ۵-۵۹).

پاسخ: $(\mu_0 I / 4\pi R) \ln \left\{ \tan \left(\frac{\theta + \pi}{4} \right) / \tan \left(\frac{\theta}{4} \right) \right\}$

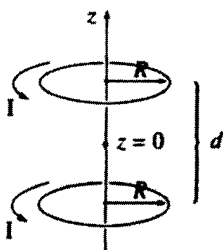
مسئله ۴۶-۵ میدان مغناطیسی روی محور یک حلقه جریان دایره‌ای [معادله (۵-۳۸)] کاملاً غیر یکنواخت است (با افزایش z به سرعت کم می‌شود). با استفاده از دو تا از چنین حلقه‌هایی به



شکل ۵-۵۹

فاصله d از یکدیگر (شکل ۵-۶۰) می‌توانید میدانی تقریباً یکنواخت بسازید. (الف) میدان B را برحسب z به دست آورید و نشان دهید که در نقطه وسط حلقه‌ها ($z = 0$) داریم $\partial B / \partial z = 0$. با در نظر گرفتن d به عنوان فاصله بین مراکز دو حلقه نشان دهید که مشتق دوم B در وسط دو دایره نیز صفر است. این دو دایره را پیچیده هلمهولتز می‌نامند که راه مناسبی برای ایجاد یک میدان نسبتاً یکنواخت آزمایشگاهی است. (ب) d را طوری تعیین کنید که در وسط حلقه‌ها $\partial^2 B / \partial z^2 = 0$ باشد و در این حال میدان مغناطیسی کل را در مرکز حساب کنید.

پاسخ: $8\mu_0 I / 5\sqrt{5}R$

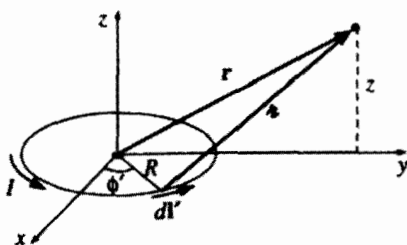


شکل ۵-۶۰

! مسئله ۴۷-۵ میدان مغناطیسی را در یک نقطه $z > R$ روی محور (الف) یک قرص دوار و (ب) یک کره دوار در مسئله ۶-۵ حساب کنید.

مسئله ۴۸-۵ فرض کنید بخواهیم میدان یک حلقه دایره‌ای (مثال ۶-۵) را در یک r که مستقیماً بالای مرکز حلقه نیست حساب کنیم (شکل ۵-۶۱). می‌توانیم محورها را به گونه‌ای در نظر بگیریم که r در صفحه yz در نقطه $(0, y, z)$ باشد. نقطه چشمه عبارت است از $(R \cos \phi', R \sin \phi', 0)$

و ϕ' از صفر تا 2π تغییر می‌کند. انتگرالهایی را که به کمک آنها B_x ، B_y ، و B_z محاسبه می‌شوند بنویسید و B_x را به‌طور کامل حساب کنید.

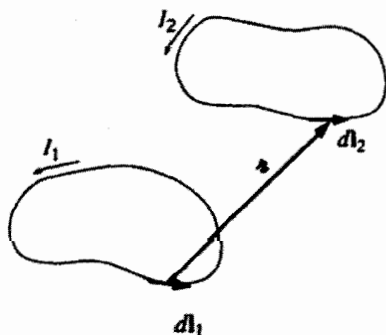


شکل ۶۱-۵

مسئله ۴۹-۵ مغناطوستاتیک "جریان چشمه" (عامل ایجاد میدان) و "جریان گیرنده" (چیزی که بر آن نیرو وارد می‌شود) را چنان بی‌تقارن در نظر می‌گیرد که سازگاری نیروی مؤثر بر دو حلقهٔ جریان با قانون سوم نیوتون به‌هیچ‌وجه مشهود نیست. با استفاده از قانون بیوساوار (۳۲-۵) و قانون نیروی لورنتس (۱۶-۵) نشان دهید که نیروی وارد بر حلقهٔ ۲ ناشی از حلقهٔ ۱، (شکل ۶۲-۵) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint \oint \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 \quad (۸۸-۵)$$

بدین ترتیب روشن است که $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ زیرا $\hat{\mathbf{r}}$ با تغییر نقش حلقه ۱ و ۲ تغییر علامت می‌دهد. (اگر به جمله‌ای "اضافی" برخورد کردید توجه کنید که $d\mathbf{l}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}} = d\mathcal{A}$.)



شکل ۶۲-۵

مسئله ۵۰-۵ (الف) یک راه پرکردن "حلقه مفقوده" شکل ۴۸-۵ استفاده از تشابه معادلات

معرف \mathbf{A} (یعنی $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) و معادلات ماکسول برای \mathbf{B} (یعنی $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) است. بدیهی است که رابطه \mathbf{A} با \mathbf{B} کاملاً شبیه ارتباط \mathbf{B} با \mathbf{J} است (قانون بیوساوار). از این مشاهده فرمولی که \mathbf{A} را برحسب \mathbf{B} بیان کند بنویسید. (ب) مشابه الکتریکی نتیجه به دست آمده در (الف) این است

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r'^2} d\tau'$$

با استفاده از مقایسه مناسب آن را به دست آورید.

! مسئله ۵-۵۱ راه دیگر پر کردن "حلقه مفقوده" در شکل ۵-۴۸ یافتن مشابه مغناطوستاتیک برای معادله (۲-۲۱) است. معادله مناسب به صورت زیر است

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_0^r (\mathbf{B} \times d\mathbf{l})$$

(الف) این فرمول را برای ساده‌ترین مورد یعنی \mathbf{B} یکنواخت بیازمایید (مبدأ را نقطه مرجع بگیرید). آیا نتیجه با مسئله ۵-۲۴ سازگاری دارد؟ ممکن است این مشکل را با افزودن یک ضریب $1/2$ چاره کنید، اما نقطه ضعف این معادله عمیقتر از این است.

(ب) نشان دهید که $\int (\mathbf{B} \times d\mathbf{l})$ مستقل از مسیر نیست. برای این کار $\oint (\mathbf{B} \times d\mathbf{l})$ را حول حلقه مستطیلی شکل ۵-۶۳ محاسبه کنید. تا آنجایی که می‌دانیم بهترین کاری که در طول این خطوط می‌توان کرد توجه به زوج معادله زیر است:

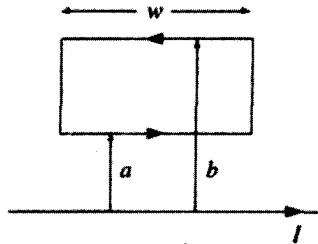
$$V(\mathbf{r}) = -\mathbf{r} \cdot \int_0^1 \mathbf{E}(\lambda \mathbf{r}) d\lambda \quad (1)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mathbf{r} \times \int_0^1 \lambda \mathbf{B}(\lambda \mathbf{r}) d\lambda \quad (2)$$

[معادله (۱) به انتخاب یک مسیر شعاعی برای انتگرال معادله (۲-۲۱) می‌انجامد؛ معادله (۲) جوابی "متقارن" تر به مسئله ۵-۳۰ می‌دهد.]

(ج) با استفاده از (۲) پتانسیل برداری را برای \mathbf{B} یکنواخت بیابید.

(د) با استفاده از (۲) پتانسیل برداری یک سیم مستقیم نامتناهی حامل جریان یکنواخت I را حساب کنید. آیا (۲) خودبه خود در معادله $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ صدق می‌کند؟
پاسخ: $(\mu_0 I / 2\pi s)(z\hat{s} - \bar{z}\hat{z})$.



شکل ۵-۶۳

مسئله ۵-۵۲ (الف) پتانسیل زده‌ای $U(\mathbf{r})$ را برای یک دوقطبی مغناطیسی "خالص" \mathbf{m} بیابید.
(ب) پتانسیلی زده‌ای برای پوسته کروی دوار (مثال ۵-۱۱) بسازید. [راهنمایی: به ازای $r > R$ این یک میدان دوقطبی خالص است و مقایسه معادلات (۵-۶۷) و (۵-۸۵) صحت ادعا را نشان می‌دهد].
(ج) همین کار را برای درون یک کره جامد دوار تکرار کنید. [راهنمایی: اگر مسئله ۵-۲۹ را حل کرده باشید همین حالا میدان را می‌دانید؛ آن را با $-\nabla U$ مساوی قرار داده و U را پیدا کنید. مشکل در کجاست؟]

مسئله ۵-۵۳ همان‌گونه که معادله $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ به ما اجازه می‌دهد که \mathbf{B} را به صورت تاو یک پتانسیل برداری در نظر بگیریم ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$)، نتیجه $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ما را مجاز می‌کند که خود \mathbf{A} را به صورت تاو یک پتانسیل "مرتبه بالاتری" بنویسیم: $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{W}$. (و این سلسله مراتب را می‌توان همچنان ادامه داد).

(الف) فرمولی کلی برای \mathbf{W} (به صورت انتگرالی روی \mathbf{B}) بیابید به طوری که وقتی در بینهایت $\mathbf{B} \rightarrow 0$ باز هم صادق باشد.

(ب) \mathbf{W} را برای موردی که میدان مغناطیسی \mathbf{B} یکنواخت است تعیین کنید. [راهنمایی: مسئله ۵-۲۴ را ببینید].

(ج) \mathbf{W} را داخل و خارج یک سیمولوله نامتناهی بیابید. [راهنمایی: مثال ۵-۱۲ را ببینید].

مسئله ۵-۵۴ قضیه یکتایی زیر را ثابت کنید: اگر چگالی جریان \mathbf{J} در سرتاسر یک حجم V مشخص باشد، و یا پتانسیل \mathbf{A} یا میدان مغناطیسی \mathbf{B} روی سطح S که کران حجم V

است معلوم باشد، آن‌گاه خودمیدان مغناطیسی در سرتاسر حجم V به‌طور یکتا مشخص می‌شود. [راهنمایی: در آغاز از قضیه دیورژانس استفاده کنید و نشان دهید برای توابع برداری دلخواه U و V داریم]

$$\int \{(\nabla \times U) \cdot (\nabla \times V) - U \cdot [\nabla \times (\nabla \times V)]\} d\tau = \oint [U \times (\nabla \times V)] \cdot da$$

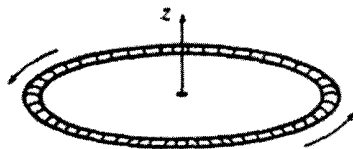
مسئله ۵۵-۵ یک دوقطبی مغناطیسی $m = -m_0 \hat{z}$ در مبدأ و در میدان مغناطیسی یکتواخت دیگر $B = B_0 \hat{z}$ قرار دارد. نشان دهید که یک سطح کروی که مرکز آن در مبدأست وجود دارد که از آن خطوط میدان مغناطیسی عبور نمی‌کنند. شعاع این کره را بیابید و خطوط میدان داخل و خارج آن را رسم کنید.

مسئله ۵۶-۵ یک نوار دایره‌ای نازک یکتواخت دارای بار Q و جرم M مطابق شکل ۶۴-۵ حول محورش می‌چرخد.

(الف) نسبت گشتاور دوقطبی مغناطیسی به تکانه زاویه‌ای آن را بیابید. (نسبت زیرومغناطیسی یا نسبت مغناطومکانیکی).

(ب) نسبت زیرومغناطیسی یک کره دوار یکتواخت چقدر است؟ [به محاسبات جدیدی نیاز ندارید؛ کره را به حلقه‌های بسیار کوچک تبدیل و نتیجه قسمت (الف) را به‌کار ببرید].

(ج) بنابر مکانیک کوانتومی، تکانه زاویه‌ای یک الکترون دوار حول محورش $(1/2)\hbar$ است که در آن \hbar ثابت پلانک است. در این صورت گشتاور دوقطبی مغناطیسی الکترون برحسب $A \cdot m^2$ چقدر می‌شود؟ [این مقدار نیمه‌کلاسیک با ضریب ۲ اختلاف دارد. نظریه نسبیتی دیراک برای الکترون درست عدد ۲ را پیدا می‌کند و شرودینگر، فاینمن و توموناگا بعداً اصلاحات جزئی به این مقدار محاسبه کردند. تعیین گشتاور دوقطبی مغناطیسی الکترون دقیقترین دستاورد الکتروپدینامیک کوانتومی است و شاید بیشترین سازگاری مابین نظریه و تجربه را در تمام فیزیک نشان دهد. مقدار کوانتومی $(e\hbar/2m)$ را که در آن e و m به ترتیب بار و جرم الکترون اند مگنتون بور می‌نامند].



شکل ۶۴-۵

- مسئله ۵۷-۵ (الف) ثابت کنید که میدان مغناطیسی میانگین کره‌ای به شعاع R ناشی از جریان ثابتی در داخل آن برابر است با

$$B_{\text{میانگین}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{R^2} \quad (۸۹-۵)$$

که در آن m گشتاور کل دوقطبی مغناطیسی کره است. با نتیجه الکتروستاتیک، معادله (۱۰۵-۳)، مقایسه کنید. [این کار سختی است، بنابراین برای راهنمایی چنین شروع کنید:]

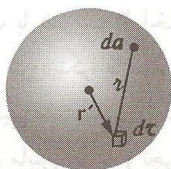
$$B_{\text{میانگین}} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int B \, d\tau$$

آن‌گاه B را به صورت $(\nabla \times \mathbf{A})$ نوشته و از مسئله ۱-۶۰ (ب) استفاده کنید. معادله (۶۳-۵) را بنویسید و با محاسبه انتگرال سطحی نشان دهید که

$$\int \frac{1}{\pi} \, da = \frac{4}{3} \pi R^3$$

(شکل ۶۵-۵). در صورت تمایل از معادله (۹۱-۵) هم استفاده کنید.

(ب) نشان دهید که میدان مغناطیسی میانگین ناشی از جریانهای یکنواخت خارج از کره با میدان حاصل از آنها در مرکز کره برابر است.



شکل ۶۵-۵

مسئله ۵۸-۵ یک کره جامد به شعاع R و توزیع بار یکنواخت Q با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور z می‌چرخد.

(الف) گشتاور دوقطبی مغناطیسی کره چقدر است؟

(ب) میدان مغناطیسی میانگین در داخل کره را پیدا کنید (مسئله ۵۷-۵).

(ج) پتانسیل برداری تقریبی را در نقطه (r, θ) با شرط $r \gg R$ پیدا کنید.

(د) پتانسیل کامل نقطه (r, θ) در خارج کره را پیدا کنید و نشان دهید که جواب با (ج) سازگار است. [راهنمایی: به مثال ۱۱-۵ رجوع کنید].

(ه) میدان مغناطیسی را در نقطه (r, θ) داخل کره بیابید و سازگاری آن را با (ب) بیازمایید.

مسئله ۵-۵۹ با استفاده از معادله (۵-۸۶) میدان مغناطیسی میانگین یک دوقطبی را برای کره‌ای به شعاع R که مرکزش در مبدأست محاسبه کنید. اول انتگرال زاویه‌ای را حساب کنید. پاسخ خود را با قضیه کلی در مسئله ۵-۵۷ مقایسه کنید. عدم توافق را توجیه کنید و بگویید معادله (۵-۸۷) چگونه باید تصحیح شود تا ابهام موجود در $r = 0$ برطرف شود. (مسئله ۳-۴۲). بدیهی است که میدان حقیقی یک دوقطبی مغناطیسی عبارت است از

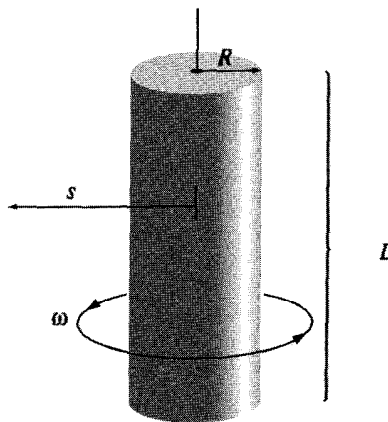
$$\mathbf{B}_{\text{دوقطبی}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}] + \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{m} \delta^3(\mathbf{r}) \quad (۹۰-۵)$$

با مشابه الکتروستاتیکی معادله (۳-۱۰۶) مقایسه کنید. [در ضمن جمله تابع دلتا در معادله بالا، عامل شکافتگی فوق ریز در طیف اتمی است].

مسئله ۵-۶۰ قبلاً بسط چندقطبی برای پتانسیل برداری یک جریان خطی را دیدیم. این بسط رایجترین نوع و از بعضی جنبه‌ها ساده‌ترین آنها برای محاسبه است. برای یک جریان حجمی \mathbf{J} :

(الف) بسط چندقطبی شبیه به معادله (۵-۷۸) را بنویسید.

(ب) پتانسیل تک‌قطبی را نوشته و ثابت کنید مقدارش صفر است.



شکل ۵-۶۶

(ج) با استفاده از معادلات (۱-۱۰۷) و (۵-۸۴) نشان دهید که گشتاور دوقطبی را می‌توان

به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{m} = \frac{1}{4} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{J}) d\tau \quad (۵-۹۱)$$

مسئله ۵-۶۱ یک میله شیشه‌ای نازک به شعاع R و طول L دارای بار یکنواخت سطحی به چگالی σ است. این میله را حول محورش با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخانند. میدان مغناطیسی را در فاصله $R \gg s$ از مرکز میله پیدا کنید (شکل ۵-۶۶). [راهنمایی: آن را به صورت مجموعه‌ای از دوقطبیهای مغناطیسی در نظر بگیرید].

□

پاسخ: $\mu_0 \omega \sigma L R^2 / 4 [s^2 + (L/2)^2]^{3/2}$

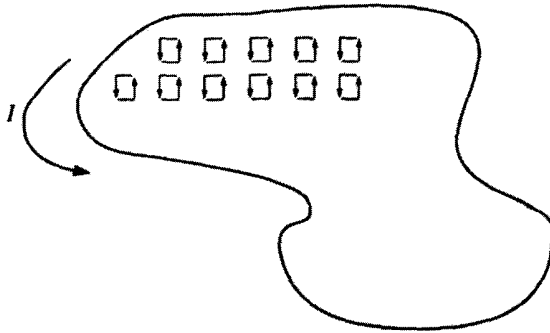
میدانهای مغناطیسی در ماده

۱-۶ مغناطش

۱-۱-۶ دیامغناطیس، پارامغناطیس، فرومغناطیس

وقتی از مردم عادی پرسید مغناطیس چیست، احتمالاً با شما درباره آهنرباهای نعل اسبی، عقربه‌های قطب‌نما و یا قطب شمال صحبت خواهند کرد؛ هیچ یک از این موارد ارتباط آشکاری با بارهای متحرک و یا سیم حامل جریان ندارد. با وجود این می‌دانیم که تمام میدانهای مغناطیسی از بارهای الکتریکی متحرک ناشی می‌شوند زیرا اگر یک قطعه مغناطیسی را در ابعاد اتمی بررسی کنیم متوجه جریانهای ضعیف می‌شویم: الکترونهايي که دور هسته و یا حول محور خودشان می‌گردند. این حلقه‌های جریان که در ابعاد ماکروسکوپی ناچیزند را می‌توان به صورت دو قطبهای مغناطیسی تعبیر کرد. این دو قطبها عموماً به علت کاتوره‌ای بودن جهتگیری آنها یکدیگر را خنثی می‌کنند. با وجود این بر اثر اعمال یک میدان مغناطیسی همسویی خالصی از این دو قطبها ایجاد می‌شود و محیط مادی قطبش مغناطیسی پیدا می‌کند و یا به زبان ساده آهنربا می‌شود.

برخلاف قطبش الکتریکی که تقریباً همیشه در جهت E است بعضی مواد در جهت موازی با B مغناطش می‌یابند (پارامغناطیسها) و برخی در خلاف جهت B (دیامغناطیسها). بعضی مواد مانند



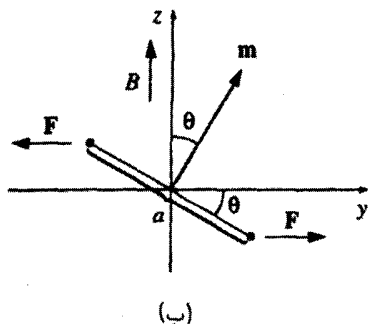
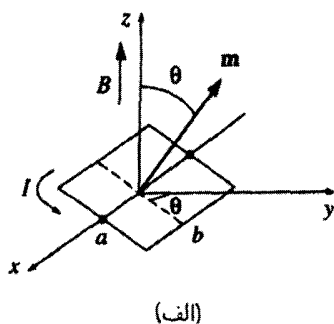
شکل ۱-۶

آهن که فرومغناطیس نامیده می‌شوند بعد از حذف میدان خارجی اعمال شده خاصیت آهنربایی را حفظ می‌کنند. با توجه به این نکات مغناطش را نمی‌توان تنها به صورت میدان موجود در جسم بیان کرد بلکه سابقه مغناطیسی ماده هم مهم است. آشناترین مثال، آهنرباهای دائمی ساخته شده از آهن هستند، گرچه از جنبه نظری آنها پیچیده‌ترین وضعیت را دارند. ما بررسی فرومغناطیسی را به انتهای فصل موکول می‌کنیم و فعلاً به الگوهای کیفی پارامغناطیسی و دیامغناطیسی می‌پردازیم.

۲-۱-۶ گشتاور و نیروی وارد بر دوقطبی مغناطیسی

بر یک دوقطبی مغناطیسی، در میدان مغناطیسی، گشتاور وارد می‌شود؛ همچنان‌که به دوقطبی الکتریکی در میدان الکتریکی گشتاور وارد می‌شود. می‌خواهیم گشتاور وارد بر یک حلقه جریان مستطیلی واقع در یک میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B} را حساب کنیم. (چون هر حلقه جریان را می‌توان متشکل از مستطیلهای کوچکی در نظر گرفت که اضلاع داخلی مجاور یکدیگر را مطابق شکل ۱-۶ خنثی می‌کنند، انتخاب حلقه مستطیلی از عمومیت مسئله نمی‌کاهد. با این همه اگر مایل‌اید حلقه جریان با شکل غیرمستطیل را بررسی کنید مسئله ۲-۶ را حل کنید.) حلقه جریان را که در مبدأ مختصات در نظر گرفته‌اید به اندازه زاویه θ از محور z به سمت محور y بچرخانید (شکل ۲-۶). میدان \mathbf{B} را در جهت z در نظر بگیرید. نیروهای وارد بر اضلاع مایل یکدیگر را خنثی می‌کنند. (این نیروها تمایل به کشیدن حلقه دارند، اما در دوران آن نقشی ندارند.) نیروهای وارد بر اضلاع "افقی" نیز مساوی و مخالف هستند (بنابراین نیروی کل وارد بر حلقه صفر است)، اما نیروهای اخیر ایجاد گشتاوری می‌کنند که برابر است با

$$\mathbf{N} = aF \sin \theta \hat{x}$$



شکل ۲-۶

اندازه نیروی وارد بر هر قسمت برابر است با

$$F = IbB$$

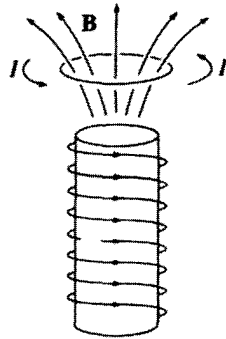
و بنابراین داریم

$$\mathbf{N} = IabB \sin \theta \hat{x} = mB \sin \theta \hat{x}$$

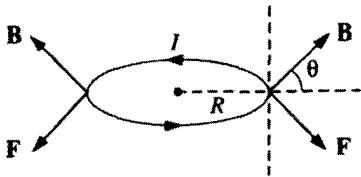
یا

$$\boxed{\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}} \quad (۱-۶)$$

که در آن $m = Iab$ گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقه است. معادله (۱-۶) مشخص‌کننده گشتاور دقیق مؤثر بر هر توزیع جریان موضعی در حضور یک میدان یکنواخت است؛ در میدان غیر یکنواخت این معادله معرف، مقدار دقیق گشتاور (حول مرکز) برای یک دوقطبی کامل بینهایت کوچک است. توجه کنید که معادله (۱-۶) مشابه معادله $\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ یعنی معادله (۴-۴) برای میدان الکتریکی است. در هر دو مورد گشتاور می‌خواهد دوقطبی را به موازات میدان در آورد. این گشتاور در واقع عامل پارامغناطیسی است. از آنجایی که هر الکترون دارای گشتاور دوقطبی است (با در نظر گرفتن الکترون به صورت یک کره باردار دوار این گفته را استنتاج کنید)، ممکن است به این نتیجه برسید که پارامغناطیسی یک پدیده جهانی است. در واقع قوانین مکانیک کوانتومی (به ویژه اصل طرد پاولی) نشان می‌دهد که الکترونهاى هر اتم دوبه‌دو با اسپینهای متقابل به هم درگیر و در نتیجه گشتاور کل آنها عملاً صفر است. در نتیجه پارامغناطیسی فقط برای اتمها یا مولکولهایی روی



شکل ۳-۶



شکل ۴-۶

می‌دهد که تعداد الکترونهاى آنها فرد باشد؛ در این صورت، گشتاور به تک‌الکترون "اضافى‌ای" وارد می‌شود که جفتى ندارد. حتى در این مورد نیز همسویى دوقطبی با میدان کامل نیست، زیرا برخورد های گرمایی کاتوره‌ای نظم را از بین می‌برد. در یک میدان یکنواخت، نیروی کل وارد بر یک حلقهٔ جریان صفر است:

$$\mathbf{F} = I \oint (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = I \left(\oint d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

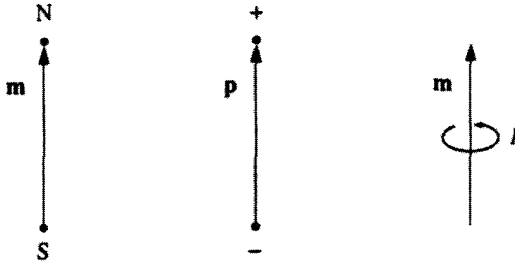
\mathbf{B} ثابت از زیر انتگرال بیرون می‌آید و جمع برداری $\oint d\mathbf{l}$ دور حلقهٔ بسته صفر است. بدیهی است برای میدانهای غیریکنواخت دیگر چنین نیست. مثلا سیم دایره‌ای به شعاع R که حامل جریان I است را به صورت معلق بالای سیملوله‌ای کوتاه در نظر بگیرید (شکل ۳-۶). در اینجا \mathbf{B} دارای یک مؤلفه شعاعی است و در نتیجه نیروی خالصی به طرف پایین حلقه اثر می‌کند (شکل ۴-۶)

$$F = 2\pi IRB \cos \theta \quad (۲-۶)$$

نیروی وارد بر حلقه‌ای کوچک به گشتاور دوقطبی \mathbf{m} ، در میدان \mathbf{B} برابر است با

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \quad (۳-۶)$$

(مسئلهٔ ۴-۶ را ببینید). باز هم در این مورد می‌توان گفت که فرمولهای مغناطیسی با "دوقلوی" همتای الکتریکی آنها مشابه‌اند به شرط آنکه برای مورد الکتریکی بنویسیم $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$.

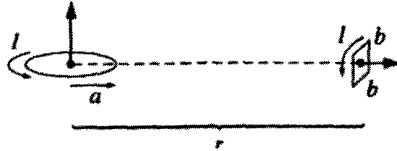


(الف) دوقطبی مغناطیسی (مدل گیلبرت) (ب) دوقطبی الکتریکی (ج) دوقطبی مغناطیسی (مدل آمپر)

شکل ۵-۶

اگر این احساس را دارید که این مورد را قبلاً دیده‌اید، شاید تحسین بیشتری برای فیزیکدانان قدیمی قائل شوید که می‌گفتند دوقطبیهای مغناطیسی از "بارهای" مغناطیسی مثبت و منفی تشکیل شده‌اند (قطب شمال و قطب جنوب) که به فاصله کمی از هم قرار گرفته‌اند [مانند دوقطبیهای الکتریکی؛ شکل ۵-۶ (الف)]. این فیزیکدانها از "قانون کولن" برای محاسبه نیروهای ربایش و رانش این قطبها استفاده کرده و کل مسئله مغناطوستاتیک را همانند الکتروستاتیک در مدنظر قرار می‌دادند. این کار از جنبه‌های متعددی بد نبود؛ از این روش میدان واقعی دوقطبی (حداقل برای نقاط دور از مبدأ)، گشتاور مؤثر بر دوقطبی (دست‌کم روی یک دوقطبی ساکن) و نیروی مؤثر بر دوقطبی (حداقل در غیاب جریانهای خارجی) مشخص و معلوم می‌شد. اما از دیدگاه فیزیکی این تصور خوب نیست، زیرا چیزی به نام تک‌قطب شمال یا جنوب وجود ندارد اگر یک آهنربای میله‌ای را نصف کنید قطب شمال را در یک دست و قطب جنوب را در دست دیگر خود خواهید داشت؛ در هر دو دست خود یک مغناطیس کامل دارید. خاصیت مغناطیسی را نمی‌توان به "تک‌قطبیهای مغناطیسی" منتسب دانست بلکه مربوط به بارهای الکتریکی متحرک است؛ دوقطبیهای مغناطیسی، حلقه‌های ظریف جریان هستند [شکل ۵-۶ (ج)]، و در واقع، این چیز فوق‌العاده‌ای است که فرمولهای حاوی m مشابه روابطی هستند که در آن p خودنمایی می‌کند. بعضی مواقع ساده‌تر آن است که الگوی "گیلبرت" برای دوقطبی مغناطیسی (تک‌قطبیهای جدا از هم) را به جای الگوی "آمپر" (حلقه جریان) که از نظر فیزیکی صحیح است بپذیریم. در واقع در این تصویر مسائل آسانتر مطرح می‌شوند (کافی است از همان نتایج متناظر الکتروستاتیک با تغییر p به m و $1/\epsilon_0$ به μ_0 و E به B استفاده کنید). اما وقتی ویژگیهای دوقطبی از نزدیک مورد توجه قرار می‌گیرند، این دو الگو پاسخهای متفاوتی می‌دهند. توصیه می‌شود که برای به‌دست آوردن یک دیدگاه شهودی، از الگوی گیلبرت استفاده کنید، اما برای نتایج کمی هرگز روی آن اصرار نداشته باشید.

مسئله ۱-۶ گشتاور مؤثر بر حلقه مربعی شکل ۶-۶ از طرف حلقه دایره‌ای را (با فرض آنکه r به مراتب از a یا b بزرگتر است) حساب کنید. در صورت آزاد بودن حلقه مربعی برای چرخش، وضعیت تعادل آن چیست؟



شکل ۶-۶

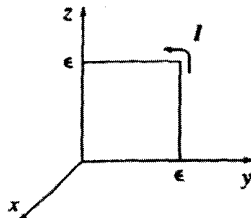
مسئله ۲-۶ با استفاده از قانون نیروی لورنتس، به شکل معادله ۶-۶ نشان دهید که گشتاور مؤثر بر هر نوع توزیع جریان پایا (نه فقط یک حلقه مربعی) در یک میدان یکنواخت \mathbf{B} برابر است با $\mathbf{m} \times \mathbf{B}$.

مسئله ۳-۶ نیروی ربایش بین دو قطبهای مغناطیسی \mathbf{m}_1 و \mathbf{m}_2 شکل ۷-۶ را که به فاصله r از یکدیگر واقع هستند (الف) با استفاده از معادله ۲-۶، (ب) با استفاده از معادله ۳-۶ حساب کنید.



شکل ۷-۶

مسئله ۴-۶ معادله ۳-۶ را به دست آورید. [یک راه کار چنین است: دو قطبی را یک مربع بینهایت کوچک به ضلع ϵ بگیرید (اگر هم چنین نباشد، مربع را به مربعهای بسیار کوچک مورد نظر تقسیم کنید). محورها را مطابق شکل ۸-۶ در نظر بگیرید و نیروی $\mathbf{F} = I \int (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$ را



شکل ۸-۶

برای چهار ضلع حساب کنید. \mathbf{B} را بر حسب سری تیلور بسط دهید، مثلاً

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(0, \varepsilon, z) \cong \mathbf{B}(0, 0, z) + \varepsilon \left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right|_{(0, 0, z)}$$

برای روشی پیچیده‌تر به مسئله ۲۲-۶ نگاه کنید.]

مسئله ۵-۶ چگالی جریان یکنواخت $\mathbf{J} = J_0 \hat{z}$ را در قطعه‌ای که در صفحه yz از $x = -a$ تا $x = +a$ واقع است در نظر بگیرید. یک دوقطبی مغناطیسی $\mathbf{m} = m_0 \hat{x}$ هم در مبدأ قرار دارد.

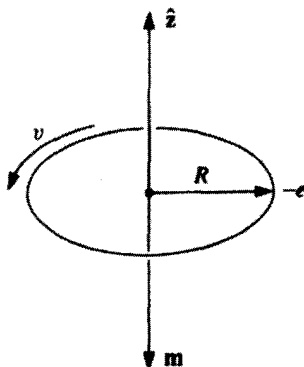
(الف) نیروی وارد بر دوقطبی را با استفاده از معادله (۳-۶) بیابید.

(ب) همین کار را برای دوقطبی واقع در جهت y تکرار کنید: $\mathbf{m} = m_0 \hat{y}$.

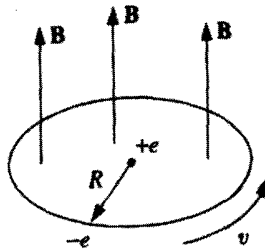
(ج) در موارد الکتروستاتیکی، عبارتهای $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ و $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}$ هم‌ارزند (اثبات کنید)، اما برای مشابه مغناطیسی آن چنین چیزی صادق نیست (بگویید چرا). به‌عنوان مثال مقدار $(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ را برای پیکربندیهای (الف) و (ب) محاسبه کنید. □

۳-۱-۶ اثر میدان مغناطیسی روی مدارهای اتمی

الکترونها نه تنها اسپین دارند، بلکه حول هسته نیز دوران می‌کنند — برای سادگی مدار را دایره‌ای به شعاع R (شکل ۹-۶) در نظر بگیرید. گرچه از نظر عملی این حرکت مداری جریان پایایی تولید



شکل ۹-۶



شکل ۱۰-۶

نمی‌کند، اما در یک دوره بسیار کوتاه $T = 2\pi R/v$ مثل آن است که جریان پایای زیر را داشته باشیم

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi R}$$

بیامد این جریان، یک گشتاور دوقطبی مداری ($I\pi R^2$) است

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} evR^2 \hat{\mathbf{z}} \quad (4-6)$$

(علامت منفی از بار منفی الکترون ناشی می‌شود). به این دوقطبی نیز همانند هر دوقطبی دیگر وقتی اتم در یک میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد گشتاور $\mathbf{m} \times \mathbf{B}$ اثر می‌کند. اما انحراف کل مدار از انحراف اسپین بسیار دشوارتر است. بنابراین سهم گشتاور مداری در پارامغناطیس کوچک است. با این همه اثر بس مهمتری در حرکت مداری الکترون وجود دارد: سرعت الکترون بر اثر این گشتاور زیاد یا کم می‌شود و این تغییرات به سمتگیری \mathbf{B} بستگی دارد. زیرا در حالی که شتاب مرکزگرای v^2/R معمولاً تنها از نیروهای الکتریکی ناشی می‌شود، یعنی^۱

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} = m_e \frac{v^2}{R} \quad (5-6)$$

در حضور یک میدان مغناطیسی، نیروی اضافی $-e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ هم وجود دارد. برای سادگی بحث فرض کنید \mathbf{B} بر صفحه مدار، همچنانکه در شکل ۱۰-۶ نشان داده‌ایم، عمود است، آن‌گاه داریم

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} + e\bar{v}B = m_e \frac{\bar{v}^2}{R} \quad (6-6)$$

۱. برای احتراز از اشتباه با گشتاور دوقطبی مغناطیسی m ، جرم الکترون را با m_e نشان می‌دهیم.

تحت این شرایط سرعت جدید \bar{v} از سرعت v بیشتر است

$$e\bar{v}B = \frac{m_e}{R} (\bar{v}^2 - v^2) = \frac{m_e}{R} (\bar{v} + v)(\bar{v} - v)$$

و چنانچه تغییر سرعت $\Delta v = \bar{v} - v$ کوچک باشد داریم

$$\Delta v = \frac{eRB}{2m_e} \quad (۷-۶)$$

اما وقتی B برقرار شود، سرعت الکترون زیاد می‌شود.^۱ این تغییر سرعت مداری، تغییر گشتاور دوقطبی را در پی خواهد داشت

$$\Delta m = -\frac{1}{\gamma} e(\Delta v) R \hat{z} = -\frac{e^2 R^2}{4m_e} B \quad (۸-۶)$$

توجه کنید که تغییر m در جهت مخالف B است. (الکترونی که در جهت مخالف دوران کند دارای گشتاور مغناطیسی به سمت بالاست، اما میدان سرعت مداری را می‌کاهد، لذا تغییر باز هم در جهت مخالف B است). در حالت معمولی مدارهای الکترونی به‌طور کاتوره‌ای قرار دارند و گشتاورهای دوقطبیهای مداری اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند. اما در حضور یک میدان مغناطیسی، هر اتم یک گشتاور دوقطبی کوچک "اضافی" پیدا می‌کند و این گشتاورهای کوچک همگی یاد موازی میدان هستند. این فرایند، سازوکار دیامغناطیسی است. چنین تأثیراتی بر اتم یک پدیده کلی برای همه اتمهاست. با وجود این اثرش به مراتب ضعیفتر از پارامغناطیس است، و عمدتاً برای اتمهایی مشهود است که تعداد الکترونهای آنها زوج باشد؛ در این صورت معمولاً خاصیت پارامغناطیسی هم وجود ندارد.

در به‌دست آوردن معادله (۸-۶) فرض کردیم مدار دایره‌ای با همان شعاع R قبلی‌اش باقی بماند. در حال حاضر نمی‌توانیم توجیهی برای این فرض مطرح کنیم. اگر وقتی که میدان برقرار می‌شود اتم ساکن باشد فرضیه ما قابل اثبات است، اما این دیگر مغناطوستاتیک نیست و به هر صورت بحث کاملتر را به فصل ۷ موکول می‌کنیم (مسئله ۷-۴۹ را ببینید). اگر اتم در میدان حرکت کند وضعیت کاملاً پیچیده می‌شود. اما نگران نباشید زیرا درصدد آن هستیم برای دیامغناطیسی یک بررسی کیفی به عمل آوریم. فرض کنید سرعت ثابت و شعاع متغیر باشد، در این صورت فرمول (۸-۶) (به میزان ۲ برابر) تغییر می‌کند اما در نتیجه‌گیری ما تأثیری ندارد. حقیقت این است

۱. قبلاً گفته بودیم که بنابه معادله (۱۱-۵) میدانهای مغناطیسی کار انجام نمی‌دهند، و قادر به افزایش سرعت ذره نیستند. این را باز هم تأیید می‌کنیم. با وجود این، همان‌گونه که در فصل ۷ می‌بینیم، میدان مغناطیسی متغیر یک میدان الکتریکی القا می‌کند، و این میدان اخیر است که به الکترونها شتاب می‌دهد.

که بر این الگوی کلاسیک به طور بنیادی ایراد وارد است (دیامغناطیسی یک پدیده کوانتومی است) و بنابراین اصراری نیست که حالت کلاسیک را به تفصیل بحث کنیم.^۱ آنچه مهم است این واقعیت تجربی است که در مواد دیامغناطیسی، گشتاورهای دوقطبی القایی در جهت مخالف میدان مغناطیسی قرار دارند.

۴-۱-۶ مغناطش

وقتی به یک ماده میدان مغناطیسی اعمال شود آن ماده، مغناطیس می‌شود؛ بررسی میکروسکوپی جسم در این حالت نشان می‌دهد که دوقطبیهای کوچک زیادی با سمتگیری کلی مشخص در جسم وجود دارد. قبلاً برای این قطبش مغناطیسی دو سازوکار را برشمرديم: (۱) پارامغناطیسی (بر دوقطبیهایی که وابسته به اسپین الکترونیهای جفت نشده هستند گشتاوری اثر می‌کند که می‌خواهد آنها را به موازات میدان در آورد) و (۲) دیامغناطیسی (که بر اساس تغییرات سرعت مداری الکترونها و در نتیجه تغییر گشتاور دوقطبی مداری در جهت مخالف میدان حاصل می‌شود). صرف‌نظر از علت، حالت قطبش مغناطیسی یک ماده را برحسب کمیت برداری

$$(۹-۶) \quad M \equiv \text{گشتاور دوقطبیهای مغناطیسی در واحد حجم}$$

تعریف می‌کنیم که M را مغناطش می‌نامند. نقش این کمیت جدید همانند P در الکتروستاتیک است. در بخش بعدی کاری به چگونگی مغناطش (پارا، دیا و حتی فرومغناطیس) نداریم؛ M را معلوم در نظر گرفته و میدان حاصل از آن را محاسبه می‌کنیم.

در ضمن این نکته که موادی غیر از سه فرومغناطیس مشهور (آهن، نیکل و کبالت) هم از میدان مغناطیسی متأثر می‌شوند ممکن است برای شما تعجب‌آور باشد. معلوم است که شما نمی‌توانید یک تکه چوب یا آلومینیم را با آهنربا بلند کنید. اما علت این امر آن است که در این موارد دیامغناطیسی و یا پارامغناطیسی فوق‌العاده ضعیف هستند: برای آشکارسازی چنین اثری به آزمایشی حساس و ظریف و آهنربایی قوی نیاز دارید. اگر شما قطعه‌ای از یک ماده پارامغناطیسی را بالای سیملوله‌ای مانند شکل ۳-۶ بیاویزید، مغناطش القایی به سمت بالا خواهد بود و بنابراین نیرو به سمت پایین است. برعکس مغناطش یک جسم دیامغناطیس به سمت پایین و نیرو به سمت بالاست. به‌طور کلی وقتی جسمی را در یک میدان غیریکتواخت قرار دهیم اگر جسم پارامغناطیس باشد به سمت میدان جذب

1. S. L. O'Dell and R. K. P. Zia, *Am. J. Phys.* 54, 32, (1986); R. Peierls, *Surprises in Theoretical Physics*, Section 4.3 (Princeton, N. J: Princeton University Press, 1979); R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. 2, Sec. 34-36 (New York: Addison-Wesley, 1966).

می‌شود، در حالی که جسم دیامغناطیس دفع می‌شود. در هر دو مورد نیروها کوچک هستند — در تجربه‌ای مشابه برای آهن نیرو 10^4 تا 10^5 برابر بزرگتر است. به این علت است که قبلاً مثلاً در فصل ۵، میدان را در داخل یک سیم مسی حساب کردیم بدون آنکه نگران تأثیرات مغناطش باشیم.

مسئله ۶-۶ کدامیک از مواد زیر پارامغناطیس و کدامیک دیامغناطیس هستند؟ آلومینیم، مس، مس کلرید ($CuCl_2$)، کربن، سرب، نیتروژن (N_2)، نمک ($NaCl$)، سدیم، سولفور، آب. (در حقیقت مس تا حدودی دیامغناطیس است و رفتار بقیه موارد آن‌گونه است که انتظار دارید). □

۲-۶ میدان یک جسم مغناطیده

۱-۲-۶ جریانهای مقید

فرض کنید قطعه‌ای از یک ماده مغناطیده در اختیار داریم و گشتاور دوقطبی مغناطیسی واحد حجم، M ، هم معلوم است. میدان مغناطیسی حاصل از این ماده چقدر است؟ بسیار خوب، پتانسیل برداری یک دوقطبی m را با معادله (۸۳-۵) دیده بودیم:

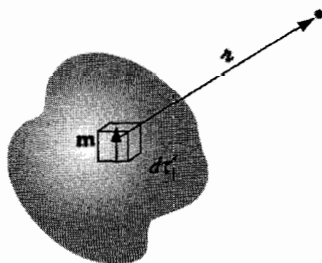
$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (10-6)$$

هر جزء حجم $d\tau'$ یک جسم مغناطیده حاوی $M d\tau'$ گشتاور دوقطبی است و بنابراین پتانسیل برداری کل (شکل ۱۱-۶) برابر است با

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{M(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{r}}}{r'^2} d\tau' \quad (11-6)$$

این انتگرال را همان‌گونه که برای مورد الکتریکی (در بخش ۱-۲-۴) دیدیم می‌توان با عنایت به اتحاد

$$\nabla' \frac{1}{r} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$



شکل ۱۱-۶

به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \left(\nabla' \frac{1}{\pi} \right) \right] d\tau'$$

با انتگرالگیری جزء به جزء و استفاده از قاعده ضرب ∇ داریم

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int \frac{1}{\pi} [\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')] d\tau' - \int \nabla' \times \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{\pi} \right] d\tau' \right\}$$

مسئله ۱-۶۰ (ب) ما را وسوسه می‌کند که قسمت آخر را به صورت یک انتگرال سطحی بنویسیم

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{\pi} [\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')] d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{1}{\pi} [\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{a}'] \quad (12-6)$$

جمله اول شبیه پتانسیل یک جریان حجمی به صورت زیر است

$$\boxed{\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}} \quad (13-6)$$

و جمله دوم، پتانسیل یک جریان سطحی به نظر می‌رسد

$$\boxed{\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}} \quad (14-6)$$

که در آن $\hat{\mathbf{n}}$ برادر یکه عمود است. با این تعریفها داریم

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_b(\mathbf{r}')}{\pi} d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{K}_b(\mathbf{r}')}{\pi} da' \quad (15-6)$$

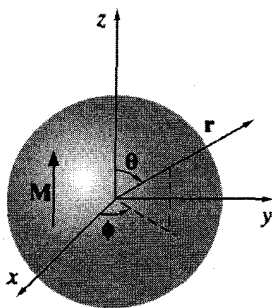
معنی انتگرال بالا آن است که پتانسیل (و نیز میدان) یک جسم مغناطیسی شده همانند پتانسیل حاصل از یک جریان حجمی $\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}$ از درون ماده به علاوه یک جریان سطحی برابر با $\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$ روی کرانه‌های جسم است. به جای آنکه از سهم دو قطبیه‌های بینهایت کوچک انتگرال بگیریم [یعنی معادله (۱۱-۶)]، می‌توانیم نخست این جریانهای مقید را حساب کنیم و آنگاه به محاسبه میدان تولیدی آنها بپردازیم. بازم به مشابتهتها با مورد الکتریکی توجه کنید: در آنجا میدان یک ماده قطبیده با میدان حاصل از یک بار حجمی مقید $\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ به علاوه بار سطحی مقید $\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ برابر بود.

مثال ۱-۶

میدان مغناطیسی یک کره یکنواخت مغناطیده را پیدا کنید.

حل: محور z را در جهت M (شکل ۱۲-۶) انتخاب می‌کنیم. بنابراین

$$J_b = \nabla \times M = 0, \quad K_b = M \times \hat{n} = M \sin \theta \hat{\phi}$$



شکل ۱۲-۶

حال می‌گوییم یک پوستهٔ کروی در حال دوران با چگالی سطحی بار σ متناظر با چگالی جریان سطحی زیر است

$$K = \sigma v = \sigma \omega R \sin \theta \hat{\phi}$$

و اضافه می‌کنیم که این میدان با میدان کره مورد نظر با جایگزینی $M \rightarrow \sigma R \omega$ برابر است. برگردید به مثال ۱۱ فصل ۵ و نتیجه بگیرید که میدان در داخل کره برابر است با

$$B = \frac{2}{3} \mu_0 M \quad (۱۶-۶)$$

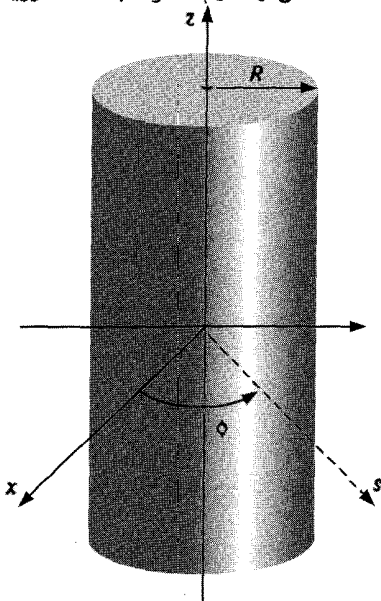
و میدان در خارج از کره برابر است با میدان یک دوقطبی، یعنی

$$m = \frac{4}{3} \pi R^3 M$$

توجه کنید که میدان داخلی، مانند میدان الکتریکی داخل کره‌ای که به صورت یکنواخت قطبی شده، یکنواخت است [معادله (۴-۱۴)]، گرچه فرمولهای این دو مورد تا حدودی متفاوت اند (یعنی $2/3$ به جای $1/3$ -). میدانهای خارجی نیز مشابه‌اند: دوقطبی خالص در هر دو مورد. ■

مسئله ۷-۶ یک استوانهٔ طولی نامتناهی با مقطع دایره‌ای دارای مغناطش یکنواخت \mathbf{M} به موازات محورش است. میدان مغناطیسی (ناشی از \mathbf{M}) را در داخل و خارج استوانه به دست آورید.

مسئله ۸-۶ استوانهٔ طولی با مقطع دایره‌ای به شعاع R دارای مغناطش $\mathbf{M} = ks^2 \hat{\phi}$ است که در آن k یک ثابت و s فاصله از محور استوانه و $\hat{\phi}$ برداریکه "سمتی معمولی" است (شکل ۱۳-۶). میدان مغناطیسی \mathbf{M} را در نقاط داخل و خارج استوانه به دست آورید.

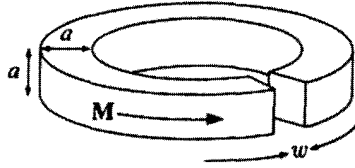


شکل ۱۳-۶

مسئله ۹-۶ استوانهٔ کوتاهی با مقطع دایره‌ای به شعاع a و طول L دارای مغناطش یکنواخت "نسبت شده" \mathbf{M} به موازات محورش است. جریان مقید را محاسبه کنید و شکل میدان مغناطیسی استوانه را رسم کنید. (سه شکل رسم کنید برای: $L \gg a$ ، $L \approx a$ و $L \ll a$). این آهنربای میله‌ای را با الکتروت میله‌ای مسئله ۴-۱۱ مقایسه کنید.

مسئله ۱۰-۶ به یک میله آهنی به طول L و با مقطع مربعی به ضلع a ، یک مغناطش طولی یکنواخت \mathbf{M} می‌دهیم و آن‌گاه آن را خم می‌کنیم تا به صورت دایره‌ای با یک گاف کوچک به عرض w مطابق شکل ۱۴-۶ در آید. میدان مغناطیسی را در مرکز گاف با فرض آنکه $w \ll a \ll L$ حساب کنید. (راهنمایی: جسم را همانند یک چنبرهٔ بستهٔ کامل به علاوه یک حلقهٔ مربعی با جریان متقابل در نظر بگیرید).

□

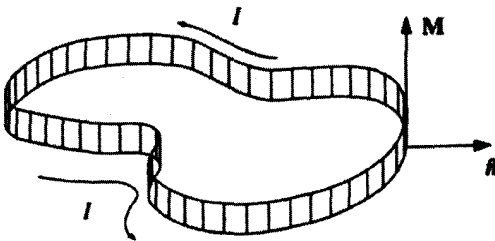


شکل ۱۴-۶

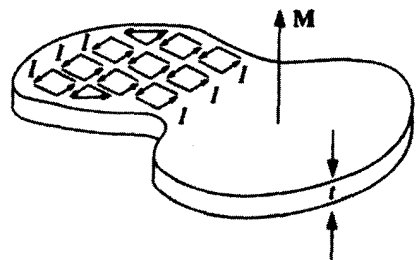
۲-۲-۶ تعبیر فیزیکی جریانهای مقید

در بخش قبل دیدیم که میدان یک جسم مغناطیده با میدان حاصل از یک توزیع مشخص جریانهای "مقید" \mathbf{J}_b و \mathbf{K}_b هم‌ارز است. می‌خواهیم منشأ فیزیکی پیدایش این جریانهای مقید را نشان دهیم. این یک "مباحثه اکتشافی" است - اثبات دقیق قبلاً ارائه شده است. شکل ۱۵-۶، قطعه‌ای نازک از یک ماده مغناطیده را نشان می‌دهد که دو قطبیهایش توسط حلقه‌های کوچک جریان حاصل شده‌اند. توجه کنید که تمام جریانهای "داخلی" یکدیگر را خنثی می‌کنند: در مقابل هر جریانی به سمت راست، یک جریان مساوی در سمت چپ داریم، با وجود این جریانهای گوشه‌ها خنثی نمی‌شوند. بنابراین کل جریانها مطابق شکل ۱۶-۶ معادل با حلقه جریانی به شدت I است که از کرانه‌های جسم می‌گذرد.

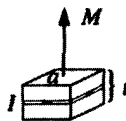
این جریان برحسب M چقدر است؟ هر حلقه کوچک دارای مساحت a و ضخامت t است (شکل ۱۷-۶). گشتاور دو قطبی هر حلقه کوچک برحسب M برابر است با



شکل ۱۶-۶



شکل ۱۵-۶



شکل ۱۷-۶

$$m = Mat$$

و برحسب جریان I برابر با

$$m = Ia$$

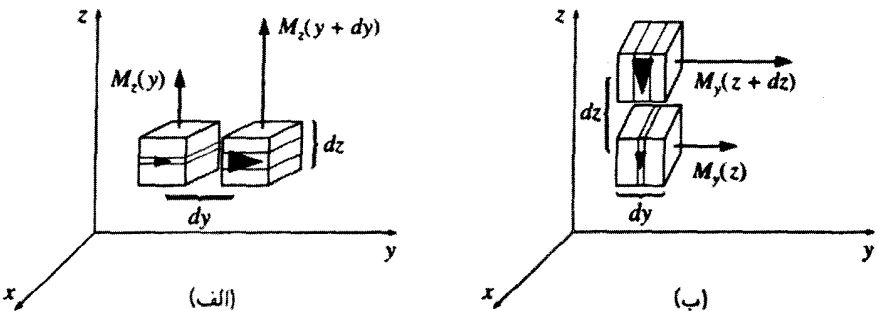
و بنابراین $I = Mt$ و جریان سطحی برابر $K_b = I/t = M$ می‌شود. با در نظر گرفتن بردار یکه \hat{n} به سمت بیرون می‌توانیم به صورت برداری بنویسیم

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \hat{n}$$

(این جمله نشان می‌دهد که در بالا و پایین سطح قطعه، جریانی وجود ندارد؛ در اینجاها \mathbf{M} موازی \hat{n} است و حاصلضرب برداری آنها صفر می‌شود).

این جریان سطحی مقید، دقیقاً همان چیزی است که در بخش ۶-۲-۱ به دست آوردیم. اما جریان اخیر نوع خاصی است زیرا یک نوع مشخص بار الکتریکی، با حرکت خود در مدار، آن را ایجاد نمی‌کند بلکه هر بار الکتریکی فقط حلقه کوچکی را در داخل اتم می‌پیماید. با وجود این اثر خالص برابر با اثر جریانی است که بحث کردیم. ما آن را جریان "مقید" نامیدیم زیرا می‌دانیم هر بار الکتریکی به اتم خاصی مربوط می‌شود؛ باز هم تأکید می‌کنیم که این یک جریان کامل است و همانند هر جریان دیگر تولید میدان مغناطیسی می‌کند.

اگر مغناطش غیریکنواخت باشد دیگر جریانهای داخلی یکدیگر را خنثی نمی‌کنند. شکل ۶-۱۸ (الف) دو حلقه جریان مجاور یک جسم مغناطیده را نشان می‌دهد. علامت سهم



شکل ۶-۱۸

(پیکان) بزرگتر در سمت راست به مفهوم مغناطش بیشتر در آن نقطه است. در سطح تماس دو جزء، جریان خالص در راستای x برابر می‌شود با

$$I_x = [M_z(y + dy) - M_z(y)] dz = \frac{\partial M_z}{\partial y} dy dz$$

بنابراین چگالی جریان حجمی متناظر برابر است با

$$(J_b)_x = \frac{\partial M_z}{\partial y}$$

به‌گونه‌ای مشابه، مغناطش غیریکنواخت در راستای y نیز چگالی جریان $\partial M_y / \partial z$ - [شکل ۱۸-۶ (ب)] ایجاد می‌کند، بنابراین

$$(J_b)_y = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}$$

در حالت کلی داریم

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}$$

و باز هم می‌بینیم که نتیجه با آنچه در بخش ۱-۲-۶ گفتیم همخوانی دارد. در ضمن، همانند هر جریان پایایی دیگر، \mathbf{J}_b بایست از قانون پایستگی (۳۱-۵) نیز تبعیت کند، یعنی

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_b = 0$$

آیا چنین است؟ بلی، زیرا دیورژانس تاو همواره صفر است.

۳-۲-۶ میدان مغناطیسی داخل ماده

همانند میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی میکروسکوپی داخل ماده نیز به مقدار زیاد از یک نقطه به نقطه دیگر و لحظه به لحظه تغییر می‌کند. وقتی از میدان مغناطیسی داخل ماده صحبت می‌کنیم منظورمان میدان ماکروسکوپی است، یعنی متوسط میدان در یک ناحیه بزرگ و شامل تعداد زیادی از آنها. (به همین ترتیب برای \mathbf{M} هم می‌توان مقدار متوسطی را محاسبه کرد). با اعمال روشهای بخش ۱-۲-۶ برای نقاط داخل ماده مغناطیده می‌توان به این میدان ماکروسکوپی دست یافت. این ادعا را می‌توانید با استفاده از مسئله زیر برای خودتان ثابت کنید.

مسئله ۱۱-۶ در بخش ۶-۲-۱ با پتانسیل یک دوقطبی کامل بحث را آغاز کردیم، در حالی که در واقع با دوقطبیهای فیزیکی سروکار داریم. با استفاده از روش بخش ۴-۲-۳ نشان دهید که با وجود این آنچه را پیدا می‌کنیم میدان مغناطیسی ماکروسکوپی صحیح است. □

۳-۶ میدان کمکی \mathbf{H}

۱-۳-۶ قانون آمپر در مواد مغناطیده

در بخش ۶-۲ در یافتیم که اثر مغناطش ایجاد جریانهای مقید $\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}$ در داخل ماده و $\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$ روی سطح ماده است. میدان ناشی از مغناطش محیط دقیقاً همان میدان حاصل از جریانهای مقید است. حالا آماده‌ایم که همه چیز را مدّ نظر قرار دهیم: میدان منسوب به جریانهای مقید، به‌علاوه میدان ناشی از هر چیز دیگر که ما آنها را جریان آزاد خواهیم نامید. جریان آزاد می‌تواند در داخل سیمهای واقع در مواد مغناطیده جاری شود یا اگر محیط مادی رسانا باشد در خود ماده جریان یابد. در هر صورت جریان کل را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_b + \mathbf{J}_f \quad (۱۷-۶)$$

در معادلهٔ اخیر مفهوم فیزیکی جدیدی یافت نمی‌شود؛ مناسب تشخیص داده‌ایم که جریان را به دو قسمت که معانی متفاوتی دارند تقسیم کنیم: جریان آزاد از اتصال سیم به باتری و حرکت نوع خاصی از بار الکتریکی در داخل آن ناشی می‌شود؛ جریان مقید به مغناطش مربوط است، یعنی از همراستایی دوقطبیهای فراوان اتمی.

با توجه به معادلات (۱۳-۶) و (۱۷-۶)، قانون آمپر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_b = \mathbf{J}_f + (\nabla \times \mathbf{M})$$

و با در نظر گرفتن توأم تاوها

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_f$$

مقدار داخل پرانتز را با حرف \mathbf{H} نشان می‌دهیم، یعنی

$$\boxed{\mathbf{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}} \quad (۱۸-۶)$$

و قانون آمپر برحسب \mathbf{H} می شود

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f \quad (۱۹-۶)$$

به صورت انتگرالی، قانون چنین بیان می شود

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{f, \text{مسیر}} \quad (۲۰-۶)$$

که در آن $I_{f, \text{مسیر}}$ جریان آزاد گذرنده از حلقه آمپری است.

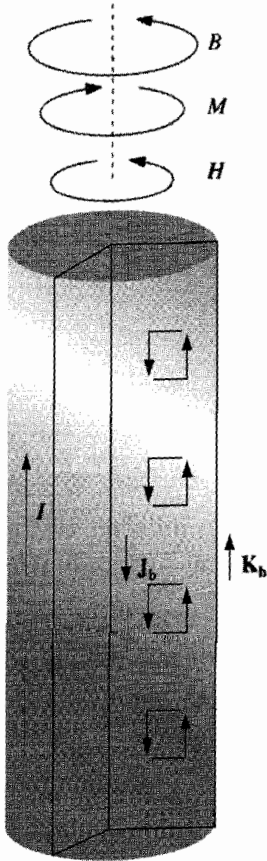
نقش \mathbf{H} در مغناطوستاتیک همانند \mathbf{D} در الکتروستاتیک است: همان گونه که با استفاده از \mathbf{D} می توانستیم فقط بارهای آزاد را در نظر بگیریم، با استفاده از \mathbf{H} می توانیم فقط جریان آزاد را به کار ببریم و می دانیم همین جریان است که مستقیماً قابل کنترل است. جریانهای مقید را که نقشی شبیه بارهای مقید در الکتروستاتیک دارند و از مواد مغناطیبه به دست می آیند نمی توان به دلخواه قطع و وصل کرد، در حالی که جریانهای آزاد را می توان. در به کار بردن معادله (۲۰-۶) فقط به جریان آزاد نیاز داریم و چون خود آنها را در جسم برقرار می کنیم از این بابت نگران نیستیم. نکته حائز اهمیت اینکه در مواردی که تقارن به ما اجازه می دهد می توانیم \mathbf{H} را فوراً از معادله (۲۰-۶) با روشهای معمولی قانون آمپر حساب کنیم. (به عنوان مثال، مسائل ۷-۶ و ۸-۶ با توجه به اینکه $\mathbf{H} = 0$ است در یک خط قابل حل اند).

مثال ۲-۶

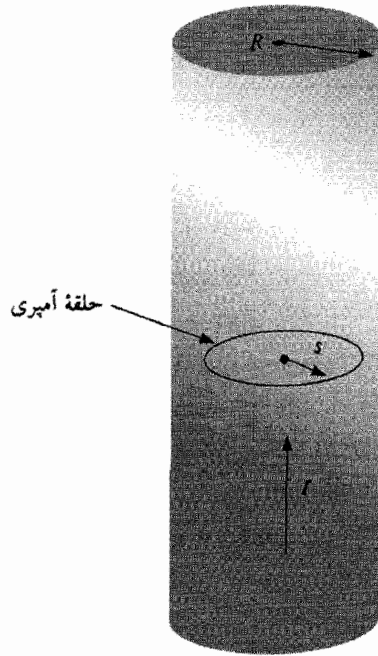
از یک میله مسی طویل به شعاع R جریان (آزاد) یکنواخت توزیع شده I می گذرد (شکل ۱۹-۶). \mathbf{H} را در داخل و خارج آن حساب کنید.

حل: مس یک دیامغناطیس ضعیف است و بنابراین دوقطبها در جهت مخالف میدان همسو می شوند. در نتیجه یک جریان مقید پاد موازی با I در داخل سیم و موازی با I در سطح خواهیم داشت (شکل ۲۰-۶). فعلاً در موقعیتی نیستیم که بزرگی این جریان مقید را بدانیم. اما برای محاسبه \mathbf{H} همین کافی است که بدانیم تمام جریانها طولی هستند، در حالی که \mathbf{B} ، \mathbf{M} و بنابراین \mathbf{H} نیز پیرامونی هستند. با اعمال معادله (۲۰-۶) برای یک حلقه آمپری به شعاع $s < R$ داریم

$$H(2\pi s) = I_{f, \text{مسیر}} = I \frac{\pi s^2}{\pi R^2}$$



شکل ۲۰-۶



شکل ۱۹-۶

بنابراین میدان در داخل سیم برابر است با

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi R^2} s \hat{\phi} \quad (s \leq R) \quad (۲۱-۶)$$

و برای خارج سیم

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi s} \hat{\phi} \quad (s \geq R) \quad (۲۲-۶)$$

در ناحیهٔ دوم (چون همیشه، در فضای خالی) داریم $M = 0$ و بنابراین

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi} \quad (s \geq R)$$

این نتیجه همانند نتیجهٔ یک سیم غیرمغناطیده است (مثال ۵-۷). در این مقطع نمی‌توانیم \mathbf{B} داخل سیم را حساب کنیم زیرا راهی برای دانستن M نداریم (گرچه در عمل مغناطیده شدن مس آنقدر ضعیف است که در بسیاری از موارد می‌توانیم کلاً از آن صرف‌نظر کنیم). ■

نتیجه اینکه \mathbf{H} به مراتب از \mathbf{D} مهمتر است. در آزمایشگاه معمولاً از \mathbf{H} صحبت می‌شود (اغلب حتی بیشتر از \mathbf{B})، اما هرگز کسی بحثی از \mathbf{D} نمی‌کند (فقط \mathbf{E}). دلیل آن چنین است: برای ساختن یک مغناطیس الکتریکی، جریان (آزاد) مشخصی را از سیم‌پیچی می‌گذرانیم. این جریان همان‌گونه که می‌دانیم معرف \mathbf{H} است (با به هر حال، انتگرال خطی \mathbf{H})؛ \mathbf{B} به نوع ماده‌ای که به‌کار می‌بریم بستگی دارد، و حتی اگر ماده مورد نظر آهن باشد به سابقهٔ قبلی آن هم مربوط می‌شود. از طرف دیگر وقتی می‌خواهیم یک میدان الکتریکی ایجاد کنیم هیچ‌گاه بارهای الکتریکی آزاد معلومی را جداگانه روی صفحات خازن قرار نمی‌دهیم بلکه برای این منظور از یک باتری با ولتاژ معین استفاده می‌کنیم. بنابراین با دانستن اختلاف پتانسیل، \mathbf{E} (یا انتگرال خطی آن) را تعیین می‌کنیم. \mathbf{D} شدیداً به مادهٔ دی‌الکتریک خازن بستگی دارد. اگر اندازه‌گیری بار الکتریکی ساده‌تر از تعیین ولتاژ می‌بود از \mathbf{D} صحبت می‌کردیم نه \mathbf{E} . بنابراین (مشابه) الکتریکی \mathbf{H} همان \mathbf{D} است و هر دو را می‌توان به‌سادگی اندازه گرفت.

بسیاری از مؤلفان از \mathbf{H} به جای \mathbf{B} به‌عنوان "میدان مغناطیسی" نام می‌برند. در این صورت برای \mathbf{B} عبارت جدید "چگالی شار" یا "القای مغناطیسی" را به‌کار می‌برند (که انتخاب ناموجهی است زیرا برای این کلمات هم‌اکنون دو معنی دیگر در الکترودینامیک داریم). در هر حال \mathbf{B} بدون شک کمیتی بنیادی محسوب می‌شود و برای آن نام "میدان مغناطیسی" را برگزیده‌ایم. \mathbf{H} ، نام دقیقی ندارد: صرفاً آن را \mathbf{H} می‌نامیم.^۱

مسئله ۶-۱۲ یک استوانهٔ بینهایت طولی به شعاع R دارای مغناطش \mathbf{M}

$$\mathbf{M} = ks \hat{z}$$

۱. آنهایی را که مخالف این نامگذاری هستند به صفحهٔ ۴۵ کتاب زیر ارجاع می‌دهیم:

A. Sommerfeld's *Electrodynamics* (New York: Academic Press, 1952), p. 45

"تا جایی که ممکن است از جملهٔ ناخوشایند "میدان مغناطیسی" برای \mathbf{H} باید اجتناب کرد. به نظر می‌رسد که این عبارت به اشتباهی کمتر از آنچه خود ماکسول کرد منجر نمی‌شود..."

به موازات محورش است که در آن k یک ثابت و z فاصله از محور است. (به هر حال جریان آزادی وجود ندارد). میدان مغناطیسی داخل و خارج استوانه را با دو روش مختلف زیر حساب کنید: (الف) همانند بخش ۲-۶، تمام جریانهای مقید را در نظر گرفته و میدان حاصل از آنها را حساب کنید.

(ب) از قانون آمپر، معادله (۶-۲۰)، ابتدا H را حساب کنید و آن‌گاه B را با استفاده از معادله (۶-۱۸) به دست آورید. (توجه کنید که روش دوم به مراتب سریعتر است و از ارجاع صریح به جریانهای مقید احتراز می‌کند).

مسئله ۱۳-۶ فرض کنید میدان داخل یک قطعه مغناطیسی بزرگ برابر B_0 باشد به طوری که $H_0 = (1/\mu_0)B_0 - M$

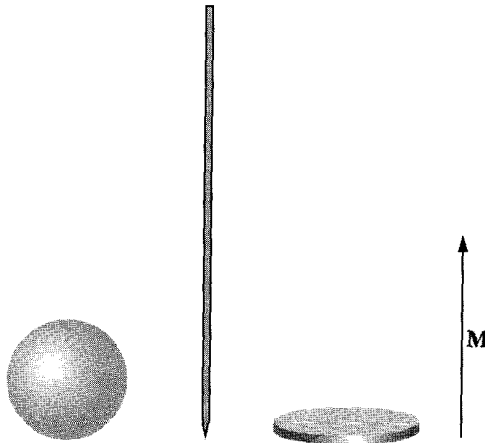
(الف) اگر یک کاواک کروی کوچک از داخل استوانه خارج کنیم (شکل ۶-۲۱)، میدان در مرکز این کاواک برحسب B_0 و M چقدر می‌شود؟ همچنین H را در مرکز کاواک برحسب H_0 و M پیدا کنید.

(ب) همان مسئله را برای کاواکی سوزنی شکل و موازی با M حل کنید.

(ج) مسئله را برای کاواکی به شکل یک قرص نازک و عمود بر M حل کنید.

در هر سه مورد کاواکها را به اندازه کافی کوچک بگیرید به طوری که M ، B_0 و H_0 الزاماً ثابت بمانند. با مسئله ۴-۱۶ مقایسه کنید. [راهنمایی: جدا کردن یک قسمت و ایجاد کاواک را با نوعی مغناطش متقابل توجیه کنید].

□



(الف) کره (ب) سوزن (ج) ویفر

۲-۳-۶ یک مشابه فریبنده

معادله (۱۹-۶) شبیه قانون اصلی آمپر (۵-۵) است و فقط در آن به جای جریان کل از جریان آزاد و به جای B از H_0 استفاده شده است. همانند آنچه درباره D گوشزد کردیم زیاد به این شباهت فکر نکنید. این شباهت به معنی آن نیست که H_0 دقیقاً با B برابر است، فقط می توان گفت که منشأ آن به جای آنکه J باشد J_f است. باید این را بدانید که تاو به تنهایی توسط یک میدان برداری مشخص نمی شود، بلکه دیورژانس هم باید معلوم باشد و در حالی که $\nabla \cdot B = 0$ است عموماً دیورژانس H صفر نیست. در واقع از (۱۸-۶) داریم

$$\nabla \cdot H = -\nabla \cdot M \quad (23-6)$$

فقط زمانی که دیورژانس M صفر باشد شباهت میان B و H_0 معتبر است. برای روشن شدن بحث، یک آهنربای میله ای به صورت استوانه آهنی را که دارای مغناطش دائمی بکنواخت به موازات محورش است در نظر بگیرید (مسائل ۹-۶ و ۱۴-۶ را ببینید). در این مورد، جریان آزادی وجود ندارد و با توجه به معادله (۶-۲۰) ممکن است به این نتیجه برسید که $H = 0$ و در نتیجه در داخل آهنربا $B = \mu_0 M$ و در خارج آن $B = 0$ است. اما این درست نیست. اینکه تاو H همه جا صفر است مطلبی درست است، اما دیورژانس صفر نیست. (آیا می دانید کجا $\nabla \cdot M = 0$ است؟) توصیه می کنیم وقتی B یا H را برای مواد مغناطیسی از شما خواستند اول به دنبال تقارن باشید. در مسائلی که با تقارن استوانه ای، صفحه ای، سیمولوله ای یا چنبره ای سروکار دارید H را مستقیماً می توانید از معادله (۶-۲۰) با در نظر گرفتن روشهای قانون آمپر حساب کنید. (بدیهی است در این موارد $\nabla \cdot M = 0$ و بنابراین جریان آزاد به تنهایی جواب را مشخص می کند). در نبود تقارن، تدبیر دیگری بیندیشید و به خصوص هیچ گاه تصور نکنید که چون جریان آزادی نمی بینید H صفر است.

۳-۳-۶ شرایط مرزی

شرایط مرزی مغناطوستاتیک بخش ۲-۴-۵ را می توان برحسب H و جریان آزاد بازنویسی کرد. از معادله (۶-۲۳) نتیجه می شود که

$$H_{\text{بالا}}^{\perp} - H_{\text{پایین}}^{\perp} = -(M_{\text{بالا}}^{\perp} - M_{\text{پایین}}^{\perp}) \quad (24-6)$$

در حالی که بنابه معادله (۶-۱۹)

$$H_{\text{بالا}}^{\parallel} - H_{\text{پایین}}^{\parallel} = K_f \times \hat{n} \quad (25-6)$$

در حضور مواد، این معادلات در بعضی مواقع از شرایط مرزی متناظر \mathbf{B} [معادلات (۷۲-۵)] و (۷۳-۵)] سودمندترند.

$$B_{\text{بالا}}^{\perp} - B_{\text{پایین}}^{\perp} = 0 \quad (۲۶-۶)$$

و

$$B_{\text{بالا}}^{\parallel} - B_{\text{پایین}}^{\parallel} = \mu_0 (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}) \quad (۲۷-۶)$$

می‌توانید اینها را برای مثال ۲-۶ یا مسئله ۱۴-۶ امتحان کنید.

مسئله ۱۴-۶ نمودارهای دقیقی برای \mathbf{M} ، \mathbf{B} و \mathbf{H} در آهنربای میله‌ای مسئله ۹-۶ با فرض آنکه $L = 2a$ است رسم کنید. با مسئله ۱۷-۴ مقایسه کنید.

مسئله ۱۵-۶ هرگاه در همه جا $\mathbf{J}_f = 0$ باشد، تاو \mathbf{H} صفر می‌شود [معادله (۱۹-۶)]، و \mathbf{H} را می‌توانیم به صورت گرادین یک پتانسیل نرده‌ای W بنویسیم

$$\mathbf{H} = -\nabla W$$

از این رو بنابر معادله (۲۳-۶) داریم

$$\nabla^2 W = (\nabla \cdot \mathbf{M})$$

بنابراین W از معادله پواسون با "چشمه" $\nabla \cdot \mathbf{M}$ تبعیت می‌کند. این موضوع همه امکانات فصل ۳ را در اختیار می‌گذارد. به عنوان مثال، میدان داخل یک کره یکتواخت مغناطیده (مثال ۱-۶) را با روش تفکیک متغیرها بیابید. [راهنمایی: در همه جا بجز در سطح ($r = R$) داریم $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ ، از این رو W در نواحی $r < R$ و $r > R$ در معادله لاپلاس صدق می‌کند؛ با استفاده از معادله (۳-۶۵) و از معادله (۲۴-۶) شرایط مرزی مناسب برای W را نتیجه بگیرید]. □

۴-۶ محیطهای خطی و غیرخطی

۱-۴-۶ پذیرفتاری و تراوایی مغناطیسی

مغناطش مواد پارامغناطیس و دیامغناطیس ناشی از میدان است؛ با حذف \mathbf{B} مغناطش \mathbf{M} هم صفر می‌شود. در واقع برای بسیاری از مواد، مغناطش با میدان \mathbf{B} متناسب است به شرط آنکه

جدول ۱-۶ ضرایب پذیرفتاری مغناطیسی (همه مقادیر، بجز مورد قیدشده، برای ۱ اتمسفر و 20°C هستند).

ماده	پذیرفتاری	ماده	پذیرفتاری
دیامغناطیس:		پارامغناطیس:	
بیسموت	-1.6×10^{-4}	اکسیژن	1.9×10^{-6}
طلا	-3.4×10^{-5}	سدیم	8.5×10^{-6}
نقره	-2.4×10^{-5}	آلمینیم	2.1×10^{-5}
مس	-9.7×10^{-6}	تنگستن	7.8×10^{-5}
آب	-9.0×10^{-6}	پلاتین	2.8×10^{-4}
کربن دیوکسید	-1.2×10^{-8}	اکسیژن مایع (-200°C)	3.9×10^{-2}
هیدروژن	-2.2×10^{-9}	گادولینیم	4.8×10^{-1}

منبع:

Handbook of Chemistry and Physics, 67th ed. (Boca Raton: CRC Press, Inc., 1986).

میدان خیلی بزرگ نباشد. اگر نمادگذاری را سازگار با مورد الکتریکی در نظر بگیریم، تناسبی به صورت زیر داریم

$$M = \frac{1}{\mu_0} \chi_m B \quad (\text{نادرست!}) \quad (28-6)$$

ولی بنا به عادت به جای B آن را بر حسب H می نویسیم

$$M = \chi_m H \quad (29-6)$$

ثابت χ_m را پذیرفتاری مغناطیسی می نامند. مقدار این ضریب بدون بُعد، از یک ماده به ماده دیگر تغییر می کند و برای مواد پارامغناطیسی مثبت و دیامغناطیسی منفی است. مقادیر نوعی این ضریب در حدود 10^{-5} است (جدول ۱-۶ را ببینید).

موادی که از معادله (۲۹-۶) تبعیت می کنند محیطهای خطی نامیده می شوند. با توجه به معادله (۱۸-۶) می توان نوشت

$$B = \mu_0 (H + M) = \mu_0 (1 + \chi_m) H \quad (30-6)$$

بنابراین B هم با H متناسب است^۱

$$B = \mu H \quad (۳۱-۶)$$

که در آن

$$\mu \equiv \mu_0 (1 + \chi_m) \quad (۳۲-۶)$$

μ را تراوایی ماده می‌نامیم.^۲ در خلا که ماده‌ای برای مغناطیس‌شدن نیست پذیرفتاری χ_m صفر و تراوایی همان μ_0 است. به این دلیل μ_0 را تراوایی فضای آزاد می‌نامند.

مثال ۳-۶

یک سیم‌لوله نامتناهی (با n دور سیم‌پیچ در واحد طول و با جریان I) از ماده‌ای با پذیرفتاری χ_m پر شده است. میدان مغناطیسی داخل سیم‌لوله را حساب کنید.

حل: چون بخشی از B به جریانهای مقید (که هنوز از آنها بی‌اطلاع هستیم) مربوط است، نمی‌توانیم مستقیماً آن را حساب کنیم. با وجود این، مسئله مورد بحث (شکل ۲۲-۶) نمونه‌ای از موارد تقارنی است که در آن به کمک جریان آزاد و با استفاده از قانون آمپر به صورت معادله (۶-۲۰)



شکل ۲۲-۶

- از نظر فیزیکی، معادله (۲۸-۶) دقیقاً همان چیزی را بیان می‌کند که معادله (۲۹-۶) می‌گوید، فقط ثابت χ_m مقدار متفاوتی دارد. معادله (۲۹-۶) کمی مناسبتر است، زیرا تجربی‌کاران به کارگیری H را مناسبتر از B می‌دانند.
- اگر ضریب μ_0 را کنار بگذارید، آنچه باقی می‌ماند تراوایی مغناطیسی نسبی می‌نامند: $\mu_r \equiv 1 + \chi_m = \mu / \mu_0$. بدین ترتیب فرمولهای H برحسب B [معادله (۳۱-۶)]، برای محیط خطی^۳ را روابط مشخصه می‌نامند، عیناً مانند روابط D برحسب E .

می‌توانیم \mathbf{H} را به دست آوریم:

$$\mathbf{H} = nI\hat{z}$$

بنابه معادله (۲۱-۶) داریم

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\chi_m + 1) nI\hat{z}$$

اگر محیط پارامغناطیس باشد، میدان تا حدودی تغییر می‌کند: اگر محیط دیامغناطیس باشد میدان تا حدودی کم می‌شود. این مطلب بازتاب آن است که جریان سطحی مقید

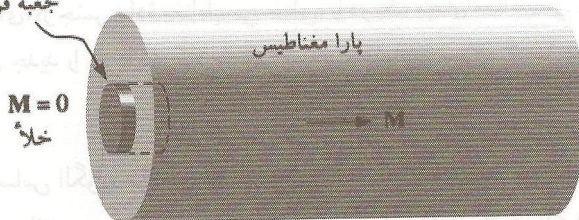
$$\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \hat{n} = \chi_m (\mathbf{H} \times \hat{n}) = \chi_m nI \hat{\phi}$$

در مورد قبلی ($\chi_m > 0$) در همان جهت I و در مورد اخیر ($\chi_m < 0$) در جهت خلاف I است. ■

ممکن است تصور کنید که محیطهای خطی، از کاستی شباهت \mathbf{B} و \mathbf{H} در امان اند: از آنجایی که اکنون \mathbf{M} و \mathbf{H} با \mathbf{B} متناسب هستند آیا نمی‌توان نتیجه گرفت که دیورژانس آنها همانند دیورژانس \mathbf{B} همیشه صفر است؟ متأسفانه چنین نیست؛ در مرز بین دو ماده با تزاویهای متفاوت، دیورژانس \mathbf{M} می‌تواند نامتناهی باشد. مثلاً در انتهای استوانه‌ای از جنس ماده پارامغناطیس خطی، در یک انتها \mathbf{M} صفر است در حالی که در انتهای دیگر صفر نیست. برای "قوطی گاوسی" شکل ۲۳-۶ داریم $\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{a} \neq 0$ ، و بنابراین با توجه به قضیه دیورژانس، $\nabla \cdot \mathbf{M}$ در هیچ نقطه داخلی نمی‌تواند صفر باشد.

در ضمن، چگالی جریان حجمی مقید در یک محیط خطی همگن با چگالی جریان آزاد

جعبه قرص گاوسی

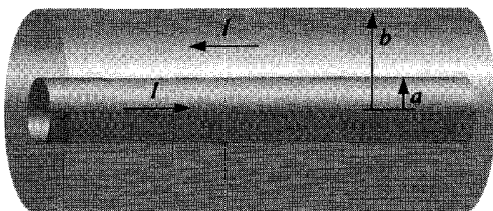


متناسب است

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} = \nabla \times (\chi_m \mathbf{H}) \equiv \chi_m \mathbf{J}_f \quad (۲۳-۶)$$

به خصوص بجز وقتی که جریان آزاد عملاً از داخل ماده می‌گذرد، تمام جریانهای مقید روی سطح خواهند بود.

مسئله ۱۶-۶ یک سیم هم‌محور از دو لوله استوانه‌ای بسیار طویل که توسط ماده‌ای عایق با پذیرفتاری مغناطیسی χ_m از یکدیگر جدا شده‌اند تشکیل شده است. جریان I از لوله داخلی در جهت عبور می‌کند و از لوله بیرونی در جهت مخالف برمی‌گردد و در هر دو حالت جریان به صورت یکنواخت از سطح می‌گذرد (شکل ۲۴-۶). میدان مغناطیسی را برای ناحیه بین دو لوله پیدا کنید. برای چک کردن محاسبه خودتان، مغناطش و جریانهای مقید (و البته جریانهای آزاد) را حساب کنید و مطمئن شوید که اینها هستند که میدان واقعی را می‌سازند.



شکل ۲۴-۶

مسئله ۱۷-۶ جریان I از سرتاسر سیم طویل مستقیم به شعاع a می‌گذرد. اگر این سیم از یک ماده خطی (مثلاً مس یا آلومینیم) با پذیرفتاری مغناطیسی χ_m ساخته شده باشد و توزیع جریان هم یکنواخت باشد، میدان مغناطیسی در نقطه‌ای به فاصله z از محور چقدر است؟ تمام جریانهای مقید را پیدا کنید. جریان مقید کل که از سرتاسر سیم می‌گذرد چقدر است؟

! مسئله ۱۸-۶ کره‌ای، از جنس ماده مغناطیسی خطی، را در یک میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B} قرار می‌دهیم. میدان جدید را در داخل کره حساب کنید. [راهنمایی: مسئله ۱۵-۶ یا مسئله ۲۳-۴ را ببینید].

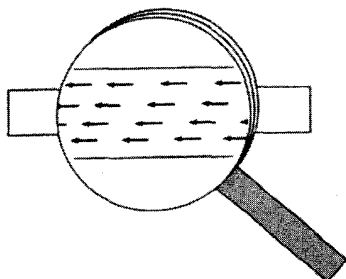
مسئله ۱۹-۶ بر اساس الگوی ساده‌ای که در بخش ۱-۶-۳ ارائه دادیم، پذیرفتاری مغناطیسی یک فلز دیامغناطیس مانند مس را تخمین بزنید. جواب خود را با مقدار تجربی که در جدول ۱-۶ آورده‌ایم مقایسه کنید و در صورت عدم توافق بین نتایج درباره آن بحث کنید.

□

۲-۴-۶ فرومغناطیسی

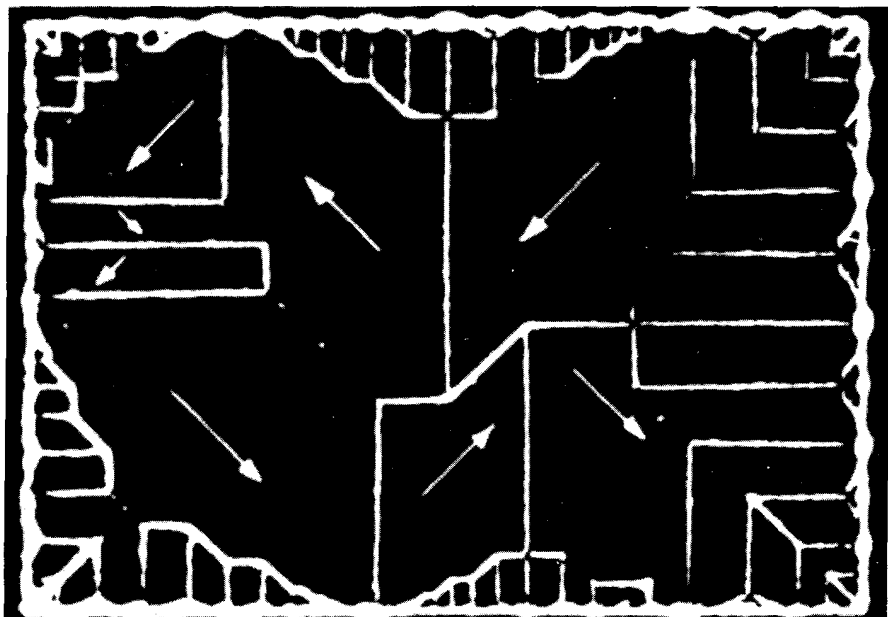
به خط شدن دوقطبیهای اتمی در یک محیط خطی از یک میدان مغناطیسی خارجی نشأت می‌گیرد. اجسام فرومغناطیسی که قطعاً خطی نیستند^۱ برای مغناطش خود به میدان خارجی نیازی ندارند؛ این به خط شدن در درون جسم "تثبیت شده است". در اجسام فرومغناطیس هم همانند اجسام پارامغناطیس، عامل ایجاد خاصیت مغناطیسی همان دوقطبیهای مغناطیسی وابسته به اسپین الکترونیهای جفت نشده‌اند. علت تفاوت اساسی بین فرومغناطیسی و پارامغناطیسی، چگونگی برهم‌کنش بین دوقطبیهای نزدیک به هم است: در یک جسم فرومغناطیس، هر دوقطبی "تمایل دارد" که در همان جهت دوقطبی همسایه‌اش باشد. دلیل این تمایل اساساً کوانتوم مکانیکی است و در اینجا از آن بحثی نمی‌کنیم؛ کافی است بدانید که این همبستگی به اندازه‌ای قوی است که ۱۰۰٪ اسپینهای الکترونیهای جفت نشده همسو می‌شوند. هرگاه به‌گونه‌ای بتوان داخل یک قطعه آهن را بزرگ کرد به‌گونه‌ای که دوقطبیها به‌صورت پیکانه‌های کوچک قابل رؤیت باشند، چیزی شبیه شکل ۲۵-۶، که در آن همه اسپینها هم جهت هستند، نتیجه می‌شود.

اما، اگر آنچه گفتیم واقعیت داشته باشد پس چرا هر آچار و سوزنی یک آهنربای قوی نیست؟ پاسخ آن است که این به خط شدن در قطعات نسبتاً کوچکی از جسم صورت می‌گیرد که آنها را حوزه می‌نامند. هر حوزه از بلیونها دوقطبی همسو تشکیل شده است (در واقع این حوزه‌ها را می‌توان با روشهای میکروسکوپی مشاهده کرد - شکل ۲۶-۶)، اما این حوزه‌ها هم سمتگیری خود را به‌صورت کاتوره‌ای انتخاب می‌کنند. یک آچار از تعداد بیشماری حوزه‌های مغناطیسی تشکیل شده است، اما میدانهای مغناطیسی آنها در کل یکدیگر را خنثی می‌کنند و بنابراین آچار



شکل ۲۵-۶

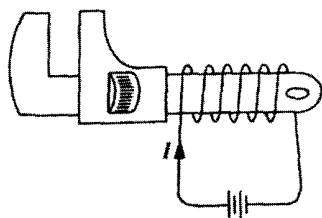
۱. با این برداشت، صحبت کردن از پذیرفتاری یا تراوایی یک فرومغناطیس گمراه‌کننده است. برای چنین موادی هم تعاریف فوق را به‌کار می‌برند، اما مراد از آنها ضریب تناسب بین افزایش دیفرانسیلی H با تغییر دیفرانسیلی حاصل M (یا B) است؛ افزون بر این، این ضرایب ثابت نبوده و تابع H هستند.



شکل ۲۶-۶

خاصیت مغناطیسی ندارد. (سستگیری دوقطبیها کاملاً هم کاتوره‌ای نیست و در هر بلور جهت‌های مرجحی وجود دارد. اما به همان تعداد حوزه‌ها که در یک جهت هستند. نواحی دیگری هم در جهت مقابل قرار دارند، از این رو باز هم در مقیاس بزرگ مغناطیسی وجود ندارد. افزون بر این، خود بلورها هم به صورت کاتوره‌ای در یک قطعه فلز قرار می‌گیرند.)

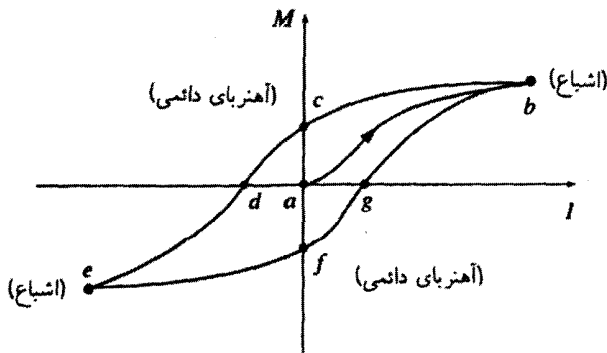
پس چگونه یک آهنربای دائمی نظیر آهنرباهایی که در فروشگاه‌های اسباب‌بازی می‌بینیم ساخته می‌شود؟ هرگاه یک قطعه آهنی را در یک میدان مغناطیسی قوی قرار دهید، گشتاور ساخته می‌شود $\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ تمایل دارد که دوقطبیها را با میدان موازی سازد. از طرفی دوقطبیها دوست دارند به موازات همسایگان خود باقی بمانند؛ بیشتر دوقطبیها در مقابل گشتاور مقاومت می‌کنند. با این همه، در مرز بین دو حوزه همسایه‌های رقیبی وجود دارند، و گشتاور اثر خود را به طرف حوزه‌ای که بیشتر به موازات میدان است متمرکز می‌کند؛ این حوزه در این رقابت نسبت به حوزه‌ای که شرط بالا را کمتر دارد برنده است. بنابراین، اثر خالص میدان مغناطیسی جابه‌جا کردن مرز حوزه‌هاست. حوزه‌های موازی با میدان رشد می‌کنند و بقیه کوچک می‌شوند. اگر میدان به اندازه کافی قوی باشد، یک حوزه می‌تواند در همه جا قرار گیرد، در این صورت می‌گوییم آهن "اشباع شده" است. معلوم شده است که این فرایند (جابه‌جایی مرز حوزه‌ها در پاسخ به یک میدان خارجی) کاملاً



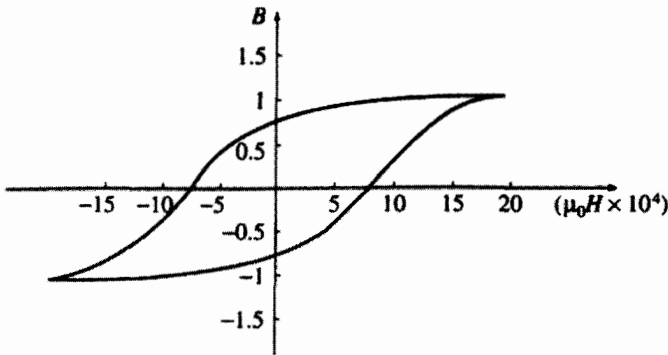
شکل ۶-۲۷

برگشت‌پذیر نیست: وقتی میدان قطع می‌شود، بازگشتی به سمتگیرهای کاتوره‌ای حوزه‌ها وجود خواهد داشت، اما نه به‌طور کامل — بعضی از حوزه‌ها در امتدادهای قبلی خود باقی می‌مانند. حال جسم یک آهنربای دائمی است.

یک راه ساده عملی برای نیل به مقصود، پیچیدن یک سیم دور جسمی است که می‌خواهیم آهنربا شود (شکل ۶-۲۷). از این سیم‌پیچ یک جریان I می‌گذرانیم و بدین ترتیب میدان خارجی را ایجاد می‌کنیم (که روی شکل به سمت چپ است). با افزایش جریان، میدان هم زیاد می‌شود، مرزهای حوزه‌ها حرکت می‌کنند، و مغناطش رشد می‌کند. سرانجام به وضعیت اشباع می‌رسیم که در آن همه دوقطبها موازی‌اند، و افزایش بیشتر جریان دیگر اثری روی M ندارد (شکل ۶-۲۸، نقطه b). حال فرض کنید جریان را کم کنیم. به جای آنکه روی همان مسیر به وضعیت $M = 0$ برسیم، فقط یک برگشت جزئی به وضعیتی که نواحی به‌صورت کاتوره‌ای‌اند وجود دارد. M کم می‌شود، اما حتی در حالت جریان قطع هم مقدار مغناطیدگی پسماند مشاهده می‌شود (نقطه c). حال آچار ما یک آهنربای دائمی است. حال اگر بخواهیم مغناطش باقیمانده را حذف کنیم باید جریانی در جهت مخالف (منفی I) از سیم‌پیچ بگذرانیم. حال میدان خارجی به طرف راست است، و با



شکل ۶-۲۸



شکل ۲۹-۶

افزایش I (به صورت منفی)، M کم می‌شود و به صفر می‌رسد (نقطه d). اگر جریان I را باز هم زیاد کنیم، به اشباع در جهت دیگر می‌رسیم — در این وضعیت دو قطبها به طرف راست هستند (e). در این مرحله اگر جریان را قطع کنیم، آچار دارای مغناطیدگی دائمی در سمت راست می‌شود (نقطه f). برای تکمیل داستان، مجدداً I را در جهت مثبت برقرار می‌کنیم؛ M به صفر می‌رسد (نقطه g)، و در نهایت به اشباع حالت اول برمی‌گردیم (نقطه b).

مسیر طی شده بالا را حلقهٔ پسماند می‌نامند. توجه کنید که مغناطیدگی آچار نه تنها به میدان اعمال شده (یعنی به I)، بلکه به ”سرگذشت“ مغناطیسی قبلی آن نیز بستگی دارد.^۱ به عنوان مثال، در سه زمان مختلف در آزمایش بالا جریان صفر شد (a ، c و f)، در حالی که مغناطش این نقاط متفاوت‌اند. در واقع، بنا به عادت در رسم حلقهٔ پسماند، B را در مقایسه با H رسم می‌کنیم و نه M را برحسب I . (اگر سیم‌پیچ مورد بحث را با تقریب معادل سیم‌لوله طولی که n دور سیم در واحد طول دارد بگیریم، آنگاه $H = nI$ است یعنی H متناسب با I است. از طرفی $B = \mu_0(H + M)$ ، اما در عمل M در مقایسه با H بسیار بزرگ است، بنابراین با در نظر گرفتن همه این نکات می‌توان گفت B با M متناسب است).

برای هماهنگی بین یکاها (تسلا)، روی محور افقی $\mu_0 H$ را رسم کرده‌ایم (شکل ۲۹-۶)؛ با وجود این توجه کنید که مقیاس محور قائم را 10^4 برابر مقیاس محور افقی در نظر گرفته‌ایم. تقریباً می‌توان گفت که $\mu_0 H$ میدان حاصل از سیم‌پیچ ما در غیاب هر جسم آهنی است؛ B هم چیزی است که واقعاً به دست می‌آوریم و در مقایسه با $\mu_0 H$ بسیار بزرگ است. یک جریان ضعیف وقتی در اطراف آن مواد فرومغناطیسی قرار داشته باشد، خیلی تأثیرگذار است. به این دلیل است

۱. به لحاظ ریشه شناختی، کلمهٔ *hysteresis* که ما آن را پسماند ترجمه کردیم با کلمه *history* که آن را سرگذشت ترجمه کردیم ارتباطی ندارد. همچنین کلمه مورد بحث با *hysteria* به معنی هیجان زیاد هم مربوط نیست. بلکه مشتق از فعلی یونانی به معنی عقب افتادن است.

که برای ساختن آهنربای الکتریکی قوی، سیمپیچی را دور یک هسته آهنی انتخاب می‌کنیم. با این کار، میدان خارجی زیادی صرف حرکت مرزهای نواحی نمی‌شود، و به مجرد شروع کار، تمام دوقطبیهای آهن با ما همگام می‌شوند.

نکته دیگری هم برای فرومغناطیسی داریم: نکته از این واقعیت نتیجه می‌شود که دوقطبیهای داخل یک حوزه مشخص به موازات هم قرار می‌گیرند. حرکت‌های گرمایی کاتوره‌ای با این نظم مقابله می‌کند، اما تا زمانی که دما خیلی بالا نباشد، این عامل نمی‌تواند دوقطبیها را از حالت موازی خارج کند. اینکه دماهای خیلی بالا همسویی دوقطبیها را از بین می‌برد تعجب‌آور نیست. آنچه مایه تعجب می‌شود این است، این اتفاق در دمای مشخصی صورت می‌گیرد (که برای آهن 770°C است). در دمای کمتر از این مقدار (که نقطه کوری نامیده می‌شود) آهن، فرومغناطیس است و در دماهای بالاتر پارامغناطیس. نقطه کوری تا حدودی شبیه نقطه جوش یا نقطه انجماد است که در آن تبدیل تدریجی از رفتار فرو به پارامغناطیسی وجود ندارد در حالی که بین آب و یخ تبدیل تدریجی است. این تغییرات تند و تیز در خواص ماده، که در یک دمای دقیق و معین روی می‌دهد را در مکانیک آماری گذار فاز می‌نامند.

مسئله ۶-۲۰ مغناطیس‌زدایی یک آهنربای دائمی چگونه صورت می‌گیرد (مثلاً در مورد آچاری که در باره‌اش بحث می‌کردیم و برای نقطه c حلقه پسماند آن)؟ به عبارت دیگر چگونه می‌توان آن را به حالت اصلی خود با $M = 0$ در $I = 0$ برگرداند؟

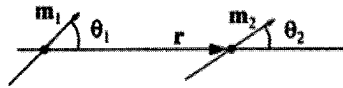
مسئله ۶-۲۱ الف) نشان دهید که انرژی یک دوقطبی مغناطیسی در یک میدان مغناطیسی \mathbf{B} برابر است با

$$\boxed{U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}} \quad (۳۴-۶)$$

[فرض کنید اندازه گشتاور دوقطبی ثابت است، در این صورت تنها کاری که باید بکنید آن است که دوقطبی را به محل مورد نظر ببرید و تا سستگیری نهایی آن را بچرخانید. انرژی لازم برای تداوم جریان مسئله دیگری است که در فصل ۷ درباره آن بحث می‌کنیم.] با معادله (۴-۶) مقایسه کنید. (ب) نشان دهید که انرژی برهم‌کنش بین دو دوقطبی مغناطیسی که به فاصله r از هم قرار دارند برابر است با

$$U = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 - 3(\mathbf{m}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{m}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})] \quad (۳۵-۶)$$

با معادله (۴-۷) مقایسه کنید.



شکل ۳۰-۶

(ج) پاسخ پرسش (ب) را برحسب زوایای θ_1 و θ_2 در شکل ۳۰-۶ بیان کنید و به کمک آن، پیکربندی پایدار دو دوقطبی، که به فاصله مشخصی از هم واقع‌اند اما می‌توانند آزادانه بچرخند، پیدا کنید.

(د) تعداد زیادی عقربه قطب‌نما را که به فاصله‌های مساوی از هم روی خط مستقیمی قرار گرفته‌اند در نظر بگیرید. اگر از میدان مغناطیسی زمین صرف‌نظر کنیم، فکر می‌کنید این عقربه‌ها چگونه قرار می‌گیرند؟ (یک صف مستطیلی از عقربه‌های مغناطیسی نیز به‌طور خودبه‌خودی به‌خط می‌شوند؛ از این خاصیت بعضی مواقع برای نمایش رفتار "فرومغناطیسی" در مقیاس بزرگ استفاده می‌شود. این تشبیه تا حدودی فریبکاری است، زیرا در اینجا، سازوکار صرفاً کلاسیک است، و بسیار ضعیفتر از نیروهای تبادلی مکانیک کوانتومی است که واقعاً عامل فرومغناطیسی‌اند.)

□

مسائل تکمیلی فصل ۶

! مسئله ۲۲-۶ در مسئله ۴-۶ نیروی مؤثر بر یک دوقطبی را با "روشی ابتدایی" محاسبه کردید. در اینجا روش جالبتری را معرفی می‌کنیم. در آغاز بسط تیلور $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ را نسبت به مرکز حلقه می‌نویسیم

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cong \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) + [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla_0] \mathbf{B}(\mathbf{r}_0)$$

که در آن مکان دوقطبی و ∇_0 معرف دیفرانسیل‌گیری نسبت به \mathbf{r}_0 است. این مقدار \mathbf{B} را در قانون نیروی لورنتس معادله (۱۶-۵) قرار داده به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{F} = I \oint d\mathbf{l} \times [(\mathbf{r} \cdot \nabla_0) \mathbf{B}(\mathbf{r}_0)]$$

یا با شماره‌گذاری مختصات دکارتی از ۱ تا ۳

$$F_i = I \sum_{j,k,l=1}^3 \varepsilon_{ijk} \left\{ \oint r_l dl_j \right\} [\nabla_{0l} B_k(\mathbf{r}_0)]$$

که در آن ε_{ijk} نماد لوی-سیویتا (که به ازای ۱۲۳، ۲۳۱، ۳۱۲) مقدار آن برابر ۱+ است و به ازای ۱۳۲، ۲۱۳، ۳۲۱ $\varepsilon_{ijk} = -1$ و به ازای بقیه مقادیر ممکن، صفر است، برای جملاتی است که در آنها حاصلضرب برداری $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} A_j B_k$ باشد. با استفاده از معادله (۱-۸۰)، انتگرال را حساب کنید. توجه کنید که

$$\sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljm} = \delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}$$

که در آن δ_{ij} همان دلتای کرونکر است (مسئله ۳-۴۵).

مسئله ۶-۲۳ شباهتهای زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho & \nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} & \varepsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{p} & \text{(بدون بار آزاد)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \dot{\mathbf{D}} & \mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M} & \text{(بدون جریان آزاد)} \end{cases}$$

می بینید که انتقالهای $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{H}$ ، $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$ ، $\mu_0 \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{p}$ ، $\varepsilon_0 \rightarrow \mu_0$ ، یک مسئله الکتروستاتیکی را به یک مسئله مغناطوستاتیکی مشابه تبدیل می کند. با استفاده از این یادآوریها و نیز دانسته های خودتان درباره نتایج الکتروستاتیک خواسته های زیر را به دست آورید:

(الف) میدان مغناطیسی یک کره یکنواخت مغناطیده [معادله (۶-۱۶)]:

(ب) میدان مغناطیسی داخل کره ای ساخته شده از یک ماده مغناطیسی خطی و واقع در یک میدان مغناطیسی در آغاز یکنواخت (مسئله ۶-۱۸):

(ج) میدان مغناطیسی میانگین (متوسط) روی یک کره ناشی از جریانهای پایای داخل کره [معادله (۵-۸۹)].

مسئله ۶-۲۴ معادلات (۲-۱۵)، (۴-۹) و (۶-۱۱) را با هم مقایسه کنید. توجه کنید که هرگاه ρ ، \mathbf{P} و \mathbf{M} یکنواخت باشند، در هر سه مورد یک انتگرال وجود دارد

$$\int \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau'$$

بنابراین، اگر برحسب اتفاق میدان الکتریکی یک جسم یکنواخت باردار شده را بدانید، بلافاصله قادر خواهید بود که پتانسیل نرده ای یک جسم یکنواخت قطبیده، و نیز پتانسیل برداری یک جسم یکنواخت مغناطیده که همان شکل را دارد بنویسید. از این مشاهده استفاده کرده، V را در داخل

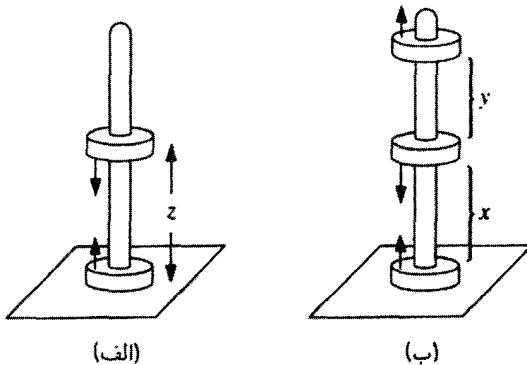
و خارج یک کره یکنواخت قطبیده (مثال ۴-۲)، و A را در داخل و خارج یک کره یکنواخت مغناطیسه (مثال ۶-۱) به دست آورید.

مسئله ۶-۲۵ یک اسباب بازی که احتمالاً با آن آشنا هستید از آهنرباهای دائمی حلقه‌ای شکل (با مغناطیدگی به موازات محورش) تشکیل شده است که می‌تواند بدون اصطکاک روی میله قائمی بلغزد (شکل ۶-۳۱). آهنرباها را به صورت دوقطبیهایی به جرم m_d و گشتاور مغناطیسی m در نظر بگیرید:

(الف) اگر دو آهنربا را پشت به پشت روی میله قرار دهید، آهنربای بالایی معلق می‌ماند — بین نیرویی مغناطیسی به طرف بالا با نیروی رو به پایین گرانشی توازن ایجاد می‌شود. در چه ارتفاع (z) این آهنربا معلق می‌ماند؟

(ب) حال اگر آهنربای سومی را (به موازات آهنربای زیری) به مجموعه اضافه کنید، نسبت دو ارتفاع چقدر است؟ (مقدار واقعی را تا سه رقم معنی‌دار بنویسید.)

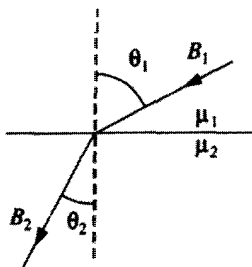
پاسخ: (الف) $(\frac{3\mu_0 m^2}{2\pi m_d g})^{1/2}$ ؛ (ب) 0.8501 .



شکل ۶-۳۱

مسئله ۶-۲۶ در سطح مشترک میان دو ماده مغناطیسی خطی، خطوط میدان مغناطیسی خمیده می‌شوند (شکل ۶-۳۲ را ببینید). با این فرض که جریان آزادی در مرز دو جسم وجود ندارد، نشان دهید که $\tan \theta_2 / \tan \theta_1 = \mu_2 / \mu_1$ با معادله (۴-۶۸) مقایسه کنید.

! مسئله ۶-۲۷ یک دوقطبی مغناطیسی m را در مرکز کره‌ای به شعاع R که از ماده‌ای دارای مغناطیدگی خطی (با تراوی μ) تشکیل شده است قرار می‌دهند. نشان دهید که میدان مغناطیسی



شکل ۶-۲۲

داخل کره ($0 < r \leq R$) برابر است با

$$\frac{\mu}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}] + \frac{2(\mu_0 - \mu)\mathbf{m}}{(\mu_0 + \mu)R^3} \right\}$$

میدان در خارج کره چقدر است؟

مسئله ۶-۲۸ از شما می‌خواهند دربارهٔ یک طرح کاربردی داوری کنید که هدف آن تعیین این مطلب است که مغناطیگی آهن ناشی از دو قطبهای ”آمبری“ (حلقه‌های جریان) است یا دو قطبهای گیلبرت (تک‌قطبهای مغناطیسی جدا از هم). برای بررسی و آزمایش از یک استوانه آهنی (به شعاع R و به طول $L = 10R$) که در امتداد محورش به‌طور یکنواخت مغناطیده شده است، استفاده می‌شود. اگر دو قطبها از نوع ”آمبری“ باشند، مغناطش، هم‌ارز جریان مقید سطحی است، $\mathbf{K}_b = M\hat{\phi}$ است؛ اگر از نوع ”گیلبرتی“ باشند، مغناطش هم‌ارز چگالی تک‌قطبهای سطحی $\sigma_b = \pm M$ واقع در دو انتهایست. متأسفانه، هر دوی این پیکربندیها میدانهای مغناطیسی همانندی در نقاط خارجی ایجاد می‌کنند. ولی، میدانهای داخلی بسیار متفاوت خواهند بود — در مورد اول \mathbf{B} در همان جهت کلی \mathbf{M} قرار دارد، در حالی‌که در تغییر دوم تقریباً در جهت مخالف \mathbf{M} است. هدف آزمایش‌کننده آن است که با جدا کردن یک کاواک کوچک از استوانه و با اندازه‌گیری گشتاور وارد بر یک عقربهٔ قطب‌نمای کوچک که در محل کاواک قرار داده شده است میدان داخلی را تعیین کند.

با فرض آنکه بتوان بر مشکلات بدیهی فنی غلبه کرد، و صرف‌نظر از اینکه خود پرسش ارزش بررسی و مطالعه دارد یا خیر، آیا از انجام این آزمایش حمایت می‌کنید؟ در صورت مثبت بودن جواب، چه شکلی را برای کاواک توصیه می‌کنید؟ اگر جواب منفی است، کجای این طرح غلط

است؟ [راهنمایی: به مسائل ۴-۱۱، ۴-۱۶، ۶-۹ و ۶-۱۳ مراجعه کنید.] □



الکترو دینامیک

۱-۷ نیروی محرکه الکتریکی

۱-۱-۷ قانون اهم

برای داشتن جریان الکتریکی، باید بارهای الکتریکی را به حرکت وا دارید. سرعت حرکت بارها به ازای اعمال نیروی معین وارد بر آنها به جنس رسانا بستگی دارد. در بیشتر مواد، چگالی جریان J با نیروی وارد بر واحد بار، f متناسب است:

$$J = \sigma f \quad (1-7)$$

ثابت تناسب σ (آن را با چگالی بار سطحی اشتباه نگیرید) یک ثابت تجربی است که از یک ماده به ماده دیگر تغییر می‌کند؛ این ثابت را رسانندگی جسم می‌نامند. در واقع، کتابهای راهنما معمولاً عکس σ را که مقاومت ویژه، ρ ، نامیده‌اند به‌کار می‌برند: $\rho = 1/\sigma$ (این را هم با چگالی بار اشتباه نگیرید — متأسفانه این اشکال از نمادگذاری استاندارد با حروف یونانی ناشی می‌شود). مقادیر نوعی این ثابت جدید را در جدول ۱-۷ آورده‌ایم. توجه کنید که حتی عایقها هم تا حدی رسانش دارند، اما ضریب رسانش یک فلز از ضریب رسانش یک جسم عایق با نسبتی نجومی،

جدول ۱-۷ مقاومت ویژه برحسب اهم-متر (تمام مقادیر در فشار ۱ اتمسفر و 20°C اند)

مقاومت ویژه	ماده	مقاومت ویژه	ماده
	تیمرساها:		رساناها:
$2 \times 10^{-2} \times 4.4$	آب شور (اشباع)	$8 \times 10^{-8} \times 1.59$	نقره
$1 \times 10^{-1} \times 4.6$	ژرمانیم	$8 \times 10^{-8} \times 1.68$	مس
7×2	الماس	$8 \times 10^{-8} \times 2.21$	طلا
$3 \times 10^2 \times 2.5$	سیلیسیم	$8 \times 10^{-8} \times 2.65$	آلومینیم
	عایقها:	$8 \times 10^{-8} \times 9.61$	آهن
$5 \times 10^5 \times 2.5$	آب (خالص)	$7 \times 10^{-7} \times 9.58$	جیوه
$11 \times 10^8 - 1.0$	چوب	$6 \times 10^{-6} \times 1.00$	نیکروم
$14 \times 10^{10} - 1.0$	شیشه	$6 \times 10^{-6} \times 1.44$	منگنز
$16 \times 10 \sim$	کوارتز (سیم)	$5 \times 10^{-5} \times 1.4$	گرافیت

منبع:

Handbook of Chemistry and Physics, 78th ed. (Boca Raton: CRC Press, Inc., 1997).

مثلاً 10^{22} برابر، بزرگتر است. از نقطه نظر عملی برای بیشتر مقاصد، فلزات را می‌توان رسانای کامل با $\sigma = \infty$ در نظر گرفت.

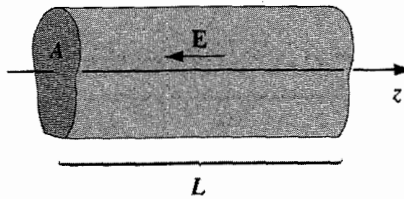
از نظر اصولی، نیروی محرک بارهای الکتریکی که باعث ایجاد جریان می‌شود هر نیرویی می‌تواند باشد - شیمیایی، گرانشی یا نیروی ناچیز مورچه‌ای تربیت شده. برای اهداف ما، معمولاً نیروی الکترومغناطیسی است که کارساز است. در این صورت معادله (۱-۷) می‌شود

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2-7)$$

از جمله دوم به علت کوچکی سرعت حرکت بار الکتریکی می‌توان صرف نظر کرد، پس

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}} \quad (3-7)$$

(با وجود این، برای مثال، در پلاسماها سهم مغناطیسی در ایجاد \mathbf{f} می‌تواند برجسته باشد.) معادله (۳-۷) به قانون اهم معروف است، گرچه فیزیک مسئله در واقع توسط معادله (۱-۷) بیان می‌شود و (۳-۷) فقط یک مورد خاص آن است.



شکل ۱-۷

اینکه گفته بودیم در داخل رسانا $\mathbf{E} = 0$ است (بخش ۲-۱۵) ممکن است شما را سردرگم کند. اما این گفته به بارهای ساکن ($\mathbf{J} = 0$) مربوط می‌شود. افزون بر این، برای رساناهای کامل، حتی وقتی جریان هم برقرار باشد، داریم $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma = 0$. در عمل، فلزات چنان رساناهای خوبی هستند که میدان الکتریکی لازم برای برقراری جریان در آنها ناچیز است. از این رو است که سیمهای رابط در مدارهای الکتریکی را هم پتانسیل در نظر می‌گیریم. برعکس، مقاومتها از مواد رسانای ضعیف ساخته شده‌اند.

مثال ۱-۷

یک مقاومت استوانه‌ای شکل با سطح مقطع A و طول L از ماده‌ای با رسانندگی σ تشکیل شده است (همان‌گونه که در شکل ۱-۷ نشان داده‌ایم، الزامی بر دایره‌ای بودن سطح مقطع نیست، اما فرض می‌کنیم در کل طول شکل آن ثابت باشد). هرگاه پتانسیل در هر دو انتها ثابت و اختلاف پتانسیل بین دو انتهای مقاومت، V باشد چه جریانی از آن می‌گذرد؟

حل: میدان الکتریکی در داخل سیم یکنواخت است (این را به زودی اثبات می‌کنیم). از این رو با توجه به معادله (۳-۷) که بر اساس آن چگالی جریان نیز یکنواخت است داریم

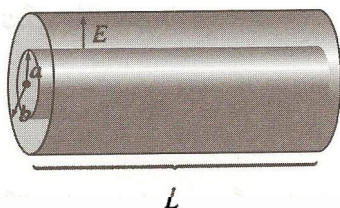
$$I = JA = \sigma EA = \frac{\sigma A}{L} V$$

مثال ۲-۷

دو استوانهٔ طویل (به شعاعهای a و b) توسط ماده‌ای با ضریب رسانش σ مطابق شکل ۲-۷ از هم جدا شده‌اند. اگر آنها را به اختلاف پتانسیل V وصل کنیم چه جریانی از یک استوانه به طرف استوانهٔ دیگر به طول L برقرار می‌شود؟

حل: میدان در فضای بین دو استوانه برابر است با

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{\mathbf{s}}$$



شکل ۲-۷

که در آن λ بار واحد طول روی استوانه داخلی است. بنابراین جریان برابر است با

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \sigma \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \lambda L$$

انتگرال روی هر سطح در برگیرنده استوانه داخلی گرفته می‌شود. اختلاف پتانسیل بین دو استوانه برابر است با

$$V = - \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

بنابراین

$$I = \frac{2\pi\sigma L}{\ln(b/a)} V$$

همان‌گونه که این مثالها نشان می‌دهند جریان کل گذرنده از یک الکتروود به الکتروود دیگر، با اختلاف پتانسیل بین آنها متناسب است:

$$V = IR \quad (۴-۷)$$

که صورت آشناتری از قانون اهم است. ثابت تناسب R را مقاومت می‌نامند؛ مقدار آن به شکل هندسی و رسانندگی ماده اتصال دهنده الکتروودها بستگی دارد. (در مثال ۱-۷ داریم $R = L/\sigma A$)؛ در مثال ۲-۷ هم $R = \ln(b/a)/2\pi\sigma L$). مقاومت برحسب اهم (Ω) سنجیده می‌شود که معادل ولت بر آمپر است. توجه کنید که تناسب میان V و I پیامد معادله (۳-۷) است: اگر بخواهید V دو برابر شود باید بار در هر جا دو برابر شود که نتیجه آن دو برابر شدن \mathbf{E} و سرانجام افزایش \mathbf{J} و I به همین میزان است.

برای جریانهای پایا و رسانندگی یکنواخت داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (5-7)$$

معادله (۵-۳۱) و در نتیجه چگالی بار صفر است. هرگونه بار نامتوازن روی سطح قرار می‌گیرد. (این را قبلاً برای بارهای ساکن با توجه به این واقعیت که $\mathbf{E} = 0$ است اثبات کردیم؛ بدیهی است وقتی بارها مجاز به حرکت باشند هم این نتیجه‌گیری درست است.) بنابراین معادله لاپلاس در یک ماده همگن تابع قانون اهم که از آن جریانی یکنواخت می‌گذرد صادق است و از این رو تمام ابزارها و روشهای فصل ۳ برای محاسبه پتانسیل در اختیارند.

مثال ۷-۳

در مثال ۷-۱ میدان داخل سیم را یکنواخت در نظر گرفتیم. اثبات آن چنین است.

حل: پتانسیل V در داخل استوانه از معادله لاپلاس پیروی می‌کند. شرایط مرزی کدام‌اند؟ در سمت چپ پتانسیل ثابت است — مقدار آن را می‌توانیم صفر در نظر بگیریم. درست راست نیز پتانسیل ثابت است که ما آن را V_0 می‌نامیم. روی سطح استوانه‌ای $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ است و گرنه باید بار در محیط اطراف (که فرض می‌کنیم نارسانااست) نفوذ می‌کرد. بنابراین $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ و نیز $\partial V / \partial n = 0$ است. پتانسیل V را می‌توان از روی مشتق قائم آن روی تمام سطوح به‌طور یکتا مشخص کرد (مسئله ۳-۴). اما ساده‌تر آن است که یک پتانسیل را به‌صورتی حدس بزنیم که در معادله لاپلاس و شرایط مرزی صادق باشد

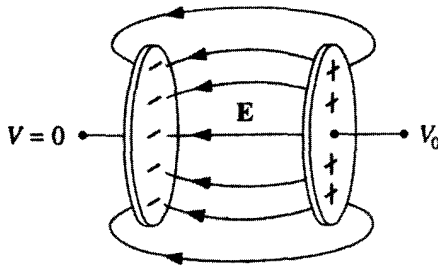
$$V(z) = \frac{V_0 z}{L}$$

که در آن z روی محور اندازه‌گیری می‌شود. قضیهٔ یکتایی وجود این جواب را تضمین می‌کند. میدان متناظر هم عبارت است از

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{V_0}{L} \hat{\mathbf{z}}$$

که میدانی یکنواخت است.

در مقابل با مسئله‌ای بسیار دشوارتر مواجه می‌شویم که بر اثر حذف مادهٔ رسانا و باقی ماندن صفحه‌ای فلزی در دو انتها به‌وجود می‌آید (شکل ۷-۳). بدیهی است که در این حالت، بار خود



شکل ۳-۷

را روی سطح سیم به گونه‌ای قرار می‌دهد که میدان یکنواخت خوبی در داخل آن ایجاد شود.^۱

فکر نمی‌کنم در فیزیک فرمولی شناخته شده‌تر از قانون اهم داشته باشیم. با این همه با در نظر گرفتن قانون گاوس یا قانون آمپر، قانونی واقعی نیست؛ بلکه فقط قاعده‌ای سرانگشتی و تجربی است که به صورت خوبی برای بسیاری از اجسام صادق است. قرار نیست اگر استثنایی در این قانون یافتیم به ما جایزه نوبل بدهند. در حقیقت اگر به دقت درباره این قانون فکر کنیم تا حدودی از الزام وجود آن تعجب می‌کنیم. وجود یک میدان الکتریکی E در محل بار q باعث اعمال نیروی qE بر بار و بنابراین قانون دوم نیوتون ایجاد شتابی در آن می‌شود. اما اگر بارها شتاب پیدا می‌کنند پس چرا جریان با زمان زیاد نمی‌شود؟ برعکس، قانون می‌گوید که وجود یک میدان ثابت، سرعتی ثابت در بار و در نتیجه جریان ثابتی را به وجود می‌آورد. آیا این با قانون نیوتون مغایرت ندارد؟

خیر، زیرا برخوردهای فراوان الکترونها را در عبور از سیم در نظر نگرفته‌ایم. تقریباً مسئله چنین است که اگر در خیابانی رانندگی می‌کنید که در هر تقاطع آن علامت ایستی وجود داشته باشد، گرچه بین دو توقف شتاب هم دارید، به هر حال مجبورید بعد از هر توقف مجدداً حرکتی را شروع کنید. در این صورت سرعت متوسط شما، با وجود داشتن شتاب، ثابت است. اگر فاصله بین دو توقف را با λ و شتاب حرکت را با a نشان دهیم، زمان لازم برای این حرکت می‌شود

$$t = \sqrt{\frac{2\lambda}{a}}$$

و بنابراین سرعت متوسط برابر است با

$$v_{\text{متوسط}} = \frac{1}{2} at = \sqrt{\frac{\lambda a}{2}}$$

۱. محاسبه این بار سطحی آسان نیست. به عنوان مرجع به کتاب زیر رجوع کنید.

این هم نتیجه جالبی به نظر نمی‌رسد! طبق رابطهٔ اخیر سرعت با جذر شتاب متناسب است، و بنابراین، برای الکترونهاى یک رسانا باید جریان هم با جذر میدان متناسب باشد! به نکتهٔ مهم دیگری هم باید توجه کنیم: بارهای الکتریکی، بر اثر انرژی گرمایی‌شان عملاً با سرعتهای زیادی حرکت می‌کنند. اما سرعتهای گرمایی دارای جهتهای کاتوره‌ای‌اند و میانگین آنها صفر است. سرعت سوقی خالص که دربارهٔ آن بحث می‌کنیم بسیار کوچک است. از این‌رو زمان متوسط بین دو برخورد هم خیلی کمتر از چیزی است که تصور می‌کنیم؛ در واقع

$$t = \frac{\lambda}{v_{\text{گرمایی}}}$$

و بنابراین

$$v_{\text{متوسط}} = \frac{1}{2} at = \frac{a\lambda}{2v_{\text{گرمایی}}}$$

هرگاه تعداد مولکولهای واحد حجم را با n و تعداد الکترونهاى آزاد، به جرم m و بار q ، هر مولکول را با f نشان دهیم، چگالی جریان برابر است با

$$\mathbf{J} = n f q v_{\text{متوسط}} = \frac{n f q \lambda}{2 v_{\text{گرمایی}}} \frac{\mathbf{E}}{m} = \frac{n f \lambda q^2}{2 m v_{\text{گرمایی}}} (\mathbf{E}) \quad (6-7)$$

ما ادعا نمی‌کنیم که جملهٔ داخل پرانتز مقدار دقیق رسانندگی است،^۱ اما به‌طور درست پیش‌بینی می‌کند که رسانندگی با چگالی بارهای متحرک متناسب بوده و (معمولاً) با افزایش دما کم شود. در نتیجهٔ همهٔ برخوردها، کار انجام‌شده توسط نیروی الکتریکی به گرما در مقاومت تبدیل می‌شود. چون کار انجام‌شده برای واحد بار برابر V و بار گذرنده در واحد زمان I است، توان منتقل‌شده برابر است با

$$\boxed{P = VI = I^2 R} \quad (7-7)$$

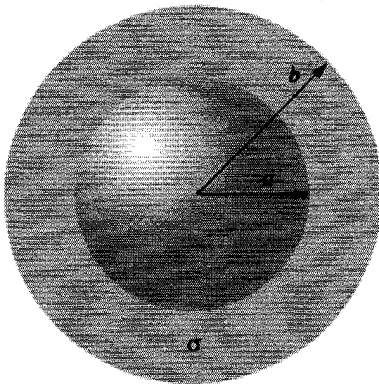
۱. این الگوی کلاسیک (منسوب به دورود) شباهت مختصری با نظریهٔ کوانتومی جدید رسانندگی دارد. به‌عنوان مثال، مرجع زیر را ببینید

این همان قانون گرمای ژول است. اگر R برحسب اهم و I برحسب آمپر باشد توان برحسب وات (ژول بر ثانیه) می‌شود.

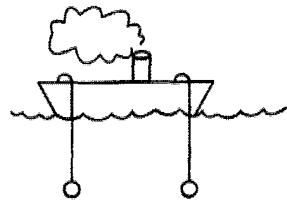
مسئله ۱-۷ دو پوستهٔ کروی هم‌مرکز فلزی به شعاع‌های a و b توسط ماده‌ای با ضریب رسانش ضعیف σ به یکدیگر متصل شده‌اند [شکل ۴-۷ (الف)].

(الف) اگر این دو کره را به اختلاف پتانسیل V وصل کنیم چه جریانی از یک کره به دیگری می‌گذرد؟ (ب) مقاومت بین پوسته‌ها چقدر است؟

(ج) توجه کنید که اگر $a \gg b$ باشد شعاع بیرونی (b) در مسئله نقشی ندارد. این را چگونه توجیه می‌کنید؟ با استفاده از این مشاهده، جریان بین دو کرهٔ فلزی را که هر یک دارای شعاع a بوده و در عمق دریا به فاصلهٔ زیادی از هم قرار دارند [شکل ۴-۷ (ب)] را در حالی که اختلاف پتانسیل بین آنها V است حساب کنید. (از این تدبیر می‌توان برای اندازه‌گیری رسانندگی آب دریا استفاده کرد).



(الف)



(ب)

شکل ۴-۷

مسئله ۲-۷ خازنی به ظرفیت C را با پتانسیل V_0 شارژ کرده‌ایم. در لحظهٔ $t = 0$ آن را به مقاومت R وصل می‌کنیم تا خازن شروع به خالی شدن کند [شکل ۵-۷ (الف)].

(الف) بار خازن را به صورت تابعی از زمان، $Q(t)$ ، حساب کنید. جریان گذرنده از مقاومت،

$I(t)$ ، چقدر است؟

(ب) انرژی ذخیره‌شدهٔ اولیهٔ خازن [معادلهٔ (۲-۵۵)] چقدر بوده است؟ با انتگرال‌گیری

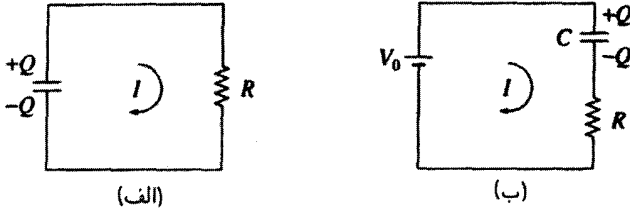
معادلهٔ (۷-۷) نشان دهید که گرمای منتقل‌شده به مقاومت با کاهش انرژی خازن برابر است.

حال فرض کنید که خازن را توسط یک مقاومت به یک باتری با ولتاژ ثابت V_0 در لحظه $t = 0$ وصل و آن را شارژ کنیم [شکل ۵-۷ (ب)].

(ج) در این حالت $Q(t)$ و $I(t)$ را تعیین کنید.

(د) انرژی کل خروجی از باتری ($\int V_0 I dt$) را بیابید. گرمای داده شده به مقاومت را تعیین

کنید. انرژی نهایی ذخیره شده در خازن چقدر است؟ چه کسری از کار انجام شده توسط باتری به انرژی خازن تبدیل شده است؟ [توجه کنید که جواب مستقل از R است!]

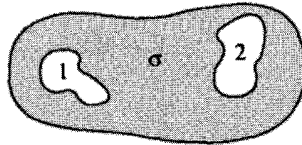


شکل ۵-۷

مسئله ۳-۷ (الف) دو جسم فلزی مطابق شکل ۶-۷ در محیطی با رسانندگی ضعیف σ قرار دارند. نشان دهید که مقاومت بین آنها با ظرفیت سیستم رابطه‌ای به صورت زیر دارند

$$R = \frac{\epsilon_0}{\sigma C}$$

(ب) فرض کنید توسط یک باتری که بین دو جسم است اختلاف پتانسیل بین آنها را به V_0 برسانند. با قطع باتری، بار الکتریکی به تدریج به بیرون نفوذ می‌کند. نشان دهید که $V(t) = V_0 e^{-t/\tau}$ و ثابت زمانی τ را برحسب ϵ_0 و σ حساب کنید.



شکل ۶-۷

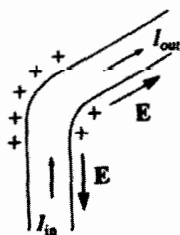
مسئله ۴-۷ فرض کنید رسانندگی ماده‌ای که بین استوانه‌های مثال ۲-۷ قرار دارد یکنواخت نبوده و به صورت $\sigma(s) = k/s$ باشد که در آن k یک مقدار ثابت است. مقاومت بین دو استوانه را بیابید [راهنمایی: چون σ تابع مکان است، معادله (۵-۷) دیگر صادق نیست، چگالی بار در

محیط مقاومت دار صفر نیست، و E هم متناسب با $1/s$ نیست. اما این را می دانیم که جریان ثابت I در سراسر هر سطح استوانه‌ای ثابت است. این را از آنجا بگیرند. □

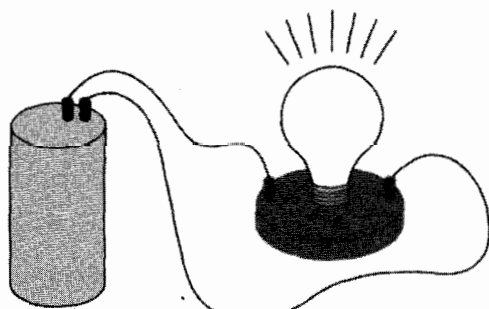
۷-۱-۲ نیروی محرکه الکتریکی

اگر دربارهٔ یک مدار الکتریکی نوعی (شکل ۷-۷) که یک باتری را به لامپی وصل کرده است بیندیشید یک پرسش کنجکاوانه برایتان مطرح می‌شود: در عمل جریان در هر لحظهٔ مشخص در تمام مدار ثابت است؛ چرا چنین است، در حالی که تنها نیروی محرکه مشهود در داخل باتری است؟ ممکن است انتظار داشته باشید که در داخل باتری، جریان شدیدی به وجود آید و هیچ جریانی از لامپ نگذرد. چه عاملی بار را در بقیهٔ مدار جابه‌جا می‌کند و این جابه‌جایی چگونه روی می‌دهد به گونه‌ای که جریان در همه مدار ثابت باشد؟ افزون بر اینها، بارهای الکتریکی در داخل سیم به کندی حرکت می‌کنند (مسئلهٔ ۵-۱۹). چرا مثلاً نیم‌ساعت طول نمی‌کشد که جریان به لامپ برسد؟ بارها چگونه با خبر می‌شوند که در یک لحظه با هم حرکت کنند؟

پاسخ: اگر جریان در تمام نقاط مدار یکسان نباشد (مثلاً در همان لحظات اول بعد از برقراری جریان) در این صورت در جاهایی باید بار انباشته شود و این خود مسئله‌ای می‌آفریند — میدان الکتریکی این بارهای انباشته در جهتی است که جریان را هموار می‌سازد. به‌عنوان مثال فرض کنید در قسمت خمیدهٔ شکل ۷-۸ جریان ورودی بیش از جریانی باشد که خارج می‌شود. در این صورت بار در محل زانویی شکل متراکم می‌شود. این بارها میدانی را ایجاد می‌کنند که با عبور جریان مخالفت می‌کند (از سرعت آن می‌کاهد) و جریانی را به سمت خارج به وجود می‌آورد (و آن را سرعت می‌بخشد) تا جریانش مساوی شوند. در این صورت است که دیگر بار اضافی در جایی جمع نمی‌شود. این سیستم جالبی است که به‌طور خودکار جریان یکنواختی را برقرار می‌کند



شکل ۸-۷



شکل ۷-۷

و سرعت عمل به گونه‌ای است که در عمل می‌توان جریان تمام قسمت‌های مدار را، حتی برای دستگاه‌هایی نوسان‌کننده در بسامدهای رادیویی، یکسان در نظر گرفت.

جمع‌بندی گفته‌های بالا این است که در واقع دو نیرو در حرکت بارهای مدار دخالت دارند: نیروی چشمه، \mathbf{f}_s ، که مقید به فرار گرفتن در بخشی از مدار (مثلاً باتری) است، و نیروی الکتروستاتیک که نقش آن تعدیل و هموار ساختن جریان چشمه در قسمت‌های مختلف مدار است

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_s + \mathbf{E} \quad (۸-۷)$$

عامل فیزیکی مسئول ایجاد \mathbf{f}_s چیزهای متفاوتی می‌تواند باشد: در باتری نیرویی شیمیایی در کار است؛ در یک بلور پیزوالکتریک فشار مکانیکی به تب الکتریکی تبدیل می‌شود؛ در یک ترموکوپل، گرادیان دمایی عامل مؤثر است؛ در یک سلول فوتوالکتریک، نور نقش ایجادکننده نیرو را به عهده دارد؛ و در یک ژنراتور وان دوگراف هم الکترونیایی هستند که در طول تسمه‌ای ایجاد می‌شوند. صرف‌نظر از نوع مکانیسم، اثر کلی را می‌توان به صورت انتگرال خطی \mathbf{f} در حول مدار بیان کرد:

$$\mathcal{E} \equiv \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l} \quad (۹-۷)$$

(چون در میدانهای الکتروستاتیکی $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ، به‌کار گرفتن \mathbf{f} یا \mathbf{f}_s تفاوتی ندارد). \mathcal{E} را نیروی محرکه الکتریکی یا **emf** مدار می‌نامند. این نام نامناسبی است زیرا \mathcal{E} به هیچ‌وجه نیرو نیست بلکه انتگرال یک نیرو در واحد بار است. بعضیها نام الکتروموتوری را ترجیح می‌دهند، اما به نظر می‌رسد **emf** مناسبتر است و بهتر است از آن استفاده کنیم.

در داخل یک چشمه ایده‌آل **emf** (مثلاً یک باتری بدون مقاومت)^۱ نیروی کل وارد بر بار صفر است [معادله (۱-۷)] با قرار دادن $[\sigma = \infty]$ ، از این رو $\mathbf{E} = -\mathbf{f}_s$. بنابراین اختلاف پتانسیل بین a و b برابر است با

$$V = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E} \quad (۱۰-۷)$$

(می‌توانیم انتگرال را بر روی کل حلقه تعمیم دهیم، زیرا در خارج چشمه $\mathbf{f}_s = 0$ است). پس

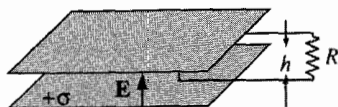
۱. عملاً باتریها یک مقاومت داخلی مشخص r دارند، و اختلاف پتانسیل بین پایه‌های آن بر اثر عبور جریان I برابر است با $\mathcal{E} - Ir$. برای بحث بیشتر از چگونگی کار باتریها مرجع زیر را ببینید.

کار یک باتری برقراری اختلاف پتانسیلی برابر با نیروی محرکه است (مثلاً یک باتری ۶ ولتی پایانه مثبت را ۶ ولت بالاتر از پایانه منفی نگه می‌دارد). میدان الکتروستاتیک حاصل، جریان را در بقیه مدار برقرار می‌کند (توجه کنید که در داخل باتری، \mathbf{f}_e جریان را در جهت مخالف \mathbf{E} برقرار می‌کند).

\mathcal{E} را که انتگرال خطی \mathbf{f}_e است می‌توان کار انجام شده واحد بار توسط چشمه در نظر گرفت — در واقع، بعضی کتابها نیروی محرکه الکتریکی را به این صورت تعریف می‌کنند. با وجود این، همان‌گونه که در بخش بعد خواهید دید، در این تعبیر ظرافتی نهفته است، از این روست که معادله (۹-۷) را ترجیح می‌دهیم.

مسئله ۵-۷ یک باتری را که emf آن برابر \mathcal{E} و مقاومت داخلی r است به یک مقاومت متغیر R وصل می‌کنیم. برای رساندن بیشترین توان به مقاومت، اندازه مقاومت R را چقدر باید بگیریم؟ (بدیهی است \mathcal{E} و r را نمی‌توان تغییر داد).

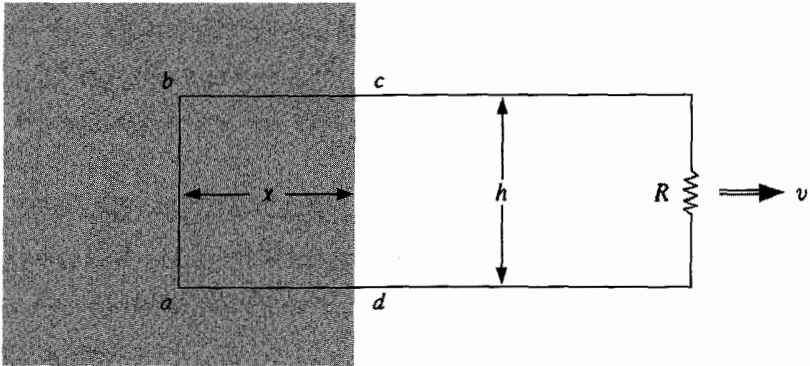
مسئله ۶-۷ سیمی به صورت یک حلقه مستطیل شکل طوری قرار دارد که یک طرف (به ارتفاع h) آن بین صفحات یک خازن تخت (شکل ۹-۷) به موازات میدان \mathbf{E} واقع است. ضلع مقابل آن در خارج از خازن که در آنجا میدان صفر است قرار دارد. emf حلقه چقدر است؟ اگر مقاومت کل، R باشد جریان گذرنده چقدر است؟ توضیح دهید. [احتظار: این پرسش توأم با ترفند است. مواظب باشید، اگر ماشینی با حرکت دائمی اختراع کرده‌اید، احتمالاً اشکالی در آن است.] □



شکل ۹-۷

۹-۱-۳ emf حرکتی

در بخش قبل نام چندین چشمه نیروی محرکه الکتریکی، که باتریها مشهورترین آنها بودند، را ذکر کردیم. در آنجا از عمومی‌ترین آنها که همان ژنراتور باشد صحبتی به میان نیاوردیم. ژنراتورها emf حرکتی ایجاد می‌کنند که این ناشی از حرکت دادن سیمی در یک میدان مغناطیسی است. شکل ۹-۷ نمونه ساده اولیه‌ای از ژنراتور را نشان می‌دهد. در قسمت سایه‌دار شکل یک میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B} به طرف داخل صفحه وجود دارد، و مقاومت R نیز چیزهای متفاوتی (یک لامپ و یا اطو و ...) می‌تواند باشد که می‌خواهیم از آن جریان بگذرد. اگر کل حلقه‌ها را با سرعت v به سمت راست حرکت دهیم بارهای واقع بر جزء ab تحت تأثیر نیرویی قرار می‌گیرند که مؤلفه



شکل ۷-۱۰

عمودی qvB آن باعث عبور جریان در مدار در جهت ساعتگرد می‌شود. \mathcal{E} برابر است با

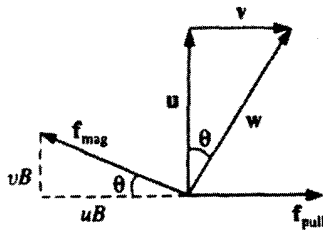
$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{f}_{\text{مغناطیسی}} \cdot d\mathbf{l} = vBh \quad (۷-۱۱)$$

که در آن h عرض قاب است. (برای قسمتهای افقی ad و bc نیروی محرکه‌ای وجود ندارد، زیرا در این قسمتها نیرو بر سیم عمود است).

توجه کنید انتگرالی که از آن برای محاسبه \mathcal{E} استفاده کردید [معادلات (۷-۹) یا (۷-۱۱)] برای یک لحظه زمانی گرفته می‌شود، اگر مایل‌اید، یک "عکس فوری" از حلقه بگیرید، و روی آن کار کنید. بنابراین $d\mathbf{l}$ مربوط به قسمت ab شکل ۷-۱۰ مستقیماً به سمت بالاست، گرچه حلقه به سمت راست حرکت می‌کند. شما نمی‌توانید در این باره جر و بحث کنید، زیرا این راهی است که \mathcal{E} بر اساس آن تعریف می‌شود، اما مهم آن است که موضوع برایتان روشن باشد.

گرچه نیروی مغناطیسی عامل برقراری \mathcal{E} است، اما یقیناً کاری انجام نمی‌دهد — نیروهای مغناطیسی هیچ‌گاه کار انجام نمی‌دهند. پس چه کسی انرژی لازم برای گرم شدن مقاومت را در اختیار می‌گذارد؟ پاسخ: کسی که حلقه را می‌کشد! با برقراری جریان، بارهای قسمت ab ، علاوه بر سرعت افقی v که ناشی از حرکت حلقه است دارای سرعتی قائم (مثلاً \mathbf{u}) هم می‌شوند. در نتیجه نیروی مغناطیسی دارای یک مؤلفه quB به سمت چپ است. برای مقابله با این نیرو، فردی که سیم را حرکت می‌دهد باید نیرویی به واحد بار به میزان زیر و به سمت راست وارد کند (شکل ۷-۱۱).

$$f_{\text{کششی}} = vB$$



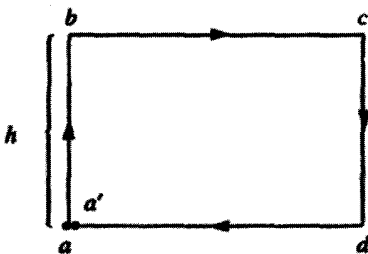
شکل ۱۱-۷

این نیرو توسط سیم به بار الکتریکی منتقل می‌شود. در این گیرودار حرکت واقعی ذره در جهت سرعت برابند w است (فاصله‌ای که می‌پیماید برابر است با $(h/\cos\theta)$). بنابراین کار انجام شده بر واحد بار برابر است با

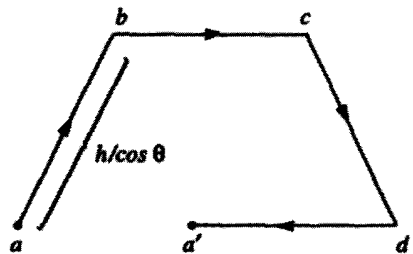
$$\int \mathbf{f}_{\text{کششی}} \cdot d\mathbf{l} = (uB) \left(\frac{h}{\cos\theta} \right) \sin\theta = vBh = \mathcal{E}$$

$\sin\theta$ از حاصلضرب عددی نتیجه می‌شود). نتیجه اینکه، کار انجام شده برای واحد بار دقیقاً با emf برابر است، گرچه انتگرالها روی مسیرهای متفاوتی گرفته شده‌اند (شکل ۷-۱۲) و نیروهای کاملاً مختلفی دخالت داشته‌اند. برای محاسبه emf ، شما دور حلقه در یک لحظه را انتگرال می‌گیرید، اما برای محاسبه کار انجام شده، بار را در حرکتش در حلقه دنبال می‌کنید، کششی \mathbf{f} به علت عمود بودن بر سیم نقشی در emf ندارد، در حالی که منطقی \mathbf{f} هم به علت عمود بودن بر حرکت بار نقشی در انجام کار ندارد!

روش زیبایی برای بیان emf تولیدشده بر اثر حرکت حلقه وجود دارد. فرض کنید Φ شار



(الف) انتگرال گیری برای محاسبه \mathcal{E} (سیم را در یک لحظه دنبال کنید.)



(ب) مسیر انتگرال گیری برای محاسبه کار انجام شده (بار را دور حلقه دنبال کنید.)

حاصل از \mathbf{B} در حلقه باشد

$$\Phi \equiv \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (۱۲-۷)$$

برای حلقه مستطیل شکل ۷-۱۰ می توان نوشت

$$\Phi = Bhx$$

با حرکت حلقه، شار کم می شود

$$\frac{d\Phi}{dt} = Bh \frac{dx}{dt} = -Bhv$$

(علامت منها به علت منفی بودن dx/dt است.) اما این مقدار دقیقاً emf است (شکل ۷-۱۱)؛ بدیهی است که emf ایجاد شده در حلقه، برابر با منهای آهنگ تغییر شار در حلقه است

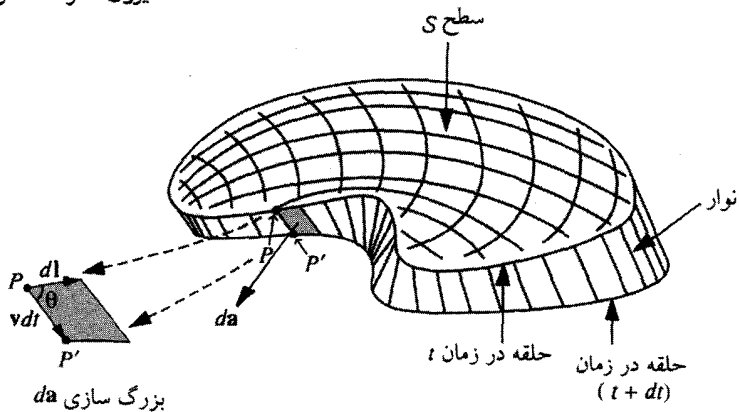
$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}} \quad (۱۳-۷)$$

این قاعده شار برای emf حرکتی است. گذشته از سادگی فرمول زیبای بالا، می توان آن را برای حلقه های غیرمستطیلی شکل که در هر امتداد دلخواهی در میدانهای مغناطیسی غیریکنواخت حرکت می کنند نیز به کار برد؛ در واقع، لزومی ندارد که حلقه شکل ثابت و مشخصی داشته باشد.

اثبات: شکل ۷-۱۳ حلقه ای از سیم را در زمان t و نیز در زمان کوچک dt بعد از آن نشان می دهد. فرض کنید شار سطح S را در لحظه t و نیز شار را در لحظه $t + dt$ برای سطح شامل S به علاوه "نواری" که وضعیت جدید حلقه را به وضع سابق آن وصل می کند حساب کنیم. پس، تغییرات شار می شود

$$d\Phi = \Phi(t + dt) - \Phi(t) = \Phi_{\text{نوار}} = \int_{\text{نوار}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

توجه خود را معطوف نقطه P کنید: این نقطه در زمان dt به P' جابه جا می شود. فرض کنید سرعت سیم \mathbf{v} و سرعت بار به طرف پایین سیم برابر \mathbf{u} باشد؛ $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ سرعت



شکل ۱۳-۷

برایند بار در P خواهد بود. یک جزء بینهایت کوچک سطح روی نوار را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$d\mathbf{a} = (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) dt$$

(نوشته‌های روی شکل ۱۳-۷ را ببینید). بنابراین

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l})$$

چون $\mathbf{w} = (\mathbf{v} + \mathbf{u})$ و $d\mathbf{l}$ موازی است، می‌توان نوشت

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint \mathbf{B} \cdot (\mathbf{w} \times d\mathbf{l})$$

اما می‌دانیم که ضرب‌سه‌تایی نرده‌ای بالا را می‌توان چنین نوشت

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{w} \times d\mathbf{l}) = -(\mathbf{w} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

پس

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\oint (\mathbf{w} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

اما $(\mathbf{w} \times \mathbf{B})$ نیروی مغناطیسی وارد بر واحد بار، مغناطیسی \mathbf{f} ، است، پس

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \oint \mathbf{f}_{\text{مغناطیسی}} \cdot d\mathbf{l}$$

و انتگرال مغناطیسی \mathbf{f} همان emf است

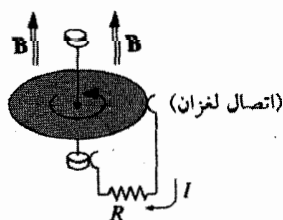
$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

ابهامی برای علامت منها در تعریف emf معادله (۹-۷) وجود دارد: در کدام مسیر دور حلقه انتگرال بگیریم؟ یک ابهام متقابل هم در تعریف شار معادله (۱۲-۷) وجود دارد: جهت مثبت da کدام است؟ در اعمال قاعده شار، علامت همیشه از روی قاعده دست راست تعیین می شود: اگر انگشتان شما جهت مثبت دور حلقه را نشان دهند، آنگاه انگشت شست جهت da را مشخص می کند. در این صورت ممکن است emf منفی به دست آید، یعنی جریان در جهت منفی در مدار جاری شود.

قاعده شار راهی میانبر برای محاسبه emf حرکتی است. در این قاعده چیز تازه ای از فیزیک وجود ندارد. به قدرت ممکن است با مسائلی مواجه شوید که قاعده شار برای آنها قابل اعمال نباشد؛ در این موارد باید به خود قانون نیروی لورنتس برگردید.

مثال ۴-۷

یک قرص فلزی به شعاع a با سرعت زاویه ای ω حول محور قائمی رو به بالا مطابق شکل ۱۴-۷ در یک میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B} می چرخد. مداری را با اتصال یک انتهای مقاومت R به محور دوران و انتهای دیگرش به لغزنده واقع بر گوشه بیرونی قرص تشکیل داده ایم. جریان حاصل در مقاومت را بیابید.



شکل ۱۴-۷

حل: سرعت نقطه‌ای از قرص واقع در فاصله s از محور برابر است با $v = \omega s$ ، از این رو نیروی وارد بر واحد بار برابر است با $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \omega s B \hat{s}$ ، بنابراین emf مساوی است با

$$\mathcal{E} = \int_0^a f_{\text{مغناطیسی}} ds = \omega B \int_0^a s ds = \frac{\omega B a^2}{2}$$

و جریان هم برابر است با

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\omega B a^2}{2R}$$

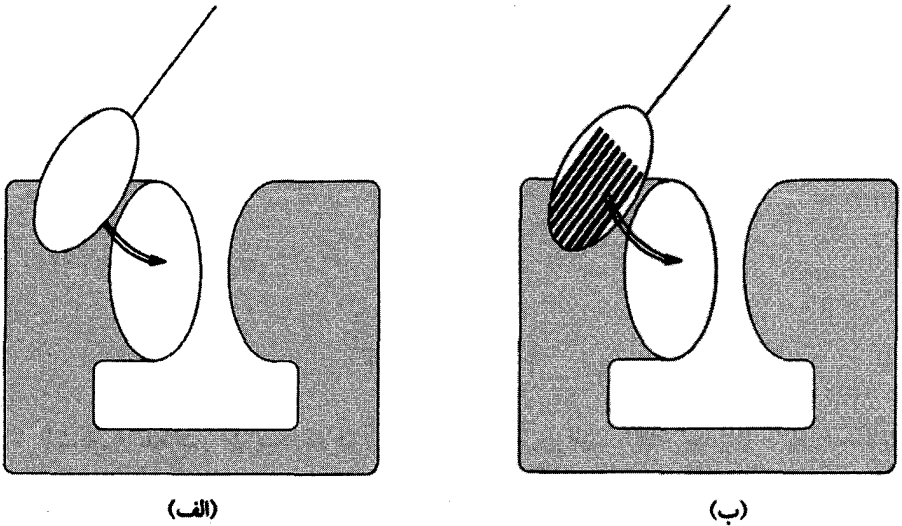
مشکل قاعده شار آن است که در آن فرض می‌شود جریان در یک مسیر کاملاً تعریف شده می‌گذرد، در حالی که در این مثال جریان در کل قرص توزیع شده است. حتی معنی "شار گذرنده از مدار" هم در این مثال روشن نیست. مورد جریانهای گردابی از این هم پیچیده‌تر است. قطعه‌ای آلومینیمی بردارید و آن را در یک میدان مغناطیسی غیر یکنواخت تکان دهید. در جسم جریانی ایجاد می‌شود، و شما نوعی "کشش چسبناک" نظیر کشیدن قطعه‌ای در داخل شیره قند احساس خواهید کرد. (این همان نیرویی است که در بحث emf حرکتی با \mathbf{f} نشان دادیم). محاسبه جریانهای گردابی دشوار است،^۱ اما نمایش آنها ساده است. شاید شاهد این آزمایش کلاسیک بوده‌اید که در آن یک قرص آلومینیمی آویخته به صورت یک آونگ روی یک محور افقی بین قطبهای یک آهنربا چگونه تاب می‌خورد [شکل ۷-۱۵ (الف)]. وقتی که قرص در ناحیه میدان قرار می‌گیرد ناگهان از سرعتش کاسته می‌شود. برای تأیید اینکه جریانهای گردابی باعث این پدیده‌اند، می‌توان فرایند را بدین ترتیب تکرار کرد که از قرصی حاوی برشهای زیاد برای جلوگیری از جریانهای بزرگ مقدار استفاده کرد [شکل ۷-۱۵ (ب)]. این دفعه مشاهده می‌شود که قرص آزادانه تاب می‌خورد و میدان مانع آن نمی‌شود. ■

مسئله ۷-۷ یک میله فلزی به جرم m بدون اصطکاک بر روی دو ریل موازی و رسانا که به فاصله l از یکدیگر واقع‌اند می‌لغزد (شکل ۷-۱۶). مقاومت R بر روی ریلها متصل و یک میدان مغناطیسی \mathbf{B} به طرف داخل صفحه کتاب در کل ناحیه وجود دارد.

(الف) اگر میله با سرعت v به طرف راست حرکت کند شدت جریان در مقاومت R چقدر

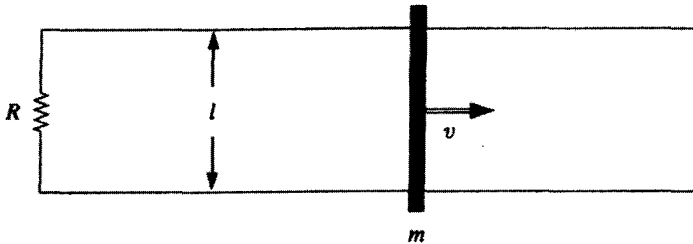
می‌شود؟ جریان در چه جهتی است؟

(ب) نیروی مغناطیسی وارد بر میله چقدر است؟ در چه جهتی است؟



شکل ۱۵-۷

(ج) اگر میله در لحظه صفر با سرعت v_0 شروع به حرکت کند سرعت آن در لحظه t چقدر است؟
 (د) انرژی جنبشی اولیه، $\frac{1}{2}mv_0^2$ ، کجا می‌رود؟ پایداری انرژی در این فرایند را با محاسبه اینکه انرژی به دست آمده در جایی دیگر دقیقاً $\frac{1}{2}mv_0^2$ است اثبات کنید.

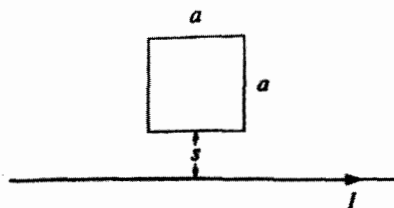


شکل ۱۶-۷

مسئله ۸-۷ یک حلقه مربعی به ضلع a روی میزی و نزدیک به سیم بسیار طولیل و مستقیمی که از آن جریان I می‌گذرد مطابق شکل ۱۷-۷ قرار دارد.
 (الف) شار B حلقه را حساب کنید.

(ب) حال اگر شخصی با سرعت v حلقه را از سیم دور کند، چه نیروی محرکه الکتریکی ایجاد می‌شود؟ جریان در چه جهتی برقرار است؟

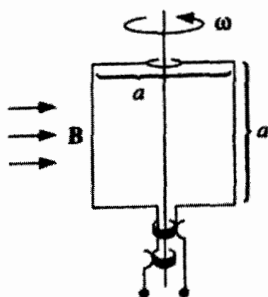
(ج) به جای دور کردن حلقه، اگر آن را به طرف راست با سرعت v بکشید چه اتفاقی می‌افتد؟



شکل ۱۷-۷

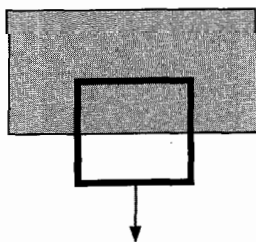
مسئله ۹-۷ تعدادی نامتناهی از سطوح متفاوت را می‌توان به یک خط مرزی مشخصی برازش داد، با وجود این در تعریف شار مغناطیسی گذرنده از یک حلقه، $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ ، هیچ‌گاه از سطح خاصی برای استفاده در فرمول نام نبردیم. این بی‌توجهی را توجیه کنید.

مسئله ۱۰-۷ یک حلقهٔ مربعی به ضلع a به میلهٔ قائمی که با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد (شکل ۱۸-۷) آویخته شده است. یک میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B} به سمت راست وجود دارد. $\mathcal{E}(t)$ را برای این ژنراتور متناوب پیدا کنید.



شکل ۱۸-۷

مسئله ۱۱-۷ یک حلقهٔ مربعی را با بریدن از یک صفحه ضخیم آلومینیومی تهیه می‌کنیم. آن‌گاه در حالی که قسمت بالای حلقه را در یک میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B} قرار داده‌ایم آن را برای سقوط، آزاد می‌گذاریم (شکل ۱۹-۷). (در شکل، قسمت سایه‌دار نواحی میدان \mathbf{B} را نشان می‌دهد



شکل ۱۹-۷

که به طرف داخل صفحه کتاب است.) اگر میدان مغناطیسی را یک تسلا (میدانی متعارف در آزمایشگاهها) انتخاب کنیم، سرعت حد یا پایانی حلقه را (برحسب m/s) حساب کنید. سرعت حلقه را به صورت تابعی از زمان بیابید. چه مدت طول می‌کشد که این سرعت به 90% سرعت نهایی برسد؟ اگر برش کوچکی از حلقه از آن جدا و در نتیجه مدار قطع می‌شود، چه اتفاقی می‌افتاد؟ [توجه: اضلاع حلقه همدیگر را خنثی می‌کنند؛ تعداد واقعی را برحسب یکاهای نشان داده شده در شکل معین کنید.] □

۲-۷ القای الکترومغناطیسی

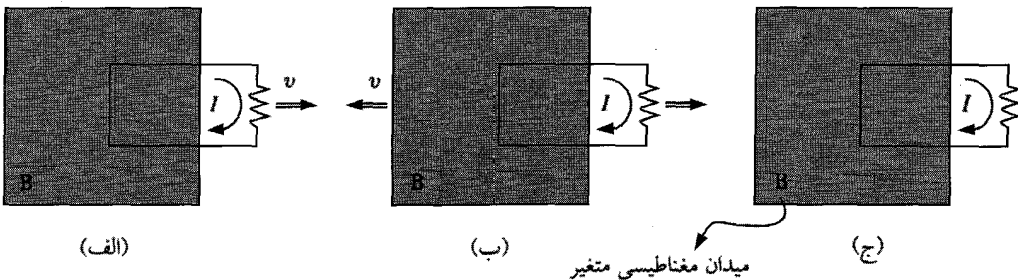
۱-۲-۷ قانون فاراده

در سال ۱۸۳۱ میلادی مایکل فاراده، گزارش یک سری آزمایش، از جمله سه تایی زیر را (با اندکی دستبرد در تاریخ) منتشر کرد:

آزمایش ۱. او یک حلقه سیم را در یک میدان مغناطیسی به سمت راست کشید [شکل ۲۰-۷ (الف)]. جریانی در حلقه ایجاد شد.

آزمایش ۲. با ساکن نگه داشتن حلقه، آهنربا را به سمت چپ حرکت داد [شکل ۲۰-۷ (ب)]. باز هم جریانی در حلقه برقرار شد.

آزمایش ۳. در حالی که حلقه و آهنربا هر دو ساکن بودند [شکل ۲۰-۷ (ج)]، وی بزرگی میدان را تغییر داد (با انتخاب آهنربای الکتریکی و تغییر جریان در سیم پیچ) باز هم جریان در حلقه برقرار شد.



شکل ۲۰-۷

بدیهی است که آزمایش اول مثالی برای emf حرکتی است که از قاعده شار زیر نتیجه می شود

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

به نظر نمی رسد دانستن اینکه در آزمایش ۲ هم دقیقاً همین مقدار emf ایجاد می شود برایتان تعجب آور باشد — تنها نکته مهم، حرکت نسبی آهنربا و حلقه است. در واقع از منظر نسبیت خاص باید چنین باشد. اما فاراده درباره نسبیت چیزی نمی دانست، و در الکترودینامیک کلاسیک این دو جانبگی ساده، تصادفی با معنی است. وقتی حلقه حرکت می کند، عامل ایجاد emf نیروی مغناطیسی است، اما اگر حلقه ساکن باشد نیرو دیگر نمی تواند مغناطیسی باشد — بر بارهای ساکن نیروهای مغناطیسی اثر نمی کند. پس در این حال عامل چیست؟ چه نوع میدانی بر بارهای ساکن نیرو وارد می کند؟ البته و مسلماً میدان الکتریکی، اما به نظر نمی رسد در اینجا میدان الکتریکی وجود داشته باشد.

فاراده نظر استادانه ای بیان کرد:

میدان مغناطیسی متغیر، میدان الکتریکی القا می کند.

این میدان الکتریکی "القایی" که در ایجاد emf آزمایش ۲ دخالت دارد،^۱ در واقع اگر (همچنان که فاراده به شکل تجربی دریافت) emf باز هم برابر با آهنگ تغییر شار باشد

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (۱۴-۷)$$

آن گاه \mathbf{E} با تغییرات \mathbf{B} رابطه ای طبق معادله زیر دارد

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad (۱۵-۷)$$

این صورت انتگرالی قانون فاراده است. ما می توانیم آن را با استفاده از قضیه استوکس به صورت دیفرانسیلی در آوریم

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (۱۶-۷)$$

۱. ممکن است بگوئید میدان مغناطیسی آزمایش ۲ واقعاً تغییر نمی کند و فقط جابه جا می شود. منظور ما آن است که اگر شما در محل ثابتی بنشینید، میدان با حرکت آهنربا تغییر می کند.

توجه کنید که قانون فاراده در موارد ایستایی (\mathbf{B} ثابت)، همان‌گونه که انتظار می‌رود، به قاعده قدیمی $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ (و یا به صورت دیفرانسیلی $\nabla \times \mathbf{E} = 0$) تبدیل می‌شود.

در آزمایش ۳، میدان مغناطیسی به دلایل کاملاً متفاوتی تغییر می‌کند، اما بنا به قانون فاراده باز هم یک میدان الکتریکی القا می‌شود و در نتیجه emf به میزان $-d\Phi/dt$ به دست می‌آید. در واقع هر سه حالت (و برای این موضوع هر نوع ترکیبی از آنها) را می‌توان در یک قاعده شار جهانی خلاصه کرد:

هر آنگاه (و به هر دلیلی) که شار گذرنده از حلقه‌ای تغییر کند emf زیر در حلقه ایجاد می‌شود

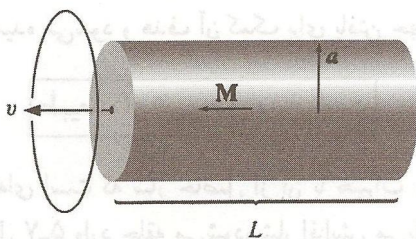
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (17-7)$$

بسیاری این معادله را "قانون فاراده" می‌نامند. این بیان با دیدی وسواسی گیج‌کننده است. در حقیقت دو سازوکار کاملاً متفاوت برای معادله (۱۷-۷) وجود دارد و اینکه هر دو را با نام "قانون فاراده" بنامیم همانند آن است که بگوییم چون دوقلوها شبیه هم هستند آنها را با یک نام می‌خوانیم. در آزمایش اول فاراده، قانون نیروی لورنتس مسئول کار است و در نتیجه emf، مغناطیسی است. اما در دو مورد بعدی عامل مؤثر میدان الکتریکی (القایی حاصل از میدان مغناطیسی متغیر) است. از این دیدگاه بدیهی است که هر سه فرایند به یک فرمول برای emf منجر می‌شوند. در واقع، دقیقاً همین "همخوانی" بود که اینشتین را به نظریه نسبیت خاص معتمد کرد - او فهم عمیقتری از آنچه در الکتروپدینامیک کلاسیک به عنوان یک تصادف عجیب تلقی می‌شود، کسب کرد. این خود داستان فصل ۱۲ کتاب است. در هر صورت ما جمله "قانون فاراده" را برای میدانهای الکتریکی القایی ناشی از تغییرات میدان مغناطیسی به کار می‌بریم، و آزمایش ۱ را به عنوان قانون فاراده در نظر نمی‌گیریم.

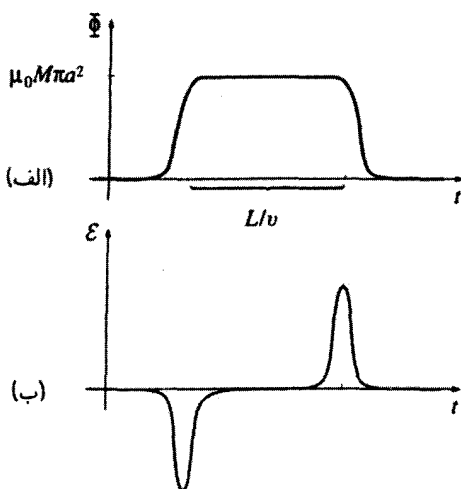
مثال ۵-۷

یک آهنربای استوانه‌ای طویل به طول L و به شعاع a دارای مغناطش یکنواخت M به موازات محورش است. این استوانه با سرعت ثابت v از داخل یک سیم دایره‌ای با قطری کمی بزرگتر از خود (شکل ۲۱-۷) عبور می‌کند. emf القایی در حلقه را برحسب زمان رسم کنید.

حل: میدان مغناطیسی با میدان یک سیمولوله طویل با جریان سطحی $K_b = M\hat{\phi}$ برابر است. بنابراین میدان در داخل بجز در لبه‌ها که به سمت صفر میل می‌کند برابر است با $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}$. وقتی آهنربا دور باشد شار حلقه صفر است؛ بیشترین مقدار شار $\mu_0 M \pi a^2$ مربوط به زمانی



شکل ۲۱-۷



شکل ۲۲-۷

است که انتهای جلویی از حلقه عبور می‌کند؛ و وقتی انتهای دیگر از آن عبور می‌کند صفر است [شکل ۲۲-۷ (الف)]. ϵ برابر است با (منهای) مشتق Φ نسبت به زمان، از این رو همان‌گونه که شکل ۲۲-۷ (ب) نشان می‌دهد دارای دو قله است. ■

دقت در علامتها در قانون فاراده می‌تواند ایجاد در دسر کنند. به عنوان مثال می‌خواهیم جهت جریان القایی در حلقه مثال ۷-۵ را بدانیم. از نظر اصولی، این کار با قاعده دست راست صورت می‌گیرد [مثبت در شکل ۲۲-۷ (الف)] را به سمت چپ در نظر می‌گیریم، بنابراین جهت مثبت جریان حلقه پادساعتگرد است وقتی از چپ دیده شود؛ بنابراین اولین قله شکل ۲۲-۷ (ب) منفی است، اولین تپ جریان ساعتگرد است، و دومین آن پاد ساعتگرد]. اما یک قاعده دم دستی هم

وجود دارد که قانون لنز نامیده می‌شود و هدف آن کمک برای یافتن جهت درست است:

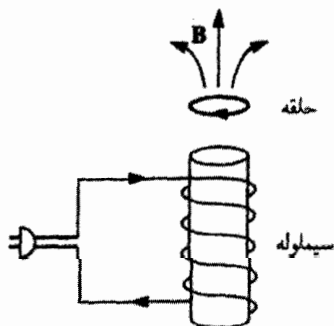
طبیعت از تغییر شار متنفر است

جهت جریان القایی به‌گونه‌ای است که شار حاصل از آن با تغییرات مخالفت می‌ورزد. (وقتی قسمت جلو مغناطیس مثال ۵-۷ وارد حلقه می‌شود، شار افزایش می‌یابد، از این رو جریان حلقه باید میدانی به سمت راست ایجاد کند. بنابراین جهت جریان ساعتگرد است.) توجه کنید که این تغییر شار است که طبیعت از آن متنفر است و نه خود شار (وقتی قسمت انتهایی مغناطیس از حلقه گذشت شار افت پیدا می‌کند و بنابراین جهت جریان القایی برای مقابله با آن پاد ساعتگرد است). القای فاراده نوعی پدیده "لختی" است: یک حلقهٔ رسانا "میل دارد" که شار ثابتی از داخلش بگذرد؛ اگر سعی در تغییر شار کنید، پاسخ حلقه ایجاد یک جریان در جهتی است که کوشش شما را خنثی می‌سازد. (در این کار کاملاً هم موفق نیست؛ جریان القایی حاصل نوعاً کسر کوچکی از جریان اصلی است. تمام آن چیزی که قانون لنز به شما می‌گوید، جهت جریان است).

مثال ۶-۷

نمایش "حلقهٔ جهنده". اگر (برای ایجاد میدان مغناطیسی در آهن) پیچۀ سیمولوله‌ای را دور هسته آهنی ببیچید و حلقه‌ای فلزی را بالای آن قرار داده و سیمپیچ را به برق وصل کنید، حلقه چند سانتیمتر در هوا به طرف بالا می‌جهد (شکل ۷-۲۳). چرا؟

حل: قبل از اتصال برق به مدار شار گذرنده از حلقه صفر است. بعد از وصل جریان شاری (که



شکل ۷-۲۳

۱. قانون لنز برای emf حرکتی نیز صادق است، اما در چنین مواردی ساده‌تر آن است که جهت را از قانون نیروی لورنتس به دست آوریم.

در شکل به طرف بالا است) برقرار و emf ایجاد شده در حلقه باعث ایجاد جریانی در آن می‌شود که خود تابع قانون لنز است، یعنی میدان حاصل از آن می‌خواهد شار جدید را خنثی کند. مفهوم این گفته آن است که جهت جریان حلقه برخلاف جریان سیمولوله است و این جریانهای مخالف یکدیگر را دفع می‌کنند؛ بنابراین حلقه به طرف بالا می‌جهد. ■

مسئله ۷-۱۲ از سیمولوله طویلی به شعاع a جریان متناوبی می‌گذرد و بنابراین میدان در داخل آن سینوسی است: $\mathbf{B}(t) = B_0 \cos(\omega t) \hat{z}$. حلقه سیم دایره‌ای به شعاع $a/2$ و مقاومت R در داخل سیمولوله و هم‌محور با آن قرار می‌گیرد. جریان القایی حلقه را به صورت تابعی از زمان بیابید.

مسئله ۷-۱۳ حلقه سیم مربعی شکل به ضلع a در ربع اول صفحه xy به‌گونه‌ای قرار دارد که یک گوشه آن در مبدأ واقع است. در این ناحیه یک میدان مغناطیسی غیریکنواخت وابسته به زمان $\mathbf{B}(y, t) = ky^2 t^2 \hat{z}$ (که در آن k یک ثابت است) قرار دارد. emf القایی حلقه را بیابید.

مسئله ۷-۱۴ برای نمایش درسی، یک آهنربای میله‌ای استوانه‌ای شکل و کوتاه را از بالا به داخل یک لوله آلومینیومی با قطری کمی بزرگتر از آهنربا و به طول در حدود ۲ متر به پایین می‌اندازیم. پایین آمدن میله چند ثانیه‌ای به طول می‌انجامد، در حالی که یک آهن غیرمغناطیسی در کسری از ثانیه این فاصله را می‌پیماید. بگویید چرا آهنربا این قدر آهسته پایین می‌آید؟ □

۷-۲-۲ میدان الکتریکی القایی

آنچه کشف فاراده به ما می‌گوید این است که در حقیقت دو نوع میدان الکتریکی متمایز وجود دارد: یکی میدانهای مربوط به بارهای الکتریکی، و دیگری میدانهای وابسته به میدانهای مغناطیسی متغیر^۲ اولی را می‌توان (در حالت ایستا) با استفاده از قانون کولن محاسبه کرد؛ میدان دوم را از روی تشابه بین قانون فاراده

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

۱. برای بحث بیشتر درباره حلقه جهنده (و حلقه "شناور وابسته") به مرجع زیر رجوع کنید

C. S. Schneider and J. P. Ertel, *Am. J. Phys.* **66**, 680 (1998).

۲. می‌توانید نام کاملاً جدیدی برای میدان حاصل از تغییر \mathbf{B} انتخاب کنید. در این صورت الکتروپنایمیک در برگرفته سه میدان است: میدانهای \mathbf{E} ناشی از بارهای الکتریکی $[\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0]$ ؛ و میدانهای \mathbf{G} ، ناشی از میدانهای مغناطیسی متغیر حاصل از جریان الکتریکی $[\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0]$ ؛ و میدانهای \mathbf{F} ، چون \mathbf{E} و \mathbf{G} به‌گونه‌های مشابه اعمال نیرو می‌کنند $[\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{G})]$. بهتر است مجموع آنها را به صورت وجود یگانه‌ای در نظر بگیریم و آن را "میدان الکتریکی" بخوانیم.

و قانون آمپر

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

بدیهی است که میدان را نمی‌توان به تنهایی از روی تاو معلوم کرد بلکه دیورژانس نیز باید مشخص باشد. اما تا وقتی که \mathbf{E} یک میدان فاراده خالص، ناشی از تغییرات \mathbf{B} (با $\rho = 0$) باشد، قانون گاوس می‌گوید

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

در حالی که برای میدانهای مغناطیسی، همواره داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

بنابراین همخوانی کامل است، و نتیجه می‌گیریم که میدانهای الکتریکی القایی فاراده را می‌توان از معادله $(\partial \mathbf{B} / \partial t)$ - دقیقاً به همان شیوه‌ای که میدانهای مغناطوستاتیک با \mathbf{J} μ_0 تعیین می‌شوند معلوم کرد.

به‌ویژه، در صورت وجود تقارن، می‌توانیم از شیوه قانون آمپر به صورت انتگرالی

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{محصور}}$$

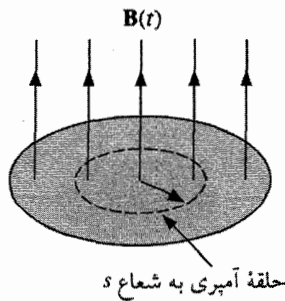
استفاده کنیم فقط این دفعه قانون فاراده به صورت انتگرال اعمال می‌شود

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (18-7)$$

آهنگ تغییر شار (مغناطیسی) گذرنده از حلقه آمپری همان نقش قبلی $I_{\text{محصور}} \mu_0$ را دارد.

مثال ۷-۷

یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}(t)$ که مستقیماً به سمت بالاست، ناحیه دایره‌ای شکل ۷-۲۴ را پر می‌کند. اگر \mathbf{B} با زمان تغییر کند، میدان القایی حاصل چقدر است؟



شکل ۷-۲۴

حل: همانند میدان مغناطیسی یک سیم مستقیم طویل با چگالی جریان یکنواخت، در راستای $\hat{\phi}$ است. یک حلقه آمپری به شعاع s رسم کنید و قانون فاراده را برای آن اعمال کنید

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E(2\pi s) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\pi s^2 B(t)) = -\pi s^2 \frac{dB}{dt}$$

بنابراین

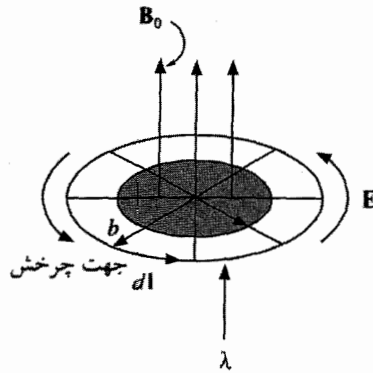
$$\mathbf{E} = -\frac{s}{2} \frac{dB}{dt} \hat{\phi}$$

با افزایش B ، و با دید از بالا، \mathbf{E} ساعتگرد است.

مثال ۷-۸

بار خطی λ در لبه چرخشی به شعاع b ، که به طور افقی مطابق شکل ۷-۲۵ آویخته شده است قرار دارد و چرخ برای دوران آزاد است. (پره‌های چرخ از ماده نارسائیمی مانند چوب ساخته شده‌اند). در ناحیه مرکزی تا شعاع a یک میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B}_0 به سمت بالا وجود دارد. اگر میدان حذف شود چه اتفاقی می‌افتد؟

حل: میدان مغناطیسی متغیر، میدان الکتریکی القایی دور محور چرخ ایجاد می‌کند. این میدان الکتریکی به بارهای لبه چرخ نیرو وارد می‌کند، و چرخ شروع به چرخش می‌کند. بنابه قانون لنز جهت چرخش به گونه‌ای است که میدان آن تمایل به نگاه داشتن شار به سمت بالا دارد. پس با نگاه از بالا، حرکت پاد ساعتگرد است.



شکل ۲۵-۷

قانون فاراده به صورت کتی می‌گوید

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi a^2 \frac{dB}{dt}$$

حال گوئیم گشتاور وارد بر قسمتی به طول dl برابر است با $(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ یا $b\lambda E dl$. و بنابراین گشتاور کلی وارد بر چرخ برابر است با

$$N = b\lambda \oint E dl = -b\lambda\pi a^2 \frac{dB}{dt}$$

و تکانه زاویه‌ای وارد بر چرخ عبارت است از

$$\int N dt = -\lambda\pi a^2 b \int_{B_0} dB = \lambda\pi a^2 b B_0.$$

تندی یا کندی قطع میدان مهم نیست؛ سرعت زاویه‌ی نهایی چرخ در هر حال یکی است. (اگر تعجب کردید که این تکانه زاویه‌ای از کجا می‌آید، داستانی دیگر دارد که تا فصل بعد باید صبر کنید.)

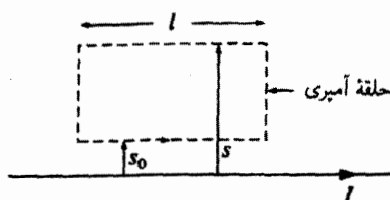
آخرین نکته درباره‌ی این مثال: عامل دوران میدان الکتریکی بود. برای متقاعد کردن شما به این نکته، طوری ترتیب کار را می‌دهیم که میدان مغناطیسی همواره در محل بار (روی لبه‌ی چرخ) صفر باشد. آزمایش‌کننده ممکن است به شما بگوید که او هرگز از میدان الکتریکی استفاده نکرده و تنها کار او قطع میدان مغناطیسی بوده است. اما همین قطع میدان مغناطیسی خودبه‌خود میدان الکتریکی را نمایان ساخته و همین میدان الکتریکی هم عامل دوران چرخ است. ■

حال به شما از حقه‌ای که بسیاری از کاربردهای قانون فاراده را کم‌رنگ می‌سازد هشدار می‌دهیم: بدیهی است که القای الکترومغناطیسی تنها با تغییر میدانهای مغناطیسی حاصل می‌شود، و با وجود این مایلیم برای محاسبه این میدانهای مغناطیسی از ابزارهای مغناطوستاتیک (قانون آمپر، قانون بیو-ساور و بقیه) استفاده کنیم. از نظر عملی، هرگونه نتیجه‌ای که در این راه می‌گیریم تنها به‌طور تقریبی درست است. اما در عمل خطای آن معمولاً قابل اغماض است مگر آنکه افت‌وخیزهای میدان بسیار سریع باشد و یا نقاطی مدنظرتان باشند که از چشمه خیلی دور هستند. حتی مورد سیمی که توسط قیچی بریده شده است (مسئله ۷-۱۸) به اندازه کافی ایستا محسوب می‌شود که قانون آمپر را بتوان در مورد آن به‌کار برد. این وضعیت را، که در آن می‌توان از قواعد مغناطوستاتیک برای محاسبه میدان مغناطیسی در طرف راست قانون فاراده استفاده کرد شبه‌ایستا می‌نامند. به‌طور کلی، تنها وقتی دربارهٔ امواج الکترومغناطیسی و تابش صحبت می‌شود باید به‌طور جد از نقض مغناطوستاتیک نگران باشیم.

مثال ۷-۹

از یک سیم مستقیم نامتناهی طویل، جریان $I(t)$ با تغییر کند می‌گذرد. میدان الکتریکی القایی را به‌صورت تابعی از فاصله از سیم، s ، حساب کنید.^۱

حل: در تقریب شبه‌ایستا، میدان مغناطیسی برابر است با $(\mu_0 I / 2\pi s)$ و در اطراف سیم می‌چرخد. همانند میدان B یک سیمولوله، E به موازات محور است. با اعمال قانون فاراده به "حلقه آمپری" مستطیلی شکل ۷-۲۶ داریم



شکل ۷-۲۶

۱. این مثال ساختگی است، و به معنای معمولی شامل سیمهای نامتناهی نیست. فرض آن است که جریان در تمام طول سیم (در هر لحظه مشخص زمان) ثابت است. این یک فرض اطمینان‌بخشی برای سیمهای کوتاه در مدارهای الکتریکی است، اما از نظر عملی برای سیمهای بلند (خطوط انتقال) صادق نیست مگر اینکه سازوکاری برای توزیع یکنواخت جریان به‌کار ببریم. اما فکرش را نکنید — در مسئله نیازی به اینکه چگونه چنین جریانی ایجاد می‌شود نیست: تنها خواسته مسئله این است که چگونه میدانهایی خواهیم داشت. (صورت‌های مختلف این مسئله در:

M. A. Heald, *Am. J. Phys.* 54, 1142 (1986)

و مراجعی که در این مقاله‌اند بحث شده‌اند.)

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E(s_0)l - E(s)l = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

$$= -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{dI}{dt} \int_{s_0}^s \frac{1}{s'} ds' = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{dI}{dt} (\ln s - \ln s_0)$$

بنابراین

$$\mathbf{E}(s) = \left[\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dI}{dt} \ln s + K \right] \hat{\mathbf{z}} \quad (۱۹-۷)$$

که در آن K یک ثابت است (یعنی مستقل از s است — اما ممکن است تابعی از t باشد). مقدار واقعی K به چگونگی و سابقه تابع $I(t)$ بستگی دارد — مثالهایی در این خصوص را در فصل ۱۰ می‌بینیم.

معادله (۱۹-۷) دارای تعبیر خاصی است بدین ترتیب که E به‌ازای $s \rightarrow \infty$ بزرگ می‌شود. چنین چیزی نمی‌تواند حقیقت داشته باشد ... اشکال در کجاست؟ پاسخ: ما از حدود تقریب شبه‌ایستا خیلی فراتر رفته‌ایم. همان‌گونه که در فصل ۹ خواهید دید، "اخبار" الکترومغناطیسی با سرعت نور منتقل می‌شوند، و در فواصل بزرگ \mathbf{B} به جریان حالا بستگی ندارد، بلکه به جریانی بستگی دارد که در زمان قبلی داشت (در واقع، به گستره کل زمانهای قبلی، زیرا نقاط مختلف سیم در فواصل مختلفی قرار دارند). اگر τ زمان لازم برای تغییر قابل ملاحظه I باشد، آن‌گاه تقریب شبه‌ایستا فقط با شرط زیر برقرار است

$$s \ll c\tau \quad (۲۰-۷)$$

و از این رو است که معادله (۱۹-۷) در فواصل خیلی زیاد s قابل اعمال نیست. ■

مسئله ۱۵-۷ یک سیمولوله طویل به شعاع a و n دور سیم در واحد طول حامل جریان وابسته به زمان $I(t)$ در راستای $\hat{\mathbf{z}}$ است. میدان الکتریکی (اندازه و جهت) را در فاصله s از محور (هم داخل و هم خارج سیمولوله) با تقریب شبه‌ایستا بیابید.

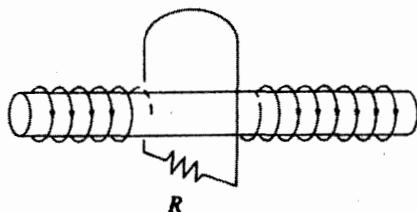
مسئله ۱۶-۷ یک جریان متناوب $I = I_0 \cos(\omega t)$ از سیم طولی می‌گذرد و از راه یک لوله رسانای هم‌محور به شعاع a برمی‌گردد.

(الف) میدان الکتریکی القایی در چه جهتی است (شعاعی، دایره‌ای، طولی)؟
 (ب) با فرض آنکه به‌ازای $s \rightarrow \infty$ میدان به صفر میل کند $\mathbf{E}(s, t)$ را بیابید. (تصادفاً به

هیچ وجه این شیوه‌ای نیست که واقعاً میدانهای الکتریکی در کابل‌های هم محور، بنا به دلایلی که در پانوشته ۱ ص ۳۹۲، گفتیم، رفتار می‌کنند.^۱

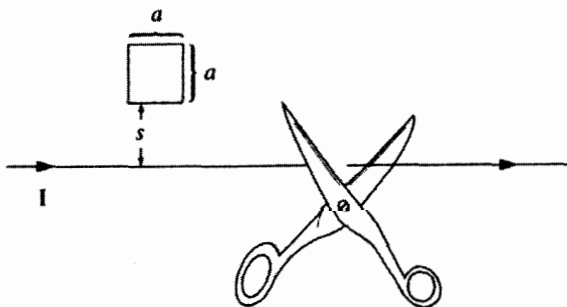
مسئله ۱۷-۷ به دور یک سیم‌لوله طویل به شعاع a و دارای n دور در واحد طول حلقه سیمی به مقاومت R مطابق شکل ۲۷-۷ قرار گرفته است.

(الف) اگر جریان گذرنده از سیم‌لوله با آهنگ ثابت $(dI/dt = k)$ افزایش یابد چه جریانی از حلقه می‌گذرد و در چه جهتی (چپ یا راست) از مقاومت می‌گذرد؟
 (ب) اگر جریان I سیم‌لوله ثابت باشد اما سیم‌لوله را از داخل حلقه بیرون آورد و در جهت مخالف دوباره داخل حلقه ببریم، شار کل گذرنده از مقاومت چقدر است؟



شکل ۲۷-۷

مسئله ۱۸-۷ یک حلقه مربعی شکل به ضلع a و مقاومت R به فاصله s از سیم مستقیم نامتناهی و حامل جریان I قرار دارد (شکل ۲۸-۷). حال شخصی سیم را قطع می‌کند، به طوری که I صفر شود. جریان القایی حاصل در چه جهتی در حلقه مربعی برقرار می‌شود، و بار کل گذرنده از یک نقطه مفروض حلقه در مدتی که این جریان وجود دارد چقدر است؟ اگر استفاده از



شکل ۲۸-۷

۱. برای یک بررسی واقعی‌تر به بخش ۹-۳-۵ یا ۳-۵-۹ یا *J. G. Cherveniak, Am. J. Phys., 54, 946 (1986)* رجوع کنید.

قیچی را نمی‌پسندید، جریان را به تدریج کاهش دهید

$$I(t) = \begin{cases} (1 - \alpha t)I & 0 \leq t \leq 1/\alpha \\ 0 & t > 1/\alpha \end{cases}$$

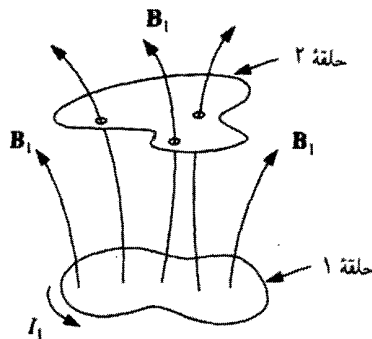
مسئله ۱۹-۷ یک سیم پیچ چنبره‌ای با مقطع مستطیلی شکل دارای شعاع داخلی a و شعاع بیرونی $a + w$ و ارتفاع h است. این چنبره از N دور سیم فشرده پیچیده شده تشکیل شده است و جریان با آهنگ ثابت $(dI/dt = k)$ افزایش می‌یابد. اگر w و h هر دو خیلی کوچکتر از a باشند، میدان الکتریکی را در یک نقطه z بالای مرکز چنبره بیابید. [راهنمایی: به تشابه بین میدانهای فاراده و میدانهای مغناطوستاتیک و به مثال ۵-۶ توجه کنید.] □

۳-۲-۷ القا

دو حلقه سیم در حال سکون مطابق شکل ۲۹-۷ را در نظر بگیرید. هرگاه جریان ثابت I_1 از حلقه ۱ بگذرد، میدان مغناطیسی B_1 را تولید می‌کند. بعضی از خطوط این میدان از داخل حلقه ۲ می‌گذرند؛ فرض کنید Φ_2 شار ناشی از B_1 باشد که از حلقه ۲ می‌گذرد. B_1 را می‌توان در واقع از قانون بیوساوار حساب کرد

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

این معادله نشان می‌دهد که میدان مغناطیسی B_1 با I_1 متناسب است. بنابراین شار گذرنده از ۲



شکل ۲۹-۷

نیز با I_1 متناسب بوده و چون این شار برابر است با

$$\Phi_r = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a}_r$$

بنابراین داریم

$$\Phi_r = M_{r1} I_1 \quad (21-7)$$

M_{r1} را که ثابت تناسب است القای متقابل دو حلقه می‌نامند.

صورت دیگری از فرمول القای متقابل وجود دارد که می‌توان آن را با نوشتن شار برحسب پتانسیل برداری و استفاده از قضیه استوکس به دست آورد

$$\Phi_r = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a}_r = \int (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{a}_r = \oint \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_r$$

اما بنابر معادله (۶۳-۵) داریم

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}_1}{r}$$

و بنابراین

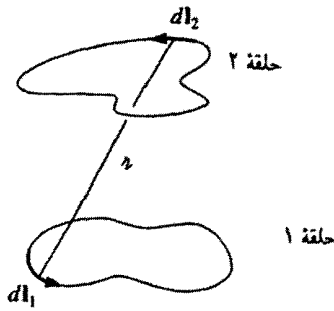
$$\Phi_r = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{d\mathbf{l}_1}{r} \right) \cdot d\mathbf{l}_r$$

بدیهی است که

$$M_{r1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_r}{r} \quad (22-7)$$

این را فرمول نویمان می‌نامند؛ در آن یک انتگرال خطی دوگانه وجود دارد که یکی حول حلقه ۱ و دیگری حول حلقه ۲ گرفته می‌شود (شکل ۷-۳۰). این فرمول ساده نیست اما دو چیز مهم را برای القای متقابل نمایش می‌دهد:

۱. M_{r1} صرفاً یک کمیت هندسی است که به شکل و اندازه و محل حلقه‌ها بستگی دارد.



شکل ۷-۳۰

۲. مقدار انتگرال قرار گرفته در معادله (۷-۲۲) با جابه‌جایی حلقه‌های ۱ و ۲ با یکدیگر تغییری نمی‌کند؛ در نتیجه داریم

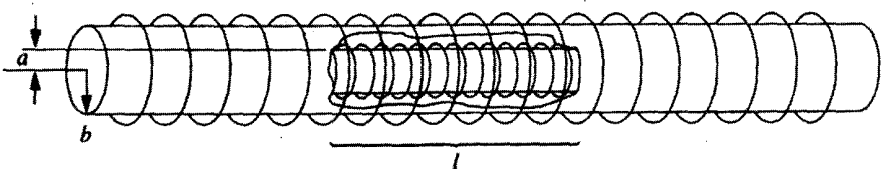
$$M_{21} = M_{12} \quad (۷-۲۳)$$

این نتیجه‌گیری جالب است: صرف‌نظر از شکل و موقعیت حلقه، شار گذرنده از ۲ ناشی از عبور یک جریان I در حلقه ۱ با شار گذرنده از ۱ وقتی همان جریان I را از ۲ بگذرانیم مساوی‌اند. نیز می‌توانیم شاخصها را حذف کنیم و هر دو را با M نمایش دهیم.

مثال ۷-۱۰

یک سیم‌لوله کوتاه (به طول l و شعاع a با n_1 دور سیم‌پیچ در واحد طول) روی محور یک سیم‌لوله بسیار طویل (به شعاع b و دور سیم‌پیچ در واحد طول) مطابق شکل ۷-۳۱ قرار دارد. جریان I از سیم‌لوله کوتاه می‌گذرد. شار گذرنده از سیم‌لوله طویل چقدر است؟

حل: چون سیم‌لوله داخلی کوتاه است میدان آن پیچیده است؛ افزون بر این از حلقه‌های مختلف سیم‌لوله طویل شارهای متفاوتی می‌گذرد. بنابراین محاسبه شار خواسته‌شده با این روش کار بسیار دشواری است. با این همه با مختصر توجه به تساوی شارها که در بالا گفتیم حل مسئله بسیار ساده



شکل ۷-۳۱

می‌شود. بنابراین مسئله را برعکس مطرح می‌کنیم. جریان I از سیمولوه طولی (بیرونی) می‌گذرد. شار گذرنده از سیمولوه داخلی چقدر است؟ می‌دانیم میدان سیمولوه طولی ثابت و برابر است با

$$B = \mu_0 n_1 I$$

[معادله (۵-۵۷)]، بنابراین شار گذرنده از یک تک حلقه سیمولوه داخلی برابر است با

$$B \pi a^2 = \mu_0 n_1 I \pi a^2$$

و چون $n_1 l$ دور سیمپیچ در سیمولوه داخلی وجود دارد، شار کل گذرنده از آن می‌شود

$$\Phi = \mu_0 \pi a^2 n_1 n_2 l I$$

بنابه استدلالی که در بالا گفتیم این شار همان چیزی است که در مسئله از ما خواسته بودند. از این گذشته القای متقابل هم برای این دو می‌شود

$$M = \mu_0 \pi a^2 n_1 n_2 l$$

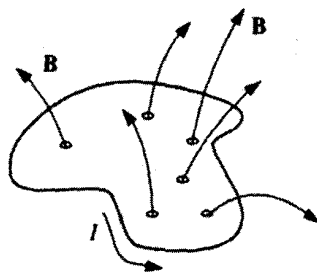
حال فرض کنید جریان I گذرنده از حلقه ۱ تغییر کند. شار گذرنده از حلقه ۲ نیز متغیر می‌شود و طبق قانون فاراده این شار متغیر یک emf در حلقه ۲ به وجود می‌آورد

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad (۲۴-۷)$$

[در به دست آوردن معادله (۷-۲۱) بر اساس قانون بیوساوار، چنین فرض کردیم که تغییرات جریان به اندازه کافی آهسته بود که بتوان پیکربندی را شبه ایستا گرفت.] چه چیز جالبی: هرگاه جریان حلقه ۱ تغییر کند، یک جریان القایی از حلقه ۲ می‌گذرد — حتی اگر سیمی هم این دو را به هم وصل نکرده باشد!

با اندکی تفکر درمی‌یابیم که یک جریان متغیر نه تنها یک emf در حلقه‌های مجاور خود القا می‌کند بلکه یک emf در خودش القا می‌کند (شکل ۷-۳۲). همانند سابق، میدان و بنابراین شار با جریان متناسب است، یعنی

$$\Phi = LI \quad (۲۵-۷)$$



شکل ۷-۳۲

ثابت تناسب L را خودالقایی (یا به طور خلاصه القا) حلقه می نامند. همانند M ، این ضریب هم به وضعیت هندسی (اندازه و شکل) حلقه بستگی دارد. با تغییر جریان حلقه، emf القایی برابر است با

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad (۲۶-۷)$$

یکای L در SI هانری است؛ یک هانری معادل است با یک ولت ثانیه بر آمپر.

مثال ۷-۱۱

خودالقایی یک چنبره با مقطع مستطیلی (با شعاع داخلی a ، بیرونی b ، ارتفاع h) که جمعاً N دور سیم پیچ دارد را حساب کنید.

حل: میدان مغناطیسی داخل چنبره برابر است با [معادله ۵-۵۸]

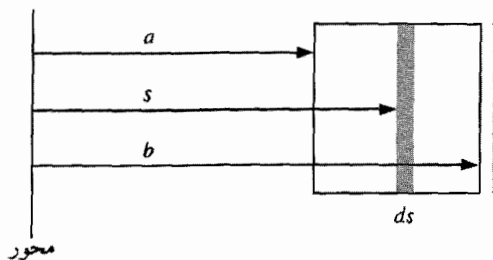
$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi s}$$

شار گذرنده از حلقه (شکل ۷-۳۳) برابر است با

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h \int_a^b \frac{1}{s} ds = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

شار کل، N برابر این مقدار است، بنابراین خودالقایی [معادله ۷-۲۵] برابر است با

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (۲۷-۷)$$



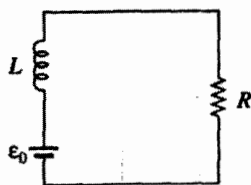
شکل ۳۳-۷

القا (مانند ظرفیت) کمیتی ذاتاً مثبت است. قانون لنز با علامت منهای خود در معادله (۷-۲۶) نشان می‌دهد که emf در جهتی است که با هر گونه تغییر جریان مخالفت می‌کند. به این دلیل است که نیروی محرکه حاصل را emf معکوس می‌نامند. پس آن‌گاه که بکشید جریان سیم را تغییر دهید شما باید با این emf معکوس مقابله کنید. بنابراین القا هم به‌گونه‌ای همان رفتاری را در مدارهای الکتریکی دارد که جرم در دستگاههای مکانیکی دارد: هر چه قدر L بزرگتر باشد تغییر جریان دشوارتر است، همان‌گونه که هر اندازه جرم جسم بیشتر باشد تغییر سرعتش دشوارتر است.

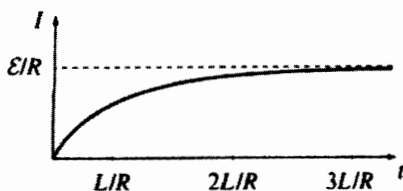
مثال ۱۲-۷

فرض کنید وقتی از حلقه‌ای جریان I می‌گذرد ناگهان شخصی سیم را قطع کند. جریان باید فوراً به صفر برسد. هر چند هم که I کوچک باشد dI/dt بزرگ است. به این دلیل است که در بعضی مواقع که اطویا دستگاهی برقی را از برق جدا می‌کنید جرقه‌ای مشاهده می‌شود - القای الکترومغناطیسی می‌کوشد تا از قطع جریان جلوگیری کند.

وقتی برعکس اطوی مثال بالا را به برق وصل می‌کنید خاصیت القا از افزایش ناگهانی جریان ممانعت می‌کند و نمی‌گذارد فوراً جریان از صفر به I برسد. فرض کنید یک باتری (با emf ثابت \mathcal{E}_0) به مداری دارای مقاومت R و القای L (شکل ۷-۳۴) وصل شود. چه جریانی از مدار می‌گذرد؟



شکل ۳۴-۷



شکل ۳۵-۷

حل: emf کل مدار از باتری و نیز خودالقایی مدار ناشی می‌شود. طبق قانون اهم^۱

$$\mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt} = IR$$

این یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول نسبت به زمان برای I است. جواب عمومی که به سادگی می‌توان به آن رسید عبارت است از

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + k e^{-(R/L)t}$$

که ثابتی k ثابتی است که با اعمال شرایط مرزی مسئله معلوم می‌شود. در لحظه $t = 0$ که مدار را وصل می‌کنیم $I(0) = 0$ است، بنابراین مقدار k به سادگی می‌شود $-\mathcal{E}_0/R$ ، و

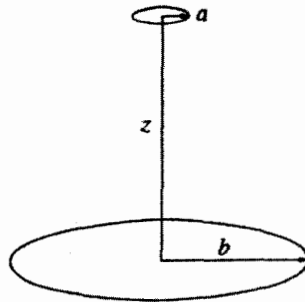
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left[1 - e^{-(R/L)t} \right] \quad (28-7)$$

رسم این تابع در شکل ۳۵-۷ نشان داده شده است. اگر مدار خودالقایی نمی‌داشت جریان فوراً به \mathcal{E}_0/R می‌رسید. در عمل، هر مدار مقداری خودالقایی دارد و بنابراین جریان مدار به صورت مجانبی به مقدار \mathcal{E}_0/R می‌رسد. $\tau \equiv L/R$ را ثابت زمانی می‌نامند؛ این ثابت مدت لازم را برای رسیدن جریان به کسر قابل ملاحظه‌ای (حدوداً $2/3$) مقدار نهایی خود مشخص می‌کند. ■

مسئله ۲۰-۷ حلقه سیمی کوچک (به شعاع a) به فاصله z بالای مرکز یک حلقه بزرگ (به شعاع b) مطابق شکل ۳۶-۷ قرار دارد. صفحات حلقه‌ها با یکدیگر موازیند و هر دو بر محور مشترک عمود. (الف) فرض کنید جریان I از حلقه بزرگ بگذرد. شار گذرنده از حلقه کوچک را پیدا کنید. (به علت کوچک بودن حلقه دوم می‌توانید میدان حلقه بزرگ در محل حلقه کوچک را ثابت بگیرید).

۱. توجه کنید که $-L(dI/dt)$ به سمت چپ معادله می‌رود — این مقدار بخشی از emf است که (با \mathcal{E}_0) ولتاژ را در طول مقاومت [معادله (۱۰-۷)] برقرار می‌کند.

- (ب) حال فرض کنید جریان I از حلقه کوچک بگذرد. شار گذرنده از حلقه بزرگ را حساب کنید. (به دلیل زیاد کوچک بودن حلقه کوچک می‌توانید آن را یک دوقطبی مغناطیسی در نظر بگیرید).
- (ج) القای متقابل را حساب کنید و نشان دهید که $M_{۱۲} = M_{۲۱}$.

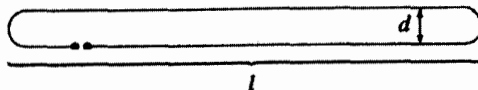


شکل ۳۶-۷

مسئله ۲۱-۷ یک حلقه مربعی به ضلع a بین دو سیم طویل که به فاصله $3a$ از یکدیگر واقع‌اند و هم‌صفحه‌اند قرار دارد. (در حقیقت، سیمهای بلند اضلاع حلقه‌های مستطیلی بزرگ هستند، اما دو انتهای کوتاه آن‌قدر در فاصله دور قرار دارند که می‌توان از آنها صرف‌نظر کرد.) یک جریان ساعتگرد I از حلقه مربعی می‌گذرد و به تدریج بر مقدار آن افزوده می‌شود، یعنی: $dI/dt = k$. مطلوب است emf القایی در حلقه بزرگ. جهت جریان القایی کدام است؟

مسئله ۲۲-۷ خودالقایی واحد طول یک سیمولوله طویل به شعاع R را که دارای n دور سیم در واحد طول است حساب کنید.

مسئله ۲۳-۷ سعی کنید خودالقایی حلقه‌ای به شکل "سنجاق سر" را مطابق شکل ۳۷-۷ حساب کنید. از تأثیر کناره‌ها به دلیل عبور عمده شار از قسمتهای مستقیم طویل می‌توانید صرف‌نظر کنید. برای دستیابی به جوابی مشخص فرض کنید سیم، شعاع اندک ϵ دارد و از شار عبوری خود سیم هم صرف‌نظر کنید.



شکل ۳۷-۷

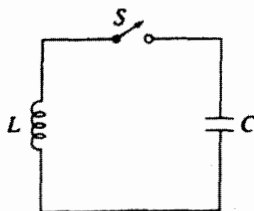
مسئله ۲۴-۷ یک جریان متناوب $I_0 \cos(\omega t)$ (با دامنه A ، ω ، بسامد 60 هرتز) از سیم

مستقیم می‌گذرد که دور محور یک سیم‌پیچ چنبره‌ای با مقطع مستطیلی (به شعاع داخلی ۱ cm، خارجی ۲ cm، و ارتفاع ۱ cm و دارای ۱۰۰۰ دور) قرار دارد. سیم‌پیچ به یک مقاومت $500\ \Omega$ وصل است.

(الف) با در نظر گرفتن تقریب شبه‌ایستا، emf القایی در چنبره چقدر است؟ جریان $I_T(t)$ در مقاومت را پیدا کنید.

(ب) emf معکوس سیم‌پیچ ناشی از جریان $I_T(t)$ را محاسبه کنید. نسبت دامنه این emf معکوس به دامنه emf "مستقیم" در (الف) چقدر است؟

مسئله ۲۵-۷ خازن C را با اختلاف پتانسیل V شارژ کرده و به القاگر L مطابق شکل ۳۸-۷ وصل کرده‌ایم. در لحظه $t = 0$ کلید را وصل می‌کنیم. جریان گذرنده از مدار را به صورت تابعی از زمان به دست آورید. با افزودن یک مقاومت متوالی R با C و L چه تغییری در جواب حاصل می‌شود؟ □



شکل ۳۸-۷

۴-۲-۷ انرژی در میدانهای مغناطیسی

برای برقراری جریان در یک مدار، به مقدار معینی انرژی نیاز است. منظور ما از این انرژی گرمای تلف شده در مقاومتهای مدار نیست که بسته به مدت زمان عبور جریان ممکن است کم یا زیاد باشد. هدف ما در این بحث کاری است که باید در مقابله با emf معکوس برای عبور جریان انجام گیرد. این کار مقدار مشخصی دارد و قابل بازیافت هم هست: با قطع جریان دوباره آن را دریافت می‌کنیم. در واقع نوعی انرژی نهان مدار است؛ چنان‌که به‌زودی درمی‌یابیم این انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی است.

کار انجام شده روی واحد بار علیه emf معکوس در یک دور گردش به دور مدار برابر است با \mathcal{E} - (علامت منفی در اینجا به معنی آن است که این کار توسط شما در مقابله با emf صورت گرفته است و نه کاری که emf انجام داده است). مقدار باری که در واحد زمان از سیم می‌گذرد

همان I است. بنابراین کار کلی انجام شده در واحد زمان برابر است با

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E}I = LI \frac{dI}{dt}$$

اگر جریان را از صفر تا مقدار I نهایی آن در نظر بگیریم کار انجام شده (انتگرال آخرین معادله نسبت به زمان) برابر است با

$$\boxed{W = \frac{1}{2} LI^2} \quad (29-7)$$

این انرژی به مدت زمان رسیدن به جریان I بستگی ندارد و فقط به شکل هندسی حلقه (یعنی مقدار L) و مقدار نهایی I بستگی دارد.

راه زیباتری هم برای نوشتن W وجود دارد که امتیاز آن تعمیم جریان طولی به جریانهای سطحی و حجمی است. یادتان باشد که شار Φ گذرنده از حلقه برابر LI است [معادله (25-7)]. از طرف دیگر

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_P \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

که در آن P پیرامون حلقه و S هر سطح محصورشده توسط P است. پس

$$LI = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

و بنابراین

$$W = \frac{1}{2} I \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

با بردن I به زیر انتگرال داریم

$$W = \frac{1}{2} \oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) dI \quad (30-7)$$

امکان تعمیم این صورت جدید به جریانهای حجمی هم بدیهی است:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d\tau \quad (31-7)$$

حتی کار بهتری هم می‌توانیم انجام دهیم و آن نوشتن W صرفاً برحسب میدان مغناطیسی است. بنابه قانون آمپر $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ ، حال با حذف \mathbf{J} داریم

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) d\tau \quad (۳۲-۷)$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء می‌توانیم مشتق را از \mathbf{B} به \mathbf{A} سوق دهیم، زیرا بنابه قاعده ضرب برداری ۶ داریم

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

پس

$$\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2\mu_0} \left[\int B^2 d\tau - \int \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) d\tau \right] \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \left[\int_V B^2 d\tau - \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} \right] \end{aligned} \quad (۳۳-۷)$$

که در آن S سطحی است که V را در بر گرفته است.

می‌بینیم که انتگرال معادله (۳۱-۷) را باید روی کل حجم اشغال‌شده توسط جریان بگیریم. اما این کار را برای هر ناحیهٔ بزرگتر از این هم می‌توان انجام داد، زیرا \mathbf{J} در خارج از آن صفر است. در معادله (۳۳-۷) می‌بینیم که هر قدر ناحیه بزرگتری را در نظر بگیریم سهم B^2 در انتگرال‌گیری بیشتر و سهم انتگرال سطحی کمتر می‌شود (این کاملاً منطقی است: زیرا هر چه سطح را از جریان دورتر بگیریم هم \mathbf{A} و هم \mathbf{B} کوچکتر می‌شوند). به‌ویژه هر گاه انتگرال‌گیری روی کل فضا صورت گیرد انتگرال سطحی صفر می‌شود و نتیجه به‌صورت زیر در می‌آید

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{تمام فضا}} B^2 d\tau \quad (۳۴-۷)$$

با توجه به این نتیجه می‌گوییم که انرژی "در میدان مغناطیسی ذخیره شده است" و مقدار این ذخیره در واحد حجم برابر است با $(B^2/2\mu_0)$. این راه خوبی برای ذخیره انرژی است گرچه با توجه به معادله (۳۱-۷) ممکن است کسی ترجیح دهد انرژی را در توزیع جریان و به میزان $(A \cdot J)/2$ در واحد حجم ذخیره شده بدانند. به هر صورت نکته مهم انرژی کل W است و نگران آن نیستیم که این انرژی در چه "محلّی" جمع شده است.

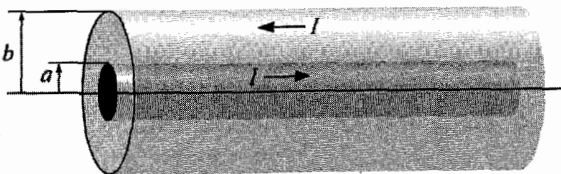
این هم ممکن است برایتان تعجب‌آور باشد که گرچه میدانهای مغناطیسی خودشان کار انجام نمی‌دهند اما، برای ایجاد آنها به انجام کار نیاز داریم. نکته اساسی این است که برای تولید میدان مغناطیسی در جایی که میدان وجود ندارد به یک میدان متغیر نیاز است، و بنابر قانون فاراده میدان متغیر B خود میدان الکتریکی القا می‌کند. بدیهی است که میدان الکتریکی قابلیت انجام کار را دارد. در شروع و خاتمه، میدان E وجود ندارد اما بین این دو وضعیت که B در حال ایجاد شدن است یک میدان الکتریکی E وجود دارد و در مقابله با این میدان است که باید کار انجام گیرد. (حال در می‌یابید که چرا توانستیم در فصل ۵ انرژی ذخیره شده در میدان مغناطوستاتیکی را محاسبه می‌کنیم). با عنایت به این نکته است که شباهت فرمولهای مربوط به انرژی مغناطیسی و انرژی الکتروستاتیک توجه می‌شود

$$W_{\text{الکتروستاتیکی}} = \frac{1}{4} \int (V\rho) d\tau = \frac{\epsilon_0}{4} \int E^2 d\tau \quad (۴۳-۲ \text{ و } ۴۵-۲)$$

$$W_{\text{مغناطیسی}} = \frac{1}{4} \int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau \quad (۳۱-۷ \text{ و } ۳۴-۷)$$

مثال ۱۳-۷

از سیم هم‌محور طویل شکل ۳۹-۷ جریان I می‌گذرد (جریان به استوانه داخلی به شعاع a وارد و از استوانه بیرونی به شعاع b خارج می‌شود). انرژی ذخیره شده در طول l سیم را حساب کنید.



شکل ۳۹-۷

حل: میدان در ناحیه بین دو استوانه بنابه قانون آمپر برابر است با

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

و در خارج از سیم میدان صفر است. بنابراین انرژی واحد حجم سیم برابر است با

$$\frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s} \right)^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2}$$

انرژی ذخیره شده در یک پوسته استوانه‌ای به طول l ، شعاع s و ضخامت ds برابر است با

$$\left(\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2} \right) 2\pi l s ds = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \left(\frac{ds}{s} \right)$$

با انتگرال‌گیری از a تا b به دست می‌آوریم

$$W = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

ضمناً با توجه به معادله حاصل می‌توانیم خودالقایی کابل را هم حساب کنیم. بنابه معادله (۲۹-۷) این انرژی برابر است با $\frac{1}{2} LI^2$. مقایسه این دو معادله نشان می‌دهد که^۱

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

این روش محاسبه خودالقایی، به‌ویژه برای مواردی که جریان محدود به مسیر مشخصی نبوده بلکه روی سطح یا حجمی پخش می‌شود، بسیار مفید است. در این موارد قسمتهای مختلف جریان ایجاد شارهای متفاوتی می‌کنند و به دست آوردن خودالقایی L از فرمولی نظیر ۲۵-۷ بسیار دشوار است.

مسئله ۷-۲۶ انرژی ذخیره شده در قسمتی از یک سیمولوله طویل به طول l (شعاع R ، جریان I و n دور سیم در واحد طول) را بیابید: (الف) با استفاده از معادله (۲۹-۷) L را در مسئله ۷-۲۲ حساب کرده بودیم؛ (ب) با استفاده از معادله (۳۰-۷) (A) را در مثال ۵-۱۲ پیدا کرده بودیم؛

۱. به شباهت با معادله (۲۷-۷) توجه کنید — به تعبیری چنبره مستطیلی به منزله یک کابل هم‌محور کوتاه است که روی پهلوش قرار گرفته است.

(ج) با استفاده از معادله (۷-۳۴)؛ (د) با استفاده از معادله (۷-۳۳) (برای حجم استوانه‌ای که شعاعش از $R < a$ تا $R > b$ است منظور کنید).

مسئله ۷-۲۷ انرژی ذخیره شده در سیم پیچ چنبره‌ای مثال ۷-۱۱ را با استفاده از معادله (۷-۳۴) حساب کنید. از جواب حاصل، معادله (۷-۲۷) را امتحان کنید.

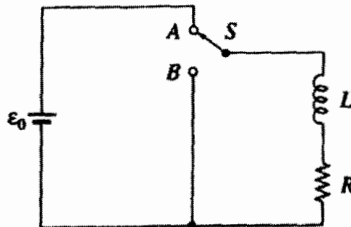
مسئله ۷-۲۸ از مقطع دایره‌ای یک کابل بلند جریانی به طور یکنواخت در یک جهت می‌گذرد و به ابتدای سطح آن که بعد از عایق نازکی قرار دارد برمی‌گردد. خودالقایی واحد طول کابل را حساب کنید.

مسئله ۷-۲۹ فرض کنید مدار شکل ۷-۴۰ برای مدت زمان طولانی وصل است و در لحظه $t = 0$ ناگهان کلید S ، اتصال از باتری را قطع کند و مدار RL وصل شود.

(الف) شدت جریان در لحظه t چه مقدار است؟

(ب) انرژی کل منتقل شده به مقاومت R چقدر است؟

(ج) نشان دهید که انرژی منتقل شده به مقاومت، با انرژی ذخیره شده قبلی در القاگر برابر است.

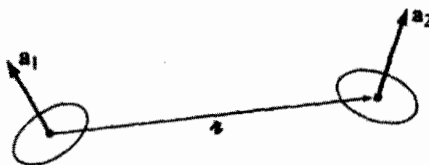


شکل ۷-۴۰

مسئله ۷-۳۰ دو حلقه سیم نازک با مساحت‌های a_1 و a_2 به فاصله x از هم واقع‌اند (شکل ۷-۴۱).

(الف) الفای متقابل آنها را حساب کنید. [راهنمایی: آنها را به صورت دو قطب‌های مغناطیسی

در نظر بگیرید و از معادله (۵-۸۷) استفاده کنید]. آیا فرمول شما با معادله (۷-۲۳) سازگار است؟



شکل ۷-۴۱

(ب) فرض کنید از حلقه ۱ جریان I_1 بگذرد و بخواهیم جریانی به شدت I_2 از حلقه ۲ بگذرانیم. برای برقرار ماندن جریان I_1 در حلقه ۱ چه کاری در مقابله با emf القای متقابل باید انجام گیرد؟ با عنایت به این نتیجه درباره معادله (۳۵-۶) بحث کنید. □

۳-۷ معادلات ماکسول

۱-۳-۷ الکتروپدینامیک قبل از ماکسول

تا اینجا درباره دیورژانس و تاو میدانهای الکتریکی و مغناطیسی به معادلات زیر دست یافته‌ایم:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (1) \quad (\text{قانون گاوس})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2) \quad (\text{بی‌نام})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3) \quad (\text{قانون فاراده})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (4) \quad (\text{قانون آمپر})$$

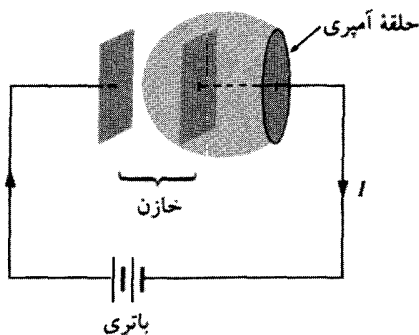
این معادلات جایگاه نظریه الکترومغناطیس را در صد سال پیش که ماکسول کار خود را تازه آغاز می‌کرد نشان می‌دهند. البته در آن زمان، این معادلات به صورت فشرده بالا نوشته نمی‌شد ولی همین مفاهیم از آنها برداشت می‌شد. در این فرمولها نوعی ناسازگاری وجود دارد. این ناسازگاری مربوط است به قاعده قدیمی که دیورژانس تاو همواره صفر است. اگر برای فرمول (۳) دیورژانس اعمال کنید نتیجه می‌شود

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B})$$

معادله سمت چپ صفر است زیرا دیورژانس تاو صفر است و معادله سمت راست هم بنا به معادله (۲) صفر است. اما وقتی همین عمل را برای معادله (۴) تکرار کنید به دردمر می‌افتید

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{J}) \quad (35-7)$$

سمت چپ همچنانکه قبلاً گفتیم باید صفر باشد، اما سمت راست در حالت کلی صفر نیست. دیورژانس \mathbf{J} برای جریان پایا صفر است، اما وقتی از دایره مغناطوستاتیک پا فراتر می‌نهمیم دیگر قانون آمپر نمی‌تواند درست باشد.



شکل ۷-۴۲

راه دیگری هم برای اثبات اینکه قانون آمپر برای جریانهای غیرپایا صادق نیست وجود دارد. فرایند شارژ یک خازن (شکل ۷-۴۲) را در نظر بگیرید. قانون آمپر به صورت انتگرالی چنین است

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{محصول}}$$

حال بیاید قانون آمپر را برای حلقه آمبری نشان داده در شکل به کار ببریم. محصول I را چگونه باید تعیین کرد؟ خواهید گفت: این، کل جریان گذرنده از داخل حلقه است و یا به طور دقیقتر، جریانی است که از سطحی که این حلقه مرز آن را تشکیل می‌دهد می‌گذرد. در این مورد، ساده‌ترین سطح آن است که در صفحه حلقه قرار می‌گیرد - سیم از این سطح می‌گذرد و بنابراین $I_{\text{محصول}} = I$. بسیار خوب، اما اگر به جای این سطح، سطحی شبیه بالن در شکل ۷-۴۲ انتخاب کنیم، محصول I کدام است؟ می‌بینیم که چون جریانی از داخل این سطح نمی‌گذرد $I_{\text{محصول}} = 0$ است. در مغناطوستاتیک هیچ‌گاه ما با چنین مسئله‌ای مواجه نبودیم، زیرا تنها ایراد از تجمع موضعی بارها ناشی می‌شد (که در این مورد روی صفحات خازن است). اما برای جریانهای غیرپایا (مانند این یکی) جمله "جریان درون خط بسته (حلقه)" مناسب نیست. زیرا همه چیز بستگی به این دارد که چه سطحی را در نظر بگیریم.

بدیهی است نباید انتظار داشته باشیم قانون آمپر در خارج از مغناطوستاتیک صادق باشد بالاخره آن را از قانون بیوساوار به دست آورده‌ایم. با این همه در زمان ماکسول هیچ دلیل تجربی برای تردید در اینکه قانون آمپر اعتبار وسیعتری دارد وجود نداشت. اشکال یک اشکال نظری بود و آنچه ماکسول برای تعمیم قانون آمپر انجام داد نیز کاری نظری بود.

۲-۳-۷ قانون آمپر از دیدگاه ماکسول

مشکل ما دقیقاً این بود که سمت راست معادله (۳۵-۷) باید صفر می‌بود که نبود. با اعمال معادله پیوستگی (۲۹-۵) و قانون گاوس، جمله مشکل‌ساز را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

تصور می‌کنیم که اگر می‌خواستیم در قانون آمپر، مقدار $(\partial \mathbf{E} / \partial t)$ ϵ_0 را به \mathbf{J} بیفزاییم، دیورژانس اضافی حذف می‌شد:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} \quad (۳۶-۷)$$

(خود ماکسول دلایل دیگری برای افزودن این مقدار به قانون آمپر داشت. از دیدگاه وی حفظ معادله پیوستگی، به جای آنکه یک انگیزه اولیه باشد، دستاورد خوشحال‌کننده‌ای بود. اما امروزه ما این استدلال را فراتر از اجبار ماکسول که مبتنی بر الگوی بی‌اعتبار شده‌ی اثیر بود اجباری می‌شناسیم).^۱

چنین جرح و تعدیلی تا جایی که به مغناطوستاتیک مربوط می‌شود چیزی را تغییر نمی‌دهد: وقتی \mathbf{E} ثابت است داریم $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ ، و این همان گفته‌ی آمپر است. در واقع جمله اضافه شده توسط ماکسول را نمی‌توانیم با آزمایشهای معمولی الکترومغناطیس توضیح دهیم؛ فاراده و دیگران هیچ‌گاه در آزمایشگاه آن را کشف نکردند. با وجود این، تصحیح فاراده نقش بسیار اساسی در انتشار امواج الکترومغناطیسی دارد و این را در فصل بعد نشان می‌دهیم.

عبارت افزوده شده توسط ماکسول نه تنها اشکال قانون آمپر را از بین می‌برد بلکه مفهوم زیبایی نیز می‌آفریند: همچنان‌که یک میدان مغناطیسی متغیر، یک میدان الکتریکی القا می‌کند (قانون فاراده)، همان‌طور هم

یک میدان الکتریکی متغیر، یک میدان مغناطیسی القا می‌کند.

البته تأیید حقیقی نظریه ماکسول در سال ۱۸۸۸ با آزمایشهای هرتز درباره امواج الکترومغناطیسی صورت گرفت.

۱. برای اطلاع از سابقه این موضوع به مرجع A. M. Bork, *Am. J. Phys.* **31**, 854 (1963) مراجعه کنید.

ماکسول جمله اضافی خود به فرمول آمپر را جریان جابه‌جایی نام نهاد:

$$\mathbf{J}_d \equiv \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (۳۷-۷)$$

این نام گمراه‌کننده است، زیرا $(\partial \mathbf{E} / \partial t)$ با جریان الکتریکی، جز اینکه در فرمول آمپر مقداری به \mathbf{J} می‌افزاید، ارتباطی ندارد. حال ببینیم که آیا این جریان جابه‌جایی چگونه پارادوکس خازن پرشونده (شکل ۷-۴۲) را از بین می‌برد. اگر صفحات خازن خیلی به یکدیگر نزدیک باشند (ما چنین فرضی نکرده بودیم اما با قبول آن محاسبات ساده‌تر می‌شود) میدان این صفحات برابر است با

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A}$$

که در آن Q بار روی صفحه و A مساحت آن است. بنابراین برای بین صفحات داریم

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 A} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0 A} I$$

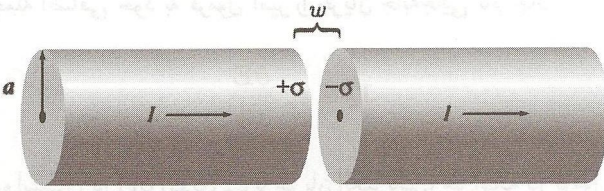
حال معادله (۷-۳۶) را به صورت انتگرالی زیر می‌نویسیم

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{محور}} + \mu_0 \epsilon_0 \int \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} \quad (۳۸-۷)$$

اگر سطح را تخت انتخاب کنیم، آن‌گاه $E = 0$ و $I_{\text{محور}} = I$ می‌شود. از طرفی اگر سطح را بالنی شکل در نظر بگیریم $I_{\text{محور}} = 0$ ، اما $I / \epsilon_0 = \int (\partial \mathbf{E} / \partial t) \cdot d\mathbf{a}$. بنابراین برای هر دو سطح یک جواب می‌گیریم، گرچه در مورد اول جریان واقعی و در مورد دوم جریان جابه‌جایی را به‌کار برده‌ایم.

مسئله ۷-۳۱ از سیم کلفتی به شعاع a جریان ثابت I با توزیع یکنواخت در مقطع آن، می‌گذرد. با ایجاد یک گاف (شکاف) باریک به عرض $w \ll a$ در سیم، یک خازن با صفحات موازی مطابق شکل ۷-۴۳ تشکیل می‌شود. میدان مغناطیسی را در این گاف در فاصله $s < a$ از محور بیابید.

مسئله ۷-۳۲ مسئله بالا یک الگوی ساختگی برای خازن پر شونده بود و برای اجتناب از مشکلات وابسته به جریانهای نفوذی روی سطح صفحات طراحی شده بود. برای داشتن یک الگوی واقع‌بینانه‌تر، سیمهای نازکی را که به مراکز صفحات وصل شده‌اند [شکل ۷-۴۴ (الف)] را در نظر بگیرید. باز هم جریان I را ثابت، شعاع خازن را a و فاصله بین صفحات را $w \ll a$



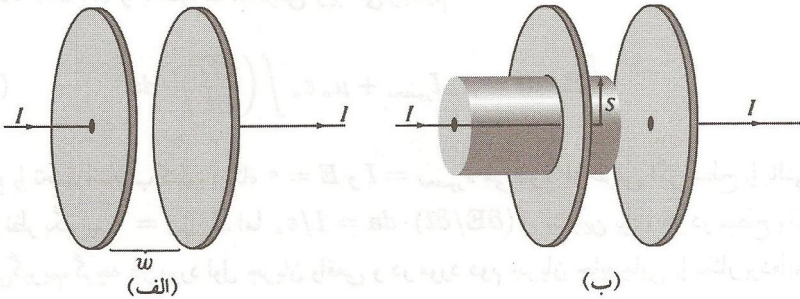
شکل ۷-۴۳

بگیرید. فرض کنید جریان از روی صفحات طوری به بیرون نشت کند که بار سطحی در هر زمان معین یکنواخت و در زمان $t = 0$ برابر صفر باشد.

(الف) میدان الکتریکی بین صفحات را به صورت تابعی از t بیابید.

(ب) جریان جابه‌جایی گذرنده از دایره‌ای به شعاع s در صفحه‌ای واقع در وسط صفحات را پیدا کنید. با استفاده از این دایره به عنوان ”حلقه آمپری“ و سطح تختی که آن حلقه را در بر می‌گیرد، میدان مغناطیسی را در فاصله s از محور پیدا کنید.

(ج) قسمت (ب) را تکرار کنید، اما از سطح استوانه‌ای شکل ۷-۴۴(ب) که از میان صفحه به سمت چپ صفحه امتداد داشته و به خارج خازن خاتمه می‌یابد استفاده کنید. توجه کنید که جریان جابه‌جایی گذرنده از این سطح صفر است و محصور I از دو قسمت تشکیل شده است.^۱



شکل ۷-۴۴

مسئله ۷-۳۳ به مسئله ۷-۱۶ برگردید که جواب درست آن به صورت زیر بود

$$\mathbf{E}(s, t) = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi} \sin(\omega t) \ln\left(\frac{a}{s}\right) \hat{\mathbf{z}}$$

۱. این مسئله یک پرسش فلسفی‌گونه جالبی را مطرح می‌کند: اگر شما \mathbf{B} را در آزمایشگاه اندازه بگیرید آیا آثار جریان جابه‌جایی را (آن‌گونه که در (ب) داشتیم) آشکار کرده‌اید، یا صرفاً آثار جریانهای معمولی (آن‌گونه که (ج) ایجاب می‌کند)

را تأیید می‌کنید. رجوع کنید به D. F. Bartlett, *Am. J. Phys.* 58, 1168 (1990)

(الف) چگالی جریان جابه‌جایی، \mathbf{J}_d ، را حساب کنید.
 (ب) از آن انتگرال بگیرید تا جریان جابه‌جایی کل پیدا شود،

$$I_d = \int \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{a}$$

(ج) I و I_d را با هم مقایسه کنید (نسبت آنها چقدر است؟). هرگاه قطر استوانه بیرونی فرضاً ۲ میلی‌متر باشد، بسامد چه مقدار باید باشد تا $I_d = 0.1 I$ شود؟ [طرح این مسئله برای آن بود که به شما نشان دهیم چرا فاراده جریان جابه‌جایی را هرگز کشف نکرد، و چرا معمولاً، جز برای بسامدهای بسیار بالا، صرف‌نظر کردن از این جریان ایرادی ندارد].
 □

۷-۳-۳ معادلات ماکسول

در بخش قبل درباره معادلات ماکسول بحث کردیم. این معادلات به صورت نهایی خود عبارت‌اند از:

$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$	(۱) قانون گاوس)	
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	(۲) بی‌نام)	
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	(۳) قانون فاراده)	(۷-۳۹)
$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	(۴) قانون آمپر با تصحیح ماکسول)	

معادلات بالا همراه با قانون نیروی لورنتس

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (۷-۴۰)$$

تمام محتویات نظری الکترودینامیک کلاسیک را خلاصه می‌کنند^۱ (البته بعضی خواص ویژه ماده که در فصلهای ۴ و ۶ گفتیم نیز به آنها اضافه می‌شود). حتی معادله پیوستگی

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (۷-۴۱)$$

۱. همانند تمام معادلات دیفرانسیل، در معادلات ماکسول هم باید شرایط مرزی مناسب را در نظر گرفت. چون، این شرایط معمولاً از محتویات مطلب مشهودند (مثلاً \mathbf{E} و \mathbf{B} در فواصل دور از توزیع بار موضعی به صفر می‌گریند)، نقش اساسی آنها به سهولت فراموش می‌شود.

را، که خود تعبیر ریاضی پایستگی بار است، می‌توان از معادلات ماکسول با اعمال دیورژانس به معادله شماره (۴) نتیجه گرفت.

ما در نوشتن معادلات ماکسول راه سنتی تأکید بر مشخص کردن دیورژانس و تاور \mathbf{E} و \mathbf{B} را انتخاب کردیم. در این شیوه اهمیت اینکه میدانهای الکتریکی را می‌توان هم توسط بارها (ρ) و هم با تغییر میدان مغناطیسی ($\partial\mathbf{B}/\partial t$)، و میدانهای مغناطیسی را هم توسط جریانها (\mathbf{J}) و هم توسط میدانهای الکتریکی متغیر ($\partial\mathbf{E}/\partial t$) نوشت گوشزد می‌شود. در حقیقت، این تا حدی گمراه‌کننده است، زیرا وقتی به دقت توجه می‌کنیم می‌بینیم $\partial\mathbf{B}/\partial t$ و $\partial\mathbf{E}/\partial t$ خود ناشی از بارها و جریانها هستند. فکر می‌کنم به لحاظ منطقی بهتر است که بنویسیم

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho & (1) \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 & (3) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & (2) \quad \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J} & (4) \end{array} \right. \quad (42-7)$$

که در آنها میدانها (\mathbf{E} و \mathbf{B}) در سمت چپ و چشمه‌ها (ρ و \mathbf{J}) در سمت راست هستند. این نمادگذاری بر این تأکید دارد که تمام میدانهای الکترومغناطیسی در نهایت به بارها و جریانها مربوط می‌شوند. معادلات ماکسول به شما می‌گویند که چگونه بارها میدانها را بوجود می‌آورند؛ برعکس، قانون نیرو چگونگی تأثیر میدانها بر بارها را بازگو می‌کنند.

مسئله ۳۴-۷ فرض کنید

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \theta(vt - r) \hat{\mathbf{r}}; \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

[تابع θ در مسئله ۱-۴۵(ب) تعریف شده است]. نشان دهید این میدانها در تمام معادلات ماکسول صدق می‌کنند و ρ و \mathbf{J} را تعیین کنید. شرایط فیزیکی منجر به این میدانها را توصیف کنید. □

۴-۳-۷ بار مغناطیسی

در معادلات ماکسول تقارن دلبذیری وجود دارد؛ در فضای آزاد که ρ و \mathbf{J} صفر هستند این تقارن نمایانتر است

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

اگر \mathbf{B} را به جای \mathbf{E} و \mathbf{E} را به جای \mathbf{B} بگذارید، اولین جفت معادله‌ها به دومین آنها تبدیل می‌شوند و برعکس. اگر چه این تقارن^۱ بین \mathbf{E} و \mathbf{B} توسط عبارت مربوط به بار در قانون گاوس و عبارت مرتبط با جریان در قانون آمپر از بین می‌رود. شاید به این فکر بیفتید که چرا مقادیر متناظر در $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ و $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ "مفقود" هستند. چه می‌شد اگر داشتیم

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e \quad (1) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \mathbf{J}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m \quad (2) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4) \end{array} \right. \quad (43-7)$$

در این صورت ρ_m نمایانگر چگالی "بار" مغناطیسی و ρ_e نمایانگر چگالی بار الکتریکی می‌شد؛ \mathbf{J}_m هم جریان بار مغناطیسی و \mathbf{J}_e جریان بار الکتریکی می‌بود. هر دو بار پایستار می‌شدند:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t} \quad \text{و} \quad \nabla \cdot \mathbf{J}_e = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t} \quad (44-7)$$

جمله اول از اعمال دیورژانس به (۳) و دیگری با دیورژانس گرفتن از (۴) حاصل شده است. به یک معنا، معادلات ماکسول نیاز به وجود بار مغناطیسی دارند و با استفاده از آن به خوبی تعبیر می‌شوند. با وجود این، با همه تحقیقات هیچ کس چنین بارهایی را نیافته است.^۲ تا آنجایی که ما می‌دانیم، ρ_m در همه جا صفر است و بنابراین \mathbf{J}_m هم صفر است؛ \mathbf{B} با \mathbf{E} وضعیت مشابهی ندارد: برای \mathbf{E} چشمه‌های ساکنی وجود دارند (بارهای الکتریکی) اما برای \mathbf{B} چنین نیست. (بازتاب این تفاوت به این صورت است که بسطهای چندقطبی مغناطیسی جمله یا عبارتی حاوی تک‌قطبی ندارند، و دوقطبیهای مغناطیسی از حلقه‌های جریان تشکیل شده‌اند و نه به صورت "قطبهای" شمال و جنوب مجزا.) ظاهراً خداوند بار مغناطیسی را نیافریده است. (در نظریه کوانتومی الکترودینامیک طرح این مطلب که به نظر نمی‌رسد بار مغناطیسی وجود داشته باشد فراتر از یک امر صرفاً پیرایشی است؛ دیراک نشان داد که وجود بار مغناطیسی می‌تواند توجیه‌کننده کوانتاش بار الکتریکی باشد. مسئله ۸-۱۲ را ببینید.)

۱. درباره μ_0 و ϵ_0 نگران نباشید؛ حضور آنها فقط به این دلیل است که \mathbf{E} و \mathbf{B} در SI یکاهای متفاوتی دارند و به‌عنوان مثال در دستگاه گاوسی ظاهر نمی‌شوند.

۲. برای یک کتابشناسی جامع، به مرجع زیر رجوع کنید

مسئله ۳۵-۷ فرض کنید "قانون کولن" برای بارهای مغناطیسی (q_m) چنین باشد

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_{m1} q_{m2}}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (۴۵-۷)$$

قانون نیرو را برای تک قطب q_m که با سرعت \mathbf{v} از داخل میدانهای الکتریکی و مغناطیسی \mathbf{E} و \mathbf{B} می‌گذرد پیدا کنید.^۱

مسئله ۳۶-۷ فرض کنید یک تک قطبی مغناطیسی q_m از حلقه سیم بدون مقاومت با خودالقایی L بگذرد. چه جریانی در حلقه القا می‌شود؟ [این یکی از روشهایی است که در آزمایشگاه برای تحقیق درباره تک قطبها به کار بردند].^۲

□

۵-۳-۷ معادلات ماکسول در درون ماده

معادلات ماکسول به صورت روابط (۳۹-۷) درست و کامل هستند. با وجود این وقتی بحث موادی پیش می‌آید که دارای قطبش الکتریکی یا مغناطیسی اند راه مناسبتری برای نوشتن این معادلات وجود دارد. دلیل این ادعا آن است که داخل یک ماده قطبیده تجمع بار و جریان "مقید" وجود دارد که کنترل مستقیمی بر آنها نداریم. با توجه به این نکته می‌خواهیم معادلات ماکسول را به گونه‌ای بازنویسی کنیم که در آنها صریحاً به چشمه‌های قابل کنترل یعنی بارهای "آزاد" و جریانهای آزاد اشاره شود. این را می‌دانیم که در شرایط ایستا قطبش \mathbf{P} ، تولید یک چگالی بار مقید

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (۴۶-۷)$$

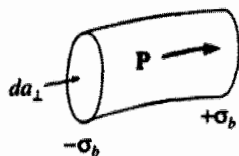
[معادله (۴-۱۲)] را سبب می‌شود. به همین ترتیب یک قطبش مغناطیسی (یا "مغناطیدگی") \mathbf{M} نیز جریان مقید

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} \quad (۴۷-۷)$$

[معادله (۶-۱۳)] را تولید می‌کند. برای حالت غیرایستا یک خاصیت جدید هم وجود دارد: هر بار الکتریکی در قطبش الکتریکی دارای شاری ناشی از بار مقید است (که آن را \mathbf{J}_m می‌نامیم) و این را باید در محاسبه جریان کلی منظور کنیم. فرض کنید قطعه کوچکی از ماده‌ای قطبی شده مانند شکل ۴۵-۷ داشته باشیم. نتیجه این قطبش وجود چگالی بار $\sigma_b = P$ در یک انتها و $-\sigma_b$ در

1. W. Rindler, *Am. J. Phys.* 57, 993 (1989).

2. B. Cabrera, *Phys. Rev. Lett.* 48, 1378 (1982).



شکل ۴۵-۷

انتهای دیگر جسم می شود [معادله (۴-۱۱)]. حال اگر P کمی زیاد شود بر بارهای هر دو طرف هم افزوده می شود و جریان خالص زیر ایجاد می شود

$$dI = \frac{\partial \sigma_b}{\partial t} da_{\perp} = \frac{\partial P}{\partial t} da_{\perp}$$

و بنابراین چگالی جریان برابر است با

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (۴۸-۷)$$

این جریان قطبش هیچ ارتباطی با جریان مقید \mathbf{J}_b ندارد. جریان مقید از مغناطیدگی ماده ناشی می شود و به حرکت مداری و اسپینی الکترونها مربوط است. برعکس \mathbf{J}_p از حرکت خطی بار در تغییر قطبش الکتریکی به وجود می آید. اگر \mathbf{P} به سمت راست و در حال افزایش باشد، آن گاه هر بار مثبت کمی به طرف راست حرکت می کند و هر بار منفی هم به سمت چپ جابه جا می شود؛ نتیجه این فرایند جریان قطبش \mathbf{J}_p است. با توجه به این نکات است که می توان همخوانی معادله (۴۸-۷) را با معادله پیوستگی نتیجه گرفت

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_p = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{P}) = -\frac{\partial \rho_b}{\partial t}$$

آری: معادله پیوستگی صادق است. در واقع وجود \mathbf{J}_p برای پایستگی بار مقید الزامی است. (اما ضمناً تغییر در مغناطیدگی به تمرکز بار یا جریان مشابه منجر نمی شود. بار مقید $\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}$ بر اثر تغییرات \mathbf{M} تغییر می کند).

با در نظر گرفتن همه این نکات، چگالی کل بار را می توان به دو قسمت

$$\rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (۴۹-۷)$$

و چگالی جریان را به سه بخش زیر تقسیم کرد:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_b + \mathbf{J}_p = \mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (50-7)$$

حال قانون گاوس را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P})$$

و یا

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (51-7)$$

که در آن \mathbf{D} ، برای حالت ایستا، عبارت است از

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (52-7)$$

و قانون آمپر (با جمله اضافی ماکسول) می‌شود

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

یا

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (53-7)$$

که در آن \mathbf{H} همانند قبل برابر است با

$$\mathbf{H} \equiv \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (54-7)$$

این جداسازی بار و جریان به اجزای آزاد و مقید در قانون فاراده و $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ تأثیری نمی‌کند زیرا آنها ρ و \mathbf{J} را شامل نمی‌شوند.

بنابراین معادلات ماکسول برحسب جریانها و بارهای آزاد عبارت‌اند از

$$\begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (۱) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (۳) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۲) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (۴) \end{array} \quad (۵۵-۷)$$

بعضیها معادلات اخیر را معادلات "واقعی" ماکسول می‌نامند اما لطفاً توجه داشته باشید که این معادلات به هیچ روی "کلیتر" از معادلات (۳۹-۷) نیستند؛ تنها امتیاز آنها نوعی تفکیک مناسب بار و جریان به اجزای آزاد و غیر آزاد است. و به آنها این ایراد هم وارد است که نمادگذاری آمیخته دارند، چون هم \mathbf{E} و \mathbf{D} دارند و هم \mathbf{B} و \mathbf{H} . بنابراین باید آنها را با روابط ساختمند و مناسبی بنویسیم که \mathbf{D} و \mathbf{H} را برحسب \mathbf{E} و \mathbf{B} نشان دهند. این کار به ماهیت ماده بستگی دارد؛ برای محیطهای خطی داریم

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad \text{و} \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (۵۶-۷)$$

بنابراین

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \text{و} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \quad (۵۷-۷)$$

که در آن $\varepsilon \equiv \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$ و $\mu \equiv \mu_0 (1 + \chi_m)$. همان‌گونه که به یاد دارید \mathbf{D} را "جابه‌جایی" الکتریکی می‌نامند؛ به این دلیل است که جمله دوم در معادلهٔ آمپر/ماکسول (۵) را جریان جابه‌جایی می‌خوانند. با تعمیم معادلهٔ (۳۷-۷) داریم

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (۵۸-۷)$$

مسئله ۳۷-۷ آب دریا در بسامد $\nu = 4 \times 10^8 \text{ Hz}$ دارای گذردهی الکتریکی $\varepsilon = 81\varepsilon_0$ ، نفوذپذیری مغناطیسی $\mu = \mu_0$ و مقاومت ویژه $\rho = 0.23\Omega \cdot \text{m}$ است؛ نسبت جریان رسانش به جریان جابه‌جایی را حساب کنید. [راهنمایی: یک خازن تخت با صفحات موازی را غوطه‌ور در آب دریا در نظر بگیرید و ولتاژ آن را $V_0 \cos(2\pi\nu t)$ بگیرید.] □

۶-۳-۷ شرایط مرزی

به طور کلی E, B, D, H در مرز بین دو محیط مختلف و یا روی سطح جسمی که چگالی بار سطحی σ دارد و یا چگالی جریان K در آن برقرار است ناپیوسته‌اند. شکل صریح این ناپیوستگیها را می‌توان به کمک معادلات ماکسول (۷-۵۵) به صورت انتگرالی آنها به دست آورد

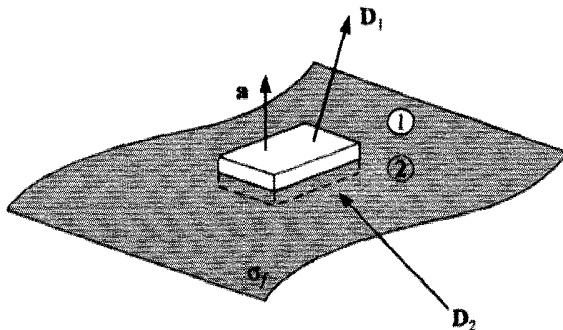
$$\left. \begin{aligned} (1) \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} &= Q_{f, \text{enc}} \\ (2) \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{انتگرال روی هر سطح بسته } S$$

$$\left. \begin{aligned} (3) \quad \oint_P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \\ (4) \quad \oint_P \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= I_{f, \text{enc}} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{انتگرال روی هر سطح } S \\ \text{محاط شده با حلقه بسته } P \end{array}$$

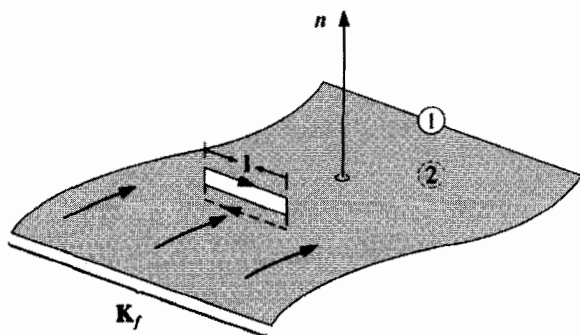
با اعمال (۱) به یک سطح بسته گاوسی (شکل ۷-۴۶) به صورت مکعب مستطیلی کوچکتر که ضخامت کوچک آن هم داخل و هم بیرون سطح در هر دو طرف را در بر می‌گیرد به دست می‌آوریم

$$D_1 \cdot a - D_2 \cdot a = \sigma_f a$$

(جهت مثبت a از ۲ به طرف ۱ است. وقتی ضخامت را بینهایت کوچک بگیریم اثر گوشه‌ها هم ناچیز می‌شود، همچنین چگالی حجمی بارهای آزاد هم در این شرایط نقشی ندارند.) از این رو



شکل ۷-۴۶



شکل ۴۷-۷

مؤلفه D که بر سطح مرزی عمود است به مقدار زیر ناپیوسته است

$$\boxed{D_1^\perp - D_2^\perp = \sigma_f} \quad (59-7)$$

با دلیلی مشابه در مورد معادله (۲) به نتیجه زیر می‌رسیم

$$\boxed{B_1^\perp - B_2^\perp = 0} \quad (60-7)$$

با توجه به (۳) برای یک حلقه آمپری بسیار نازک که از روی سطح بگذرد (شکل ۴۷-۷) داریم

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{l} - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

اما وقتی عرض حلقه به صفر میل می‌کند شار هم صفر می‌شود. (در انتگرال $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ ، چون دو انتگرال مربوط به دو انتها صفر می‌شوند دو تای دیگر باقی می‌مانند.) بنابراین داریم

$$\boxed{\mathbf{E}_1^\parallel - \mathbf{E}_2^\parallel = 0} \quad (61-7)$$

به عبارت دیگر، مؤلفه‌های \mathbf{E} موازی با سطح مرزی در سراسر مرز پیوسته است. بالاخره اعمال (۴) ایجاب می‌کند که

$$\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{l} - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{l} = I_{f, \text{محصور}}$$

که در آن $I_{f, \text{عمود}}$ جریان آزاد گذرنده از داخل حلقه آمپری است. باز هم چگالی جریان حجمی (وقتی عرض را بینهایت کوچک بگیریم) نقشی ایفا نمی‌کند، در حالی که جریان سطحی چنین نیست. در واقع، اگر \hat{n} برداریکه عمود بر سطح مرزی (در جهت ۲ به ۱) باشد در این صورت $(\hat{n} \times \hat{I})$ بر حلقه آمپری عمود است. آن‌گاه داریم

$$I_{f, \text{عمود}} = \mathbf{K}_f \cdot (\hat{n} \times \mathbf{l}) = (\mathbf{K}_f \times \hat{n}) \cdot \mathbf{l}$$

و از این رو نتیجه می‌گیریم

$$\boxed{\mathbf{H}_1^{\parallel} - \mathbf{H}_2^{\parallel} = \mathbf{K}_f \times \hat{n}} \quad (۶۲-۷)$$

بنابراین مؤلفه‌های موازی \mathbf{H} ناپیوسته‌اند و مقدار این ناپیوستگی با چگالی جریان آزاد سطحی متناسب است.

معادلات (۵۹-۷) تا (۶۲-۷) شرایط مرزی عمومی الکترودینامیک را نشان می‌دهند. برای محیطهای خطی این معادلات را می‌توان صرفاً برحسب \mathbf{E} و \mathbf{B} بیان کرد

$$\begin{cases} \varepsilon_1 E_1^{\perp} - \varepsilon_2 E_2^{\perp} = \sigma_f & (۱) & \mathbf{E}_1^{\parallel} - \mathbf{E}_2^{\parallel} = 0 & (۳) \\ B_1^{\perp} - B_2^{\perp} = 0 & (۲) & \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^{\parallel} = \mathbf{K}_f \times \hat{n} & (۴) \end{cases} \quad (۶۳-۷)$$

اگر در سطح مرزی، بار و جریان آزاد وجود نداشته باشد، آن‌گاه داریم

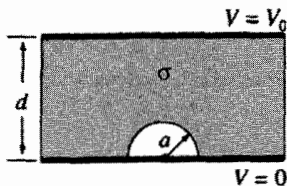
$$\boxed{\begin{cases} \varepsilon_1 E_1^{\perp} - \varepsilon_2 E_2^{\perp} = 0 & (۱) & \mathbf{E}_1^{\parallel} - \mathbf{E}_2^{\parallel} = 0 & (۳) \\ B_1^{\perp} - B_2^{\perp} = 0 & (۲) & \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^{\parallel} = 0 & (۴) \end{cases}} \quad (۶۴-۷)$$

در فصل بعد نشان می‌دهیم که این معادلات اساس نظریه بازتابش و شکست را تشکیل می‌دهند.

مسائل تکمیلی فصل ۷

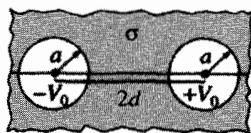
مسئله ۳۸-۷ دو صفحه فلزی بسیار بزرگ به فاصله d از هم واقع‌اند، یکی از آن دو دارای پتانسیل صفر و دیگری دارای پتانسیل V_0 است (شکل ۴۸-۷). کره‌ای فلزی به شعاع a ($a \ll d$) را به دو قسمت تقسیم کرده‌اند، یک نیمکره را روی صفحه متصل به زمین قرار می‌دهند تا پتانسیل آن

هم صفر شود. اگر ناحیه بین دو صفحه توسط ماده رسانای ضعیفی با رسانش یکنواخت σ پر شده باشد، چه جریانی از نیمکره می‌گذرد؟ پاسخ: $V_0(3\pi a^2 \sigma/d)$ ، [راهنمایی: تمرین ۸-۳ را انجام دهید].



شکل ۴۸-۷

! مسئله ۳۹-۷ دو لوله بلند و مستقیم مسی که شعاع هر کدام a است به فاصله $2d$ از هم قرار دارند (شکل ۴۹-۷). یکی از آن دو دارای پتانسیل V_0 و دیگری $-V_0$ است. فضای بین لوله‌ها با ماده‌ای به رسانش یکنواخت و ضعیف σ پر شده است. جریان واحد طول، که از یک لوله بر لوله دیگر می‌گذرد، را بیابید. [راهنمایی: مسئله ۳-۱۱ را ببینید].



شکل ۴۹-۷

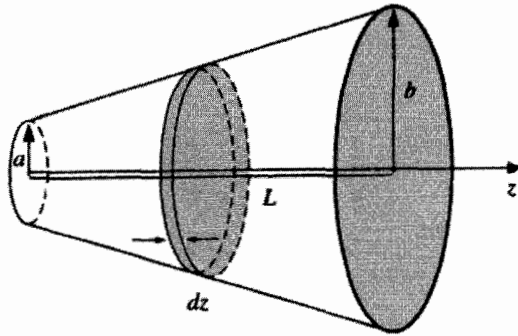
مسئله ۴۰-۷ مسئله‌ای در یک کتاب درسی از شما می‌خواهد که مقاومت جسمی مخروطی شکل دارای مقاومت ویژه ρ ، طول L ، شعاع a در یک انتها و شعاع b در انتهای دیگرش (شکل ۵۰-۷) را پیدا کنید. سطح دو انتها صاف و هم‌پتانسیل‌اند. روش پیشنهادی، تقسیم شکل به قرصهای دایره‌ای با ضخامت dz است. مقاومت هر یک از این قرصها را محاسبه و با انتگرال‌گیری مقاومت کل مخروط را بیابید.

(الف) R را از راه پیشنهادی بالا پیدا کنید.

(ب) بیان کنید که چرا این روش اساساً ایراد دارد.

(ج) حال فرض کنید که دو انتها به شکل سطوحی کروی‌اند که مرکزشان در رأس مخروط واقع است. در این حالت مقاومت را حساب کنید. (L را فاصله بین مراکز پیرامونهای دایره‌ای کلاهکهای

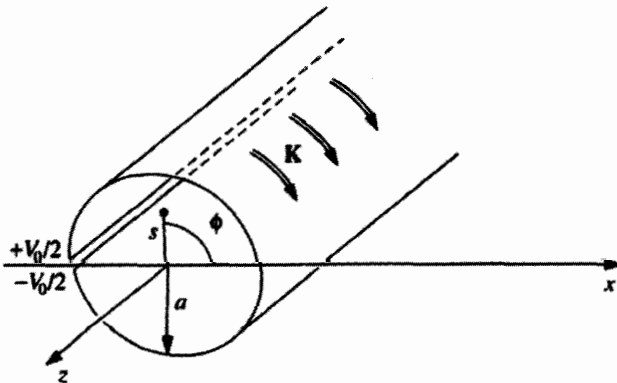
انتهایی بگیرد). پاسخ: $(\rho/2\pi ab)(b-a)^2/\sqrt{L^2+(b-a)^2}-L$.



شکل ۷-۵۰

! مسئله ۷-۴۱ یک مورد نادر که میدان الکتروستاتیک E یک مدار را می‌توان واقعاً محاسبه کرد بدین ترتیب است^۱، یک ورقه استوانه طویل نامتناهی با مقاومت ویژه یکنواخت و شعاع a را در نظر بگیرید. یک شکاف (متناظر با باتری) به ولتاژ $V_0/2$ در $\pm\pi$ ایجاد شده است، و یک جریان یکنواخت مطابق شکل ۷-۵۱ از سطح می‌گذرد. بنابر قانون اهم داریم

$$V(a, \phi) = \frac{V_0 \phi}{2\pi}, \quad (-\pi < \phi < +\pi)$$



شکل ۷-۵۱

1. M. A. Heald, *Am. J. Phys.* **52**, 522 (1984).

(الف) با استفاده از تفکیک متغیرها در مختصات استوانه‌ای، $V(s, \phi)$ را در داخل و خارج استوانه تعیین کنید. پاسخ: $[(s \sin \phi)/(a + s \cos \phi)] \tan^{-1}(V_0/\pi)$ به ازای $s < a$ و $[(a \sin \phi)/(s + a \cos \phi)] \tan^{-1}(V_0/\pi)$ به ازای $s > a$.
 (ب) چگالی بار سطحی استوانه را حساب کنید. [پاسخ: $(\epsilon_0 V_0/\pi a) \tan(\phi/2)$].

مسئله ۴۲-۷ در یک رسانای کامل، رسانش نامتناهی است و بنابراین $\mathbf{E} = 0$ [معادله (۳-۷)]، و هرگونه بار خالص روی سطح جای می‌گیرد (همان‌گونه که در یک رسانای ناکامل در الکتروستاتیک صورت می‌گیرد).

(الف) نشان دهید که میدان مغناطیسی در داخل یک رسانای کامل ثابت است ($\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$).
 (ب) نشان دهید که شار مغناطیسی گذرنده از یک حلقهٔ رسانای کامل ثابت است.
 یک ابررسانا، رسانای کاملی است با خواص اضافی به طوری که \mathbf{B} (ثابت) در داخل ابررسانا عملاً صفر است. (این "طرد شار" به اثر مایسنر معروف است).
 (ج) نشان دهید که جریان یک ابررسانا محدود به سطح جسم است.

(د) ابررسانایی در بالاتر از دمایی بحرانی (T_c)، که از یک ماده به ماده دیگر متفاوت است، از بین می‌رود. فرض کنید کره‌ای (به شعاع a) در بالاتر از دمای بحرانش داشته باشید و آن را در یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\hat{z} B_0$ قرار داده و سپس تا دمایی پایتتر از T_c سرد کنید. چگالی جریان سطحی القایی \mathbf{K} را به صورت تابعی از زاویهٔ قطبی θ بیابید.

مسئله ۴۳-۷ یک نمایش معروف مربوط به ابررسانایی (مسئله ۴۲-۷) پرواز یک آهنربا روی قطعه‌ای از مادهٔ ابررساناست. تحلیل این پدیده با استفاده از روش تصویر صورت می‌گیرد.^۲ آهنربا را یک دوقطبی کامل m که به فاصلهٔ z بالای مبدأ (و مقید به بودن در راستای z) است در نظر بگیرید، و فرض کنید که ابررسانا تمام نیم‌فضای زیر صفحهٔ xy را پر کرده است. به دلیل اثر مایسنر در $z \leq 0$ داریم $\mathbf{B} = 0$ و چون \mathbf{B} دیورژانس ندارد، مؤلفه قائم (z) پیوسته است، از این رو درست در بالای سطح $B_z = 0$ است. این شرط مرزی با پیکربندی تصویر که در آن یک دوقطبی مشابه که در $-z$ واقع است نقش جانشین ابررسانا را ایفا می‌کند؛ این دو نوع ترتیب، همان میدان را برای $z > 0$ ایجاد می‌کنند.

(الف) دوقطبی تصویر باید در چه جهتی باشد (z یا $-z$)؟

۱. بعضی مواقع اثر مایسنر را "دیامغناطیسی کامل" می‌نامند و این نام بدان جهت است که میدان داخلی صرفاً کم نشده است، بلکه کاملاً صفر شده است. معذالک، جریانهای سطحی که مسئول این رویداد هستند کاملاً آزادند و نه مقید، بنابراین مکانیسم واقعی کاملاً متفاوت است.

(ب) نیروی وارد بر آهنربا ناشی از جریانهای القایی در ابررسانا (به تعبیری نیروی ناشی از دوقطبی تصویر) را بیابید. آن را با Mg (که M جرم آهنرباست) مساوی قرار دهید تا ارتفاع h لازم برای "شناور" ماندن آهنربا را پیدا کنید. [راهنمایی: به مسئله ۳-۶ مراجعه کنید.]

(ج) جریان القایی روی سطح ابررسانا (صفحة xy) را می‌توان با اعمال شرایط مرزی روی مؤلفه مماسی B معادله (۷۴-۵) تعیین کرد: $B = \mu_0 (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{z}})$. با استفاده از میدانی که از پیکربندی تصویر به دست می‌آورید، نشان دهید که

$$\mathbf{K} = -\frac{3mrh}{2\pi(r^2 + h^2)^{5/2}} \hat{\phi}$$

که در آن r فاصله از مبدأ است.

! مسئله ۷-۴۴ اگر یک دوقطبی مغناطیسی که در بالای یک صفحه ابررسانای نامحدود معلق است (مسئله ۷-۴۳) بتواند آزادانه بچرخد، سمتگیری آن چگونه خواهد بود، و در چه ارتفاعی از سطح شناور می‌شود؟

مسئله ۷-۴۵ یک پوسته کروی کاملاً رسانا به شعاع a حول محور z با سرعت زاویه‌ای ω در یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ می‌چرخد. emf حاصل بین "قطب شمال" و استوا را محاسبه کنید. پاسخ: $\omega a^2 (1/2) B_0$.

! مسئله ۷-۴۶ با مراجعه به مسئله ۷-۱۱ (و استفاده از نتیجه مسئله ۵-۴۰ اگر مفید باشد): (الف) آیا حلقه مربعی در وضعیت نشان داده شده (در شکل ۷-۱۹) تندتر می‌افتد یا وقتی که 45° حول محوری که از صفحه به بیرون است بچرخد؟ نسبت دو سرعت نهایی را پیدا کنید. اگر حلقه را رها کنید تا بیفتد فکر می‌کنید در حین سقوط چه شکل‌گیری دارد؟ پاسخ: $(\sqrt{2} - 2y/l)^2$ که در آن l اندازه یک ضلع و y ارتفاع مرکز در بالای گوشه میدان مغناطیسی در پیکربندی چرخیده است.

(ب) چه مدت طول می‌کشد تا یک حلقه دایره‌ای از انتهای میدان مغناطیسی و با این سرعت نهایی (متغیر) بگذرد؟

مسئله ۷-۴۷ (الف) با استفاده از شباهت بین قانون فاراده و قانون آمپر و نیز با قانون بیوساوار نشان دهید که برای میدانهای الکتریکی القایی فاراده داریم

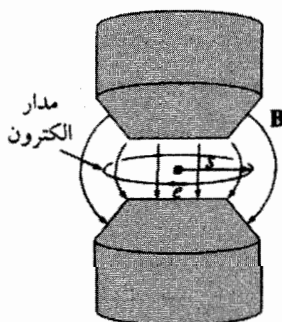
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}', t) \times \hat{\mathbf{r}}}{r'^2} d\tau' \quad (65-7)$$

(ب) با توجه به مسئله ۵-۵ (الف) نشان دهید که

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} \quad (۶۶-۷)$$

که در آن A پتانسیل برداری است. با گرفتن تاو از دو طرف نتیجه را امتحان کنید.
 (ج) یک پوسته کروی به شعاع R دارای بار سطحی یکنواخت σ است. این پوسته حول یک محور ثابت با سرعت زاویه‌ای $\omega(t)$ که به آهستگی نسبت به زمان تغییر می‌کند می‌چرخد. میدان الکتریکی داخل و خارج کره را بیابید. [راهنمایی: دو عامل تأثیرگذار در اینجا وجود دارد: میدان کولنی ناشی از بار، و میدان فاراده بر اثر تغییر B . به تمرین ۱۱-۵ توجه کنید و معادله (۶۶-۷) را به‌کار ببرید.]

مسئله ۴۸-۷ با افزایش میدان مغناطیسی می‌توان بر سرعت الکترونی که حرکت سیکلوترون دارند افزود؛ میدان الکتریکی موجود شتاب مماسی ایجاد می‌کند. این نحوه کار بتاترون است. معمولاً مایل هستیم شعاع مدار دوران در طول فرایند ثابت بماند. نشان دهید که برای نیل به این هدف باید آهنربایی طراحی کرد که متوسط میدان آن بر روی مساحت مدار دو برابر میدان در محیط آن باشد (شکل ۵۲-۷). فرض کنید الکترونها از حال سکون در میدان صفر شروع به حرکت می‌کنند و نیز دستگاه نسبت به مرکز مدار متقارن است. (همین‌طور فرض کنید سرعت الکترون به‌مراتب از سرعت نور کمتر است و بنابراین از مکانیک غیرنسبیتی استفاده می‌شود.) [راهنمایی: از معادله (۳-۵) نسبت به زمان مشتق بگیرید و فرمول $F = ma = qE$ را به‌کار ببرید.]

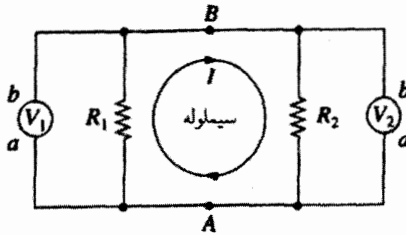


شکل ۵۲-۷

مسئله ۴۹-۷ الکترونی (با بار q) از یک اتم به دور هسته (با بار Q) در مداری به شعاع r می‌چرخد؛ بدیهی است که شتاب مرکزگرای لازم توسط جاذبه کولنی بارهای مخالف تأمین می‌شود.

حال یک میدان مغناطیسی کوچک dB عمود بر صفحه مدار اعمال می‌شود. نشان دهید که افزایش انرژی جنبشی، dT ناشی از اعمال میدان الکتریکی القایی درست برابر است با انرژی لازم برای برقراری حرکت دورانی در شعاع ثابت r . (به این دلیل است که در بحث دیامغناطیسی، فرض کردیم شعاع ثابت است. به بخش ۶-۱-۳ و مراجع آن توجه کنید.)

مسئله ۷-۵۰ جریان یک سیمولوله طویل خطی با زمان زیاد می‌شود، به طوری که شار متناسب با زمان است: $\Phi = \alpha t$. دوولت‌متر به دو نقطه متقابل در امتداد قطر (A و B) و نیز مقاومت‌های R_1 و R_2 مطابق شکل ۷-۵۳ می‌بندیم. هرولت‌متر چه عددی را نشان می‌دهد؟ فرض کنید ولت‌مترها ایده‌آل باشند و جریانی مصرف نکنند (یعنی مقاومت داخلی عظیمی دارند) و نیز ولت‌متر $\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ بین پایانه‌ها را ثبت می‌کند. پاسخ: $V_1 = \alpha R_1 / (R_1 + R_2)$; $V_2 = -\alpha R_2 / (R_1 + R_2)$. توجه کنید که $V_1 \neq V_2$ است، حتی اگر هر دو به نقاط یکسان وصل شوند.



شکل ۷-۵۳

مسئله ۷-۵۱ در بحث emf حرکتی (بخش ۷-۱-۳) فرض کردیم که حلقه سیم (شکل ۷-۱۰) دارای مقاومت R بوده و در نتیجه جریان حاصل مساوی $I = vBh/R$ است. اما اگر سیم از یک ماده رسانای کامل ساخته شده باشد به طوری که R صفر شود چه می‌شود؟ در این حالت، جریان محدود به emf معکوس ناشی از خودالقایی L حلقه است (که خود در مقایسه با IR ناچیز است). نشان دهید که در این حالت، حلقه (به جرم m) حرکت هماهنگ ساده پیدا می‌کند و بسامد آن را حساب کنید.^۱

$$\text{پاسخ: } \omega = Bh/\sqrt{mL}$$

۱. برای مشاهده مجموعه مسائل مربوط مرجع زیر را ببینید

مسئله ۵۲-۷ (الف) با استفاده از فرمول نویمان [معادله (۷-۲۲)] القای متقابل پیکربندی شکل ۳۶-۷ را با فرض آنکه $(a \ll b, a \ll z)$ حساب کنید. جواب خود را با مسئله ۲۰-۷ مقایسه کنید.

(ب) برای حالت کلی (که a کوچک نیست) نشان دهید که:

$$M = \frac{\mu_0 \pi \beta}{\gamma} \sqrt{ab\beta} \left(1 + \frac{15}{8} \beta^2 + \dots \right)$$

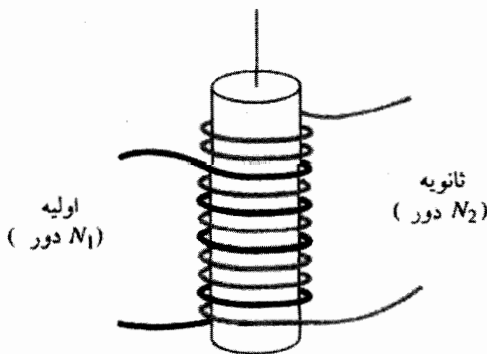
که در آن

$$\beta \equiv \frac{ab}{z^2 + a^2 + b^2}$$

مسئله ۵۳-۷ دو سیم پیچ دور استوانه‌ای به‌گونه‌ای پیچیده شده‌اند که شار گذرنده برای هر دور سیم در هر دو سیم پیچ برابرند. (یک راه عملی قرار دادن یک هسته آهنی در داخل استوانه است؛ اثر این کار متمرکز کردن شار است.) تعداد دور سیم پیچها برای مدارهای اول و دوم به ترتیب N_1 و N_2 (شکل ۷-۵۴) اند. نشان دهید که هرگاه جریان اولیه تغییر کند، emf حاصل در مدار دوم برابر است با

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad (۷-۶۷)$$

که در آن \mathcal{E}_1 عبارت است از emf (معکوس) مدار اول. [این یک میدل اولیه است که وسیله‌ای برای افزایش یا کاهش emf یک چشمه جریان متناوب است. با انتخاب مناسب تعداد دور سیم پیچهای



شکل ۷-۵۴

مدار دوم هر emf دلخواهی قابل حصول است. اگر فکر می‌کنید این امر با پایستگی انرژی در تعارض است، مسئله ۷-۵۴ را امتحان کنید.]

مسئله ۷-۵۴ یک مبدل (مسئله ۷-۵۳) ولتاژ AC ورودی با دامنه V_1 را می‌گیرد و ولتاژ خروجی با دامنه V_2 را تحویل می‌دهد که از معادله $(V_2/V_1 = N_2/N_1)$ به دست می‌آید. اگر $N_2 > N_1$ باشد ولتاژ مدار خروجی از مدار ورودی بزرگتر است. چرا چنین چیزی پایستگی انرژی را نقض نمی‌کند؟ پاسخ: توان عبارت است از حاصلضرب ولتاژ و جریان؛ بدیهی است با افزایش ولتاژ جریان کاهش می‌یابد. هدف این مسئله آن است که چگونگی این رفتار را در یک مدار ساده نشان دهیم.

(الف) در یک مبدل ایده‌آل، شارهای گذرنده از همه سیم‌پیچهای اولیه و ثانویه برابرند. نشان دهید که در این حالت $M^2 = L_1 L_2$ ، که در آن M القای متقابل سیم‌پیچهاست و L_1 و L_2 خودالقایی آنها.

(ب) فرض کنید ولتاژ AC مدار اول به صورت $V_1 \cos(\omega t) = V_{\text{ورودی}}$ بوده و مدار دوم به یک مقاومت R وصل باشد. نشان دهید که دو جریان در روابط زیر صادق اند.

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} = V_1 \cos(\omega t), \quad L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} = -I_2 R$$

(ج) با استفاده از جواب (الف)، معادلات اخیر را برای تعیین $I_1(t)$ و $I_2(t)$ حل کنید. (فرض کنید در I_1 هیچ مؤلفه DC وجود ندارد.)

(د) نشان دهید که نسبت ولتاژ خروجی $(V_{\text{خروجی}} = I_2 R)$ به ولتاژ ورودی $(V_{\text{ورودی}})$ برابر است با نسبت دور سیم‌پیچها: $V_{\text{خروجی}}/V_{\text{ورودی}} = N_2/N_1$.

(ه) توان ورودی $(P_{\text{ورودی}} = V_{\text{ورودی}} I_1)$ و توان خروجی $(P_{\text{خروجی}} = V_{\text{خروجی}} I_2)$ را حساب کنید و نشان دهید که میانگین هر دو در یک چرخه کامل برابر است.

مسئله ۷-۵۵ فرض کنید $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ نسبت به زمان ثابت است اما $\rho(\mathbf{r}, t)$ ثابت نیست. این شرایطی است که مثلاً در طول مدت شارژ یک خازن برقرار است.

(الف) نشان دهید که چگالی بار در هر نقطه معین یک تابع خطی از زمان است

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, 0) + \dot{\rho}(\mathbf{r}, 0) t$$

که در آن $\dot{\rho}(\mathbf{r}, 0)$ مشتق زمانی ρ در $t = 0$ است.

این یک پیکربندی الکتروستاتیکی یا مغناطوستاتیکی نیست؛^۱ با وجود این نسبتاً تعجب‌آور است که قانون کولن [به صورت معادله (۸-۲)] و قانون بیوساوار [معادله (۵-۳۹)] هر دو صادق‌اند و این را می‌توانید با توجه به اینکه آنها در معادلات ماکسول صدق می‌کنند، تأیید کنید.

(ب) نشان دهید که

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{r}}}{r'^2} d\tau'$$

از قانون آمپر که دارای جمله جریان جابه‌جایی ماکسول است پیروی می‌کند.

مسئله ۵۶-۷ میدان مغناطیسی یک سیم مستقیم نامتناهی حامل جریان پایای I را می‌توان از روی عبارت جریان جابه‌جایی قانون آمپر/ماکسول به صورت زیر به دست آورد: جریان را به صورت بار خطی یکنواخت λ که با سرعت v روی محور z حرکت می‌کند (یعنی $I = \lambda v$) با لحاظ کردن، گاف نازکی به طول ε که در لحظه $t = 0$ به مبدأ می‌رسد، در نظر بگیرید. در لحظه بعد (تا زمان $t = \varepsilon/v$) هیچ جریان حقیقی از حلقه آمپری دایره‌ای در صفحه xy نمی‌گذرد، اما یک جریان جابه‌جایی، ناشی از بار "مفقود" در گاف وجود دارد.

(الف) با استفاده از قانون کولن مؤلفه z میدان الکتریکی را برای نقاط واقع در صفحه xy که به فاصله s از مبدأ قرار دارند، ناشی از قسمتی از سیم با چگالی یکنواخت λ - از $z_1 = vt - \varepsilon$ تا $z_2 = vt$ را حساب کنید.

(ب) شار گذرنده این میدان الکتریکی از دایره‌ای به شعاع a در صفحه xy را حساب کنید.
 (ج) جریان جابه‌جایی گذرنده از این دایره را بیابید. نشان دهید که در حد وقتی عرض گاف (ε) صفر می‌شود I_h با I مساوی است. [برای بررسی، از منظری کمی متفاوت با این مسئله، پانوشت ۲ را ببینید].^۲

مسئله ۵۷-۷ میدان مغناطیسی در خارج سیم مستقیم بلند که از آن جریان مانای I می‌گذرد

۱. بعضی مؤلفان این را مغناطوستاتیک در نظر می‌گیرند زیرا \mathbf{B} مستقل از t است. از دید آنها قانون بیوساوار، قانون کلی مغناطوستاتیک است، اما روابط $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ و $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ تنها با قبول فرضی اضافی که m ثابت است درست‌اند. در یک چنین فرمولبندی، عبارت جابه‌جایی ماکسول (در این حالت خیلی خاص) را می‌توان از قانون بیوساوار با روش قسمت (ب) به دست آورد. مرجع زیر را ببینید

D. F. Bartlett, *Am. J. Phys.* **58**, 1168 (1990); D. J. Griffiths and M. A. Heald, *Am. J. Phys.* **59**, 111 (1991).

2. W. K. Terry, *Am. J. Phys.* **50**, 742 (1982).

برابر است با

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

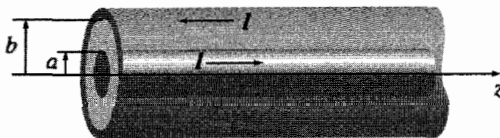
میدان الکتریکی داخل سیم یکنواخت است

$$\mathbf{E} = \frac{I\rho}{\pi a^2} \hat{z}$$

که در آن ρ مقاومت ویژه و a شعاع است (مثالهای ۱-۷ و ۳-۷). پرسش: میدان الکتریکی خارج سیم چقدر است؟ این مسئله‌ای مشهور است که اولین بار توسط زومرفلد تحلیل شد، و به جدیدترین صورت آن امروزه به نام "معمای مرزباخر" شناخته می‌شود.^۱ جواب بستگی به این دارد که مدار را چگونه کامل کنید. فرض کنید برگشت جریان از راه یک استوانه هم‌محور کاملاً رسانای متصل به زمین به شعاع b (شکل ۵۵-۷) صورت گیرد. در ناحیه $a < s < b$ ، پتانسیل $V(s, z)$ در معادله لاپلاس با شرایط مرزی زیر صدق می‌کند

$$V(a, z) = -\frac{I\rho z}{\pi a^2} \quad (۱); \quad V(b, z) = 0 \quad (۲)$$

متأسفانه این شرایط مرزی برای دستیابی به جواب کافی نیستند — هنوز هم به اطلاع از شرایط مرزی در دو انتها نیازمندیم. در کتابها عادت این است که برای از بین بردن ابهام حالت خاصی (به شکل‌های متفاوت) اعمال می‌شود که $V(s, z)$ با z متناسب است: $V(s, z) = zf(s)$. با این فرض

(الف) $V(s, z)$ را تعیین کنید.(ب) $\mathbf{E}(s, z)$ را بیابید.

شکل ۵۵-۷

1. A. Sommerfeld, *Electrodynamics*, p. 125 (New York: Academic Press, 1952); E. Merzbacher, *Am. J. Phys.* **48**, 104 (1980); further references in M. A. Heald, *Am. J. Phys.* **52**, 522 (1984).

(ج) چگالی بار سطحی $\sigma(z)$ روی سیم را محاسبه کنید.

پاسخ: $V = (-Iz\rho/\pi a^2) [\ln(s/b)/\ln(a/b)]$ ، این یک جواب خاص است زیرا E_s و $\sigma(z)$ مستقل از z نیستند — در حالی که قطعاً برای سیم نامتناهی انتظار داریم.

مسئله ۵۸-۷ یک خط انتقال مشخصی از دو "نوار" فلزی نازک به عرض w که به فاصله خیلی کوچک $h \ll w$ از هم واقع‌اند تشکیل شده است. جریان از یک نوار می‌گذرد و از راه نوار دوم برمی‌گردد. در هر مورد از روی سطح نوار به‌طور یکنواخت به بیرون نفوذ می‌کند.

(الف) ظرفیت واحد طول، C ، را حساب کنید.

(ب) القای واحد طول، L ، را بیابید.

(ج) مقدار عددی LC چقدر است؟ [بدهی است که L و C از یک خط انتقال به خط دیگر

تغییر می‌کنند، اما حاصلضرب آنها یک ثابت جهانی است. به‌عنوان مثال کابل مثال ۷-۱۳ را با فرض آنکه، فاصله بین دو رسانا خلأ است امتحان کنید. در نظریه خطوط انتقال، این حاصلضرب

به سرعتی که پالس در خط حرکت می‌کند بستگی دارد: $v = 1/\sqrt{LC}$.

(د) اگر نوارها را توسط ماده نارسائی با گذردهی ϵ و تراوایی مغناطیسی μ از یکدیگر عایق

کنیم، آن‌گاه حاصلضرب LC چقدر می‌شود؟ سرعت انتشار چقدر است؟ [راهنمایی: در تمرین ۴-۶ وقتی القاگری به ماده‌ای خطی با تراوایی مغناطیسی μ وارد می‌کردیم L به چه نسبتی تغییر می‌کرد؟]

مسئله ۵۹-۷ قضیه آلفن را ثابت کنید: در یک شاره کاملاً رسانا (مثلاً گازی از الکترونهای آزاد)

شار مغناطیسی گذرنده از هر حلقه بسته که با شاره حرکت می‌کند نسبت به زمان ثابت است.

(خطوط میدان مغناطیسی مثل آن است که در شاره "منجمد"ند.)

(الف) از قانون اهم، به‌صورت معادله (۷-۲) و نیز قانون فاراده استفاده و اثبات کنید که هرگاه

$\sigma = \infty$ باشد آن‌گاه \mathbf{J} متناهی است، بنابراین

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

(ب) فرض کنید S سطحی باشد که توسط حلقه (P) در زمان t کراندار باشد، و S'

وضعیت متناظر حلقه در حالت جدیدش (P') در زمان $t + dt$ باشد (شکل ۷-۵۶). تغییر شار

برابر است با

$$d\Phi = \int_{S'} \mathbf{B}(t + dt) \cdot d\mathbf{a} - \int_S \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{a}$$

نشان دهید که

$$\int_{S'} \mathbf{B}(t+dt) \cdot d\mathbf{a} + \int_{\mathcal{R}} \mathbf{B}(t+dt) \cdot d\mathbf{a} = \int_S \mathbf{B}(t+dt) \cdot d\mathbf{a}$$

(که در آن \mathcal{R} "نواری" است که P را به P' وصل می‌کند)، و از این رو در زمانهای بینهایت کوچک dt

$$d\Phi = dt \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} - \int_{\mathcal{R}} \mathbf{B}(t+dt) \cdot d\mathbf{a}$$

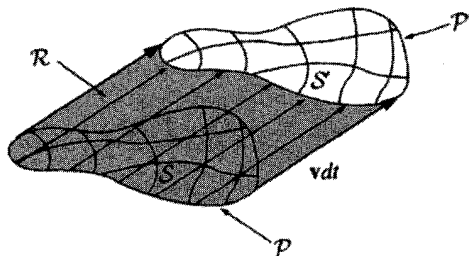
با استفاده از شیوه اعمال شده در بخش ۷-۱۳، انتگرال دوم را به صورت زیر بازنویسی کنید

$$dt \oint_P (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l}$$

و با بهره‌گیری از قضیه استوکس نتیجه بگیرید که

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right) \cdot d\mathbf{a}$$

این به علاوه نتیجه (الف) قضیه را ثابت می‌کند.



شکل ۷-۵۶

مسئله ۷-۶۰ (الف) نشان دهید که معادلات ماکسول با بار مغناطیسی [معادله (۷-۴۳)] تحت

تبدیل دوگانه ناوردا هستند

$$\begin{cases} \mathbf{E}' = \mathbf{E} \cos \alpha + c\mathbf{B} \sin \alpha \\ c\mathbf{B}' = c\mathbf{B} \cos \alpha - \mathbf{E} \sin \alpha \\ cq'_e = cq_e \cos \alpha + q_m \sin \alpha \\ q'_m = q_m \cos \alpha - cq_e \sin \alpha \end{cases} \quad (۷-۶۸)$$

که در آن $c \equiv 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ و α یک زاویه چرخش دلخواه در "فضای \mathbf{E}/\mathbf{B} " است. چگالیهای بار و جریان نیز به همین شیوه q_e و q_m تبدیل می‌یابند. [مفهوم گفته در حالت خاص آن است که هرگاه میدان یک پیکربندی بار الکتریکی را بدانید، فوراً می‌توانید (با $\alpha = 90^\circ$) میدان حاصل از بار مغناطیسی متناظر را بنویسید.]

(ب) نشان دهید که قانون نیروی (مسئله ۷-۳۵)

$$\mathbf{F} = q_e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + q_m \left(\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right) \quad (۶۹-۷)$$

□

نیز تحت تبدیل دوگانگی ناورد است.

میان پرده

اکنون همهٔ ورقهای ما روی میز است، و به تعبیری کار مورد نظر انجام شده است. در هفت فصل اول، الکترودینامیک را جزء به جزء کنار هم نهادیم، و حالا با اطلاع از معادلات ماکسول به صورت نهایی‌شان، نظریه کامل است. قانون دیگری برای آموختن نداریم، تعمیم بیشتری هم لازم نیست، و (شاید بجز یک استثناء) ناسازگاری نهفته‌ای هم نداریم که برای طرد آن اقدامی لازم باشد. تا اینجا کتاب، برای تدریس یک نیمسال کافی است.

اما از دیدگاه دیگر ما تازه به نقطهٔ آغازین رسیده‌ایم. اکنون دسته ورق کاملی را در اختیار داریم، و قواعد بازی را می‌دانیم — وقت آن رسیده است که شروع کنیم. این قسمت تماشایی است که شخص توان غیرعادی و غنای الکترودینامیک را در می‌یابد. در یک سال تحصیلی کامل وقت کافی برای پوشش دادن بقیهٔ کتاب وجود دارد، و شاید هم علاوه بر آنها واحدی هم برای مثلاً پلاسما، یا نظریهٔ مدار AC، یا حتی کمی دربارهٔ نسبیت خاص هم تدریس شود. اما اگر باید صرفاً دربارهٔ یک موضوع بحث کنید، فصل ۹ دربارهٔ امواج الکترومغناطیسی توصیه می‌شود (شاید هم بخواهید از فصل ۸ برای آمادگی قبلی استفاده کنید). در این فصل از اپتیک و از نظر تاریخی از مهمترین کاربردهای نظریهٔ ماکسول گفتگو می‌شود.



قوانین پایستگی

۱-۸ بار و انرژی

۱-۱-۸ معادله پیوستگی

در این فصل به مطالعه پایستگی انرژی، تکانه، و تکانه زاویه‌ای در الکترومغناطیس می‌پردازیم. اما خواستار آنیم که مروری مجدد در پایستگی بار داشته باشیم، زیرا این خود مبنای تمام قوانین پایستگی است. به‌طور دقیق پایستگی بار به چه معنی است؟ آیا این است که کل بارهای جهان یک مقدار ثابت است؟ بسیار خوب این تعریف پایستگی کلی بار است: اما پایستگی موضعی بار گزاره‌ای به مراتب قویتر است: هرگاه بار کلی در حجمی تغییر کند، آن‌گاه این تغییر بار باید از راه سطح به داخل یا خارج جسم منتقل شده باشد. بزرگ‌نمی‌تواند به‌سادگی از قفس بیرون بیاید مگر اینکه حفره‌ای در حصار قفس وجود داشته باشد.

به‌طور صوری، بار در یک حجم V برابر است با

$$Q(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) d\tau \quad (1-8)$$

و باری که از سطح S به خارج میدان دارد برابر است با $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ ، لذا بنابر پایستگی موضعی بار داریم

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (۲-۸)$$

با استفاده از معادله (۱-۸)، برای بازنویسی سمت چپ و اعمال قضیه دیورژانس در سمت راست داریم

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} d\tau \quad (۳-۸)$$

و از آنجایی که این معادله برای هر سطحی صادق است، نتیجه می‌شود

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \nabla \cdot \mathbf{J}} \quad (۴-۸)$$

بدیهی است که معادله اخیر معادله پیوستگی است یعنی، گزاره دقیق ریاضی برای پایستگی موضعی بار است. همان‌گونه که قبلاً نشان دادیم می‌توان آن را از معادلات ماکسول به دست آورد — پایستگی بار یک فرض مستقل نیست، بلکه پیامد قوانین الکترومغناطیسی است.

هدف این فصل به دست آوردن معادلات متناظر برای پایستگی انرژی و پایستگی تکانه است. در این فرایند (و شاید مهمتر از یک فرایند) یاد می‌گیریم که چگونه چگالی انرژی و چگالی تکانه (مشابه ρ) و نیز انرژی "جریان" و تکانه "جریان" (مشابه \mathbf{J}) را تبیین کنیم.

۲-۱-۸ قضیه پوئینتینگ

در فصل ۲ دیدیم که کار لازم برای جمع‌آوری یک توزیع بار ایستا (که به مفهوم کار لازم برای مقابله با نیروی دافعه کولنی بارهای همنام تعبیر می‌شود) عبارت است از [معادله (۲-۴۵)]

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

که در آن \mathbf{E} میدان الکتریکی حاصل است. به همین ترتیب کار لازم برای عبور جریانها (که به مفهوم emf معکوس است) عبارت است از [معادله (۷-۳۷)]

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau$$

که در آن \mathbf{B} میدان مغناطیسی حاصل است. بنابراین انرژی کل ذخیره شده در میدانهای الکترومغناطیسی برابر است با

$$U_{\text{الکترومغناطیسی}} = \frac{1}{4} \int \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau \quad (5-8)$$

حال می‌خواهیم معادله (5-8) را به صورت کلیتر و با توجه به قانون پایستگی انرژی در الکترودینامیک به دست می‌آوریم.

فرض کنید در زمان t پیکربندی بارها و جریانهایی را، که میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} را می‌سازد داشته باشیم. در زمان کوچک dt بعد، بارها کمی جابه‌جا می‌شوند. پرسش: چه کار dW توسط نیروهای الکترومغناطیسی مؤثر بر بارها در این مدت dt انجام گرفته است؟ بنابه قانون نیروی لورنتس کار انجام شده روی جزء بار q برابر است با

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt$$

با توجه به اینکه $q = \rho d\tau$ و $\rho\mathbf{v} = \mathbf{J}$ ، کار کل انجام شده روی بارهای محصور در حجم V برابر است یا

$$\frac{dW}{dt} = \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) d\tau \quad (6-8)$$

$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ کار انجام شده در واحد زمان و برای واحد حجم است که به معنی توان منتقل شده در واحد حجم است. این مقدار را می‌توان فقط برحسب میدانها و با استفاده از قانون آمپر-ماکسول، برای حذف \mathbf{J} نوشت:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

از قاعده ضرب ۶ می‌دانیم که

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

و با توجه به قانون فاراده $(\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t)$ نتیجه می‌گیریم که

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

ضمناً داریم

$$\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (B^2) \quad \text{و} \quad \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (E^2) \quad (7-8)$$

بنابراین

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (8-8)$$

با قرار دادن معادلهٔ اخیر در معادلهٔ (۶-۸) و با اعمال قضیهٔ دیورژانس به جملهٔ دوم، داریم

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau - \frac{1}{\mu_0} \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} \quad (9-8)$$

که در آن S سطح مرزی V است. این همان قضیهٔ پوئین تینگ است که در واقع "قضیهٔ کار-انرژی" برای الکترودینامیک است. اولین انتگرال سمت راست انرژی کل ذخیره شده در میدانهاست. یعنی الکترومغناطیسی U است [معادلهٔ (۵-۸)]. جملهٔ دوم بیانگر میزان انرژی خارج شده از V از راه سطح مرزی توسط میدانهای الکترومغناطیسی است. بنابراین قضیهٔ پوئین تینگ می‌گوید که کار انجام شده توسط نیروی الکترومغناطیسی روی بارها با کاهش انرژی ذخیره‌ای میدان منهای انرژی‌ای که از راه سطح به بیرون می‌رسد برابر است.

انرژی در واحد زمان و برای واحد سطح که توسط میدانها منتقل می‌شود را بردار پوئین تینگ

می‌نامند:

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (10-8)$$

شار انرژی برابر است با $\mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$ ، یعنی انرژی‌ای که در واحد زمان از سطح بینهایت کوچک da می‌گذرد. بنابراین \mathbf{S} را می‌توان چگالی شار انرژی نامید.^۱ در فصلهای ۹ و ۱۱ کاربردهای فراوانی

۱. اگر خیلی وسواسی باشید، گاف کوچکی در منطق فوق خواهید دید: از معادلهٔ (۹-۸) می‌دانیم که $\oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$ توان کل گذرنده از سطح بسته است، اما این را اثبات نمی‌کند که $\int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$ توان گذرنده از هر سطح باز است (ممکن است یک جملهٔ اضافی وجود داشته باشد که با انتگرال‌گیری روی همهٔ سطحهای بسته صفر شود). ولی، این تعبیر بدیهی و طبیعی است؛ چون مثل همیشه در الکترودینامیک محل دقیق انرژی، واقعاً مشخص شده نیست (بخش ۲-۴).

برای بردار پوئین تینگ بر خواهیم شمرد، اما فعلاً آن را به عنوان تأکید بیشتر بر اهمیت قضیه پوئین تینگ به کار می بریم

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dU_{\text{الکترومغناطیسی}}}{dt} - \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} \quad (11-8)$$

بدیهی است که کار W انجام شده روی بارها سبب افزایش انرژی مکانیکی آنها (جنبشی، پتانسیل یا هر چیز دیگر) می شود. اگر مکانیکی u را چگالی انرژی مکانیکی در نظر بگیریم به طوری که

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V u_{\text{مکانیکی}} d\tau \quad (12-8)$$

و الکترومغناطیسی u را چگالی انرژی میدان بنامیم

$$u_{\text{الکترومغناطیسی}} = \frac{1}{4} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad (13-8)$$

آنگاه

$$\frac{d}{dt} \int_V (u_{\text{مکانیکی}} + u_{\text{الکترومغناطیسی}}) d\tau = -\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = -\int_V (\nabla \cdot \mathbf{S}) d\tau$$

و از این رو

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_{\text{مکانیکی}} + u_{\text{الکترومغناطیسی}}) = -\nabla \cdot \mathbf{S} \quad (14-8)$$

معادله اخیر صورت دیفرانسیلی قضیه پوئین تینگ است. این معادله با معادله پیوستگی که تأکید بر پایستگی بار دارد [معادله (۴-۸)] قابل مقایسه است

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}$$

به جای چگالی بار چگالی انرژی (مکانیکی و الکترومغناطیسی) و به جای چگالی جریان بردار پوئین تینگ جایگزین شده اند. \mathbf{S} بیانگر جریان انرژی و دقیقاً همانند \mathbf{J} است که نشان دهنده جریان بار است.^۱

۱. در حضور محیط خطی، فقط به کاری علاقه مندیم که روی بارهای آزاد و جریانها انجام می شود (بخش ۴-۴-۳).

مثال ۱-۸

وقتی جریانی از سیمی می‌گذرد کار انجام می‌شود و این کار به صورت گرمای ژول در سیم نمایان می‌شود [معادله (۷-۷)]. انرژی منتقل شده در واحد زمان به سیم را می‌توان با استفاده از بردار پوئین تینگ محاسبه کرد (گرچه راههای آسانتری هم وجود دارد). میدان الکتریکی موازی با سیم برابر است با

$$E = \frac{V}{L}$$

که در آن V اختلاف پتانسیل بین دو سر سیمی به طول L (شکل ۱-۸) است. میدان مغناطیسی "پیرامونی" است؛ در سطح سیم (به شعاع a) برابر است با

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

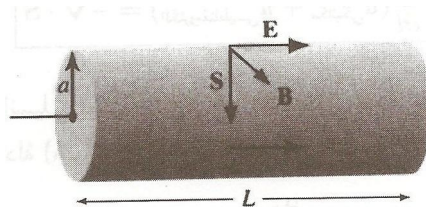
بنابراین بزرگی بردار پوئین تینگ برابر با

$$S = -\frac{1}{\mu_0} \frac{V}{L} \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{VI}{2\pi aL}$$

و در جهت شعاعی به طرف داخل است. انرژی گذرنده در واحد زمان از سطح سیم برابر است با

$$\int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = S(2\pi aL) = VI$$

■ که دقیقاً همان نتیجه‌ای است که به صورت کلی‌تر در بخش ۱-۷-۱ به دست آورده بودیم.



شکل ۱-۸

در این مورد چگالی انرژی برابر $(1/2)(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$ است، و بردار پوئین تینگ می‌شود $(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$

مسئله ۱-۸ توان (انرژی واحد زمان) منتقل شده به کابلهای مثال ۷-۱۳ و مسئله ۷-۵۸ را با فرض آنکه دو رسانا دارای اختلاف پتانسیل V باشند و جریان I از آنها بگذرد (دو جریان متقابل در دو سیم) حساب کنید.

مسئله ۲-۸ خازن شارژشده مسئله ۷-۳۱ را در نظر بگیرید.

(الف) میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در گاف را به صورت تابعی از فاصله s نسبت به محور و زمان t حساب کنید (فرض کنید در $t = 0$ بار صفر است).

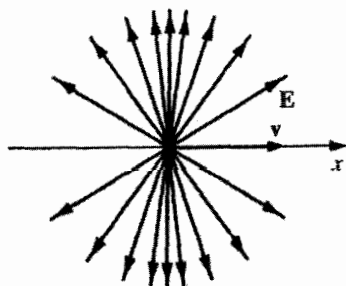
(ب) چگالی انرژی الکترومغناطیسی u و بردار پوینتینگ S در گاف را حساب کنید. به ویژه به جهت S دقت کنید. نشان دهید که معادله (۸-۱۴) صادق است.

(ج) انرژی کل موجود در گاف را به صورت تابعی از زمان حساب کنید. با انتگرالگیری از بردار پوینتینگ بر روی سطح مناسبی، توان کل وارد به گاف را محاسبه کنید. ثابت کنید که توان ورودی با آهنگ افزایش انرژی در گاف برابر است [معادله (۸-۹)]. در این مورد $W = 0$ است. زیرا باری در گاف وجود ندارد. (اگر نگران میدانهای حاشیه‌ای هستید، محاسبه را برای حجمی به شعاع $b < a$ که کاملاً داخل گاف است انجام دهید). □

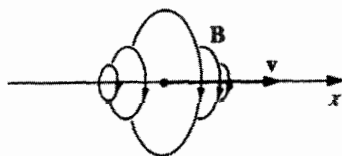
۲-۸ تکانه

۱-۲-۸ قانون سوم نیوتون در الکترودینامیک

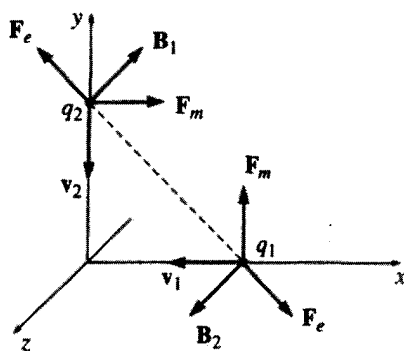
یک بار نقطه‌ای q را در نظر بگیرید که با سرعت v بر روی محور x حرکت می‌کند. چون بار در حرکت است میدان الکتریکی آن از قانون کولن معلوم نمی‌شود؛ با وجود این E نسبت به مکان لحظه‌ای بار همواره به صورت شعاعی به سوی خارج است [شکل ۲-۸ (الف)]. این شعاعی بودن E را در فصل ۱۰ نشان می‌دهیم. افزون بر این چون یک بار نقطه‌ای متحرک یک جریان ثابت



(الف)



(ب)



شکل ۳-۸

ایجاد نمی‌کند، میدان مغناطیسی آن از قانون بیوساواور معلوم نمی‌شود. با این همه می‌پذیریم که B هنوز هم در امتداد دایره‌هایی حول محور که طبق قاعده دست راست [شکل ۲-۸ (ب)] تعیین می‌شود قرار دارد؛ اثبات این قسمت را هم به فصل ۱۰ موکول می‌کنیم.

حال فرض کنید این بار الکتریکی با باری مشابه خود که در امتداد محور y حرکت می‌کند مواجه شود. البته نیروی الکترومغناطیسی بین این دو می‌خواهد که آنها را از محورهایشان منحرف کند، اما فرض کنید بارها روی ریلی یا چیزی شبیه به آن سوار باشند، لذا مقید به حرکت با سرعت ثابت در همان امتدادها هستند (شکل ۳-۸). می‌دانیم نیروی الکتریکی بین این دو بار همان دافعه است، اما نیروی مغناطیسی چگونه؟ میدان مغناطیسی حاصل از q_1 (در محل قرار گرفتن q_2) به طرف داخل صفحه کتاب و در نتیجه نیروی مغناطیسی مؤثر بر q_2 به طرف راست است. در حالی که میدان مغناطیسی q_2 (در محل q_1) به طرف خارج صفحه کتاب و نیروی مؤثر بر q_1 هم به طرف بالاست. نکته اینجاست که نیروی الکترومغناطیسی q_1 بر q_2 برابر است با نیروی وارد از q_2 بر q_1 ولی در جهت مخالف آن نیست و این قانون سوم نیوتون را نقض می‌کند. در الکتروستاتیک و مغناطوستاتیک قانون سوم صادق است اما در الکترودینامیک چنین نیست.

این ناسازگاری با قانون سوم، پدیده‌ای نادر است. اما در عمل تا چه اندازه ما به قانون سوم استناد می‌کنیم؟ پاسخ: همیشه! زیرا مثلاً اثبات پایستگی تکانه بر مبنای خشی شدن نیروهای داخلی است که خود از قانون سوم نتیجه می‌شود. وقتی قانون سوم را به هم می‌زنید پایستگی تکانه به مخاطره می‌افتد که در فیزیک قانونی مهمتر از آن نیست.

در الکترودینامیک پایستگی تکانه بر این اساس حفظ می‌شود که میدانها خود حامل تکانه می‌شوند. این مطلب خیلی هم تعجب‌آور نیست زیرا قبلاً هم انرژی را به میدانها نسبت دادیم. درباره دو بار نقطه‌ای شکل ۳-۸ هر اندازه تکانه به ذرات داده می‌شود از میدانها گرفته می‌شود.

تنها زمانی که تکانه میدانی به تکانه مکانیکی بارها افزوده می‌شود، پایستگی تکانه برقرار می‌ماند. در بخش‌های بعد این را مفصلاً به صورت کمی بحث می‌کنیم.

۸-۲-۲ تانسور تنش ماکسول

می‌خواهیم نیروی الکترومغناطیسی کل وارد بر بارهای موجود در حجم V را حساب کنیم:

$$\mathbf{F} = \int_V (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rho \, d\tau = \int_V (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \, d\tau \quad (15-8)$$

و بدیهی است که نیرو به ازای واحد حجم برابر است با

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (16-8)$$

همانند گذشته می‌توان با حذف ρ و \mathbf{J} با استفاده از (۱) و (۴) در معادلات ماکسول نوشت

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B}$$

حال می‌دانیم

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) + \left(\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

و طبق قانون فاراده

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

از این رو

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

و بنابراین

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] - \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (17-8)$$

و برای آنکه فرمول را به صورت متقارن در آوریم جمله $(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}$ را با توجه به اینکه $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ است اضافه می‌کنیم. با استفاده از قاعده ۴ ضرب می‌نویسیم

$$\nabla(E^{\nu}) = \nu(\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} + \nu\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

پس

$$\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{\nu} \nabla(E^{\nu}) - (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}$$

و به همین‌گونه برای \mathbf{B} رفتار می‌کنیم. بنابراین

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = \varepsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}] \\ - \frac{1}{\nu} \nabla \left(\varepsilon_0 E^{\nu} + \frac{1}{\mu_0} B^{\nu} \right) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (18-8)$$

ظاهراً به معادله زیبایی دست نیافتیم! اما با معرفی تانسور تنش ماکسول می‌توان آن را ساده کرد

$$T_{ij} \equiv \varepsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{\nu} \delta_{ij} E^{\nu} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{\nu} \delta_{ij} B^{\nu} \right) \quad (19-8)$$

که شاخصهای i و j مربوط به مختصات x, y, z است و بنابراین در تانسور تنش ۹ مؤلفه (T_{yy}, T_{xx}) و غیره) وجود دارد. دلتای کرونکر، δ_{ij} طبق تعریف وقتی شاخصها یکی باشند برابر یک ($\delta_{xx} = \delta_{yy} = \delta_{zz} = 1$) و در غیر این صورت برابر صفر است ($\delta_{xy} = \delta_{xz} = \delta_{yz} = 0$). از این رو مثلاً داریم

$$T_{xx} = \frac{1}{\nu} \varepsilon_0 (E_x^{\nu} - E_y^{\nu} - E_z^{\nu}) + \frac{1}{\nu \mu_0} (B_x^{\nu} - B_y^{\nu} - B_z^{\nu})$$

$$T_{xy} = \varepsilon_0 (E_x E_y) + \frac{1}{\mu_0} (B_x B_y)$$

و برای بقیه هم به همین منوال. چون در این معادلات دو شاخص وجود دارد در حالی که یک بردار فقط دارای یک شاخص است بعضی اوقات T_{ij} را به صورت \vec{T} می‌نویسند. حاصل ضرب عددی

\vec{T} با یک بردار \mathbf{a} می‌شود

$$(\mathbf{a} \cdot \vec{T})_j = \sum_{i=x,y,z} a_i T_{ij} \quad (۲۰-۸)$$

نتیجه به دست آمده یک بردار است با یک شاخص. مثلاً دیورژانس \vec{T} برای ژامین مؤلفه خود برابر است با

$$(\nabla \cdot \vec{T})_j = \epsilon_0 \left[(\nabla \cdot \mathbf{E}) E_j + (\mathbf{E} \cdot \nabla) E_j - \frac{1}{4} \nabla_j E^2 \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[(\nabla \cdot \mathbf{B}) B_j + (\mathbf{B} \cdot \nabla) B_j - \frac{1}{4} \nabla_j B^2 \right]$$

بنابراین نیرو به‌ازای واحد حجم [معادله (۱۸-۸)] را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \vec{T} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \quad (۲۱-۸)$$

که در آن \mathbf{S} بردار پوینتینگ [معادله (۱۰-۸)] است.

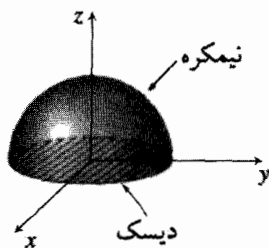
نیروی کل وارد بر بارها در حجم V [معادله (۵-۸)] برابر است با

$$\mathbf{F} = \oint_S \vec{T} \cdot d\mathbf{a} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} d\tau \quad (۲۲-۸)$$

(از قضیه دیورژانس برای برگرداندن جمله اول به‌صورت انتگرال سطحی استفاده کرده‌ایم). در حالت ایستا (یا کلیتر بگوئیم وقتی که $\int \mathbf{S} d\tau$ مستقل از زمان است) جمله دوم حذف می‌شود و نیروی الکترومغناطیسی روی پیکربندی بار را می‌توان کلاً برحسب تانسور تنش در مرز نوشت. از نظر فیزیکی \vec{T} عبارت است از نیرو بر واحد سطح (تنش) که روی سطح اعمال می‌شود. به‌طور دقیقتر، T_{ij} نیروی واحد سطح در جهت i ام است که بر یک جزء سطح در جهت j ام وارد می‌شود — اجزای "قطری" نظیر T_{xx}, T_{yy}, T_{zz} و غیره نشان‌دهنده فشار و اجزای "غیرقطری" نظیر T_{xy}, T_{xz} و غیره برشی هستند.

مثال ۲-۸

نیروی وارد بر نیمکره "شمالی" کره‌ای توپر به شعاع R دارای بار یکنواخت و Q را تعیین کنید [همانند مسئله ۲-۲۳، فقط در اینجا با استفاده از تانسور تنش ماکسول و معادله (۲۲-۸)].



شکل ۴-۸

حل: سطح مرزی از دو قسمت تشکیل شده است — یک کاسه نیمکره مانند به شعاع R و یک قرص دایره‌ای در $\theta = \pi/2$ (شکل ۴-۸). برای کاسه

$$da = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r}$$

و

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{r}$$

مؤلفه‌های دکارتی \hat{r} عبارتند از

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

بنابراین

$$T_{zx} = \epsilon_0 E_z E_x = \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi$$

$$T_{zy} = \epsilon_0 E_z E_y = \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi$$

$$T_{zz} = \frac{\epsilon_0}{2} (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (23-8)$$

و بدیهی است نیروی برآیند در جهت z است و باید محاسبهٔ زیر را انجام دهیم

$$(\vec{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a})_z = T_{zx} da_x + T_{zy} da_y + T_{zz} da_z = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \, d\theta \, d\phi$$

و نیروی وارد بر "کاسه" برابر است با

$$F_{\text{bowl}} = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \left(\frac{Q}{\gamma \pi \varepsilon_0 R} \right)^2 \gamma \pi \int_0^{\pi/\gamma} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{\gamma \pi \varepsilon_0} \frac{Q^2}{16 R^2} \quad (24-8)$$

و برای قرص استوایی داریم

$$d\mathbf{a} = -r dr d\phi \hat{\mathbf{z}} \quad (25-8)$$

و (با توجه به اینکه اکنون در داخل کره هستیم)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\gamma \pi \varepsilon_0} \frac{Q}{R^2} \mathbf{r} = \frac{1}{\gamma \pi \varepsilon_0} \frac{Q}{R^2} r (\cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}})$$

بنابراین

$$T_{zz} = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) = -\frac{\varepsilon_0}{\gamma} \left(\frac{Q}{\gamma \pi \varepsilon_0 R^2} \right)^2 r^2$$

و نیز

$$(\vec{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a})_z = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \left(\frac{Q}{\gamma \pi \varepsilon_0 R^2} \right)^2 r^2 dr d\phi$$

و نیروی وارد بر قرص برابر است با

$$F_{\text{disk}} = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \left(\frac{Q}{\gamma \pi \varepsilon_0 R^2} \right)^2 \gamma \pi \int_0^R r^2 dr = \frac{1}{\gamma \pi \varepsilon_0} \frac{Q^2}{16 R^2} \quad (26-8)$$

و با ترکیب معادلات (24-8) و (26-8) نیروی کل وارد بر نیمکره شمالی برابر می‌شود با

$$F = \frac{1}{\gamma \pi \varepsilon_0} \frac{3Q^2}{16 R^2} \quad (27-8)$$

در اعمال معادله (22-8) حجم مورد نظر حجمی است که در برگیرنده تمام بارهای مورد نظر (و نه سایر بارها) باشد. به عنوان مثال، در حالت اخیر از کل ناحیه $z > 0$ استفاده می‌کنیم. در حالتی که

سطح مرزی شامل کل صفحه xy (و نیز نیمکره‌ای در $r = \infty$ که در آنجا $E = 0$ است و نقشی ایفا نمی‌کند) باشد. حال به جای "کاسه" قسمت بیرونی صفحه ($r > R$) را داریم. در اینجا

$$T_{zz} = -\frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^2}$$

معادله (۲۳-۸) با $\theta = \pi/2$ و $r = R$ ، و da با معادله (۲۵-۸) داده شده است، بنابراین

$$(\vec{T} \cdot d\vec{a})_z = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^2} dr d\phi$$

و سهم مربوط به $r > R$ عبارت است از

$$\frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 2\pi \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{\lambda R^2}$$

■ که همانند نتیجه کاسه [معادله (۲۴-۸)] است.

امیدواریم در جزئیات تمرین ۲-۸ زیاد با دشواری مواجه نبوده باشید. در غیر این صورت کمی درباره آنچه گذشت تأمل کنید. ما نیروی وارد بر یک جسم صلب را حساب می‌کردیم، اما به جای اینکه از انتگرال روی حجم استفاده کنیم، همان‌گونه که انتظار دارید، با استفاده از معادله (۲۲-۸) از انتگرال سطحی سود بردیم؛ تانسور تنش به نحوی آنچه را در داخل می‌گذرد نشان داد.

! مسئله ۳-۸ نیروی جاذبه میان نیمکره‌های شمالی و جنوبی یک پوسته کروی در حال دوران با سرعت زاویه‌ای ω را که چگالی یکنواخت بار آن σ و شعاعش R است پیدا کنید. [این همان مسئله ۴۲-۵ است که اینک با استفاده از تانسور تنش ماکسول و معادله (۲۲-۸) حل می‌کنید].

مسئله ۴-۸ (الف) دو بار همنام q را که به فاصله $2a$ از یکدیگر واقع‌اند در نظر بگیرید. صفحه‌ای با فاصله یکسان از دو بار را محسم کنید. با انتگرال‌گیری از تانسور تنش ماکسول روی این صفحه نیروی وارد از یک بار بر دیگری را حساب کنید.

□ (ب) همین کار را برای بارهای غیرهمنام تکرار کنید.

۳-۲-۸ پایستگی تکانه

بنابه قانون دوم نیوتون، نیروی وارد بر یک جسم برابر است با آهنگ تغییر تکانه

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_{\text{مکانیکی}}}{dt}$$

بنابراین معادله (۲۲-۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{مکانیکی}}}{dt} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} d\tau + \oint_S \vec{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a} \quad (28-8)$$

که در آن $\mathbf{p}_{\text{مکانیکی}}$ تکانه (مکانیکی) کل ذرات محصور در حجم V است. ساختار این عبارت شبیه ساختار قضیه پوئینتینگ [معادله (۹-۸)] است، بنابراین تعبیری مشابه هم دارد: انتگرال اول نشان‌دهنده تکانه ذخیره‌شده در میدانهای الکترومغناطیسی است

$$\mathbf{p}_{\text{الکترومغناطیسی}} = \mu_0 \epsilon_0 \int_V \mathbf{S} d\tau \quad (29-8)$$

در حالی که انتگرال دوم بیانگر تکانه در واحد زمان سیلان یافته از راه سطح به داخل جریان است. از این رو معادله (۲۸-۸) بیان کلی پایستگی تکانه در الکترودینامیک محسوب می‌شود: هرگونه افزایشی در تکانه کل (مکانیکی و الکترومغناطیسی) به صورت تکانه منتقل شده توسط میدانها به حساب می‌آید. (هرگاه V حجم تمام فضا را شامل شود، در این صورت تکانه‌ای به داخل یا خارج منتقل نمی‌شود، و $\mathbf{p}_{\text{مکانیکی}} + \mathbf{p}_{\text{الکترومغناطیسی}}$ ثابت است).

همانند حالت مربوط به پایستگی بار و پایستگی انرژی، برای پایستگی تکانه هم می‌توان یک معادله دیفرانسیل در نظر گرفت. فرض کنید $\rho_{\text{مکانیکی}}$ چگالی تکانه مکانیکی و الکترومغناطیسی $\rho_{\text{الکترومغناطیسی}}$ چگالی تکانه میدانها باشد

$$\rho_{\text{الکترومغناطیسی}} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{S} \quad (30-8)$$

در این صورت معادله (۲۸-۸) به صورت دیفرانسیلی زیر در می‌آید

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{\text{مکانیکی}} + \rho_{\text{الکترومغناطیسی}}) = \nabla \cdot \vec{\mathbf{T}} \quad (31-8)$$

بدیهی است که \vec{T} - چگالی شار تکانه است و نقش \vec{J} (چگالی جریان) در معادله پیوستگی، یا \vec{S} (چگالی شار انرژی) در قضیه پوینتینگ را بازی می‌کند. به‌ویژه T_{zz} تکانه در واحد سطح و واحد زمان در جهت z است و از سطحی می‌گذرد که در امتداد z قرار دارد. توجه کنید که بردار پوینتینگ دو تعبیر کاملاً متفاوت دارد: \vec{S} خودش انرژی در واحد زمان و برای واحد سطح است که توسط میدانهای الکترومغناطیس منتقل می‌شود، در حالی که $\epsilon_0 \mu_0 \vec{S}$ تکانه ذخیره شده در واحد حجم آن میدانهاست. همین‌طور \vec{T} نیز نقشی دوگانه ایفا می‌کند: \vec{T} خودش تنش الکترومغناطیسی (نیرو در واحد سطح) مؤثر بر یک سطح است، و $-\vec{T}$ بیان‌کننده شار تکانه (چگالی جریان تکانه) است که توسط میدانها منتقل می‌شود.

مثال ۳-۸

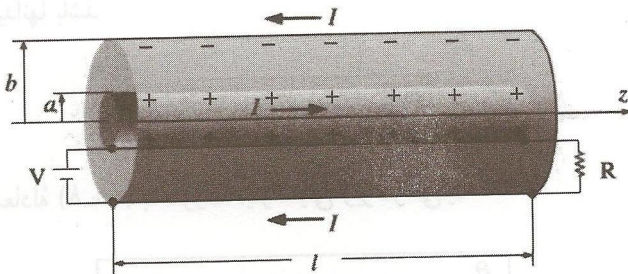
یک کابل هم‌محور به طول l از یک رسانای داخلی (به شعاع a) و یک رسانای خارجی (به شعاع b) تشکیل شده است و از یک باتری و از انتهای دیگر به مقاومتی (شکل ۵-۸) وصل است. رسانای داخلی دارای بار یکنواخت واحد طول λ ، و یک جریان یکنواخت I به سمت راست است؛ رسانای بیرونی دارای بار و جریان مخالف است. تکانه الکترومغناطیسی ذخیره شده در میدانها چقدر است؟

حل: میدانها عبارت‌اند از

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{s} \hat{s} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{s} \hat{\phi}$$

بنابراین بردار پوینتینگ برابر است با

$$\vec{S} = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0 s^2} \hat{z}$$



شکل ۵-۸

بدیهی است که شارش انرژی از باتری به مقاومت است. در واقع، توان منتقل شده عبارت است از

$$P = \int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{s^2} 2\pi s ds = \frac{\lambda I}{2\pi \epsilon_0} \ln(b/a) = IV$$

و این چیزی است که انتظار داشتیم، اما چیزی که فعلاً مورد توجه ما باشد نیست. تکانه مربوط به میدانها برابر است با

$$\mathbf{P}_{\text{الکترومغناطیسی}} = \mu_0 \epsilon_0 \int \mathbf{S} d\tau = \frac{\mu_0 \lambda I}{4\pi^2} \hat{\mathbf{z}} \int_a^b \frac{1}{s^2} 2\pi s ds = \frac{\mu_0 \lambda I l}{2\pi} \ln(b/a) \hat{\mathbf{z}}$$

این، نتیجه حیرت‌آوری است. کابل حرکت نمی‌کند، و میدانها ایستاند، و با وجود این از ما می‌خواهند وجود تکانه در سیستم را باور کنیم. اگر احساساتان به شما می‌گوید که این کل داستان نیست نشان فراست شماست. در واقع وقتی مرکز جرم یک دستگاه جایگزیده در حال سکون است، تکانه کل آن باید صفر باشد. در این مورد معلوم می‌شود که یک تکانه مکانیکی "پنهان" وجود دارد که به عبور جریان وابسته است، و این تکانه دقیقاً تکانه میدانها را خنثی می‌کند. اما موضع‌یابی تکانه پنهان آسان نیست، و این در واقع یک اثر نسبیتی است، از این رو آن را به فصل ۱۲ (تمرین ۱۲-۱۲) موکول می‌کنیم.

حال فرض کنید مقاومت را زیاد کنیم تا جریان کاهش یابد. میدان مغناطیسی متغیر یک میدان الکتریکی القا می‌کند [معادله (۷-۱۹)]:

$$\mathbf{E} = \left[\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dI}{dt} \ln s + K \right] \hat{\mathbf{z}}$$

این میدان بر $\pm \lambda$ نیرو اعمال می‌کند

$$\mathbf{F} = \lambda l \left[\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dI}{dt} \ln a + K \right] \hat{\mathbf{z}} - \lambda l \left[\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dI}{dt} \ln b + K \right] \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0 \lambda l}{2\pi} \frac{dI}{dt} \ln(b/a) \hat{\mathbf{z}}$$

بنابراین تکانه کل منتقل شده به کابل، وقتی جریان از I به صفر کاهش می‌یابد، برابر است با

$$\mathbf{P}_{\text{مکانیکی}} = \int \mathbf{F} dt = \frac{\mu_0 \lambda I l}{2\pi} \ln(b/a) \hat{\mathbf{z}}$$

که دقیقاً برابر است با تکانه‌ای که در ابتدا در میدانها ذخیره شده است. (کابل پس زده نمی‌شود، زیرا ضربه‌ای مساوی و در جهت مخالف، به علت ناپدید شدن همزمان تکانه پنهان، منتقل می‌شود). ■

مسئله ۵-۸ خازن تختی با صفحات موازی و نامتناهی در نظر بگیرید که صفحه پایینی آن (در $z = -d/2$) دارای چگالی بار $-\sigma$ و صفحه بالایی (در $z = +d/2$) دارای چگالی بار $+\sigma$ است.

(الف) تمام اجزای تانسور تنش را برای ناحیه بین صفحات حساب کنید. پاسخ خود را به صورت

ماتریس 3×3 زیر بنویسید

$$\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

(ب) با استفاده از معادله (۲۲-۸) نیروی وارد بر واحد سطح صفحه بالایی را حساب کنید. آن را با معادله (۵۱-۲) مقایسه کنید.

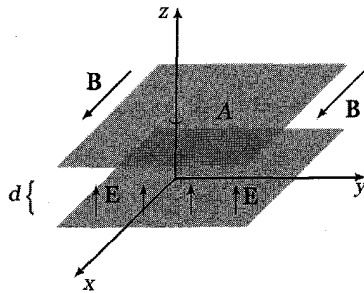
(ج) تکانه‌ای که در واحد زمان از واحد سطح صفحه xy (یا هر صفحه دیگر موازی با آن که بین دو صفحه خازن باشد) می‌گذرد را حساب کنید.

(د) این تکانه‌ها جذب صفحات خازن می‌شوند، در نتیجه صفحات پس زده می‌شوند (مگر اینکه نیروهای غیرالکتریکی برای جلوگیری از حرکت صفحات داشته باشیم). نیروی پس زنی واحد سطح بالایی را حساب کنید و پاسخ خود را با (ب) مقایسه کنید. [نکته: این نیروی جدیدی نیست و فقط راه دیگری برای محاسبه همان نیروست - در (ب) آن را از قانون لورنتس و در (د) با استناد به پایستگی تکانه حساب کردیم.]

مسئله ۶-۸ یک خازن صفحه-موازی شارژشده (با میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E} = E\hat{z}$) در یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B} = B\hat{x}$ مطابق شکل ۶-۸ قرار دارد.^۱ (الف) تکانه الکترومغناطیسی در فضای بین صفحات را بیابید.

(ب) حال یک سیم مقاومت دار بین صفحات در امتداد محور z قرار می‌دهیم تا خازن به تدریج خالی شود. به هر جریان گذرنده از سیم یک نیروی مغناطیسی اثر می‌کند؛ ضربه کل منتقل شده به دستگاه، در طول تخلیه چقدر است؟

1. F. S. Johnson, B. L. Cragin, and R. R. Hodges, *Am. J. Phys.* **62**, 33 (1994).



شکل ۶-۸

(ج) به جای قطع میدان الکتریکی [نظیر (ب)] فرض کنید میدان مغناطیسی را به آهستگی کم کنیم. این تغییر، میدان الکتریکی فاراده را القا می‌کند که به نوبه خود نیرویی بر صفحات وارد می‌کند. نشان دهید که ضربه کل (باز هم) برابر است با تکانه اصلی ذخیره شده در میدانها. □

۴-۲-۸ تکانه زاویه‌ای

تا اینجا میدانهای الکترومغناطیسی (که در آغاز به عنوان میانجی نیروی بین بارها معرفی شدند) دارای هویت مخصوص به خود در نظر گرفتیم. این میدانها حامل انرژی [معادله (۸-۱۳)]

$$u_{\text{الکترومغناطیسی}} = \frac{1}{4} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad (۳۲-۸)$$

و تکانه [معادله (۸-۳۰)]

$$\mathcal{P}_{\text{الکترومغناطیسی}} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{S} = \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (۳۳-۸)$$

بوده و به همین دلیل، دارای تکانه زاویه‌ای هم هستند:

$$\ell_{\text{الکترومغناطیسی}} = \mathbf{r} \times \mathcal{P}_{\text{الکترومغناطیسی}} = \epsilon_0 [\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})] \quad (۳۴-۸)$$

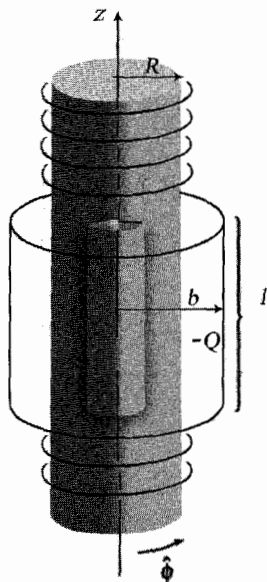
حتی میدانهای کاملاً ایستا، می‌توانند، در صورتی که $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ غیر صفر باشد تکانه و تکانه زاویه‌ای داشته باشند، و فقط وقتی سهم این میدانها را در نظر بگیریم که قوانین پایستگی کلاسیک برقرارند.

مثال ۴-۸

یک سیملوله خیلی طویل به شعاع R ، با n دور سیم در واحد طول و جریان I را در نظر بگیرید. هم محور با سیملوله دو پوسته استوانه‌ای دراز، به طول l قرار دارند — یکی از آنها در داخل سیملوله در شعاع a و حامل بار $+Q$ است که به طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده است؛ دیگری در خارج سیملوله در شعاع b و حامل بار $-Q$ است (شکل ۷-۸)؛ فرض می‌کنیم l به مراتب از b بزرگتر باشد). وقتی از جریان سیملوله به تدریج کاسته می‌شود، استوانه‌ها شروع به چرخش می‌کنند (همان طور که در مثال ۸-۷ دیدیم). پرسش: تکانه زاویه‌ای از کجا می‌آید؟^۱

حل: این تکانه در آغاز در میدان ذخیره شده بود. قبل از قطع جریان یک میدان الکتریکی

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{1}{s} \hat{s} \quad (a < s < b)$$



شکل ۷-۸

۱. این نوع دیگری از "پارادوکس قرص فاینمن" است

R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures*, vol 2, pp.

17-5 (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1964) suggested by F. L. Boos, Jr. (*Am. J. Phys.* **52** 756 (1984)).

الگوی مشابهی هم قبلاً توسط R. H. Romer (*Am. J. Phys.* **34**, 772 (1966)) ارائه شده بود. برای اطلاع

از مراجع بیشتر به مرجع زیر مراجعه کنید

T. C. E. Ma, *Am. J. Phys.* **54**, 949 (1986).

در ناحیه بین استوانه‌ها، و نیز یک میدان مغناطیسی

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I \hat{\mathbf{z}} \quad (s < R)$$

در داخل سیملوله وجود داشت. بنابراین چگالی تکانه [معادله (۳۳-۸)] در ناحیه $a < s < R$ برابر بود با

$$\mathcal{P}_{\text{الکترومغناطیسی}} = \frac{\mu_0 n I Q}{2\pi l s} \hat{\phi}$$

و چگالی تکانه زاویه‌ای هم عبارت بود از

$$\mathcal{L}_{\text{الکترومغناطیسی}} = \mathbf{r} \times \mathcal{P}_{\text{الکترومغناطیسی}} = -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi l} \hat{\mathbf{z}}$$

که مقداری است ثابت؛ برای تعیین تکانه زاویه‌ای کل در میدانها، به سادگی آن را در حجم $\pi(R^2 - a^2)l$ ضرب می‌کنیم:

$$\mathbf{L}_{\text{الکترومغناطیسی}} = -\frac{1}{2} \mu_0 n I Q (R^2 - a^2) \hat{\mathbf{z}} \quad (۳۵-۸)$$

با قطع جریان، میدان مغناطیسی متغیر، بنابر قانون فاراده، یک میدان الکتریکی پیرامونی القا می‌کند:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \mu_0 n \frac{dI}{dt} \frac{R^2}{s} \hat{\phi} & (s > R) \\ -\frac{1}{2} \mu_0 n \frac{dI}{dt} s \hat{\phi} & (s < R) \end{cases}$$

بنابراین گشتاور مؤثر بر استوانه بیرونی برابر است با

$$\mathbf{N}_b = \mathbf{r} \times (-QE) = \frac{1}{2} \mu_0 n Q R^2 \frac{dI}{dt} \hat{\mathbf{z}}$$

و این هم تکانه زاویه‌ای زیر را ایجاد می‌کند

$$\mathbf{L}_b = \frac{1}{c} \mu_0 n Q R^2 \hat{\mathbf{z}} \int_I \frac{dI}{dt} dt = -\frac{1}{c} \mu_0 n I Q R^2 \hat{\mathbf{z}}$$

به‌گونه‌ای مشابه، گشتاور مؤثر بر استوانه داخلی برابر است با

$$\mathbf{N}_a = -\frac{1}{c} \mu_0 n Q a^2 \frac{dI}{dt} \hat{\mathbf{z}}$$

و افزایش تکانه زاویه‌ای آن برابر است با

$$\mathbf{L}_a = \frac{1}{c} \mu_0 n I Q a^2 \hat{\mathbf{z}}$$

بنابراین به‌طور کلی داریم $\mathbf{L} = \mathbf{L}_a + \mathbf{L}_b$ = الکترومغناطیسی. کاهش تکانه زاویه‌ای توسط میدانها دقیقاً با تکانه زاویه‌ای به‌دست آمده توسط استوانه‌ها برابر است، و تکانه زاویه‌ای کل (میدانها به‌علاوه ماده) پایسته است.

اتفاقاً، مورد زاویه‌ای از بعضی جنبه‌ها تمیزتر از مشابه خطی آن است (مثال ۸-۳)، زیرا دیگر تکانه زاویه‌ای "پنهان" برای جبران تکانه زاویه‌ای میدانها وجود ندارد، و استوانه‌ها واقعاً با قطع میدان مغناطیسی می‌چرخند. اگر یک دستگاه جایگزیده متحرک نباشد تکانه خطی کل آن الزاماً صفر است،^۱ اما قضیهٔ متناظری برای تکانه زاویه‌ای وجود ندارد، و در مسئلهٔ ۸-۱۲ مثال زیبایی را خواهید دید که در آن اصلاً چیزی حرکت نمی‌کند — حتی جریانی وجود ندارد — و با وجود این تکانه زاویه‌ای غیر صفر است.

مسئله ۷-۸ فرض کنید در تمرین ۸-۴ به‌جای آنکه میدان مغناطیسی را (با کاهش I) قطع کنیم، میدان الکتریکی را با قرار دادن یک رسانای ضعیف^۲ بین استوانه‌ها قطع کنیم. (باید برشی در سیملوله ایجاد کنیم، تا استوانه‌ها بتوانند باهم آزادانه بچرخند.) از روی نیروی مغناطیسی وارد بر جریان در پره، تکانه زاویه‌ای کل منتقل‌شده به استوانه‌ها را وقتی تخلیه و شارژ می‌شوند حساب کنید (حال آنها به‌طور صلب به هم متصل‌اند و بنابراین با هم می‌چرخند). با تکانه زاویه‌ای اولیه ذخیره‌شده در میدانها [معادلهٔ (۸-۳۵)] مقایسه کنید. (توجه کنید سازوکاری که بر اساس آن تکانه زاویه‌ای از میدانها به استوانه‌ها منتقل می‌شود در این دو مورد، کاملاً متفاوت‌اند: در تمرین ۸-۴، قانون فاراده و در اینجا قانون نیروی لورنتس عامل هستند.)

1. S. Coleman and J. H. van Vleck, *Phys. Rev.* **171**, 1370 (1968).

۲. در تمرین ۸-۴ جریان را به‌تدریج کم کردیم تا وضعیت شبه‌ایستا باشد؛ در اینجا میدان الکتریکی را به آهستگی کم می‌کنیم تا جریان جابه‌جایی قابل اغماض شود.

! مسئله ۸-۱ کره‌ای آهنی به شعاع R را که دارای بار Q و مغناطش یکنواخت $\mathbf{M} = M\hat{z}$ است در نظر بگیرید. کره در آغاز در حال سکون است.

(الف) تکانه زاویه‌ای ذخیره شده در میدانهای الکترومغناطیسی را محاسبه کنید.

(ب) فرض کنید که کره به تدریج (و به طور یکنواخت) و امغناطیده شود (مثلاً با گرم کردن آن تا دمای بالاتر از نقطه کوری). با استفاده از قانون فاراده میدان الکتریکی القایی را حساب کنید، گشتاور مؤثر از میدان بر کره را محاسبه کنید و تکانه زاویه‌ای کل وارد شده به کره در فرایند و امغناطیدگی را به دست آورید.

(ج) فرض کنید به جای و امغناطش کره، آن را با اتصال یک سیم زمین به قطب شمال تخلیه کنیم. فرض کنید جریان از روی سطح به گونه‌ای بگذرد که چگالی باریک‌نواخت باقی بماند. با استفاده از قانون نیروی لورنتس گشتاور مؤثر بر کره را معین کنید، و تکانه زاویه‌ای کل داده شده به کره در فرایند تخلیه را هم محاسبه کنید. (میدان مغناطیسی در سطح ناپیوسته است ... آیا این مهم است؟) پاسخ: $MAR^2 \mu_0 (2/9)$. □

مسائل تکمیلی فصل ۸

مسئله ۸-۲۹ یک سیمولوله بسیار طویل به شعاع a با n دور سیم در واحد طول دارای جریان I_0 است. هم محور با سیمولوله، در شعاع $a \gg b$ حلقه‌ای از سیمی به مقاومت R قرار دارد. وقتی جریان سیمولوله (به تدریج) کم می‌شود، یک جریان I_r در حلقه القا می‌شود.

(الف) I_r را بر حسب dI_0/dt حساب کنید.

(ب) توان $(I_r^2 R)$ داده شده به حلقه باید ناشی از سیمولوله باشد. این را با محاسبه بردار پوئینتینگ در خارج از سیمولوله تحقیق کنید. (میدان الکتریکی از تغییرات شار سیمولوله ناشی می‌شود؛ میدان مغناطیسی هم از جریان حلقه به وجود می‌آید.) با انتگرال‌گیری روی تمام سیمولوله توان کل را به دست آورید.

مسئله ۸-۳۰ کره‌ای به شعاع R دارای قطبش یکنواخت \mathbf{p} و یک مغناطش یکنواخت \mathbf{M} (و نه الزاماً، در همان جهت) است. تکانه الکترومغناطیسی این پیکربندی را بیابید. پاسخ: $[(4/9)\pi\mu_0 R^2(\mathbf{M} \times \mathbf{p})]$.

۱. این نوع پارادوکس قرص فاینمن توسط N. L. Sharma در مرجع (1988) *Am. J. Phys.* **56**, 420 بیان شد؛ الگوی مشابهی نیز در مراجع زیر تحلیل شده‌اند:

E. M. Pugh and G. E. Pugh, *Am. J. Phys.* **35**, 153 (1967) and by R. H. Romer, *Am. J. Phys.* **35**, 445 (1967).

۲. برای بحث تفصیلی به مرجع M. A. Heald, *Am. J. Phys.* **56**, 540 (1988) رجوع کنید.

۳. برای یک بحث جالب به مرجع R. H. Romer, *Am. J. Phys.* **63**, 777 (1995) رجوع کنید.

مسئله ۸-۱۱ الکترتون را یک پوستهٔ کروی باردار با چگالی یکنواخت که دارای بار e و شعاع R است و با سرعت زاویه‌ای ω حول محورش می‌چرخد در نظر بگیرید.

(الف) محتوای انرژی کل میدانهای الکترومغناطیسی را حساب کنید.

(ب) تکانهٔ زاویه‌ای کل موجود در میدانها را پیدا کنید.

(ج) بنابه فرمول اینشتین ($E = mc^2$)، انرژی موجود در میدانها باید در جرم الکترتون سهیم شود.

لورنتس و دیگران معتقد بودند که جرم کل الکترتون را باید چنین حساب کرد: $m_e c^2 = U_{\text{الکترومغناطیسی}}$.

افزون بر این فرض کنید که تکانهٔ زاویه‌ای اسپینی الکترتون تماماً مربوط به میدانهای الکترومغناطیسی

باشد: $\hbar/2 = I_{\text{الکترومغناطیسی}}$. با این دو فرض، شعاع و سرعت زاویه‌ای الکترتون را تعیین کنید.

حاصلضرب ωR آنها چقدر است؟ آیا این الگوی کلاسیک منطقی است؟

! مسئله ۸-۱۲ فرض کنید یک بار الکتریکی q_e و یک تک‌قطبی مغناطیسی q_m دارید.

میدان بار الکتریکی برابر است با

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

و میدان تک‌قطبی مغناطیسی هم برابر است با

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

تکانهٔ زاویه‌ای کل ذخیره‌شده در میدانها را در حالی که دویار به فاصلهٔ d از هم واقع‌اند بیابید.

پاسخ: $^3(\mu_0/4\pi)q_e q_m$.

مسئله ۸-۱۳ یل دویانگ از کالج هوب، می‌گوید که چون استوانه‌های مثال ۸-۴ را برای چرخش

(مثلاً در سرعتهای زاویه‌ای ω_e و ω_b) آزاد می‌گذاریم، در واقع یک میدان مغناطیسی پسماند و

بنابراین تکانه زاویه‌ای در میدانها، حتی بعد از آنکه جریان سیمولوله قطع شد هم وجود دارد. اگر

۱. رجوع کنید به: J. Higbie, *Am. J. Phys.* **56**, 378 (1988).

۲. این دستگاه به نام دوقطبی تامسون شناخته می‌شود. برای آشنایی با مراجع و بحث بیشتر رجوع کنید به:

I. Adawi, *Am. J. Phys.* **44**, 762 (1976) and *Phys. Rev.* **D31**, 3301 (1985), and K. R.

Brownstein, *Am. J. Phys.* **57**, 420 (1989).

۳. توجه کنید که این نتیجه از فاصلهٔ d مستقل است (!)؛ جهت آن از q_e به q_m است. در مکانیک کوانتومی تکانه زاویه‌ای

مضربی از $\hbar/2$ است، لذا بنابراین نتیجه در صورت وجود یک تک‌قطب مغناطیسی، بارهای الکتریکی و مغناطیسی باید

کوانتیده باشند: $1, 2, \dots, n\hbar/2 = \mu_0 q_e q_m / 4\pi$ ، نظری که اولین بار توسط دیراک در ۱۹۳۱ میلادی بیان

شد حتی اگر یک تک‌قطبی هم جایی در دنیا وجود می‌داشت می‌توانست دلیل ناپیوستگی بار الکتریکی را شرح دهد.

استوانه‌ها سنگین باشند، این تصحیح قابل گذشت است، اما در حالت کلی باید مسئله را بدون این فرض خاص بررسی کرد.

(الف) تکانه زاویه‌ای نهایی میدانها را (برحسب ω_a و ω_b) محاسبه کنید.

(ب) با شروع به دوران استوانه‌ها، تغییرات میدان مغناطیسی آنها یک میدان الکتریکی سمتی القا می‌کند که آن هم به نوبه خود در ایجاد گشتاور تأثیرگذار است. تکانه زاویه‌ای اضافی حاصل را پیدا کنید و آن را با جواب خودتان در (الف) مقایسه کنید. پاسخ: $\mu_0 Q^2 \omega_b (b^2 - a^2) / 4\pi l$.

مسئله ۱۴-۸^۱ بار نقطه‌ای q به فاصله $a > R$ از محور یک سیمولوله نامتناهی (به شعاع R ، دارای n دور سیم در واحد طول و حامل جریان I) واقع است. تکانه خطی و تکانه زاویه‌ای در این میدانها را بیابید. (q را روی محور x و سیمولوله را در محور z بگیرد؛ سیمولوله را نارسانا فرض کنید تا نگران بارهای القایی روی سطح آن نباشید). پاسخ: $\hat{y} (\mu_0 q n I R^2 / 2a)$; الکترومغناطیسی $\mathbf{P} = 0$; الکترومغناطیسی $[\mathbf{L}]$.

مسئله ۱۵-۸^۲ (الف) بحث بخش ۸-۱۲ را با عنایت به معادله (۶-۸) دنبال کنید، اما به جای \mathbf{J} از \mathbf{J}_f استفاده کنید. نشان دهید که بردار پوینتینگ می‌شود

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

و آهنگ تغییر چگالی انرژی میدانها برابر است با

$$\frac{\partial u_{\text{الکترومغناطیسی}}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

نشان دهید که برای محیطهای خطی داریم

$$u_{\text{الکترومغناطیسی}} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

(ب) به همین نحو بحث بخش ۸-۲-۲ را با عنایت به معادله (۱۵-۸) و قرار دادن ρ_f و \mathbf{J}_f به جای ρ و \mathbf{J} مجدداً دنبال کنید. نگران تشکیل تانسور تنش ماکسول نباشید، اما نشان دهید که چگالی تکانه برابر است

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$$

□

۱. برای مطالعه این قسمت و مسائل مرتبط با آن، مرجع زیر را ببینید

F. S. Johnson, B. L. Cragin, and R. R. Hodges, *Am. J. Phys.* **62**, 33 (1994).

۲. پیشنهاد این مسئله را دیوید تولس از دانشگاه واشنگتن داد. برای معنی "انرژی" در این بحث به بخش ۴-۴-۳ رجوع کنید.

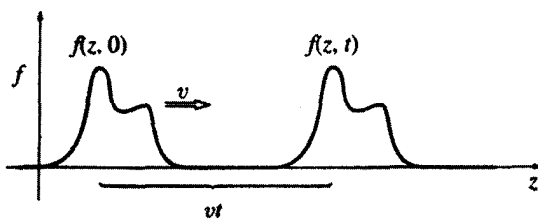
امواج الکترومغناطیسی

۱-۹ امواج یک بعدی

۱-۱-۹ معادله موج

”موج“ چیست؟ به نظر نمی‌رسد بتوان به این پرسش پاسخ کاملاً قانع‌کننده‌ای داد — این مفهوم ذاتاً تا حدودی نامعلوم است. اما پاسخ را چنین آغاز می‌کنیم: موج عبارت از یک اختلال در محیطی پیوسته است که با شکل مشخص و سرعت ثابت منتشر می‌شود. بی‌درنگ باید قیدهایی را اضافه کنیم: در حضور جذب‌کننده، موج در حین حرکت از نظر اندازه کوچک می‌شود؛ در محیطهای پاشنده بسامدهای مختلف با سرعتهای متفاوت حرکت می‌کنند؛ در دو یا سه بعد همین‌که موج گسترش می‌یابد از دامنه‌اش کاسته می‌شود؛ و بدیهی است امواج ساکن به هیچ‌وجه انتشار نمی‌یابند؛ اما اینها ظرایف جزئی هستند؛ بهتر است در آغاز مورد ساده‌ای را در نظر بگیریم که در آن شکل موج و سرعتش ثابت است (شکل ۱-۹).

چنین مطلبی را از نظر ریاضی چگونه نمایش می‌دهید؟ در شکل ۱-۹ موج را در دو زمان مختلف نشان داده‌ایم، یک‌بار در $t = 0$ و دوباره در زمان دیرتر t . بدیهی است هر نقطه روی موج جابه‌جایی ساده‌ای به سمت راست و به مقدار vt خواهد داشت، که در آن v سرعت است. این



شکل ۱-۹

موج را می‌توان با تکان دادن انتهای یک تار ایجاد کرد؛ $f(z, t)$ نمایانگر جابه‌جایی تار در نقطه z و در زمان t است. اگر شکل اولیه تار، $f(z, 0) \equiv g(z)$ باشد، شکل بعدی $f(z, t)$ چیست؟ بدیهی است که جابه‌جایی در نقطه z ، در زمان دیرتر t ، با جابه‌جایی یک فاصله vt به سمت چپ (یعنی در $z - vt$) که به زمان $t = 0$ می‌رسیم یکی است:

$$f(z, t) = f(z - vt, 0) = g(z - vt) \quad (1-9)$$

این گزاره شالوده (ریاضی) حرکت موج را مشخص می‌کند. این گزاره به ما می‌گوید که تابع $f(z, t)$ که ممکن است به z و t به هر صورت قبلی بستگی داشته باشد، در واقع دارای بستگی به یک ترکیب خیلی خاص آنها، $z - vt$ است؛ هرگاه این درست باشد، تابع $f(z, t)$ نشان‌دهنده موجی با شکل ثابت است که در جهت z با سرعت v منتشر می‌شود. به‌عنوان مثال اگر A و b ثابت‌هایی (با یكاهای مناسب) باشند،

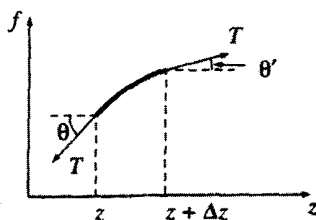
$$f_1(z, t) = Ae^{-b(z-vt)^2}, \quad f_2(z, t) = A \sin[b(z-vt)], \quad f_3(z, t) = \frac{A}{b(z-vt)^2 + 1}$$

همگی نمایانگر امواج‌اند (البته با شکلهای متفاوت)، اما توابع زیر چنین نیستند

$$f_4(z, t) = Ae^{-b(bz^2 + vt)} \quad \text{و} \quad f_5(z, t) = A \sin(bz) \cos(bvt)^2$$

چرا یک تار کشیده حرکت موجی را نگه می‌دارد؟ در حقیقت، این پیامد قانون دوم نیوتون است. تار بلندی با کشش T در نظر بگیرید. اگر آن را از وضعیت تعادل جابه‌جا کنیم، نیروی عرضی خالص وارد بر قسمت بین z و $z + \Delta z$ (شکل ۲-۹) عبارت است از

$$\Delta F = T \sin \theta' - T \sin \theta$$



شکل ۲-۹

که در آن θ' زاویه تار با محور z در نقطه $z + \Delta z$ و θ همین زاویه در نقطه z است. به شرط آنکه تغییر شکل و وضعیت تار زیاد نباشد، این زوایا کوچک هستند (شکل را اغراق آمیز رسم کرده‌ایم) و به جای سینوس زوایا می‌توان تانژانت آنها را به کار برد:

$$\Delta F \cong T(\tan \theta' - \tan \theta) = T \left(\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z+\Delta z} - \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_z \right) \cong T \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \Delta z$$

با در نظر گرفتن μ به عنوان جرم واحد طول تار و اعمال قانون دوم نیوتون داریم

$$\Delta F = \mu(\Delta z) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

و بنابراین

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

از این رو اختلال کوچک روی تار از معادله زیر تبعیت می‌کند

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}} \quad (۲-۹)$$

که در آن v (آن‌گونه که به زودی خواهیم دید سرعت انتشار است) برابر است با

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (۳-۹)$$

معادله (۲-۹) را معادله موج (کلاسیکی) می نامند، زیرا تمام توابع به صورت زیر را به عنوان

جواب می پذیرد

$$f(z, t) = g(z - vt) \quad (۴-۹)$$

(به عبارت دیگر این جواب می تواند به هر نوع تابعی از متغیرهای z و t در ترکیب خاص $u \equiv z - vt$) متعلق باشد، ما از قبل می دانیم که چنین توابعی نمایش دهنده انتشار موج با سرعت v در امتداد z است. برای معادله (۴-۹) این بدان معناست که

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{dg}{du} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{dg}{du}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{dg}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{dg}{du}$$

و

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{dg}{du} \right) = \frac{d^2 g}{du^2} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{d^2 g}{du^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dg}{du} \right) = -v \frac{d^2 g}{du^2} \frac{\partial u}{\partial t} = v^2 \frac{d^2 g}{du^2}$$

بنابراین

$$\frac{d^2 g}{du^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

توجه کنید که $g(u)$ می تواند هر نوع تابع (مشتق پذیر) باشد. هرگاه اختلال بدون تغییر شکل منتشر شود، در این صورت در معادله موج صدق می کند.

اما تنها توابعی به صورت $g(z - vt)$ جواب نیستند. در معادله موج با مجذور v سروکار داریم، بنابراین به یک رشته جواب دیگر با تغییر علامت سرعت دست می یابیم

$$f(z, t) = h(z + vt) \quad (۵-۹)$$

بدیهی است، این معادله نشان دهنده موجی است که در جهت منفی z انتشار می یابد، و قطعاً از نظر فیزیکی منطقی است که چنین جوابهایی مجاز باشند. آنچه را که شاید باعث تعجب است اینکه کلیترین جواب معادله موج عبارت است از موجی به سمت راست به علاوه موجی به سمت چپ

$$f(z, t) = g(z - vt) + h(z + vt) \quad (۶-۹)$$

(توجه کنید که معادله موج، خطی است: مجموع هر دو جواب، خود یک جواب است.) هر جوابی برای معادله موج را می‌توان بدین صورت نوشت.

همانند معادله نوسانگر هماهنگ ساده، معادله موج در همه جای فیزیک حضور دارد. اگر چیزی در ارتعاش باشد، معادله نوسانگر تقریباً به‌طور قطع (اقلاً برای دامنه‌های کوچک) مستول است، و اگر چیزی حرکت موجی داشته باشد (صرفنظر از اینکه محتوای آن مکانیکی، آکوستیکی، اپتیکی یا اقیانوس‌نگاری باشد)، معادله موج (شاید هم با ترتیبانی) باید به‌کار گرفته شود.

مسئله ۹-۱ با مشتق‌گیری صریح نشان دهید که توابع f_1 ، f_2 و f_3 متن درس مصادیقی از معادله موج هستند. نشان دهید که f_4 و f_5 چنین نیستند.

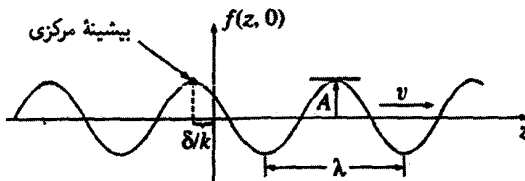
مسئله ۹-۲ نشان دهید که موج ساکن $f(z, t) = A \sin(kz) \cos(kvt)$ در معادله موج صدق می‌کند، و آن را به‌صورت مجموع یک موج رونده به سمت چپ و یک موج رونده به سمت راست [معادله (۹-۶)] بیان کنید.

۹-۱-۲ امواج سینوسی شکل

(۱) اصطلاح‌شناسی. از بین تمام اشکال موج، موج سینوسی (به دلیل معتبر) آشناترین آنهاست:

$$f(z, t) = A \cos[k(z - vt) + \delta] \quad (9-7)$$

شکل ۹-۳ این تابع را برای زمان $t = 0$ نشان می‌دهد. A دامنه موج است که عددی مثبت و نشان‌دهنده بیشترین جابه‌جایی از وضعیت تعادل است. شناسه کسینوس، فاز نام دارد و δ هم ثابت فاز است. [می‌توان هر مضرب صحیحی از 2π را به آن افزود بدون آنکه $f(z, t)$ تغییر کند؛ معمولاً δ مقداری میان $0 < \delta < 2\pi$ دارد]. توجه کنید که در $z = vt - \delta/k$ ، شناسه کسینوس یا فاز صفر است؛ این را "بیشینه مرکزی" می‌نامیم. به‌ازای $\delta = 0$ ، بیشینه مرکزی در لحظه $t = 0$



شکل ۹-۳

از مبدأ می‌گذرد؛ در حالت کلیتر، δ/k فاصله‌ای است که بیشینه مرکزی (و در نتیجه کل موج) به آن اندازه "تأخیر" دارد. سرانجام، k را عدد موج می‌خوانند؛ این کمیت با طول موج λ به صورت زیر بستگی دارد

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (۸-۹)$$

زیرا وقتی که z به اندازه $2\pi/k$ جلو می‌رود کسینوس یک چرخه کامل انجام می‌دهد. با گذشت زمان تمام قطار موج با سرعت v به سمت راست می‌رود. در هر نقطه ثابت z تار به طرف بالا و پایین نوسان می‌کند و یک چرخه کامل این نوسان در مدت زمان T که دوره (زمان تناوب) می‌نامند صورت می‌گیرد

$$T = \frac{2\pi}{kv} \quad (۹-۹)$$

بسامد، ν ، یعنی تعداد نوسانها در واحد زمان برابر است با

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{kv}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} \quad (۱۰-۹)$$

واحد مناسبتری که برای اهداف ما مفید است بسامد زاویه‌ای ω است و این نام به دلیل آن است که در مورد مشابه حرکت دورانی یکنواخت نشان‌دهنده تعداد رادیانهای جاروب شده در واحد زمان است

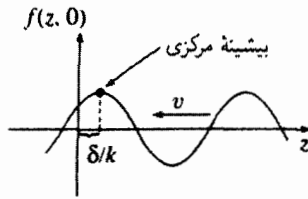
$$\omega = 2\pi\nu = kv \quad (۱۱-۹)$$

معمولاً بهتر است که موج سینوسی [معادله (۷-۹)] را به جای ν برحسب ω بنویسیم

$$f(z, t) = A \cos(kz - \omega t + \delta) \quad (۱۲-۹)$$

یک موج سینوسی با عدد موج k و بسامد (زاویه‌ای) ω که به سمت چپ حرکت می‌کند به صورت زیر نوشته می‌شود

$$f(z, t) = A \cos(kz + \omega t - \delta) \quad (۱۳-۹)$$



شکل ۹-۴

علامت ثابت فازی را طوری انتخاب می‌کنیم که با قرارداد قبلی یعنی اینکه δ/k نشان‌دهنده فاصله‌ای باشد که موج "تأخیر" دارد همخوانی داشته باشد (در مورد اخیر چون موج به طرف چپ حرکت می‌کند مفهوم تأخیر، انتقال به سمت راست است). در لحظه $t = 0$ موج همانند شکل ۹-۴ است. ضمناً چون کسینوس تابعی زوج است می‌توانیم معادله (۹-۱۳) را به صورت زیر هم بنویسیم

$$f(z, t) = A \cos(-kz - \omega t + \delta) \quad (۹-۱۴)$$

مقایسه این معادله با (۹-۱۲) نشان می‌دهد که در عمل می‌توانیم به سادگی علامت k را تغییر دهیم تا موجی با همان دامنه، فاز، بسامد و طول موج داشته باشیم که در جهت مخالف حرکت می‌کند. (۲) نمادگذاری مختلط. با توجه به فرمول اولیو

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (۹-۱۵)$$

موج سینوسی [معادله (۹-۱۲)] را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$f(z, t) = \text{Re}[Ae^{i(kz - \omega t + \delta)}] \quad (۹-۱۶)$$

که در آن $\text{Re}(\xi)$ نشان‌دهنده قسمت حقیقی عدد مختلط ξ است. از این جهت است که تابع موج مختلط زیر را تعریف می‌کنیم

$$\tilde{f}(z, t) \equiv \tilde{A}e^{i(kz - \omega t)} \quad (۹-۱۷)$$

که در آن دامنه مختلط $\tilde{A} = Ae^{i\delta}$ ثابت فاز را هم در بر می‌گیرد. تابع موج واقعی، قسمت حقیقی

\bar{f} است

$$f(z, t) = \text{Re}[\bar{f}(z, t)] \quad (۱۸-۹)$$

با داشتن \bar{f} ، به دست آوردن f کار ساده‌ای است؛ فلسفه استفاده از نمادگذاری مختلط آن است که کار کردن با توابع نمایی از توابع سینوسی و کسینوسی آسانتر است.

مثال ۹-۱

فرض کنید بخواهیم دو موج سینوسی زیر را با هم جمع کنیم

$$f_2 = f_1 + f_2 = \text{Re}(\bar{f}_1) + \text{Re}(\bar{f}_2) = \text{Re}(\bar{f}_1 + \bar{f}_2) = \text{Re}(\bar{f}_2)$$

در این معادله $\bar{f}_2 = \bar{f}_1 + \bar{f}_2$ است. توابع موج مختلط متناظر را به سادگی جمع کرده و آن‌گاه قسمت حقیقی را می‌گیریم. به‌ویژه اگر هر دو موج دارای بسامدها و عددهای موج مساوی باشند

$$\bar{f}_2 = \bar{A}_1 e^{i(kz - \omega t)} + \bar{A}_2 e^{i(kz - \omega t)} = \bar{A}_2 e^{i(kz - \omega t)}$$

که در آن

$$\bar{A}_2 = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 \quad \text{یا} \quad A_2 e^{i\delta_2} = A_1 e^{i\delta_1} + A_2 e^{i\delta_2} \quad (۱۹-۹)$$

بدیهی است که تنها دامنه‌های (مختلط) را جمع می‌کنیم. موج مرکب، همان بسامد و طول موج را دارد

$$f_2(z, t) = A_2 \cos(kz - \omega t + \delta_2)$$

و به سادگی می‌توان A_2 و δ_2 را از معادله (۱۹-۹) به دست آورد (مسئله ۹-۳). سعی کنید این کار را بدون استفاده از نمادگذاری مختلط انجام دهید — خواهید دید که اتحادهایی ساده شبیه جبر پیدا می‌کنید. ■

(۳) ترکیبهای خطی امواج سینوسی. گرچه تابع سینوسی ۹-۱۷ یک صورت موجی بسیار خاص است، واقعیت این است که هر موجی را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از امواج سینوسی

در نظر گرفت

$$\tilde{f}(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(k) e^{i(kz - \omega t)} dk \quad (20-9)$$

در اینجا ω تابعی از k است [معادله (۱۱-۹)]، و علت مجاز دانستن مقادیر منفی برای k آن است که امواج منتشر شده در هر دو جهت را منظور کرده باشیم.^۱ فرمول $\tilde{A}(k)$ ، برحسب شرایط اولیه $f(z, 0)$ و $\dot{f}(z, 0)$ را می‌توان از نظر تبدیلات فوریه (مسئله ۹-۳۲) به دست آورد، اما جزئیات این امر به هدف فعلی ما مربوط نیست. نکته این است که هر موجی را می‌توان به صورت ترکیبی از امواج سینوسی نوشت، و بنابراین اگر از رفتار امواج سینوسی آگاه باشید، از نظر اصولی رفتار هر موجی را می‌دانید. بنابراین از حالا به بعد توجه خود را معطوف امواج سینوسی می‌کنیم.

مسئله ۹-۳ با استفاده از معادله (۹-۱۹)، A_2 و δ_2 را برحسب A_1 ، δ_1 و δ_2 تعیین کنید.

مسئله ۹-۴ معادله (۹-۲۰) را مستقیماً از روی معادله موج و با استفاده از تفکیک متغیرها به دست آورید. □

۹-۱-۳ شرایط مرزی: بازتاب و تراگیل

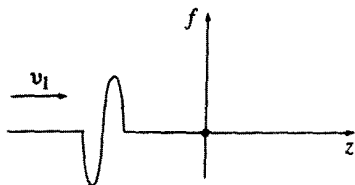
تا به حال تار را طویل نامتناهی در نظر گرفته‌ایم — و یا به هر صورت به اندازه‌ای دراز در نظر گرفته‌ایم که دربارهٔ سرنوشت موج بعد از رسیدن به انتهای تار هیچ نگران نبوده‌ایم. در واقع، اینکه بعد از رسیدن موج به انتهای تار چه اتفاقی می‌افتد — به شرایط مرزی موج بستگی دارد. فرض کنید مثلاً تار مورد نظر را به تار دیگری بسته‌ایم. کشش T برای هر دو تار یکی است، اما جرم واحد طول، μ ، این دو تار ممکن است متفاوت باشد، در این صورت سرعتهای v_1 و v_2 یکی نخواهند بود (زیرا $v = \sqrt{T/\mu}$). فرض کنید گره اتصال دو تار در $z = 0$ باشد. موج فرودی

$$\tilde{f}_I(z, t) = \tilde{A}_I e^{i(k_1 z - \omega t)}, \quad (z < 0) \quad (21-9)$$

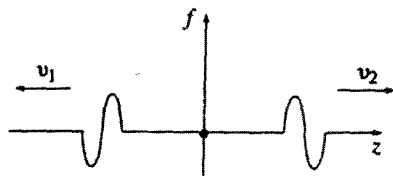
از چپ وارد می‌شود و موج بازتابنده

$$\tilde{f}_R(z, t) = \tilde{A}_R e^{i(-k_1 z - \omega t)}, \quad (z < 0) \quad (22-9)$$

۱. این به معنی منفی بودن λ و ω نیست، طول موج و بسامد همواره مثبت‌اند. وقتی عدد موج منفی را مجاز می‌شماریم، معادلات (۸-۹) و (۱۱-۹) را در واقع باید به صورت $\lambda = 2\pi/|k|$ و $\omega = |k|v$ بنویسیم.



(الف) تپ فرودی



(ب) تپهای بازتابیده و تراگسیلیده

شکل ۵-۹

به سمت عقب روی تار ۱ حرکت می‌کند (لذا علامت منفی جلو k_1 را سبب می‌شود)، به علاوه یک موج تراگسیلیده

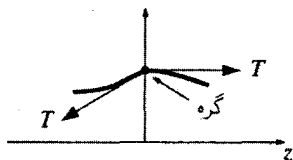
$$\tilde{f}_T(z, t) = \tilde{A}_T e^{i(k_T z - \omega t)}, \quad (z > 0) \quad (23-9)$$

به سمت راست در تار ۲ منتشر می‌شود.

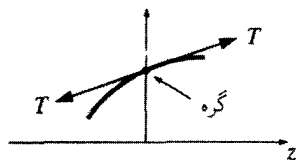
موج فرودی $f_I(z, t)$ یک نوسان سینوسی است که اصولاً همیشه تا $z = -\infty$ امتداد دارد. همین واقعیت برای f_T, f_R هم صادق است (با این تفاوت که f_T تا $z = +\infty$ امتداد می‌یابد). تمام اجزای دستگاه با یک بسامد ω نوسان می‌کنند (ω بسامدی است که ناظر واقع در $z = -\infty$ که تکان دهنده تار هم هست تشخیص می‌دهد). چون سرعت موج در دو تار مختلف متفاوت است، طول موجها و عددهای موج این دو نیز متفاوت‌اند:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{v_1}{v_2} \quad (24-9)$$

بدیهی است که چنین وضعیتی تا حدودی تصنعی است — زیرا از دید یک ناظر، تمیز امواج فرودی و بازتابیده در یک جزء از طول تار وقتی انتشار امواج در طول نامتناهی صورت می‌گیرد دشوار است، از این رو ترجیح می‌دهیم که یک موج فرودی با گستره متناهی را در نظر بگیریم — مانند پالسی که در شکل ۵-۹ نشان داده‌ایم. بررسی کامل این مورد را در مسئله ۵-۹ آورده‌ایم. مشکل این شیوه، رهیافت جدید آن است که هیچ پالس متناهی، واقعاً سینوسی نیست. امواج شکل ۵-۹ ممکن است به نظر تان سینوسی برسند، اما واقعاً چنین نیستند؛ اینها اجزاء کوچک سینوسی‌اند که به صورت یک تابع کاملاً متفاوتی (یعنی صفر) به یکدیگر وصل شده‌اند. این امواج را همانند سایر امواج می‌توان از ترکیبات خطی چندین تابع موج سینوسی ناشی دانست [معادله (۹-۲۰)]، اما در این موج ترکیبی باید یک گستره کامل از بسامدها و طول موجها منظور شوند. اگر مورد نظر ما یک تک بسامد فرودی باشد (مثل امواج الکترومغناطیسی) باید انتشار موج را نامتناهی در نظر



(الف) شیب ناپیوسته؛ نیروی بر گره وارد می شود



(ب) شیب پیوسته؛ نیروی بر گره وارد نمی شود

شکل ۹-۶

بگیریم. از نظر عملی اگر یک پالس خیلی طولانی با نوسانات فراوان در نظر بگیریم، به ایده آل بسامد منفرد نزدیک می شویم.

برای یک موج سینوسی فرودی، اختلال کل تار عبارت است از

$$\bar{f}(z, t) = \begin{cases} \bar{A}_I e^{i(k_1 z - \omega t)} + \bar{A}_R e^{i(-k_1 z - \omega t)} & \text{به ازای } z < 0 \\ \bar{A}_T e^{i(k_2 z - \omega t)} & \text{به ازای } z > 0 \end{cases} \quad (25-9)$$

در نقطه اتصال ($z = 0$) جابه جایی جزئی به طرف چپ ($z = 0^-$) باید با جابه جایی جزئی به سمت راست ($z = 0^+$) برابر باشد، زیرا در غیر این صورت بین دو تار شرط پیوستگی برقرار نیست. مفهوم این گفته از نظر ریاضی آن است که $f(z, t)$ در $z = 0$ تابعی پیوسته است:

$$f(0^-, t) = f(0^+, t) \quad (26-9)$$

اگر جرم نقطه گره ناچیز باشد در این صورت مشتق f هم باید پیوسته باشد:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{0^-} = \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{0^+} \quad (27-9)$$

چه در غیر این صورت نیروی خالصی در نقطه گره وجود خواهد داشت که خود شتاب نامتناهی ایجاد می کند (شکل ۹-۶). این شرایط مرزی مستقیماً برای تابع موج حقیقی $f(z, t)$ صادق است. از طرفی چون تفاوت قسمت موهومی \bar{f} از قسمت حقیقی آن تنها آن است که کسینوس به سینوس تبدیل می شود [معادله (۹-۱۵)], نتیجه می گیریم که تابع موج مختلط $\bar{f}(z, t)$ از قواعد یکسانی تبعیت می کند:

$$\bar{f}(0^-, t) = \bar{f}(0^+, t), \quad \left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \right|_{0^-} = \left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \right|_{0^+} \quad (28-9)$$

با اعمال این شرایط مرزی به معادله (۲۵-۹) می توان دامنه های \tilde{A}_T و \tilde{A}_R خروجی را بر حسب دامنه موج فرودی \tilde{A}_I به دست آورد:

$$\tilde{A}_I + \tilde{A}_R = \tilde{A}_T, \quad k_1(\tilde{A}_I - \tilde{A}_R) = k_2\tilde{A}_T$$

و از روی آن به سادگی نتیجه می شود که

$$\tilde{A}_R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right) \tilde{A}_I, \quad \tilde{A}_T = \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2} \right) \tilde{A}_I \quad (۲۹-۹)$$

و یا، بر حسب سرعتها [معادله (۲۴-۹)] داریم

$$\tilde{A}_R = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right) \tilde{A}_I, \quad \tilde{A}_T = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) \tilde{A}_I \quad (۳۰-۹)$$

آن گاه دامنه ها و فازهای حقیقی هم به صورت زیر به یکدیگر وابسته اند

$$A_R e^{i\delta_R} = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right) A_I e^{i\delta_I}, \quad A_T e^{i\delta_T} = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) A_I e^{i\delta_I} \quad (۳۱-۹)$$

اگر تار دوم از تار اول سبکتر باشد، ($\mu_2 < \mu_1$ ، و بنابراین $v_2 > v_1$) هر سه موج یک زاویه فاز خواهند داشت ($\delta_R = \delta_T = \delta_I$) و دامنه های خروجی برابرند با

$$A_R = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right) A_I, \quad A_T = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) A_I \quad (۳۲-۹)$$

اگر تار دوم سنگینتر باشد، یعنی $v_2 < v_1$ ، موج بازتابش ۱۸۰° اختلاف فاز دارد ($\delta_R + \pi = \delta_T = \delta_I$). به عبارت دیگر چون

$$\cos(-k_1 z - \omega t + \delta_I - \pi) = -\cos(-k_1 z - \omega t + \delta_I)$$

موج بازتابیده "وارونه" است. در این مورد دامنه ها برابرند با

$$A_R = \left(\frac{v_1 - v_2}{v_2 + v_1} \right) A_I \quad \text{و} \quad A_T = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) A_I \quad (۳۳-۹)$$

به خصوص اگر جرم تار دوم بسیار زیاد باشد و یا تار اول را از نقطه انتها قطع کنند آن گاه داریم

$$A_R = A_I \quad \text{و} \quad A_T = 0$$

البته در این مورد موج تراگسیلیده‌ای وجود ندارد — همه آن به عقب بازمی‌تابد.

مسئله ۵-۹ فرض کنید موجی فرودی با شکل مشخص $g_I(z - v_1 t)$ در تار شماره ۱ فرستاده شده باشد. این موج به یک موج بازتابیده $h_R(z + v_1 t)$ و یک موج تراگسیلیده $g_T(z - v_1 t)$ تبدیل می‌شود. با اعمال شرایط مرزی (۹-۲۶) و (۹-۲۷)، h_R و g_T را پیدا کنید.

مسئله ۶-۹ الف) یک شرط مرزی مناسب را به جای معادله (۹-۲۷) برای مورد دو تار متصل شده با کشش T و متصل شده توسط گرهی به جرم m فرمولبندی کنید.
ب) دامنه و فاز امواج بازتابیده و تراگسیلیده را برای موردی که جرم گره m و تار دوم بدون جرم است پیدا کنید.

مسئله ۷-۹ فرض کنید تار دوم را در یک محیطی چسبناک (مثلاً شیره قند) فرو برده باشیم تا بر آن نیروی کششی وارد کند که در هر جزء متناسب با سرعت عرضی آن باشد:

$$\Delta F_{\text{کششی}} = -\gamma \frac{\partial f}{\partial t} \Delta z$$

الف) معادله موج پیراسته‌ای که حرکت تار را توصیف می‌کند به دست آورید.

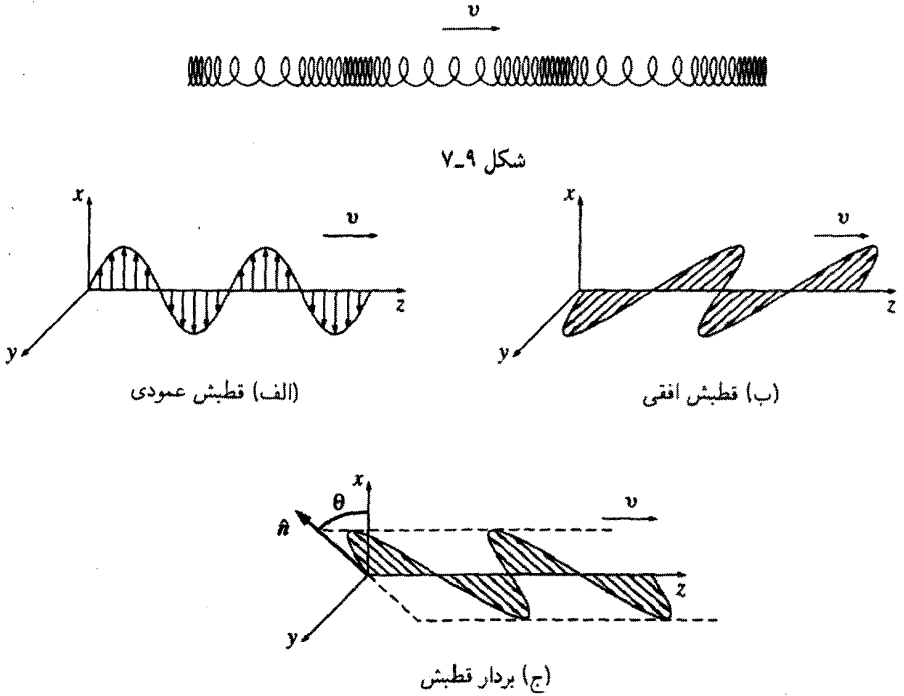
ب) این معادله را با فرض آنکه تار با بسامد فرودی ω نوسان می‌کند حل کنید. یعنی جوابی به صورت $\tilde{f}(z, t) = e^{i\omega t} \tilde{F}(z)$ به دست آورید.

ج) نشان دهید که موج تضعیف شده است (یعنی از دامنه موج با افزایش z کاسته می‌شود). فاصله نفوذ مشخصه را که در آن دامنه به $1/e$ مقدار اصلی آن می‌رسد بر حسب γ, T, μ, ω پیدا کنید.

د) هرگاه موجی با دامنه A_I ، فاز $\delta_I = 0$ و بسامد ω از سمت چپ (تار ۱) وارد شود دامنه و فاز موج بازتابیده را پیدا کنید.
□

۹-۱-۴ قطبش

موج حاصل در یک تار را وقتی آن را تکان می‌دهیم عرضی می‌نامند، زیرا جابه‌جایی بر امتداد انتشار موج عمود است. اگر تار مورد نظر تا حدی کشسان باشد، امواج تراکمی را نیز می‌توان با مختصر کشیدن تار در آن ایجاد کرد. مشاهده امواج تراکمی در طول تار دشوار است اما با آهسته کشیدن تار تا حدی قابل ملاحظه است (شکل ۹-۷). این امواج را طولی می‌نامند، زیرا جابه‌جایی



شکل ۸-۹

از وضعیت تعادل در امتداد انتشار موج فرار می‌گیرد. امواج صوتی در هوا که چیزی جز امواج تراکمی نیستند، طولی‌اند؛ در مقابل امواج الکترومغناطیسی همچنان‌که خواهیم دید عرضی هستند. البته برای هر امتداد فرضی انتشار، دو بعد عمود بر امتداد می‌توان در نظر گرفت. بنابراین امواج عرضی، در دو حالت قطبش مستقل هستند: یک طناب یا تار را، هم می‌توانید به بالا - و - پایین تکان دهید [قطبش "عمودی"، شکل ۸-۹(الف)]

$$\vec{f}_v(z, t) = \vec{A} e^{i(kz - \omega t)} \hat{x} \quad (۳۴-۹)$$

و هم می‌توانید به چپ - و - راست تکان دهید [قطبش "افقی"، شکل ۸-۹(ب)]

$$\vec{f}_h(z, t) = \vec{A} e^{i(kz - \omega t)} \hat{y} \quad (۳۵-۹)$$

و هم می‌توانید در هر امتداد دیگری در صفحه xy تکان دهید [شکل ۸-۹ (ج)]

$$\vec{f}(z, t) = \vec{A} e^{i(kz - \omega t)} \hat{n} \quad (۳۶-۹)$$

بردار قطبش \hat{n} معرف صفحه ارتعاش است.^۱ چون موج عرضی است، \hat{n} بر امتداد انتشار عمود است:

$$\hat{n} \cdot \hat{z} = 0 \quad (۳۷-۹)$$

\hat{n} را برحسب زاویه قطبش θ می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\hat{n} = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y} \quad (۳۸-۹)$$

بنابراین موج شکل ۸-۹ (ج) را می‌توان به صورت برهم‌نهی دو موج در نظر گرفت — یکی موج افقی قطبیده و دیگری عمودی قطبیده:

$$\vec{f}(z, t) = (\vec{A} \cos \theta) e^{i(kz - \omega t)} \hat{x} + (\vec{A} \sin \theta) e^{i(kz - \omega t)} \hat{y} \quad (۳۹-۹)$$

مسئله ۸-۹ معادله (۳۶-۹) عامترین موج قطبیده خطی یک تار را توصیف می‌کند. قطبش خطی (یا "تخت") از ترکیب امواج قطبیده افقی و قائم همگاز [معادله (۳۹-۹)] حاصل می‌شود. (انتخاب این نام به این دلیل است که جابه‌جایی به موازات یک بردار ثابت \hat{n} است). هرگاه دو مؤلفه دارای دامنه‌های مساوی باشند اما 90° اختلاف فاز داشته باشند (مثلاً $\delta_y = 0$ ، $\delta_x = 90^\circ$)، در نتیجه ترکیب یک موج دایره‌ای قطبیده خواهیم داشت. در آن صورت:

(الف) نشان دهید که در یک نقطه ثابت z تار روی دایره‌ای حول محور z حرکت می‌کند. آیا از دید ناظری که در امتداد محور به مبدأ می‌نگرد این حرکت ساعتگرد است یا پادساعتگرد؟ چگونه می‌توانید موجی داشته باشید که در جهت دیگر بچرخد؟ (در نورشناخت حالت ساعتگرد را قطبش دایره‌ای راست و پادساعتگرد را قطبش دایره‌ای چپ می‌نامند).

(ب) تار را در لحظه $t = 0$ رسم کنید.

□ (ج) تار را چگونه تکان دهیم تا موج دایره‌ای قطبیده تولید کند؟

۱. توجه کنید که همواره می‌توان علامت \hat{n} را تغییر داد، به شرط آنکه همزمان ثابت فاز را 180° به جلو برد، زیرا هر دو عمل علامت موج را تغییر می‌دهند.

۲-۹ امواج الکترومغناطیسی در خلأ

۱-۲-۹ معادله موج برای \mathbf{E} و \mathbf{B}

در مناطقی از فضا که بار و جریان وجود ندارند، معادلات ماکسول عبارت‌اند از

$$\left. \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 & (1) \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (3) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & (2) \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & (4) \end{array} \right\} (40-9)$$

در واقع این معادلات، مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه اول جفتیده برای \mathbf{E} و \mathbf{B} هستند. برای آنکه معادلات واجفتیده شوند، به ترتیب زیر تاو را بر (۳) و (۴) اعمال می‌کنیم

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \nabla \times \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

و با در نظر گرفتن اینکه $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ و $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ می‌توان نوشت

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}} \quad (41-9)$$

حال به معادلات جداگانه‌ای برای \mathbf{E} و \mathbf{B} دست یافته‌ایم، اما این معادلات از مرتبه دوم هستند و این بهایی است که برای جدا کردن معادلات می‌پردازیم.

در خلأ مؤلفه‌های دکارتی \mathbf{E} و \mathbf{B} در معادله موج سه بعدی زیر صدق می‌کند

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

[این معادله با معادله (۲-۹) یکی است، جز اینکه به جای $\partial^2 f / \partial z^2$ ، تعمیم طبیعی آن یعنی $\nabla^2 f$ را قرار داده‌ایم.] پس بنابر معادلات ماکسول، فضای تهی انتشار امواج الکترومغناطیسی را با سرعت زیر که با سرعت c نور مساوی است ایجاب می‌کند.

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (۴۲-۹)$$

این نتیجه، حیرت‌انگیز است: شاید نور یک موج الکترومغناطیسی باشد.^۱ این بحث که نور از امواج الکترومغناطیسی تشکیل شده است، امروزه کسی را متعجب نمی‌کند اما تصور کنید که در زمان ماکسول چه کشف جالبی بوده است. به خاطر آورید که چگونه ϵ_0 و μ_0 در درجه اول وارد نظریه شدند، این دو ثابتایی در قانون کولن و قانون بیوساوار بودند. برای اندازه‌گیری آنها از آزمایشهایی دربارهٔ ذرات باردار، باتریها و سیمها استفاده می‌شود — در واقع آزمایشهایی که اصلاً با نور سرورکار ندارند. با این وجود بنابر نظریهٔ ماکسول سرعت نور c را می‌توان از این مقدار ثابت به دست آورد. بار دیگر به نقش مهم ماکسول در قانون آمپر ($\mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$) توجه کنید؛ بدون این جمله در قانون آمپر، معادلهٔ موج به دست نمی‌آمد.

۲-۲-۹ امواج تخت تکفام

بنابه دلایلی که در بخش ۲-۱-۹ ارائه کردیم، می‌توانیم توجه خود را منحصر به امواج سینوسی با بسامد ω کنیم. چون بسامدهای مختلف در ناحیهٔ مرئی متناظر با رنگهای مختلف اند، این امواج را تکفام می‌نامند (جدول ۱-۹). افزون بر این فرض کنید که امواج در امتداد z حرکت می‌کنند و بستگی به x یا y ندارند؛ اینها را امواج تخت^۲ می‌نامند، زیرا میدانها بر روی هر صفحهٔ عمود بر امتداد انتشار یکنواخت هستند (شکل ۱-۹). در این صورت میدانهایی مورد توجه ما قرار می‌گیرند که به صورت زیر باشند:

$$\vec{\mathbf{E}}(z, t) = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad \vec{\mathbf{B}}(z, t) = \vec{\mathbf{B}}_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad (۴۳-۹)$$

۱. همان‌گونه که خود ماکسول می‌گوید "به سختی می‌توانیم از این نتیجه‌گیری احتراز کنیم که نور متشکل از حرکت‌های موجی عرضی همان محیطی است که علت پدیده‌های الکتریکی و مغناطیسی است".
۲. بحث امواج کروی در سطح این کتاب را می‌توانید از کتاب

Ivan Tolstoy, *James Clerk Maxwell, A Biography* (Chicago: University of Chicago Press, 1983).

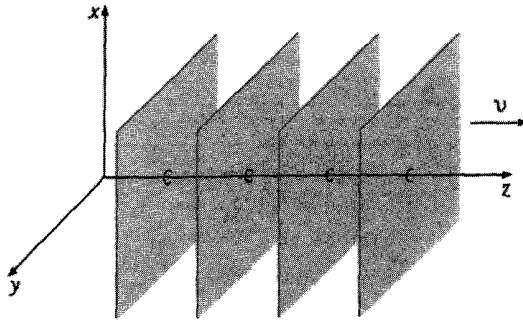
مطالعه کنید یا مسئلهٔ ۳۳-۹ درس را حل کنید، البته در نواحی به اندازهٔ کافی کوچک که در آن طول موج به مراتب کوچکتر از شعاع انحنای جبهه موج باشد هر موج را می‌توان موج تخت فرض کرد.

جدول ۹-۱

طیف الکترومغناطیسی		
طول موج (m)	نوع	بسامد (Hz)
۱۰ ^{-۱۲}	پرتوهای گاما	۱۰ ^{۲۲}
۱۰ ^{-۱۲}		۱۰ ^{۲۱}
۱۰ ^{-۱۱}		۱۰ ^{۲۰}
۱۰ ^{-۱۰}		۱۰ ^{۱۹}
۱۰ ^{-۱}	پرتوهای x	۱۰ ^{۱۸}
۱۰ ^{-۸}		۱۰ ^{۱۷}
۱۰ ^{-۷}	فرابنفش	۱۰ ^{۱۶}
۱۰ ^{-۶}	مرئی	۱۰ ^{۱۵}
۱۰ ^{-۵}	فروسرخ	۱۰ ^{۱۴}
۱۰ ^{-۲}	میکروموج	۱۰ ^{۱۳}
۱۰ ^{-۲}		۱۰ ^{۱۲}
۱۰ ^{-۲}		۱۰ ^{۱۱}
۱۰ ^{-۱}		۱۰ ^{۱۰}
۱		۱۰ ^۹
۱۰		۱۰ ^۸
۱۰ ^۲		۱۰ ^۷
۱۰ ^۳		۱۰ ^۶
۱۰ ^۴		۱۰ ^۵
۱۰ ^۶		۱۰ ^۳
گستره مرئی		
طول موج (m)	رنگ	بسامد (Hz)
۳۰ × ۱۰ ^{-۷}	فرابنفش نزدیک	۱ × ۱۰ ^{۱۵}
۴ × ۱۰ ^{-۷}	کوتاهترین آبی مرئی	۷.۵ × ۱۰ ^{۱۴}
۴.۶ × ۱۰ ^{-۷}	آبی	۶.۵ × ۱۰ ^{۱۴}
۵.۴ × ۱۰ ^{-۷}	سبز	۵.۶ × ۱۰ ^{۱۴}
۵.۹ × ۱۰ ^{-۷}	زرد	۵.۱ × ۱۰ ^{۱۴}
۶.۱ × ۱۰ ^{-۷}	نارنجی	۴.۹ × ۱۰ ^{۱۴}
۷.۶ × ۱۰ ^{-۷}	بلندترین سرخ مرئی	۳.۹ × ۱۰ ^{۱۴}
۱ × ۱۰ ^{-۶}	فروسرخ نزدیک	۳ × ۱۰ ^{۱۴}

که در آن \vec{E} و \vec{B} دامنه‌های (مختلط) میدانهای الکتریکی و مغناطیسی‌اند — البته میدانهای فیزیکی بخشهای حقیقی \vec{E} و \vec{B} هستند.

معادلات موج برای \vec{E} و \vec{B} [معادله (۹-۴۱)] را از روی معادلات ماکسول نتیجه گرفتیم. با وجود این، در حالی که هر جوابی برای معادلات ماکسول (در فضای تهی) باید از معادله موج



شکل ۹-۹

پیروی کند، عکس آن درست نیست؛ معادلات ماکسول قیده‌های خاصی برای \vec{E}_0 و \vec{B}_0 ایجاب می‌کنند. بالاخص چون $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ و $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ نتیجه می‌گیریم که^۱

$$(\vec{E}_0)_z = (\vec{B}_0)_z = 0 \quad (۴۴-۹)$$

یعنی، امواج الکترومغناطیسی عرضی هستند، به عبارت دیگر میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بر جهت انتشار عمودند، افزون بر این، قانون فاراده $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ ایجاب می‌کند که بین دامنه‌های میدانهای الکتریکی و مغناطیسی رابطه‌ای وجود داشته باشد، یعنی

$$-k(\vec{E}_0)_y = \omega(\vec{B}_0)_x, \quad k(\vec{E}_0)_x = \omega(\vec{B}_0)_y \quad (۴۵-۹)$$

و یا به صورت فشرده‌تر:

$$\vec{B}_0 = \frac{k}{\omega} (\hat{z} \times \vec{E}_0) \quad (۴۶-۹)$$

بدیهی است که \vec{E} و \vec{B} هم‌فاز و بر یکدیگر عمودند؛ بستگی دامنه‌های (حقیقی) آنها به صورت زیر است

$$B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{1}{c} E_0 \quad (۴۷-۹)$$

چهارمین معادله ماکسول، $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 (\partial \vec{E} / \partial t)$ ، به شرط مستقلی نمی‌انجامد؛ این معادله هم به (۴۵-۹) منجر می‌شود.

۱. چون تفاوت قسمت حقیقی \vec{E} از قسمت موهومی آن، در جایگزینی کسینوس به جای سینوس است، اگر قسمت حقیقی از معادلات ماکسول پیروی کند، قسمت موهومی نیز چنین خواهد کرد، و همین وضعیت هم برای \vec{E} برقرار است.

مثال ۹-۲

اگر \mathbf{E} در راستای x باشد آن‌گاه \mathbf{B} هم در امتداد y است [معادله (۹-۴۶)]:

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{x}, \quad \tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \frac{1}{c} \tilde{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{y}$$

یا (با انتخاب قسمت حقیقی)

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t + \delta) \hat{x}, \quad \mathbf{B}(z, t) = \frac{1}{c} E_0 \cos(kz - \omega t + \delta) \hat{y}$$

(۹-۴۸)

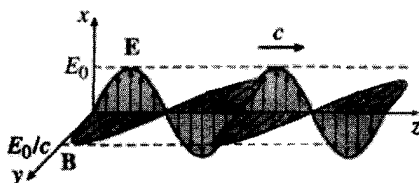
این مثالی برای یک موج تکفام است (شکل ۹-۱۰). گفته می‌شود موج به صورت کلی در جهت x قطبیده است. (بنابر قرارداد، برای تعیین قطبش امواج الکترومغناطیسی جهت \mathbf{E} را در نظر می‌گیریم). ■

در مورد جهت z نکته خاصی وجود ندارد — البته می‌توان مسئله را در مورد امواج تخت تکفام که در جهت دلخواهی سیر می‌کنند به سهولت تعمیم داد. برای سادگی نمادگذاری از بردار انتشار (یا بردار موج) \mathbf{k} ، که در راستای انتشار موج است و بزرگی آن همان عدد موج k است استفاده می‌کنیم. در این صورت حاصلضرب عددی $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ تعمیم مناسب kz (شکل ۹-۱۱) محسوب می‌شود، و بنابراین

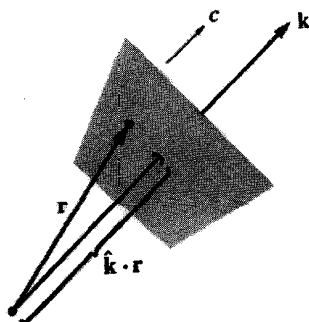
$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{n}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} (\hat{k} \times \hat{n}) = \frac{1}{c} \hat{k} \times \tilde{\mathbf{E}}$$

(۹-۴۹)



شکل ۹-۱۰



شکل ۱۱-۹

که در آن \hat{n} بردار قطبش است. چون \mathbf{E} عرضی است داریم

$$\hat{n} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (۵۰-۹)$$

[عرضی بودن \mathbf{B} هم به سادگی از معادله (۴۹-۹) نتیجه می شود]. بنابراین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی (حقیقی) در یک موج تکفام با بردار انتشار \mathbf{k} و بردار قطبش \hat{n} عبارتاند از

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \hat{n} \quad (۵۱-۹)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) (\hat{k} \times \hat{n}) \quad (۵۲-۹)$$

مسئله ۹-۹ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی (حقیقی) یک موج تخت تکفام با دامنه E_0 ، بسامد ω و زاویه فاز صفر را در شرایط زیر بنویسید.

(الف) حرکت موج در جهت منفی x و قطبش آن در جهت z باشد.

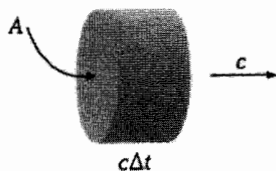
(ب) حرکت موج از مبدأ به طرف نقطه $(1, 1, 1)$ و قطبش به موازات صفحه xz باشد.

هر دو مورد، بردار موج را رسم کنید و مؤلفه های صریح دکارتی \mathbf{k} و \hat{n} را پیدا کنید. □

۹-۲-۳ انرژی و تکانه امواج الکترومغناطیسی

بنابر معادله (۸-۱۳)، انرژی ذخیره شده در واحد حجم در یک میدان الکترومغناطیسی برابر است با

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad (۵۳-۹)$$



شکل ۹-۱۲

در مورد یک موج تخت تکفام [معادله ۹-۴۸] داریم

$$B^y = \frac{1}{c^2} E^y = \mu_0 \epsilon_0 E^y \quad (9-54)$$

بنابراین سهم میدانهای الکتریکی و مغناطیسی با یکدیگر برابرند:

$$u = \epsilon_0 E^y = \epsilon_0 E_0^y \cos^2(kz - \omega t + \delta) \quad (9-55)$$

این انرژی همراه با حرکت موج منتقل می‌شود. چگالی شار انرژی (انرژی در واحد سطح و در واحد زمان) منتقل شده توسط میدانها را می‌توان توسط بردار پوینتینگ [معادله ۷-۵۸] تعیین کرد:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (9-56)$$

برای امواج تخت تکفام که در جهت z منتشر می‌شوند داریم

$$\mathbf{S} = c\epsilon_0 E_0^y \cos^2(kz - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{z}} = cu \hat{\mathbf{z}} \quad (9-57)$$

می‌بینیم که \mathbf{S} برابر است با حاصلضرب چگالی انرژی (u) در سرعت امواج ($c \hat{\mathbf{z}}$). این مسئله روشن است زیرا در زمان Δt طول $c \Delta t$ موج از یک سطح A (شکل ۹-۱۲) گذشته و با خود انرژی $uAc \Delta t$ را منتقل می‌کند، بنابراین انرژی در واحد زمان و در واحد سطح برابر است با uc . میدانهای الکترومغناطیسی علاوه بر انرژی حامل تکانه نیز هستند. در واقع از معادله ۸-۳۰

نتیجه گرفتیم که چگالی تکانه ذخیره‌شده در میدانها برابر است با

$$\wp = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \quad (9-58)$$

برای امواج تخت تکفام، داریم

$$\phi = \frac{1}{c} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta) \hat{z} = \frac{1}{c} u \hat{z} \quad (59-9)$$

در مورد نور، طول موج بسیار کوتاه ($\sim 5 \times 10^{-7} \text{ m}$) و دوره نیز کوچک ($\sim 10^{-15} \text{ s}$) است و هرگونه اندازه‌گیری ماکروسکوپی مستلزم در نظر گرفتن دوره‌های فراوان است. بنابراین به نظر ما افت‌وخیزهای ناشی از جمله مربوط به مربع کسینوس در معادله انرژی و تکانه چیز مهمی نیست؛ آنچه مهم است میانگین مقدار است. به سادگی می‌توان نشان داد: که میانگین مربع کسینوس در یک چرخه کامل^۱ برابر است با $1/2$ ، بنابراین

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \quad (60-9)$$

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \hat{z} \quad (61-9)$$

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{2c} \varepsilon_0 E_0^2 \hat{z} \quad (62-9)$$

علامت $\langle \rangle$ به مفهوم میانگین (زمانی) در یک چرخه کامل (یا چرخه‌های فراوان) است. توان میانگین برای واحد سطح را که توسط موج الکترومغناطیسی حمل شده است، شدت می‌نامند:

$$I \equiv \langle S \rangle = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \quad (63-9)$$

وقتی نور به یک سطح جذب‌کننده کامل برمی‌خورد، تکانه خود را به آن منتقل می‌کند. در یک زمان Δt تکانه منتقل شده (شکل ۹-۱۲) برابر است با $\Delta p = \langle \phi \rangle A c \Delta t$ ، بنابراین فشار تابشی (نیروی متوسط بر واحد سطح) برابر است با

$$P = \frac{1}{A} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{I}{c} \quad (64-9)$$

۱. این را با تدبیر ساده‌ای می‌توان نشان داد: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ و در یک چرخه کامل، میانگین $\sin^2 \theta$ با میانگین $\cos^2 \theta$ برابر است. بنابراین $\langle \sin^2 \rangle = \langle \cos^2 \rangle = 1/2$ به‌طور صوری‌تر

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kz - 2\pi t/T + \delta) dt = 1/2$$

(برای یک بازتابنده کامل، فشار دو برابر است، زیرا تکانه به جای جذب شدن تغییر جهت هم می‌دهد.) این فشار را به صورت کمی می‌توان به طریق زیر محاسبه کرد: میدان الکتریکی [معادله (۹-۴۸)] بارها را در جهت x به حرکت وا می‌دارد، و میدان مغناطیسی نیز بر آنها نیروی $(q\vec{v} \times \vec{B})$ در جهت z وارد می‌کند. نیروی کل وارد بر همه بارهای روی سطح، ایجاد فشار می‌کند.

مسئله ۹-۱۰ شدت تابش خورشید روی سطح زمین برابر است با 1300 W/m^2 . اگر نور خورشید بر یک جذب‌کننده کامل برخورد کند، چه فشاری بر سطح اعمال می‌شود؟ برای یک بازتابنده کامل این فشار چقدر است؟ این فشار چه کسری از فشار اتمسفر است؟

مسئله ۹-۱۱ در روش نمایش مختلط، شیوه مناسبی برای تعیین میانگین زمانی یک حاصلضرب وجود دارد. فرض کنید $f(\mathbf{r}, t) = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta_a)$ و $g(\mathbf{r}, t) = B \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta_b)$. نشان دهید که $\langle fg \rangle = (1/2) \text{Re}(\bar{f}\bar{g}^*)$ ، که در آن علامت * دلالت بر مزدوج مختلط دارد. توجه کنید که این معادله تنها وقتی برقرار است که هر دو موج دارای \mathbf{k} و ω مساوی باشند، اما داشتن دامنه یا فاز مساوی الزامی نیست. [به عنوان مثال

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4} \text{Re}(\epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B}^*) \quad \text{و} \quad \langle S \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{B}^*)$$

مسئله ۹-۱۲ تمام اجزای تانسور تنش ماکروسکوپی یک موج تخت تکفام را که در جهت z حرکت می‌کند و در جهت x به صورت خطی قطبیده است، پیدا کنید [معادله (۹-۴۸)]. آیا جواب حاصل قابل قبول است؟ (یادتان باشد که \vec{T} چگالی شار تکانه است.) بستگی چگالی شار تکانه با چگالی انرژی چگونه است؟ □

۹-۳ امواج الکترومغناطیسی در ماده

۹-۳-۱ انتشار در محیطهای خطی

در داخل ماده، اما در مناطقی که بار آزاد یا جریان آزاد وجود ندارد، معادلات ماکسول به این صورت می‌شوند

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (1) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4) \end{aligned} \right\} \quad (65-9)$$

اگر محیط خطی باشد

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \quad (66-9)$$

و همگن (یعنی ϵ و μ از یک نقطه به نقطه‌ای دیگر تغییر نکنند) باشد، معادلات ماکسول به صورت زیر در می‌آیند

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4) \end{aligned} \right\} \quad (67-9)$$

که با مشابه‌های خلأ (معادلات ۹-۴۰) تفاوت (قابل ملاحظه‌ای) دارند. این تفاوت، جایگزینی $\mu\epsilon$ به جای $\epsilon_0\mu_0$ است.^۱ بدیهی است که امواج الکترومغناطیسی در یک محیط همگن خطی با سرعت

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n} \quad (68-9)$$

منتشر می‌شوند، که در آن

$$n \equiv \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \quad (69-9)$$

۱. این مشاهده از نظر ریاضی تا حدی بدیهی، اما تعبیر فیزیکی آن حیرت‌انگیز است: با عبور موج، میدانها باعث قطبش و مغناطش مولکولها می‌شوند، و دو قطبیهای (نوسانی) حاصل میدانهای الکتریکی و مغناطیسی خودشان را ایجاد می‌کنند. ترکیب این میدانها با میدانهای اصلی به‌گونه‌ای است که موجب ایجاد یک تک‌موج با همان بسامد اما دارای سرعتی متفاوت می‌شود. این همکاری و همدستی خارق‌العاده عامل پدیده شفافیت است. و پیامد به‌وضوح غیر بدیهی خطی بودن محیط است. برای بحث بیشتر مرجع زیر را ببینید

ضریب شکست ماده است. برای بیشتر مواد μ خیلی به μ_0 نزدیک است، بنابراین

$$n \cong \sqrt{\epsilon_r} \quad (70-9)$$

که در آن ϵ_r ثابت دی‌الکتریک [معادله ۴-۳۴] است. چون ϵ_r تقریباً همیشه بزرگتر از یک است، نور در داخل ماده بسیار کندتر حرکت می‌کند — واقعیتی که در اپتیک تجربی شناخته شده است. تمام نتایج قبلی ما به قوت خود باقی‌اند و کافی است که تعویض علامت $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ ، $\mu \rightarrow \mu_0$ و بنابراین $c \rightarrow v$ رعایت شود (مسئله ۸-۱۵). چگالی انرژی عبارت است از^۱

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right) \quad (71-9)$$

و بردار پوئینتینگ هم می‌شود

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (72-9)$$

برای امواج تخت تکفام رابطه بین عدد موج و بسامد به صورت $\omega = kv$ [معادله ۹-۱۱] است، دامنه \mathbf{B} ، برابر است با $1/v$ دامنه \mathbf{E} [معادله ۹-۴۷] و شدت تابش برابر است با

$$I = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2 \quad (73-9)$$

یک پرسش جالب این است که وقتی موج از یک محیط وارد محیط دیگری می‌شود مثلاً از هوا وارد آب و یا از شیشه وارد پلاستیک می‌شود، چه اتفاقی می‌افتد؟ به نظر می‌رسد همانند مورد موج در تار (سیم) باید یک موج بازتابیده و یک موج عبوری داشته باشیم. بررسی دقیق به طبیعت واقعی شرایط مرزی الکترودینامیکی که در فصل ۷ درباره آن بحث کردیم [معادله ۷-۶۴] بستگی دارد:

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_1 E_1^\perp = \epsilon_2 E_2^\perp \quad (1) \quad \mathbf{E}_1^\parallel = \mathbf{E}_2^\parallel \quad (3) \\ B_1^\perp = B_2^\perp \quad (2) \quad \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel \quad (4) \end{array} \right\} \quad (74-9)$$

۱. برای معنی دقیق "چگالی انرژی" به بخش ۴-۳ تا ۴-۳ بحث محیطهای خطی رجوع کنید.

این معادلات، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی سمت چپ و راست فصل مشترک دو محیط خطی را به هم مربوط می‌کنند و در بخشهای زیر از این معادلات برای تعیین قوانین حاکم بر بازتاب و شکست امواج الکترومغناطیسی استفاده می‌کنیم.

۹-۳-۲ بازتاب و تراگیسیل در فرودهای عمودی

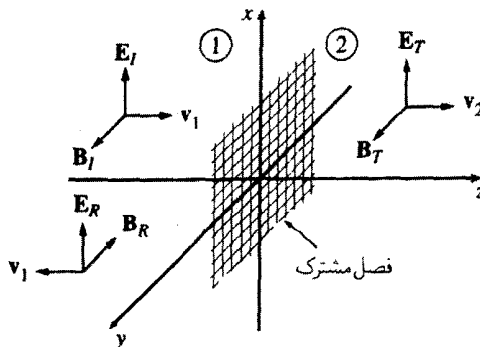
فرض کنید صفحه xy سطح مرزی بین دو محیط خارجی است. یک موج تخت با بسامد ω که در جهت z حرکت می‌کند و در جهت y قطبیده است از سمت چپ به این فصل مشترک می‌رسد (شکل ۹-۱۳):

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_I(z, t) &= \vec{E}_{oI} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{x} \\ \vec{B}_I(z, t) &= \frac{1}{v_1} \vec{E}_{oI} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{y} \end{aligned} \right\} \quad (9-75)$$

موجهای بازتابیده به صورت زیر هستند

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_R(z, t) &= \vec{E}_{oR} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{x} \\ \vec{B}_R(z, t) &= -\frac{1}{v_1} \vec{E}_{oR} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{y} \end{aligned} \right\} \quad (9-76)$$

این امواج، به سمت چپ محیط (۱) برمی‌گردند. موجهای تراگیسیلیده هم به صورت زیر به سمت



شکل ۹-۱۳

راست محیط (۲) ادامه حرکت می‌دهند

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_T(z, t) &= \tilde{E}_{oT} e^{i(k_T z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{B}}_T(z, t) &= \frac{1}{v_T} \tilde{E}_{oT} e^{i(k_T z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \right\} \quad (77-9)$$

به علامت منفی در $\tilde{\mathbf{B}}_R$ که به موجب معادله (۹-۴۹) به کار برده‌ایم توجه کنید. به عبارت دیگر این منفی از این واقعیت ناشی می‌شود که بردار پوئین تینگ در جهت انتشار است. در $z = 0$ بنا بر شرایط مرزی (۹-۷۴) میدانهای ترکیبی در سمت چپ، $\tilde{\mathbf{E}}_I + \tilde{\mathbf{E}}_R$ و $\tilde{\mathbf{B}}_I + \tilde{\mathbf{B}}_R$ باید به میدانهای سمت راست، $\tilde{\mathbf{E}}_T$ و $\tilde{\mathbf{B}}_T$ ، پیوندند. در این مورد مؤلفه‌ای عمود بر سطح وجود ندارد لذا (۱) و (۲) بدیهی‌اند اما (۳) ایجاب می‌کند که

$$\tilde{E}_{oI} + \tilde{E}_{oR} = \tilde{E}_{oT} \quad (78-9)$$

و طبق معادله (۴)

$$\frac{1}{\mu_1} \left(\frac{1}{v_1} \tilde{E}_{oI} - \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{oR} \right) = \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{1}{v_2} \tilde{E}_{oT} \right) \quad (79-9)$$

یا

$$\tilde{E}_{oI} - \tilde{E}_{oR} = \beta \tilde{E}_{oT} \quad (80-9)$$

که در آن

$$\beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \quad (81-9)$$

حل ساده معادلات (۹-۷۸) و (۹-۸۰)، دامنه‌های خروجی برحسب دامنه‌های فرودی را به صورت زیر مشخص می‌کند

$$\tilde{E}_{oR} = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) \tilde{E}_{oI}, \quad \tilde{E}_{oT} = \left(\frac{2}{1 + \beta} \right) \tilde{E}_{oI} \quad (82-9)$$

این نتایج بسیار به آنچه در مورد امواج تار (سیم) به دست آوردیم شبیه است. در حقیقت، اگر گذردهی μ به مقدار آن در خلأ نزدیک باشد (در بسیاری از محیطها چنین است) آن گاه $\beta = v_1/v_2$ و داریم

$$\vec{E}_{\circ R} = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right) \vec{E}_{\circ I}, \quad \vec{E}_{\circ T} = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) \vec{E}_{\circ I} \quad (۸۳-۹)$$

این معادلات مشابه معادلات (۳۰-۹) هستند. در آن حالت، مثل گذشته، وقتی $v_2 > v_1$ باشد موج بازتابیده همفاز و در صورتی که $v_2 < v_1$ باشد، غیرهمفاز است؛ دامنه‌های حقیقی روابطی به صورت زیر دارند

$$E_{\circ R} = \left| \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right| E_{\circ I}, \quad E_{\circ T} = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) E_{\circ I} \quad (۸۴-۹)$$

و یا برحسب ضرایب شکست می‌توان نوشت

$$E_{\circ R} = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right| E_{\circ I}, \quad E_{\circ T} = \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right) E_{\circ I} \quad (۸۵-۹)$$

چه کسری از انرژی فرودی بازتابیده می‌شود و چه کسری از آن منتقل می‌شود؟ بنابر معادله (۷۳-۹) شدت (توان میانگین در واحد سطح) برابر است با

$$I = \frac{1}{4} \varepsilon v E_0^2$$

هرگاه $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ باشد، آن گاه نسبت شدت بازتابیده به شدت فرودی برابر است با

$$R \equiv \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{E_{\circ R}}{E_{\circ I}} \right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (۸۶-۹)$$

و نسبت شدت تراگسیلیده به شدت فرودی برابر است با

$$T \equiv \frac{I_T}{I_I} = \frac{\varepsilon_2 v_2}{\varepsilon_1 v_1} \left(\frac{E_{\circ T}}{E_{\circ I}} \right)^2 = \frac{2n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (۸۷-۹)$$

R را ضریب بازتاب و T را ضریب تراگسیل از سطح می‌نامند؛ این ضرایب کسری از انرژی فرودی را که باز می‌تابد یا عبور می‌کند، نشان می‌دهند. توجه کنید که همواره با توجه به پایستگی انرژی داریم

$$R + T = 1 \quad (۸۸-۹)$$

به عنوان مثال، وقتی نور از هوا ($n_1 = 1$) وارد شیشه ($n_2 = 1.5$) می شود $R = 0.04$ و $T = 0.96$ می شود یعنی بیشتر انرژی به طرف دیگر منتقل می شود.

مسئله ۹-۱۳ ضرایب بازتاب و تراگسیل واقعی را بدون فرض $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ محاسبه کنید. نشان دهید که $R + T = 1$.

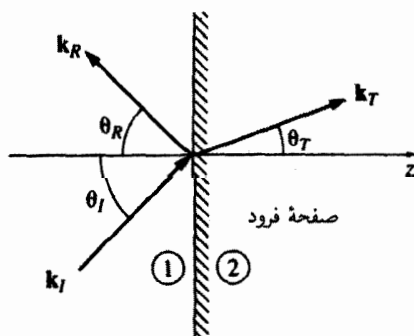
مسئله ۹-۱۴ در نوشتن معادلات (۹-۷۶) و (۹-۷۷) تصریح کردیم که امواج بازتابیده و تراگسیلیده دارای همان قطبش موج فرودی یعنی در جهت x هستند. ثابت کنید که چنین چیزی الزامی است. [راهنمایی: بردارهای قطبش امواج تراگسیلیده و بازتابیده را به صورت زیر در نظر بگیرید]

$$\hat{n}_T = \cos \theta_T \hat{x} + \sin \theta_T \hat{y}, \quad \hat{n}_R = \cos \theta_R \hat{x} + \sin \theta_R \hat{y}$$

□ و با توجه به شرایط مرزی ثابت کنید که $\theta_T = \theta_R = 0$.

۹-۳-۳ بازتاب و تراگسیل در فرود مایل

در بخش گذشته بازتابش و عبور را برای موج فرودی عمودی پیدا کردیم. حال می خواهیم حالت کلیتر موج فرودی مایل را که در آن موج فرودی مرز دو محیط را در یک زاویه θ_I (شکل ۹-۱۴) قطع می کند، بررسی کنیم. بدیهی است فرود عمودی، حالت خاصی از فرود مایل است که در آن $\theta_I = 0$ است.



شکل ۹-۱۴

یک موج تخت تکفام به صورت زیر در نظر بگیرید که از سمت چپ وارد می‌شود

$$\vec{E}_I(\mathbf{r}, t) = \vec{E}_{o_I} e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \vec{B}_I(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} (\hat{\mathbf{k}}_I \times \vec{E}_I) \quad (۸۹-۹)$$

این موج به دو موج بازتابیده

$$\vec{E}_R(\mathbf{r}, t) = \vec{E}_{o_R} e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \vec{B}_R(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} (\hat{\mathbf{k}}_R \times \vec{E}_R) \quad (۹۰-۹)$$

و موج تراگسیلیده

$$\vec{E}_T(\mathbf{r}, t) = \vec{E}_{o_T} e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \vec{B}_T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_2} (\hat{\mathbf{k}}_T \times \vec{E}_T), \quad (۹۱-۹)$$

تبدیل می‌شود. تمام این امواج دارای بسامد مساوی ω هستند که مقدار آن را یک‌بار برای همیشه می‌توان از چشمه پرتوهای فرودی مشخص کرد. سه عدد موج بنا بر معادله (۹۱-۹) به یکدیگر وابسته‌اند:

$$k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2 = \omega, \quad \text{یا} \quad k_I = k_R = \frac{v_2}{v_1} k_T = \frac{n_1}{n_2} k_T \quad (۹۲-۹)$$

میدانهای ترکیبی در محیط (۱)، $\vec{E}_I + \vec{E}_R$ و $\vec{B}_I + \vec{B}_R$ ، باید به میدانهای \vec{E}_T و \vec{B}_T در محیط (۲)، با اعمال شرایط مرزی (۹۲-۹) پیوندند. تمام این شرایط مرزی دارای ساختار مشترکی به صورت زیرند:

$$(\) e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + (\) e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = (\) e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad z = 0 \quad (۹۳-۹)$$

قبل از اینکه جمله‌های داخل پرانتزها را بنویسیم نکته مهمی را یادآور می‌شویم و آن وابستگی x و y در نماهاست چون شرایط مرزی باید برای تمام نقاط صفحه و در همه زمانها برقرار باشد این عملهای نمایی باید برابر باشند. در غیر این صورت مثلاً یک تغییر جزئی در x تساوی را از بین می‌برد (مسئله ۹-۱۵). بدیهی است عاملهای زمانی مساوی‌اند (در واقع، این را می‌توان به عنوان یک تأیید مستقل که موجهای فرودی باید با موجهای بازتابیده و تراگسیلیده مطابقت کنند، تلقی کرد). آشکارا برای مورد فضایی داریم

$$\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r}, \quad z = 0 \quad \text{وقتی که} \quad (۹۴-۹)$$

و یا به صورت صریحتر برای جمیع مقادیر x و y داریم

$$x(k_I)_x + y(k_I)_y = x(k_R)_x + y(k_R)_y = x(k_T)_x + y(k_T)_y \quad (۹۵-۹)$$

اما می‌دانیم که معادله (۹۵-۹) تنها وقتی برقرار است که مؤلفه‌ها جداگانه مساوی باشند، زیرا اگر $x = 0$ باشد، نتیجه می‌گیریم

$$(k_I)_y - (k_R)_y = (k_T)_y \quad (۹۶-۹)$$

و به‌ازای $y = 0$ داریم

$$(k_I)_x = (k_R)_x = (k_T)_x \quad (۹۷-۹)$$

محورها را می‌توان به صورتی در نظر گرفت که k_I در صفحه xz واقع باشد [یعنی $(k_I)_y = 0$]; بنابراین معادله (۹۶-۹)، k_R و k_T هم در آن صفحه خواهند بود. نتیجه‌گیری:

قانون اول. بردارهای موج فرودی، بازتابیده و تراکسیلیده تشکیل صفحه‌ای می‌دهند (به نام صفحه فرودی)، که شامل عمود بر سطح (در اینجا محور z) نیز هست.

معادله (۹۷-۹) ایجاب می‌کند که

$$k_I \sin \theta_I = k_R \sin \theta_R = k_T \sin \theta_T \quad (۹۸-۹)$$

که در آن θ_I ، θ_R و θ_T به ترتیب زاویه فرود، زاویه بازتاب و زاویه تراکسیل (یا زاویه شکست) که همگی نسبت به خط عمود سنجیده می‌شوند، هستند (شکل ۹-۱۴). با توجه به معادله (۹۲-۹) داریم:

قانون دوم. زاویه فرود و بازتاب مساوی‌اند

$$\theta_I = \theta_R \quad (۹۹-۹)$$

این قانون بازتاب است.

در مورد زاویه تراگسیل:

قانون سوم.

$$\frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{n_1}{n_2} \quad (۱۰۰-۹)$$

این قانون شکست یا قانون اسنل است.

اینها قوانین بنیادین نور هندسی‌اند. حیرت‌انگیز است که چگونه الکتروپدینامیک به قوانین نور مربوط می‌شود: هنوز باید از شرایط مرزی خاص استفاده کنیم — شکل عمومی آنچه را که تاکنون به‌کار برده‌ایم معادله (۹۳-۹) است. از این رو برای هر نوع موج دیگر (مثلاً امواج آب یا صوت) هم ممکن است انتظار داشته باشیم در عبور از یک محیط به محیط دیگر از همان قوانین "نورشناختی" پیروی کنند. همان‌گونه که توجه به عوامل نمایی موجب حذف آنها با توجه به معادله (۹۴-۹) می‌شود، شرایط مرزی (۷۴-۹) هم به‌صورت زیر در می‌آیند

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 (\vec{E}_{\circ I} + \vec{E}_{\circ R})_z &= \varepsilon_2 (\vec{E}_{\circ T})_z & (۱) \\ (\vec{B}_{\circ I} + \vec{B}_{\circ R})_z &= (\vec{B}_{\circ T})_z & (۲) \\ (\vec{E}_{\circ I} + \vec{E}_{\circ R})_{x,y} &= (\vec{E}_{\circ T})_{x,y} & (۳) \\ \frac{1}{\mu_1} (\vec{B}_{\circ I} + \vec{B}_{\circ R})_{x,y} &= \frac{1}{\mu_2} (\vec{B}_{\circ T})_{x,y} & (۴) \end{aligned} \right\} \quad (۱۰۱-۹)$$

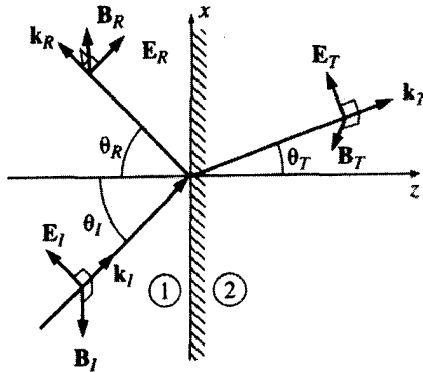
که در آن $\vec{B}_{\circ} = (\vec{k} \times \vec{E}_{\circ})/v$. (دو معادله آخر نمایانگر زوج معادلاتی هستند که یکی برای مؤلفه x و دیگری برای مؤلفه y است).

فرض کنید که قطبش مزدوج فرودی به موازات صفحه فرودی (یعنی صفحه xz در شکل ۱۵-۹) است؛ نتیجه اینکه (مسئله ۹-۱۴ را ببینید) امواج بازتابیده و تراگسیلیده نیز در همین صفحه قطبیده‌اند. (بحث موردی که قطبش عمود بر صفحه فرودی است را به خودتان محول می‌کنیم؛ به مسئله ۹-۱۶ توجه کنید.) لذا (۱) به‌صورت زیر در می‌آید.

$$\varepsilon_1 (-\vec{E}_{\circ I} \sin \theta_I + \vec{E}_{\circ R} \sin \theta_R) = \varepsilon_2 (-\vec{E}_{\circ T} \sin \theta_T) \quad (۱۰۲-۹)$$

(۲) تغییری نمی‌کند ($\circ = \circ$)، چون میدانهای مغناطیسی مؤلفه z ندارند؛ (۳) می‌شود

$$\vec{E}_{\circ I} \cos \theta_I + \vec{E}_{\circ R} \cos \theta_R = \vec{E}_{\circ T} \cos \theta_T \quad (۱۰۳-۹)$$



شکل ۹-۱۵

و بالاخره (۴) می شود

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} (\vec{E}_{oI} - \vec{E}_{oR}) = \frac{1}{\mu_2 v_2} \vec{E}_{oT} \quad (۱۰۴-۹)$$

با توجه به قوانین بازتاب و شکست، معادلات (۱۰۲-۹) و (۱۰۴-۹) هر دو به صورت زیر در می آیند

$$\vec{E}_{oI} - \vec{E}_{oR} = \beta \vec{E}_{oT} \quad (۱۰۵-۹)$$

که در آن همانند قبل

$$\beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \quad (۱۰۶-۹)$$

و بنابر معادله (۱۰۳-۹)

$$\vec{E}_{oI} + \vec{E}_{oR} = \alpha \vec{E}_{oT} \quad (۱۰۷-۹)$$

که در آن

$$\alpha \equiv \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} \quad (۱۰۸-۹)$$

با حل معادلات (۹-۱۰۵) و (۹-۱۰۷) دامنه‌های بازتاب و تراگسیل به دست می‌آیند

$$\boxed{\tilde{E}_{oR} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right) \tilde{E}_{oI}, \quad \tilde{E}_{oT} = \left(\frac{2}{\alpha + \beta} \right) \tilde{E}_{oI}} \quad (۹-۱۰۹)$$

معادلات اخیر را معادلات فرنل برای قطبش در صفحه فرود می‌نامند (دو معادله دیگر فرنل برای دامنه‌های بازتاب و تراگسیل وقتی که قطبش عمود بر صفحه فرودی است وجود دارند که در مسئله ۹-۱۶ بحث شده‌اند). توجه کنید که موج تراگسیلیده همواره هم‌فاز با موج فرودی است اما موج بازتاب وقتی $\alpha > \beta$ باشد، هم‌فاز با آن و زمانی که $\alpha < \beta$ باشد در فاز مقابل با آن است.^۱ دامنه امواج بازتابیده و تراگسیلیده به زاویه فرود بستگی دارد، زیرا α تابعی از θ_I است.

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_T}}{\cos \theta_I} = \frac{\sqrt{1 - [(n_1/n_2) \sin \theta_I]^2}}{\cos \theta_I} \quad (۹-۱۱۰)$$

در مورد فرود عمودی ($\theta_I = 0$) داریم $\alpha = 1$ و دوباره به معادله (۹-۸۲) می‌رسیم. در فرود مماسی وقتی $\theta_I = 90^\circ$ باشد α واگرا می‌شود و موج بازتاب کلی می‌کند (پدیده ناراحت‌کننده‌ای که برای کسانی که در شب روی جاده خیس رانندگی می‌کنند، آشناست). جالب توجه این است که یک زاویه میان دو مقدار بالا می‌توان یافت که به ازای آن موج بازتابیده کاملاً حذف می‌شود. این زاویه را که با θ_B نمایش می‌دهیم زاویه بروستر می‌نامند.^۲ بنابه معادله (۹-۱۰۹) این اتفاق وقتی می‌افتد که داشته باشیم $\alpha = \beta$ یا

$$\sin^2 \theta_B = \frac{1 - \beta^2}{(n_1/n_2)^2 - \beta^2} \quad (۹-۱۱۱)$$

در حالت معمولی که $\mu_1 \cong \mu_2$ داریم $n_1/n_2 \cong \beta$ و $\sin^2 \theta_B \cong \beta^2/(1 + \beta^2)$ و بنابراین

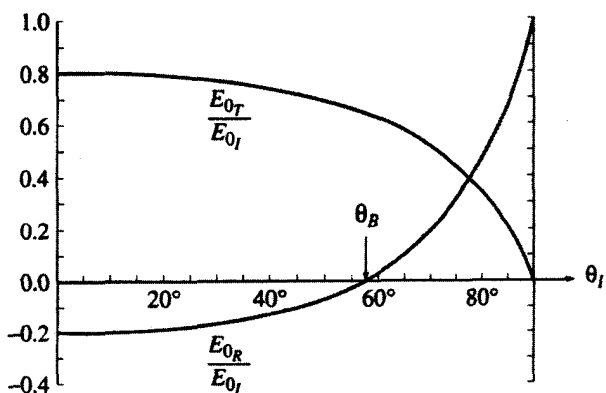
$$\tan \theta_B \cong \frac{n_2}{n_1} \quad (۹-۱۱۲)$$

شکل ۹-۱۶ نمودار دامنه‌های بازتاب و تراگسیل را به صورت تابعی از θ_I برای نوری که از هوا

۱. یک ابهام اجتناب‌ناپذیر در مورد فاز موج بازتابیده وجود دارد، چون (همان‌گونه که در پانوشت صفحه ۴۷۸ گفتیم) تغییر علامت بردار قطبش به معنی 180° تغییر فاز است. قراردادی که در شکل ۹-۱۵ آوردیم، یعنی \mathbb{E}_R مثبت "رو

به بالا" با بعضی، و نه همه کتابهای مرجع درس اپتیک سازگار است.

۲. زیرا امواج قطبیده عمود بر صفحه فرودی کاهش منطاری برای مؤلفه بازتابیده نشان نمی‌دهند. یک پرتو دلخواه فرودی در زاویه بروستر منجر به پرتو بازتابیده‌ای می‌شود که کاملاً به موازات سطح مشترک قطبیده است. به این دلیل است که شیشه‌های پولاروید، با محور عبوری قائم، در کاهش درخشندگی زیاد سطح افقی مفیدند.



شکل ۹-۱۶

$(n_1 = 1)$ وارد شیشه $(n_2 = 1.5)$ می‌شود، نشان می‌دهد. (عدد منفی روی نمودار به معنی آن است که موج در فاز متقابل با موج فرودی است — دامنه قدرمطلق است.)
توان به‌ازای واحد سطح که به سطح مرزی می‌تابد عبارت است از $\hat{S} \cdot \hat{z}$. بنابراین شدت فرودی برابر است با

$$I_I = \frac{1}{4} \varepsilon_1 v_1 E_{oI}^2 \cos \theta_1 \quad (9-113)$$

و شدتهای بازتابیده و تراگسیلیده هم برابرند با

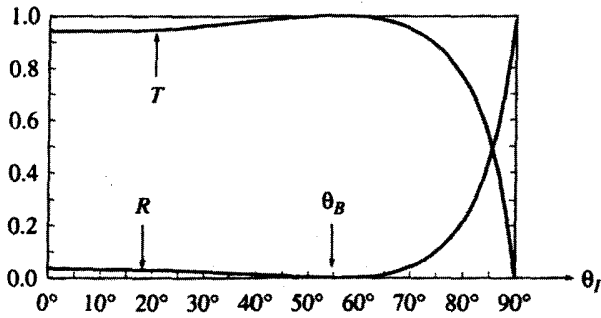
$$I_R = \frac{1}{4} \varepsilon_1 v_1 E_{oR}^2 \cos \theta_R \quad \text{و} \quad I_T = \frac{1}{4} \varepsilon_2 v_2 E_{oT}^2 \cos \theta_T \quad (9-114)$$

(وجود کسینوس در معادله بالا به دلیل آن است که صحبت از توان میانگین به‌ازای واحد سطح در سطح مشترک می‌کنیم و این سطح با جبهه موج زاویه‌ای می‌سازد.) ضرایب بازتاب و تراگسیل برای امواج قطبیده به‌موازات صفحه فرودی عبارت‌اند از

$$R \equiv \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{E_{oR}}{E_{oI}} \right)^2 = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 \quad (9-115)$$

$$T \equiv \frac{I_T}{I_I} = \frac{\varepsilon_2 v_2}{\varepsilon_1 v_1} \left(\frac{E_{oT}}{E_{oI}} \right)^2 \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} = \alpha \beta \left(\frac{2}{\alpha + \beta} \right)^2 \quad (9-116)$$

این معادله را در شکل ۹-۱۷ برحسب زاویه فرودی و برای سطح مرزی هوا/شیشه نشان داده‌ایم.



شکل ۹-۱۷

R کسری از انرژی فرودی است که بازتابیده می‌شود — بدیهی است در زاویهٔ برونستری ضریب صفر می‌شود؛ T هم کسری از انرژی است که عبور می‌کند — در θ_B به مقدار ۱ می‌رسد. توجه کنید که بنابر پایستگی انرژی همواره $R + T = 1$ است. به عبارت دیگر انرژی رسیده در واحد زمان به یک سطح با انرژی ترککنندهٔ این سطح برابر است.

مسئله ۹-۱۵ فرض کنید برای مقادیر غیرصفر A, B, C, a, b, c و به‌ازای جمیع مقادیر x داشته باشیم $Ae^{iax} + Be^{ibx} = Ce^{icx}$. ثابت کنید $a = b = c$ و $A + B = C$.

مسئله ۹-۱۶ مورد مربوط به قطبش عمود بر صفحهٔ فرودی (یعنی میدانهای الکتریکی در امتداد y شکل ۹-۱۵) را تحلیل کنید. شرایط مرزی (۹-۱۰) را اعمال کنید و معادلات فرنل \vec{E}_R و \vec{E}_T را به دست آورید. نمودار (\vec{E}_R/\vec{E}_I) و (E_{oT}/E_{oI}) را برحسب θ_I برای موردی که $\beta = n_2/n_1 = 1.5$ باشد رسم کنید. (توجه داشته باشید که به‌ازای این β ، موج بازتابیده در فاز متقابل قرار می‌گیرد.) نشان دهید که در این مورد به‌ازای هیچ مقدار n_1 و n_2 زاویهٔ برونستری وجود ندارد: \vec{E}_R هیچ‌گاه صفر نیست (مگر اینکه $n_1 = n_2 = \mu_1 = \mu_2$ یعنی اینکه دو محیط از نظر نورشناختی نمایزناپذیر باشند). نشان دهید که معادلات فرنل حاصل به‌صورت‌های مشخص آنها در فرود عمودی قابل تحویل‌اند. ضرایب بازتاب و تراگسیل را محاسبه کنید و نشان دهید که مجموع آنها یک می‌شود.

مسئله ۹-۱۷ ضریب شکست الماس برابر است با ۲.۴۲. نموداری شبیه شکل ۹-۱۶ برای فصل مشترک هوا/الماس رسم کنید، (فرض کنید $\mu_1 = \mu_2 = \mu$). موارد زیر را محاسبه کنید:

(الف) دامنه‌های مربوط به فرود عمودی

(ب) زاویهٔ برونستری

(ج) زاویهٔ «همگذری» که در آن دامنه‌های بازتاب و تراگسیل برابرند.

□

۴-۹ جذب و پاشندگی

۱-۴-۹ امواج الکترومغناطیسی در رساناها

در به دست آوردن معادله موج برای میدانهای الکترومغناطیسی در بخش ۳-۹ چگالی بار آزاد، ρ_f ، و چگالی جریان آزاد، \mathbf{J}_f ، را صفر فرض کردیم و هر آنچه را هم بعد از آن بحث کردیم، با همین فرض بود. چنین فرضی برای مواردی که موج در خلأ یا در یک ماده دی‌الکتریک نظیر شیشه یا آب خالص منتشر می‌شود کاملاً منطقی است. اما در یک محیط رسانا (مثل آب دریا یا فلز) از کنترل جریان بار الکتریکی عاجزیم و عموماً \mathbf{J}_f صفر نیست. می‌دانیم که بنابر قانون اهم، چگالی جریان (آزاد) در یک رسانا با میدان الکتریکی متناسب است:

$$\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E} \quad (۱۱۷-۹)$$

با این مبنا، معادلات ماکسول برای محیطهای خطی به صورت زیر در می‌آیند

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon} \rho_f & (۱) & \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (۳) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & (۲) & \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \sigma \mathbf{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & (۴) \end{aligned} \right\} \quad (۱۱۸-۹)$$

حال با در نظر گرفتن معادله پیوستگی جریان ثابت یعنی

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t} \quad (۱۱۹-۹)$$

و نیز قانون اهم و قانون گاوس (۱)، برای یک محیط خطی همگن داریم

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = -\sigma(\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho_f$$

و از این معادله نتیجه زیر حاصل می‌شود

$$\rho_f(t) = e^{-(\sigma/\epsilon)t} \rho_f(0) \quad (۱۲۰-۹)$$

بنابراین هر چگالی بار آزاد اولیه ($\rho_f(0)$ ، به صورت نمایی، با ثابت زمانی مشخصه $\tau \equiv \epsilon/\sigma$ کم می‌شود. این نتیجه، نشان دیگری است بر این واقعیت شناخته شده که هرگاه باری آزاد روی یک

جسم رسانا قرار دهیم به گوشه‌های جسم می‌رود. ثابت زمانی τ عامل سنجش میزان "خوب" بودن یک رساناست: در یک رسانای "کامل" $\sigma = \infty$ و $\tau = 0$ است؛ در یک رسانای "خوب" τ به مراتب کمتر از زمانهای ذی ربط دیگر در مسئله است (در دستگاههای نوسان‌کننده $\tau \ll 1/\omega$)؛ در یک رسانای "ضعیف" τ از زمانهای مشخصه در مسئله بزرگتر است ($\tau \gg 1/\omega$). در حال حاضر توجهی به این رفتار گذرا نداریم. صبر می‌کنیم تا هر نوع بار آزاد انباشته ناپدید شود. از آن به بعد $\rho_f = 0$ و داریم

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\sigma \mathbf{E} \quad (4) \end{array} \right\} \quad (121-9)$$

تنها تفاوت این فرمول با آنچه در (۹-۶۷) برای محیطهای عایق نوشتیم اضافه شدن جمله آخر در (۴) است.

همچون گذشته تاو (۳) و (۴) را اعمال می‌کنیم تا معادلات موج پیراسته \mathbf{E} و \mathbf{B} را به دست آوریم

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (122-9)$$

این معادله هنوز هم جوابهای موج تخت را می‌پذیرند

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)} \quad (123-9)$$

اما در این مورد "عدد موج" \tilde{k} مختلط است

$$\tilde{k}^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega \quad (124-9)$$

۱. N. Ashby, *Am. J. Phys.* **43**, 553 (1975). نشان می‌دهد که در یک رسانای خوب τ بسیار کوچک و نزدیک به صفر است (10^{-19} s) برای مس که در آن، مدت زمان بین دو برخورد $\tau_c = 10^{-12}$ s است). مسئله این است که قانون اهم در زمانهای کوچکتر از τ_c صادق نیست؛ در واقع زمان لازم برای اتلاف بار در یک رسانای خوب از مرتبه بزرگی τ_c است و نه از آن τ . افزون بر این H. C. Ohanian, *Am. J. Phys.* **51**, 1020 (1983) نشان می‌دهد برای به تعادل رسیدن میدانها و بارها زمان بیشتری لازم است. اما هیچ‌یک از اینها به مسئله فعلی ما مرتبط نیستند؛ چگالی بار آزاد یک رسانا سرانجام ناپدید می‌شود، و اینکه چه مدت طول می‌کشد خارج از بحث ماست.

صحت این معادله را می‌توان با قرار دادن معادله (۹-۱۲۳) در معادله (۹-۱۲۲) آزمود. با جذرگیری از عدد موج به دست می‌آوریم

$$\tilde{k} = k + i\kappa \quad (۹-۱۲۵)$$

که در آن

$$k \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\gamma}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1 \right]^{1/2}, \quad \kappa \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\gamma}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1 \right]^{1/2} \quad (۹-۱۲۶)$$

قسمت موهومی \tilde{k} باعث تضعیف موج (کاهش دامنه با افزایش z) می‌شود

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \quad (۹-۱۲۷)$$

فاصله‌ای را که لازم است تا دامنه به $1/e$ (حدود یک سوم) مقدار اولیه‌اش برسد عمق پوستی می‌نامند:

$$d \equiv \frac{1}{\kappa} \quad (۹-۱۲۸)$$

این فاصله معیاری برای عمق نفوذ یک موج الکترومغناطیسی در رساناست. بخش حقیقی \tilde{k} برای تعیین طول موج، سرعت انتشار و ضریب شکست بوده و با استفاده از معادلات زیر به‌کار می‌آید

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad v = \frac{\omega}{k}, \quad n = \frac{ck}{\omega} \quad (۹-۱۲۹)$$

امواج تخت تضعیف شده [معادله (۹-۱۲۷)] در معادله اصلاح شده موج (۹-۱۲۲) برای هر $\tilde{\mathbf{E}}_0$ و $\tilde{\mathbf{B}}_0$ صدق می‌کنند. اما معادلات ماکسول (۹-۱۲۱) محدودیتهای بیشتری وضع می‌کنند که از آنها برای تعیین دامنه‌های نسبی، فازها، و قطبشهای \mathbf{E} و \mathbf{B} بهره می‌گیریم. مانند گذشته، (۱) و (۲) هر مؤلفه z را حذف می‌کند: میدانها عرضی هستند. محورها را نیز می‌توانیم به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که \mathbf{E} در جهت x قطبیده باشد:

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \hat{x} \quad (۹-۱۳۰)$$

آن‌گاه از (۳) نتیجه می‌شود

$$\vec{B}(z, t) = \frac{\vec{k}}{\omega} \vec{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \hat{y} \quad (۱۳۱-۹)$$

[معادله (۴) هم همین نتیجه را نشان می‌دهد] باز هم میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بر یکدیگر عمودند.

مثل هر عدد مختلطی، \vec{k} را می‌توان برحسب مدول و فاز آن نوشت:

$$\vec{k} = K e^{i\phi} \quad (۱۳۲-۹)$$

که در آن

$$K \equiv |\vec{k}| = \sqrt{k^2 + \kappa^2} = \omega \sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} \quad (۱۳۳-۹)$$

و

$$\phi \equiv \tan^{-1}(\kappa/k) \quad (۱۳۴-۹)$$

بنابر معادلات (۹-۱۳۰) و (۹-۱۳۱)، دامنه‌های مختلط $\vec{E}_0 = E_0 e^{i\delta_E}$ و $\vec{B}_0 = B_0 e^{i\delta_B}$ به صورت زیر به هم مربوط‌اند

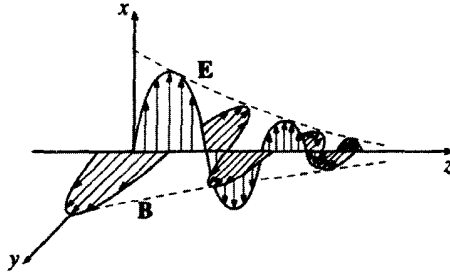
$$B_0 e^{i\delta_B} = \frac{K e^{i\phi}}{\omega} E_0 e^{i\delta_E} \quad (۱۳۵-۹)$$

بدیهی است که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی دیگر هم‌فاز نیستند؛ در واقع

$$\delta_B - \delta_E = \phi \quad (۱۳۶-۹)$$

میدان مغناطیسی نسبت به میدان الکتریکی تأخیر فاز دارد. در این بین دامنه‌های (حقیقی) \mathbf{E} و \mathbf{B} به صورت زیر به هم مربوط می‌شوند

$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{K}{\omega} = \sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} \quad (۱۳۷-۹)$$



شکل ۱۸-۹

نهایت اینکه میدانهای (حقیقی) الکتریکی و مغناطیسی عبارت‌اند از

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= E_0 e^{-\kappa z} \cos(kz - \omega t + \delta_E) \hat{x} \\ \mathbf{B}(z, t) &= B_0 e^{-\kappa z} \cos(kz - \omega t + \delta_E + \phi) \hat{y} \end{aligned} \right\} \quad (۱۳۸-۹)$$

در شکل ۱۸-۹ این میدانها را نشان داده‌ایم.

مسئله ۱۸-۹ (الف) فرض کنید مقداری بار آزاد را در داخل یک قطعه شیشه قرار داده‌اید. تقریباً چه مدت طول می‌کشد تا بارها به سطح شیشه بیایند؟

(ب) می‌دانیم نقره رسانای بسیار خوبی است، اما قیمت آن گران است. فرض کنید یک آزمایش میکروموج در بسامد 10^{10} هرتز انجام می‌دهید. ضخامت لایه نقره چقدر باید باشد؟

(ج) طول موج و سرعت انتشار امواج رادیویی را در بسامد ۱ MHz برای مس پیدا کنید. با مقادیر متناظر آنها در هوا (یا خلأ) مقایسه کنید.

مسئله ۱۹-۹ (الف) نشان دهید که عمق پوستی در یک رسانای ضعیف ($\sigma \ll \omega \epsilon$) برابر است با $(2/\sigma)\sqrt{\epsilon/\mu}$ (مستقل از بسامد). عمق پوستی را (برحسب متر) برای آب (خالص) بیابید.

(ب) نشان دهید که عمق پوستی در یک رسانای خوب ($\sigma \gg \omega \sigma$) برابر است با $\lambda/2\pi$ (که در آن λ طول موج در رساناست). عمق پوستی (برحسب نانومتر) را برای یک فلز معمولی ($\sigma \approx 10^7 (\Omega\text{m})^{-1}$) در ناحیه مرئی ($\omega \approx 10^{15}/\text{s}$) و با فرض $\epsilon \approx \epsilon_0$ و $\mu \approx \mu_0$ حساب کنید. چرا فلزات کدر هستند؟

(ج) نشان دهید که در یک رسانای خوب، میدان مغناطیسی نسبت به میدان الکتریکی 45° تأخیر فاز دارد، و نسبت بین دامنه آنها را حساب کنید. برای یک مثال عددی، از "فلز معمولی" قسمت (ب) استفاده کنید.

مسئله ۹-۲۰ (الف) چگالی انرژی (در میانگین زمانی) یک موج تخت الکترومغناطیسی را برای یک محیط رسانا محاسبه کنید (شکل ۹-۱۳۸). نشان دهید که سهم مغناطیسی همواره غالب است. پاسخ: $E_0^2 e^{-2\kappa z} (k^2 / 2\mu\omega^2)$.

(ب) نشان دهید که شدت برابر است با $(k/2\mu\omega) E_0^2 e^{-2\kappa z}$.

۹-۴-۲ بازتاب از یک سطح رسانا

شرایط مرزی‌ای که برای تحلیل بازتابش و شکست در سطح مرزی بین دی‌الکتریکها به‌کار بردیم، وقتی بارها و جریانهای آزاد وجود داشته باشند دیگر صادق نیستند. در این صورت باید از معادلات کلیتر (۷-۶۳) استفاده کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 E_1^\perp - \varepsilon_2 E_2^\perp &= \sigma_f & (1) & \quad \mathbf{E}_1^\parallel - \mathbf{E}_2^\parallel = 0 & (3) \\ B_1^\perp - B_2^\perp &= 0 & (2) & \quad \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}} & (4) \end{aligned} \right\} (9-139)$$

در این معادلات σ_f بار آزاد سطحی و \mathbf{K}_f جریان آزاد سطحی در مرز است. بردار بکه $\hat{\mathbf{n}}$ بر سطح عمود است و جهت آن از محیط (۲) به محیط (۱) است. در رساناهای اهمی ($\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$) بار آزاد سطحی نمی‌تواند وجود داشته باشد زیرا لازمه وجود این بار حضور یک میدان نامتناهی در مرز است.

حال فرض کنید که سطح مرزی بین محیط رسانای خطی (۱) و رسانای (۲) صفحه xy باشد. یک موج تخت تکفام که در جهت z حرکت می‌کند و در جهت x قطبیده است مطابق شکل ۹-۱۳ از سمت چپ نزدیک می‌شود

$$\tilde{\mathbf{E}}_I(z, t) = \tilde{E}_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i(k_1 z - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_I(z, t) = \frac{1}{v_1} \tilde{E}_0 \hat{\mathbf{y}} e^{i(k_1 z - \omega t)} \quad (9-140)$$

این موج فرودی موج بازتابیده زیر را به‌وجود می‌آورد

$$\tilde{\mathbf{E}}_R(z, t) = \tilde{E}_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i(-k_1 z - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_R(z, t) = -\frac{1}{v_1} \tilde{E}_0 \hat{\mathbf{y}} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \quad (9-141)$$

که به طرف چپ محیط (۱) باز می‌تابد، و نیز یک موج تراگسیلیده به‌صورت زیر را باعث می‌شود

$$\tilde{\mathbf{E}}_T(z, t) = \tilde{E}_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_T(z, t) = \frac{\tilde{k}_2}{\omega} \tilde{E}_0 \hat{\mathbf{y}} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)} \quad (9-142)$$

که در حین نفوذ به رسانا تضعیف می‌شود.

اعمال شرایط مرزی ۹-۱۳۹ در $z = 0$ به معنی آن است که موج ترکیبی در محیط (۱) باید به موج در محیط (۲) پیوندد. با توجه به این واقعیت که در هر دو طرف $E^\perp = 0$ است از شرط مرزی (۱) نتیجه می‌گیریم که $\sigma_f = 0$ است. شرط (۲) هم با توجه به اینکه $B^\perp = 0$ است، برقرار است. ضمناً از (۳) نتیجه می‌شود

$$\vec{E}_{oI} + \vec{E}_{oR} = \vec{E}_{oT} \quad (۱۴۳-۹)$$

و (۴) به‌ازای $K_f = 0$ می‌گوید که

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} (\vec{E}_{oI} - \vec{E}_{oR}) - \frac{\tilde{k}_y}{\mu_2 \omega} \vec{E}_{oT} = 0 \quad (۱۴۴-۹)$$

یا

$$\vec{E}_{oI} - \vec{E}_{oR} = \tilde{\beta} \vec{E}_{oT} \quad (۱۴۵-۹)$$

که در آن

$$\tilde{\beta} \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 \omega} \tilde{k}_y \quad (۱۴۶-۹)$$

و از این همه نتیجه می‌شود که

$$\vec{E}_{oR} = \left(\frac{1 - \tilde{\beta}}{1 + \tilde{\beta}} \right) \vec{E}_{oI}, \quad \vec{E}_{oT} = \left(\frac{2}{1 + \tilde{\beta}} \right) \vec{E}_{oI} \quad (۱۴۷-۹)$$

این نتایج به‌طور صوری همانند نتایج حاصل از اعمال شرایط مرزی بین نارساها [معادله (۹-۸۲)] جلوه می‌کند. اما این شباهت کاملاً درست نیست، زیرا β اکنون یک عدد مختلط است. در یک رسانای کامل ($\sigma = \infty$) داریم، $k_y = \infty$ [معادله (۹-۱۲۶)]، بنابراین $\tilde{\beta}$ نامتناهی است، و

$$\vec{E}_{oR} = -\vec{E}_{oI}, \quad \vec{E}_{oT} = 0 \quad (۱۴۸-۹)$$

در این مورد موج با 180° تغییر فاز کلاً بازتابیده می‌شود. (به همین دلیل است که از رسانای خیلی خوب مانند نقره در ساخت آینه استفاده می‌شود. در عمل لایه نازکی از نقره را پشت یک قطعه

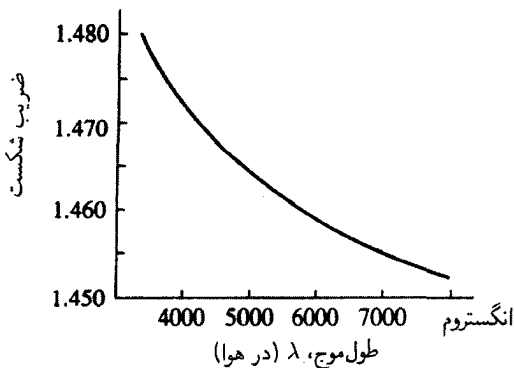
شیشه اندود می‌کنند — در اینجا شیشه نقشی در بازتاب نور ندارد و تنها کار آن نگهداری لایه نقره است. ضمناً به دلیل آنکه عمق پوستی در بسامدهای نوری حدوداً 10^8 \AA است، به لایه‌های کلفت نیازی نیست.)

مسئله ۹-۲۱ ضریب بازتاب نور را در فصل مشترک هوا-نقره ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$)، $\epsilon_1 = \epsilon_0$ ، $\sigma = 6 \times 10^7 (\Omega\text{m})^{-1}$ برای بسامدهای نوری ($\omega = 4 \times 10^{15} / \text{s}$) محاسبه کنید. □

۹-۴-۳ وابستگی گذردهی به بسامد

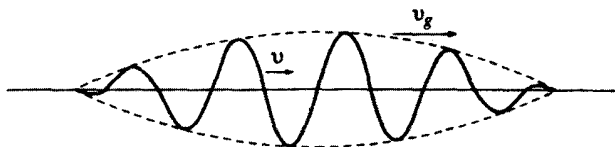
در بخشهای قبل دیدیم که در انتشار امواج الکترومغناطیسی در داخل ماده سه خاصیت مربوط به ماده که آنها را ثابت گرفتیم نقش داشتند: گذردهی ϵ ، تراوایی μ ، و رسانندگی σ . در واقع هر یک از این سه پارامتر تا حدودی به بسامد امواج مورد بحث بستگی دارند، اگر گذردهی حقیقتاً ثابت می‌بود، آنگاه ضریب شکست در یک محیط شفاف، $n \cong \sqrt{\epsilon_r}$ ، نیز ثابت می‌بود. اما در درس اپتیک خوانده‌ایم که n تابعی از طول موج است (شکل ۹-۱۹ این بستگی را برای نوعی شیشه نشان می‌دهد). از این روست که یک منشور یا قطره‌ای باران نور آبی را بیشتر از قرمز خم می‌کند، و نور سفید را به رنگهای رنگین‌کمان تجزیه می‌کند. این پدیده را پاشندگی می‌نامند. در تعمیم این مفهوم، هرگاه سرعت یک موج به بسامد آن بستگی داشته باشد، محیط انتشار را پاشنده می‌نامند.^۱

چون امواج دارای بسامدهای مختلف، با سرعتهای متفاوتی در یک محیط پاشنده منتشر می‌شوند، یک شکل موج که در برگیرنده تعدادی بسامد است در حین انتشار تغییر شکل می‌دهد.



شکل ۹-۱۹

۱. رساناها محیطهای پاشنده‌اند، به معادلات (۹-۱۲۶) و (۹-۱۲۹) رجوع کنید.



شکل ۹-۲۰

یک موج با قله تیز، در حین انتشار نوعاً پهن می‌شود و در حالی که هر مؤلفهٔ سینوسی با سرعت موج (یا فاز)

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (۹-۱۴۹)$$

حرکت می‌کند، بسته موج به صورت یک کل ("پوش") با سرعتی که سرعت گروه خوانده می‌شود حرکت می‌کند.^۱

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (۹-۱۵۰)$$

این وضعیت را می‌توانید با انداختن سنگی در یک استخر و تماشای امواج حاصل نمایش دهید: در حالی که اختلال حاصل در مجموع به صورت دایره و با سرعت v_g گسترش می‌یابد چینهایی که آن را می‌سازند با سرعتی دو برابر ($v = 2v_g$ در این حالت) حرکت می‌کنند. این چینها در انتهای عقبی بسته موج ظاهر شده و همچنان که به طرف مرکز آن می‌روند رشد می‌کنند، و سپس دوباره منقبض شده در قسمت جلویی اثر جلوه می‌کنند. (شکل ۹-۲۰). ما به این موضوعها نمی‌پردازیم و توجه خود را معطوف امواج تکفام می‌کنیم که چنین وضعی برایشان پیش نمی‌آید. اما این نکته را به خاطر بسپارید که انرژی بسته موج در یک محیط پاشنده با سرعت گروه منتقل می‌شود و نه با سرعت فاز. زیاد نگران این موضوع هم نباشید که در بعضی مواقع v بزرگتر از c می‌شود.^۲

۱. مرجع زیر را ببینید

A. P. French, *Vibrations and Waves*, p. 230 (New York: W. W. Norton & Co., 1971), or F. S. Crawford, Jr., *Waves*, Sect. 6.2 (New York: McGraw-Hill, 1968).

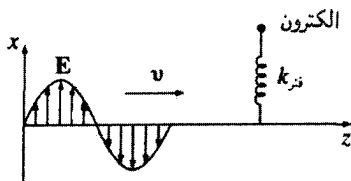
۲. حتی در مواردی سرعت گروه هم می‌تواند از c بزرگتر باشد. مرجع زیر را ببینید

P. C. Peters, *Am. J. Phys.* **56**, 129 (1988)

اگر دو "سرعت نور" متفاوت برای قانع کردن شما کافی نیست، مرجع زیر را ببینید

S. C. Bloch, *Am. J. Phys.* **45**, 538 (1977)

که در آن کمتر از هشت سرعت متفاوت شناخته نشده‌اند!



شکل ۹-۲۱

هدف ما در این بخش آن است که بستگی ε به بسامد در نارساناها را، با استفاده از یک الگوی ساده شده برای رفتار الکترونها در دی الکترونیکها، بررسی کنیم. همانند تمام الگوهای کلاسیکی پدیده‌های مقیاس اتمی، این الگو هم در بهترین شرایطش بالاخره تقریب یک واقعیت است؛ با وجود این به نتایج کیفی قابل قبولی می‌رسد، و سازوکاری منطقی برای پاشندگی در محیطهای شفاف ارائه می‌دهد.

الکترونهای یک جسم نارسانا به مولکولهای خاصی پیوند دارند. نیروهای اتصال واقعی می‌توانند کاملاً پیچیده باشند، اما ما الکترون را متصل به انتهای یک فنر تخیلی با ثابت فنر $k_{\text{نزر}}$ در نظر می‌گیریم (شکل ۹-۲۱):

$$F_{\text{اتصال}} = -k_{\text{نزر}}x = -m\omega_0^2 x \quad (۹-۱۵۱)$$

که در آن x جابه‌جایی نسبت به وضع تعادل، m جرم الکترون و ω_0 بسامد نوسان طبیعی، $\sqrt{k_{\text{نزر}}/m}$ است. [اگر این الگویی نامناسب به نظر تان می‌رسد، به مثال ۴-۱ رجوع کنید که در آن بر نیرویی دقیقاً به همین صورت رسیدیم. در واقع، عملاً هر نوع نیروی اتصال را می‌توان بدین ترتیب، و برای جابه‌جاییهای به اندازه کافی کوچک از وضعیت تعادل، تقریب زد و این را می‌توانید با بسط انرژی پتانسیل در سری تیلور حول نقطه تعادل ملاحظه کنید:

$$U(x) = U(0) + xU'(0) + \frac{1}{2}x^2U''(0) + \dots$$

جمله اول ثابتی است که اهمیت دینامیکی ندارد [همواره می‌توانید صفر انرژی پتانسیل را به‌گونه‌ای انتخاب کنید که $U(0) = 0$ باشد]. جمله دوم خودبه‌خود صفر است، زیرا $dU/dx = -F$ و بنا بر طبیعت تعادل، نیرو در آن نقطه صفر است. جمله سوم دقیقاً انرژی پتانسیل فنر با نیروی ثابت $|d^2U/dx^2|_{0} = k_{\text{نزر}}$ است (مشتق دوم برای نقطه‌ای در حال تعادل پایدار، مثبت است). تا جایی که جابه‌جاییها کوچک هستند، از جمله‌های بالاتر سری می‌توان صرف‌نظر کرد. از نظر هندسی، تمام چیزی که می‌توان گفت این است که در حقیقت به هر تابع در حوالی کمینه می‌توان یک سهمی برازش داد.]

در این بین، این احتمال وجود دارد که یک نیروی میرایی بر الکترون اثر کند

$$F_{\text{میرایی}} = -m\gamma \frac{dx}{dt} \quad (۱۵۲-۹)$$

[باز هم ساده‌ترین شکل ممکن را انتخاب کرده‌ایم؛ میرایی باید در جهت مخالف سرعت باشد، و آسانترین فرض هم متناسب گرفتن مقدار این دواست. در اینجا، کاری به عامل میرایی نداریم — علاوه بر عوامل دیگر، یک بار نوسان‌کننده تابش می‌کند، و تابش انرژی مصرف می‌کند. در فصل ۱۱ این "میرایی تابشی" را محاسبه می‌کنیم.]

در حضور یک موج الکترومغناطیسی با بسامد ω که در جهت x قطبیده است (شکل ۹-۲۱)، بر الکترون یک نیروی محرک اثر می‌کند

$$F_{\text{محرک}} = qE_0 \cos(\omega t) \quad (۱۵۳-۹)$$

که در آن q بار الکترون و E_0 دامنه موج در نقطه z محل الکترون است. (چون ما فقط به یک نقطه توجه داریم، می‌توانیم ساعت را طوری تنظیم کنیم که بیشینه E متعلق به $t = 0$ باشد.) اجماع همه اینها در قانون دوم نیوتون، می‌دهد

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{\text{کل}} = F_{\text{اتصال}} + F_{\text{میرایی}} + F_{\text{محرک}}$$

یا

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = qE_0 \cos(\omega t) \quad (۱۵۴-۹)$$

بنابراین الگوی فوق، الکترون را به صورت یک نوسانگر هماهنگ میرا که در یک بسامد ω نوسان می‌کند توصیف می‌کند. (فرض می‌کنیم هسته که به مراتب سنگینتر است به حال سکون باقی می‌ماند.)

کار کردن با معادله (۹-۱۵۴)، اگر آن را به صورت قسمت حقیقی یک معادله مختلط فرض کنیم ساده‌تر است:

$$\frac{d^2 \tilde{x}}{dt^2} + \gamma \frac{d\tilde{x}}{dt} + \omega_0^2 \tilde{x} = \frac{q}{m} E_0 e^{-i\omega t} \quad (۱۵۵-۹)$$

در حالت پایا، دستگاه با بسامد محرک

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{-i\omega t} \quad (۱۵۶-۹)$$

نوسان می‌کند. با قرار دادن این معادله در معادله (۱۵۵-۹)، به دست می‌آوریم

$$\tilde{x}_0 = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0 \quad (۱۵۷-۹)$$

گشتاور دو قطبی، قسمت حقیقی تابع زیر است

$$\bar{p}(t) = q\tilde{x}(t) = \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t} \quad (۱۵۸-۹)$$

جملهٔ موهومی مخرج کسر به معنی آن است که p نسبت به E تأخیر فاز به اندازه $[\tan^{-1}[\gamma\omega/(\omega_0 - \omega^2)]]$ دارد که مقدار آن وقتی $\omega \ll \omega_0$ باشد بسیار کوچک و زمانی که $\omega \gg \omega_0$ باشد به π می‌رسد.

به‌طور کلی، الکترونیهای متفاوت قرار گرفته در یک مولکول معین دارای بسامدهای طبیعی و ضرایب میرایی متفاوتی هستند. فرض کنید تعداد f_j الکترون با بسامد ω_j و میرایی γ_j در هر مولکول داشته باشیم. اگر تعداد مولکولها در واحد حجم N باشد، قطبش \mathbf{P} از قسمت حقیقی تابع زیر حاصل می‌شود.^۱

$$\bar{\mathbf{P}} = \frac{Nq^2}{m} \left(\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right) \bar{\mathbf{E}} \quad (۱۵۹-۹)$$

پذیرفتاری الکتریکی را به‌صورت ضریب تناسب میان \mathbf{P} و \mathbf{E} (یعنی $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$) تعریف کرده‌ایم. در مورد فعلی، \mathbf{P} با \mathbf{E} متناسب نیست (می‌توان گفت که محیط خطی نیست)، زیرا اختلاف فاز وجود دارد. با این همه، قطبش مختلط $\bar{\mathbf{P}}$ با میدان مختلط $\bar{\mathbf{E}}$ متناسب است، از این رو می‌توانیم پذیرفتاری مختلط، $\bar{\chi}_e$ را تعریف کنیم:

$$\bar{\mathbf{P}} = \epsilon_0 \bar{\chi}_e \bar{\mathbf{E}} \quad (۱۶۰-۹)$$

۱. این معادله مستقیماً برای گازهای رقیق صادق است؛ در مورد مواد چگالتر نظریه با توجه به معادلهٔ کلاسیوس-موساتی (مسئلهٔ ۴-۳۸) کمی پیراسته می‌شود. در این میان "قطبش" یک محیط، \mathbf{P} ، را با "قطبش" یک موج اشتباه نکنید - هر دو با یک کلمه ولی با معانی مختلف بیان می‌شوند.

تمام دستکاریهای انجام شده برای درک این مطلب بود که قطبش فیزیکی قسمت حقیقی \vec{P} است، درست مانند اینکه میدان فیزیکی قسمت حقیقی \vec{E} است. به خصوص، تناسب میان \vec{D} و \vec{E} گزدهی مختلط $(1 + \chi_e)$ $\vec{E} = \epsilon_0$ است، و ثابت دی الکتریکی مختلط (در این الگو) برابر است با

$$\bar{\epsilon}_r = 1 + \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \quad (161-9)$$

معمولاً، جمله موهومی قابل صرف نظر کردن است؛ با وجود این، وقتی ω به یکی از بسامدهای طبیعی (ω_j) نزدیک باشد، همان گونه که خواهید دید نقش مهمی ایفا می کند. در یک محیط پاشنده، معادله موج برای یک بسامد معین، چنین است

$$\nabla^2 \vec{E} = \bar{\epsilon} \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (162-9)$$

که همانند گذشته جوابهای موج تخت را می پذیرد

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{i(\bar{k}z - \omega t)} \quad (163-9)$$

که عدد موج مختلط آن عبارت است از

$$\bar{k} \equiv \sqrt{\bar{\epsilon} \mu_0} \omega \quad (164-9)$$

وقتی \bar{k} را بر حسب قسمت حقیقی و موهومی آن می نویسیم

$$\bar{k} = k + i\kappa \quad (165-9)$$

معادله (163-9) می شود

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \quad (166-9)$$

بدیهی است که موج تضعیف شده است (قبول این واقعیت دشوار نیست، زیرا میرایی انرژی جذب می کند). چون شدت متناسب با E^2 (و بنابراین با $e^{-2\kappa z}$) است، کمیت

$$\alpha \equiv 2\kappa \quad (167-9)$$

را ضریب جذب می‌نامند. در این میان سرعت موج ω/k است و ضریب شکست برابر است با

$$n = \frac{ck}{\omega} \quad (۱۶۸-۹)$$

نمادگذاریهایی که در اینجا به‌کار بردیم همانهایی هستند که در ۹-۴-۱ استفاده کردیم. با وجود این در مورد فعلی k و κ هیچ ارتباطی با رسانایی ندارند؛ این کمیتها برحسب پارامترهای نوسانگر هماهنگ میرا مشخص می‌شوند. در مورد گازها جمله دوم معادله (۹-۱۶۱) نوعاً کوچک است، و جذر را به صورت تقریب $\sqrt{1+\epsilon} \cong 1 + (1/2)\epsilon$ یعنی جمله اول در بسط دوجمله‌ای می‌نویسیم. آن‌گاه

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r} \cong \frac{\omega}{c} \left[1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right] \quad (۱۶۹-۹)$$

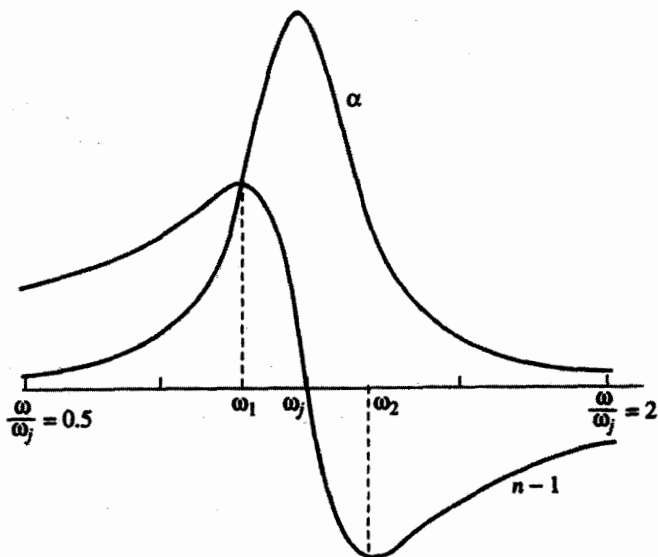
و بنابراین ضریب شکست می‌شود

$$n = \frac{ck}{\omega} \cong 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j(\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2\omega^2} \quad (۱۷۰-۹)$$

و

$$\alpha = 2\kappa \cong \frac{Nq^2\omega^2}{m\epsilon_0 c} \sum_j \frac{f_j\gamma_j}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2\omega^2} \quad (۱۷۱-۹)$$

در شکل ۹-۲۲ ضریب شکست و ضریب جذب را در نزدیکی یکی از حالات تشدید رسم کرده‌ایم. ضریب شکست در بیشتر موارد با افزایش بسامد به‌تدریج زیاد می‌شود و این مشاهده با تجربه ما در اپتیک سازگار است (شکل ۹-۱۹). با وجود این در نقاط بسیار نزدیک به تشدید، ضریب شکست به سرعت افت پیدا می‌کند. چون این رفتار غیرعادی است، آن را پاشندگی غیرعادی می‌نامند. توجه داشته باشید که نواحی مربوط به پاشندگی غیرعادی (یعنی $\omega_1 < \omega < \omega_2$ در شکل) بر نقاط با جذب بیشینه متناظر است؛ در واقع، در این محدوده بسامد عملاً ممکن است ماده کدر باشد. دلیل این امر آن است که الکترونها اکنون در بسامد "مطلوب" به نوسان واداشته شده‌اند؛ دامنه نوسان آنها نسبتاً بزرگ است و از این رو مقدار انرژی تلف شده بر اثر سازوکار میرایی زیاد است. در شکل ۹-۲۲ می‌بینیم که n در بالاتر از تشدید از ۱ کوچکتر می‌شود و این به معنی آن است که سرعت از c تجاوز می‌کند. همان‌گونه که قبلاً گفتیم از این مطلب نتیجه مهمی عایدان نمی‌شود



شکل ۹-۲۲

زیرا انرژی با سرعت موج حرکت نمی‌کند بلکه با سرعت گروه حرکت می‌کند (مسئله ۹-۲۵). افزون بر این، در این نمودار سهم سایر جمله‌های جمع که افزودن یک "زمینه" نسبتاً ثابت را باعث می‌شوند و در مواردی سبب می‌شوند در هر دو طرف تشدید $n > 1$ شود، در نظر گرفته نشده‌اند. وقتی دور از حالت تشدید قرار می‌گیریم می‌توان از میرایی صرف‌نظر کرد و در این نقاط فرمول ضریب شکست به صورت نسبتاً ساده زیر در می‌آید

$$n = 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2} \quad (۹-۱۷۲)$$

برای بیشتر مواد، همه بسامدهای طبیعی ω در سرتاسر طیف آن به صورت نامنظمی پراکنده‌اند. اما در مواد شفاف نزدیکترین تشدیدهای مهم نوعاً حول و حوش فرابنفش قرار دارند، به طوری که $\omega < \omega$ است. در این صورت داریم

$$\frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2} = \frac{1}{\omega_j^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_j^2}\right)^{-1} \cong \frac{1}{\omega_j^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_j^2}\right)$$

و معادله (۹-۱۷۲) به صورت زیر در می آید

$$n = 1 + \left(\frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2} \right) + \omega^2 \left(\frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2} \right) \quad (9-173)$$

و یا برحسب طول موج در خلا ($\lambda = 2\pi c/\omega$)

$$n = 1 + A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2} \right) \quad (9-174)$$

این معادله به معادله کوشی معروف است؛ ثابت A در این معادله را ضریب شکست و ثابت B را ضریب پاشندگی می نامند. معادله کوشی را می توان برای بسیاری از گازها در نواحی اپتیکی به خوبی به کار برد. آنچه تا به حال در این بخش توصیف کردیم، تمام داستان پاشندگی در محیطهای نارسانا را بازگو نمی کند. با وجود این بررسیهای انجام شده ارتباط حرکت هماهنگ میرای الکترونها را با ضریب شکست وابسته به بسامد نشان می دهند و نیز بیان می کنند که چرا n معمولاً تابعی است که نسبت به ω به کندی صعودی است و به ندرت دارای نواحی "غیرعادی" است که در آنها به شدت نزول می کند.

مسئله ۹-۲۲ (الف) آب کم عمق پاشنده نیست؛ امواج با سرعتی متناسب با جذر عمق حرکت می کنند. با وجود این در آب عمیق، امواج کل مسیر تا پایین آب را نمی توانند "احساس" کنند - رفتار آنها به گونه ای است که گویی عمق آب با λ متناسب است. (در حقیقت، تشخیص میان "کم عمق" و "عمیق" خود به طول موج بستگی دارد. اگر عمق کمتر از λ باشد، آب کم عمق است؛ اگر به طور قابل ملاحظه ای بزرگتر از λ باشد آب "عمیق" است.) نشان دهید که سرعت موج در امواج آب عمیق دو برابر سرعت گروه است.

(ب) در مکانیک کوانتومی یک ذره آزاد به جرم m که در امتداد x حرکت می کند با تابع موج

زیر توصیف می شود

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(px - Et)/\hbar}$$

که در آن p تکانه و $E = p^2/2m$ انرژی جنبشی است. سرعت گروه و سرعت موج را محاسبه کنید. کدام یک از این دو با سرعت کلاسیکی ذره متناظرند؟ توجه کنید که سرعت موج نصف سرعت گروه است.

مسئله ۹-۲۳ با قبول ارزش اسمی الگوی بحث شده در مثال ۴-۱، چه بسامد طبیعی به دست می آورید؟ آنها را با اعداد واقعی بنویسید. با فرض آنکه شعاع اتم 5\AA باشد این مقدار در کجای طیف الکترومغناطیسی قرار می گیرد؟ ضرایب شکست و پاشندگی را بیابید و آنها را با

مقادیر متناظر برای هیدروژن در دمای صفر و فشار اتمسفر مقایسه کنید: $A = ۱,۳۶ \times ۱۰^{-۴}$, $B = ۷,۷ \times ۱۰^{-۱۵} \text{ m}^2$.

مسئله ۹-۲۴ پهنای ناحیه پاشندگی غیرعادی را برای مورد تک‌تشدیدی در بسامد ω پیدا کنید. فرض کنید $\omega \ll \gamma$ باشد. نشان دهید که بیشینه و کمینه مقادیر ضریب شکست مربوط به نقاطی است که در آنها ضریب جذب نصف مقدار بیشینه را دارد.

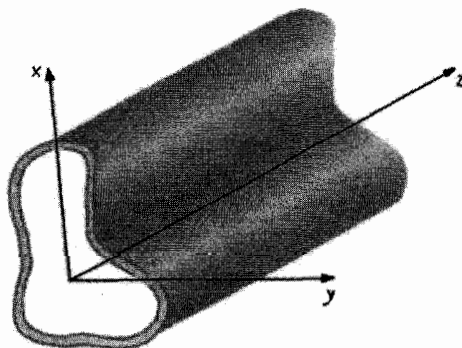
مسئله ۹-۲۵ با فرض میرایی ناچیز ($\gamma_j = 0$)، سرعت گروه ($v_g = d\omega/dk$) امواج توصیف شده توسط معادلات (۹-۱۶۶) و (۹-۱۶۹) را محاسبه کنید. نشان دهید که $v_g < c$ است حتی اگر $v > c$ باشد. □

۵-۹ امواج هدایت شده

۱-۵-۹ موجبرها

تا به حال با امواج تخت با گستره نامتناهی سروکار داشتیم؛ حال به بررسی امواج الکترومغناطیسی محصور در داخل یک لوله توخالی یا موجبر (شکل ۹-۲۳) می‌پردازیم. فرض می‌کنیم که موجبر یک رسانای کامل است، به طوری که در داخل خود ماده $\mathbf{E} = 0$ و $\mathbf{B} = 0$ باشد، و از این رو شرایط مرزی در دیواره داخلی عبارت‌اند از^۱

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}^{\parallel} &= 0 & (1) \\ \mathbf{B}^{\perp} &= 0 & (2) \end{aligned} \right\} \quad (9-175)$$



شکل ۹-۲۳

۱. معادله (۹-۱۳۹) و مسئله ۷-۴۲ را ببینید. در یک رسانای کامل $\mathbf{E} = 0$ ، و بنابراین (بنابه قانون فاراده) $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ است؛ با فرض آنکه میدان مغناطیسی با مقدار غیرصفر شروع شده باشد، به همین مقدار هم باقی می‌ماند.

بر روی سطح موجبر، بارهای آزاد و جریانها به گونه‌ای القا می‌شوند که آن قبود تحمیل گردند. توجه ما معطوف به امواج تکفامی است که در طول لوله منتشر می‌شوند، بنابراین شکل کلی \mathbf{E} و \mathbf{B} عبارت‌اند از

$$\left. \begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}(x, y, z, t) &= \vec{\mathbf{E}}_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)} & (1) \\ \vec{\mathbf{B}}(x, y, z, t) &= \vec{\mathbf{B}}_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)} & (2) \end{aligned} \right\} \quad (176-9)$$

(برای حالات مورد توجه، k حقیقی است، بنابراین علامت “ \sim ” رعایت می‌شود). میدانهای الکتریکی و مغناطیسی البته باید در معادلات ماکسول در داخل موجبر صدق کنند

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & (1) & \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (3) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & (2) & \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & (4) \end{aligned} \right\} \quad (177-9)$$

بنابراین مسئله ما یافتن توابع $\vec{\mathbf{E}}_0$ و $\vec{\mathbf{B}}_0$ به گونه‌ای است که میدانهای (۱۷۶-۹) از معادلات دیفرانسیل (۱۷۷-۹) و با در نظر گرفتن شرایط مرزی (۱۷۵-۹) تبعیت کنند.

به زودی می‌بینیم که امواج مقید به طور کلی عرضی نیستند؛ شرط اعمال شرایط مرزی آن است که مؤلفه‌های طولی (B_z و E_z) را هم ملحوظ داریم^۱

$$\vec{\mathbf{E}}_0 = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}, \quad \vec{\mathbf{B}}_0 = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z} \quad (178-9)$$

هر یک از مؤلفه‌های بالا تابعی از x و y هستند. با قرار دادن معادلات اخیر در معادلات ماکسول (۳) و (۴) به دست می‌آوریم [مسئله ۹-۲۶ (الف)]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= i\omega B_z & (1) & \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{i\omega}{c^2} E_z & (4) \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - ikE_y &= i\omega B_x & (2) & \quad \frac{\partial B_z}{\partial y} - ikB_y = -\frac{i\omega}{c^2} E_x & (5) \\ ikE_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= i\omega B_y & (3) & \quad ikB_x - \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{i\omega}{c^2} E_y & (6) \end{aligned} \right\} \quad (179-9)$$

۱. برای اجتناب از نامادگنداری بر زحمت از شاخص ۰ و علامت “ \sim ” در مؤلفه‌های انفرادی چشمپوشی می‌کنیم.

جواب معادلات (۲)، (۳)، و (۴) برای E_x, E_y, B_x و B_y عبارت‌اند از

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) & (۱) \\ E_y &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) & (۲) \\ B_x &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) & (۳) \\ B_y &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) & (۴) \end{aligned} \right\} \quad (۱۸۰-۹)$$

بنابراین کافی است مؤلفه‌های طولی E_z و B_z را تعیین کنیم، زیرا با دانستن این دو، بقیه را با استفاده از (۱۸۰-۹) می‌توان حساب کرد. ضمناً با قرار دادن (۱۸۰-۹) در بقیه معادلات ماکسول [مسئله ۹-۲۶(ب)] به معادلات جفت‌نشده‌ای برای خود E_z و B_z می‌رسیم

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k^2 \right] E_z &= 0 & (۱) \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k^2 \right] B_z &= 0 & (۲) \end{aligned} \right\} \quad (۱۸۱-۹)$$

اگر $E_z = 0$ باشد این امواج را، امواج “عرضی الکتریکی” (TE)، اگر $B_z = 0$ باشد آنها را امواج “عرضی مغناطیسی” (TM) و هرگاه هم E_z و هم B_z صفر باشند آنها را امواج عرضی الکتریکی-مغناطیسی (TEM) می‌خوانیم. حال نشان می‌دهیم که امواج TEM نمی‌توانند در یک موجبر توخالی اتفاق افتند.

اثبات: اگر $E_z = 0$ باشد، بنابه قانون گاوس [معادله (۱۷۷-۹)، ۱]

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

و اگر $B_z = 0$ باشد، بنابه قانون فاراده [معادله (۱۷۷-۹)، ۳]

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

۱. برای امواج TEM (که شامل امواج تخت غیرمقید بخش ۹-۲ هم می‌شود)، $k = \omega/c$ و معادلات (۱۸۰-۹) مهم‌اند و مجبور هستیم به معادلات (۱۷۹-۹) برگردیم.

در واقع بردار \vec{E}_0 در معادله (۹-۱۷۸) دارای دیورژانس و تاو صفر است. بنابراین آن را می‌توان به صورت گرادیان یک پتانسیل زرده‌ای که در معادله لاپلاس صدق می‌کند نوشت. اما شرایط مرزی روی E [معادله (۹-۱۷۵)] ایجاب می‌کند که سطح، همپتانسیل باشد، و چون معادله لاپلاس بیشینه و کمینه موضعی را نمی‌پذیرد (بخش ۳-۱-۴) نتیجه می‌گیریم که پتانسیل همه جا ثابت بوده و میدان الکتریکی صفر است، یعنی موجی وجود ندارد. توجه کنید که این بحث فقط برای یک لوله توخالی صادق است — اگر رسانای دیگری را داخل لوله قرار دهید الزاماً پتانسیل در سطح آن نباید با پتانسیل دیواره بیرونی برابر باشد و بنابراین وجود یک پتانسیل مخالف صفر ممکن است. مثالی در این مورد را در بخش ۹-۵-۳ خواهیم دید.

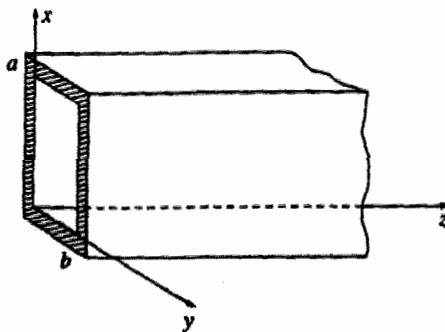
! مسئله ۹-۲۶ (الف) معادلات (۹-۱۷۹) را به دست آورده و از روی آنها معادلات (۹-۱۸۰) را نتیجه بگیرید.

(ب) با قرار دادن معادله (۹-۱۸۰) در معادلات (۱) و (۲) ماکسول، معادله (۹-۱۸۱) را به دست آورید. نشان دهید که همان نتایج را با اعمال (۱) و (۲) به معادلات (۹-۱۷۹) می‌توان پیدا کرد. □

۹-۵-۲ امواج یک موجبر مستطیلی

یک موجبر مستطیلی (شکل ۹-۲۴) به طول a و به عرض b در نظر بگیرید. می‌خواهیم انتشار امواج TE را در آن بررسی کنیم. مسئله عبارت است از حل معادله (۹-۱۸۱، ۲) با در نظر گرفتن شرایط مرزی (۹-۱۷۵، ۲). این کار را با استفاده از روش تفکیک متغیرها انجام می‌دهیم. فرض می‌کنیم

$$B_z(x, y) = X(x)Y(y)$$



شکل ۹-۲۴

و بنابراین

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + [(\omega/c)^2 - k^2] XY = 0$$

با تقسیم کردن معادلهٔ اخیر بر XY و با توجه به این نکته که جمله‌های وابسته به x و y هر یک باید ثابت باشند، داریم

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 \quad (1) \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k_y^2 \quad (2) \quad (182-9)$$

که در آن

$$-k_x^2 - k_y^2 + (\omega/c)^2 - k^2 = 0 \quad (183-9)$$

جواب عمومی معادلهٔ (۱، ۱۸۲-۹) عبارت است از

$$X(x) = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x)$$

اما شرایط مرزی ایجاب می‌کند که B_x و نیز dX/dx معادلهٔ (۳، ۱۸۰-۹) به ازای $x = 0$ و $x = a$ صفر باشند. از این رو $A = 0$ بوده و

$$k_x = m\pi/a, \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (184-9)$$

به همین‌گونه برای Y استدلال می‌کنیم

$$k_y = n\pi/b, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (185-9)$$

و نتیجه می‌گیریم که

$$B_z = B_0 \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) \quad (186-9)$$

این جواب را مُد TE_{mn} می‌نامند. (شاخص اول طبق قرارداد مربوط است به بعد بزرگتر، بنابراین ما فرض کرده‌ایم $a \geq b$ باشد. در ضمن، دست‌کم یکی از اندیسها باید مخالف

صفر باشد — به مسئله ۲۷-۹ مراجعه کنید.) عدد موج (k) را با قرار دادن معادلات (۹-۱۸۴) و (۹-۱۸۵) در معادله (۹-۱۸۳) به دست می آوریم

$$k = \sqrt{(\omega/c)^2 - \pi^2[(m/a)^2 + (n/b)^2]} \quad (9-187)$$

هرگاه

$$\omega < c\pi\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2} \equiv \omega_{mn} \quad (9-188)$$

عدد موج موهومی است، و به جای داشتن یک موج رونده، میدانهای تضعیف شده نمای معادله (۹-۱۷۶) را داریم. به این دلیل ω_{mn} را "بسامد قطع" برای مُد مورد بحث می نامند. کمترین بسامد قطع یک موجبر در مُد TE_{10} رخ می دهد

$$\omega_{10} = c\pi/a \quad (9-189)$$

بسامدهای کمتر از این مقدار به هیچ وجه در موجبر منتشر نمی شوند. عدد موج را به صورت خیلی ساده تر می توان برحسب بسامد قطع به صورت زیر نوشت

$$k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2} \quad (9-190)$$

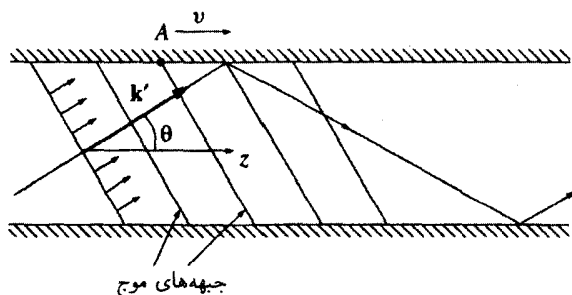
سرعت موج عبارت است از

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2}} \quad (9-191)$$

که خود از c بزرگتر است. با این همه (مسئله ۹-۲۹) انرژی منتقل شده توسط موج با سرعت گروه [معادله (۹-۱۵۰)] حرکت می کند

$$v_g = \frac{1}{dk/d\omega} = c\sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2} < c \quad (9-192)$$

راه دیگری برای مجسم کردن یک موج الکترومغناطیسی در یک لوله مستطیلی وجود دارد که بسیاری از نتایج بالا را توجیه می کند. یک موج تخت معمولی در نظر بگیرید که با زاویه θ نسبت



شکل ۹-۲۵

به محور z در حرکت باشد و از هر سطح جسم بازتاب کامل پیدا کند (شکل ۹-۲۵). در جهت‌های x و y امواج (چند بار بازتابیده) ترکیب می‌شوند و امواج ساکنی به طول موجهای $\lambda_x = 2a/m$ و $\lambda_y = 2b/n$ (و بنابراین اعداد موج $k_x = 2\pi/\lambda_x = \pi m/a$ و $k_y = \pi n/b$) می‌سازند. در عین حال در امتداد z یک موج رونده با عدد موج $k_z = k$ باقی می‌ماند. بردار انتشار موج تخت "اصلی" عبارت است از

$$\mathbf{k}' = \frac{\pi m}{a} \hat{x} + \frac{\pi n}{b} \hat{y} + k \hat{z}$$

و بسامد آن برابر است با

$$\omega = c|\mathbf{k}'| = c\sqrt{k^2 + \pi^2[(m/a)^2 + (n/b)^2]} = \sqrt{(ck)^2 + (\omega_{mn})^2}$$

فقط زاویه‌های خاصی می‌توانند یکی از امواج مجاز را به وجود آورند:

$$\cos \theta = \frac{k}{|\mathbf{k}'|} = \sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2}$$

موج تخت با سرعت c حرکت می‌کند، اما چون نسبت به محور z با زاویه θ حرکت می‌کند، سرعت مؤثر آن در موجبر می‌شود

$$v_g = c \cos \theta = c\sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2}$$

از طرف دیگر سرعت موج، همان سرعت جبهه موج (مثلاً A در شکل ۹-۲۵) در لوله است. این سرعت مانند سرعت تقاطع خط موجهایی است که به ساحل می‌خورند، شکسته می‌شوند و تندتر

از خود موج جابه‌جا می‌شوند — در واقع

$$v = \frac{c}{\cos \theta} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2}}$$

مسئله ۹-۲۷ نشان دهید که در یک موجبر مستطیلی مد TE_{00} نمی‌تواند وجود داشته باشد. [راهنمایی: در این مورد $k = \omega/c$ می‌شود و بنابراین معادلات (۹-۱۸۰) مبهم هستند، و باید دوباره به معادله (۹-۱۷۹) برگشت. نشان دهید B_z یک ثابت است، و از این رو با اعمال قانون فاراده به صورت انتگرالی به سطح مقطع، $B_z = 0$ بوده و این یک مد TEM است.]

مسئله ۹-۲۸ یک موجبر مستطیلی به ابعاد $1 \text{ cm} \times 2.28 \text{ cm}$ را در نظر بگیرید. کدام مد‌های TE در این موجبر، با فرض آنکه بسامد واداشته $10^{10} \times 1.70 \text{ Hz}$ باشد، منتشر می‌شوند؟ فرض کنید بخواهید تنها یک مد TE را برانگیخته کنید. از چه گستره بسامدی استفاده می‌کنید؟ طول موجهای متناظر (در فضای باز) کدام‌اند؟

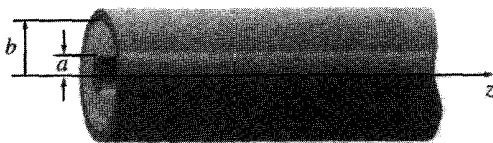
مسئله ۹-۲۹ نشان دهید که انرژی در یک موجبر مستطیلی مد TE_{mn} با سرعت گروه جابه‌جا می‌شود. [راهنمایی: میانگین زمانی بردار پوینتینگ $\langle S \rangle$ و چگالی انرژی $\langle u \rangle$ را بیابید. (در صورت تمایل از مسئله ۹-۱۱ استفاده کنید.) با انتگرال‌گیری روی سطح مقطع موجبر، انرژی به‌ازای واحد زمان و واحد طول منتقل شده توسط موج را پیدا کرده و نسبت آنها را به‌دست آورید.]

مسئله ۹-۳۰ نظریه مد‌های TM را برای موجبر مستطیلی به‌کار گیرید. به‌خصوص میدان الکتریکی طولی، بسامدهای قطع و سرعت‌های گروه و موج را بیابید. برای یک موجبر، نسبت پایتترین بسامد قطع TM به کمترین بسامد قطع TE را پیدا کنید. [راهنمایی: کمترین مد TM کدام است؟]

۹-۵-۳ خط انتقال هم‌محور

در بخش ۹-۱۵ نشان دادیم که یک موجبر توخالی نمی‌تواند امواج TEM را تقویت کند. اما یک خط انتقال هم‌محور، متشکل از یک سیم مستقیم به شعاع a که دور آن را یک پوسته استوانه‌ای رسانا به شعاع b (شکل ۹-۲۶) احاطه کرده است، مد‌هایی با $E_z = 0$ و $B_z = 0$ را می‌پذیرد. در این مورد معادلات ماکسول [به صورت (۹-۱۷۹)] منجر می‌شود به

$$k = \omega/c$$



شکل ۹-۲۶

(بنابراین امواج با سرعت c حرکت کرده و پاشنده نیستند.)

$$cB_y = E_x \quad \text{و} \quad cB_x = -E_y \quad (۹-۱۹۴)$$

(بنابراین \mathbf{E} و \mathbf{B} بر یکدیگر عمود هستند)، و (با در نظر گرفتن $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ، $\Delta \cdot \mathbf{E} = 0$)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (۹-۱۹۵)$$

اینها دقیقاً معادلات الکتروستاتیک و مغناطوستاتیک در فضای خالی دوبعدی‌اند؛ جواب با تقارن استوانه‌ای را می‌توان مستقیماً به ترتیب از روی جواب مورد بار خطی نامتناهی و جریان مستقیم نامتناهی نتیجه گرفت

$$\mathbf{E}_0(s, \phi) = \frac{A}{s} \hat{s}, \quad \mathbf{B}_0(s, \phi) = \frac{A}{cs} \hat{\phi} \quad (۹-۱۹۶)$$

که در آن A یک ثابت است. با قرار دادن این معادلات در (۹-۱۷۶) و استفاده از قسمت حقیقی آن داریم

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(s, \phi, z, t) &= \frac{A \cos(kz - \omega t)}{s} \hat{s} \\ \mathbf{B}(s, \phi, z, t) &= \frac{A \cos(kz - \omega t)}{cs} \hat{\phi} \end{aligned} \right\} \quad (۹-۱۹۷)$$

مسئله ۹-۳۱ (الف) به‌طور مستقیم نشان دهید که (۹-۱۹۷) در معادلات ماکسول (۹-۱۷۷) و شرایط مرزی (۹-۱۷۵) صدق می‌کند.

(ب) چگالی بار، $\lambda(z, t)$ ، و جریان، $I(z, t)$ ، برای رسانای داخلی را بیابید.

□

مسائل تکمیلی فصل ۹

! مسئله ۹-۳۲ "قضیه وارونی" برای تبدیلات فوریه بیان می‌کند که

$$\tilde{\phi}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(k) e^{ikz} dk \iff \tilde{\phi}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(z) e^{-ikz} dz \quad (۱۹۸-۹)$$

با استفاده از این قضیه، $\tilde{A}(k)$ در معادله (۹-۲۰) را برحسب $f(z, 0)$ و $\dot{f}(z, 0)$ پیدا کنید. پاسخ: $(1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} [f(z, 0) + (i/\omega)\dot{f}(z, 0)] e^{-ikz} dz$

مسئله ۹-۳۳ فرض کنید

$$\mathbf{E}(r, \theta, \phi, t) = A \frac{\sin \theta}{r} [\cos(kr - \omega t) - (1/kr) \sin(kr - \omega t)] \hat{\phi}, \quad \text{و} \quad \frac{\omega}{k} = c$$

[اتفاقاً این معادله، ساده‌ترین موج کروی ممکن را نشان می‌دهد. در محاسبات خود برای ساده کردن کار $(kr - \omega t) \equiv u$ بگیرید.]

(الف) نشان دهید که \mathbf{E} در هر چهار معادله ماکسول در خلا صدق می‌کند، و میدان مغناطیسی وابسته را پیدا کنید.

(ب) بردار پوینتینگ را محاسبه کنید. میانگین \mathbf{S} را در یک دوره کامل پیدا کنید تا بردار شدت \mathbf{I} به دست آید. (آیا این بردار در جهتی است که انتظار داشتید؟ آیا طبق انتظار با r^{-2} کاهش می‌یابد؟)

(ج) از $\mathbf{I} \cdot d\mathbf{a}$ روی کره‌ای به شعاع R انتگرال بگیرید و توان تابشی کل را پیدا کنید.

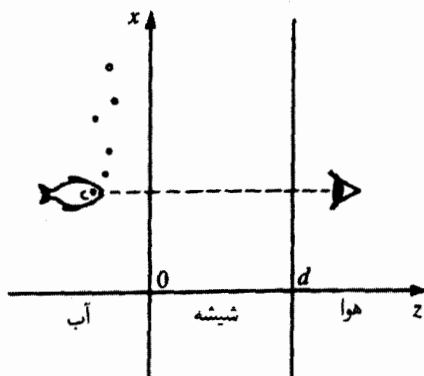
پاسخ: $4\pi A^2/3\mu_0 c$

! مسئله ۹-۳۴ نور با بسامد (زاویه‌ای) ω از محیط ۱ از میان قطعه‌ای (به ضخامت d) در محیط ۲ وارد محیط ۳ می‌شود (مثلاً از آب و توسط شیشه به هوا، مطابق شکل ۹-۲۷). نشان دهید که ضریب انتقال برای فرود عمودی از معادله زیر به دست می‌آید

$$T^{-1} = \frac{1}{4n_1 n_2} \left[(n_1 + n_2)^2 + \frac{(n_1^2 - n_2^2)(n_2^2 - n_3^2)}{n_2^2} \sin^2 \left(\frac{n_2 \omega d}{c} \right) \right] \quad (۱۹۹-۹)$$

[راهنمایی: در سمت چپ، یک موج فرودی و یک موج بازتابیده وجود دارد؛ در سمت راست، یک موج عبوری است؛ در داخل قطعه، موجی رونده به سمت راست و موجی رونده به سمت چپ داریم. هر یک از این امواج را برحسب دامنه‌های مختلط بنویسید، و برای دامنه‌ها شرایط

مرزی مناسب در سطوح جدایی را اعمال کنید. هر سه محیط، خطی و همگن هستند؛ فرض کنید

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$$


شکل ۹-۲۷

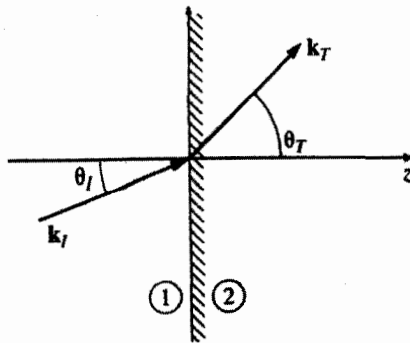
مسئله ۹-۳۵ یک آنتن میکروموج را که در 10 GHz تابش می‌کند، با استفاده از یک ورقه پلاستیکی با ثابت دی‌الکتریکی 2.5 نسبت به محیط اطراف محافظت می‌کنند. کمترین ضخامت این محافظ را که عبور کامل را تضمین کند (با عمودی در نظر گرفتن تابش) حساب کنید. [راهنمایی: از معادله (۹-۱۹۹) استفاده کنید.]

مسئله ۹-۳۶ نوری که از یک آکواریوم (شکل ۹-۲۷) می‌گذرد در مسیر خود از آب ($n = 4/3$) و قطعه‌ای از شیشه ($n = 3/2$) گذشته وارد هوا ($n = 1$) می‌شود. این نور را موجی تخت و تکفام در نظر بگیرید که به‌طور عمود بر شیشه می‌تابد. کمترین و بیشترین ضرایب عبور معادله (۹-۱۹۹) از بیابید. شما ماهی را به‌وضوح می‌بینید. ماهی چگونه شما را می‌بیند؟

مسئله ۹-۳۷ بنابه قانون اسنل، وقتی نور از محیطی که از نظر اپتیکی چگال است به محیطی با چگالی کمتر وارد می‌شود ($n_1 > n_2$)، بردار انتشار k از حالت عمودی منحرف می‌شود (شکل ۹-۲۸). به‌خصوص اگر نور با زاویه حد

$$\theta_c \equiv \sin^{-1}(n_2/n_1) \quad (9-200)$$

فرود آید، آنگاه $\theta_T = 90^\circ$ ، و پرتو عبوری فقط سطح را می‌خراشد. هرگاه θ_I از θ_c بیشتر شود، هیچ پرتویی شکسته نمی‌شود، و فقط بازتابیده می‌شود (این همان پدیده بازتاب کلی است که



شکل ۹-۲۸

لوله‌ها و فیبرهای نوری بر اساس آن عمل می‌کنند. اما میدانها در محیط ۲ صفر نیستند؛ چیزی که ما به آن دست یافته‌ایم همان موج محوشونده است که به سرعت تضعیف می‌شود و هیچ انرژی به محیط ۲ منتقل نمی‌کند.^۱

یک راه سریع برای ایجاد موج محوشونده آن است که از نتایج بخش ۹-۳-۳ با در نظر گرفتن $k_T = \omega n_2/c$ و

$$k_T = k_T(\sin \theta_T \hat{x} + \cos \theta_T \hat{z})$$

استفاده کنیم. تنها تغییر این است که

$$\sin \theta_T = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_I$$

حالا از یک بزرگتر است و

$$\cos \theta_T = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_T} = i\sqrt{\sin^2 \theta_T - 1}$$

موهومی است. (بدیهی است، θ_T را دیگر نمی‌توان به عنوان زاویه در نظر گرفت!)

۱. میدانهای محوشونده را با قرار دادن یک فصل مشترک دوم به فاصله کمی در سمت راست سطح اول می‌توان آشکار ساخت؛ شباهت نزدیکی با تونل زنی مکانیک کوانتومی در اینجا مشاهده می‌شود، امواج از گاف عبور می‌کنند و به سمت راست می‌روند. مرجع زیر را ببینید

(الف) نشان دهید که

$$\tilde{\mathbf{E}}_T(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-kz} e^{i(kx - \omega t)} \quad (201-9)$$

که در آن

$$\kappa \equiv \frac{\omega}{c} \sqrt{(n_1 \sin \theta_I)^2 - n_2^2} \quad \text{و} \quad k \equiv \frac{\omega n_1}{c} \sin \theta_I \quad (202-9)$$

این موجی است که در امتداد x (به موازات فصل مشترک!) منتشر می‌شود، و در امتداد z تضعیف می‌شود.

(ب) با توجه به اینکه حالا α [معادله (۱۰۸-۹)] موهومی است، با استفاده از معادله (۱۰۹-۹) ضریب بازتاب برای قطبش موازی با صفحه فرودی را محاسبه کنید. [توجه کنید که بازتاب ۱۰۰٪ را دارید، که از یک سطح رسانا هم بهتر است (به عنوان مثال به مسئله ۲۱-۹ مراجعه کنید).]
(ج) همان محاسبه را برای قطبشی عمود بر صفحه فرودی (و با استفاده از نتایج مسئله ۱۶-۹) تکرار کنید.

(د) در مورد مربوط به قطبش عمود بر صفحه فرودی، نشان دهید که میدانهای محوشونده (حقیقی) عبارت‌اند از

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= E_0 e^{-kz} \cos(kx - \omega t) \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{E_0}{\omega} e^{-kz} [\kappa \sin(kx - \omega t) \hat{\mathbf{x}} + k \cos(kx - \omega t) \hat{\mathbf{z}}] \end{aligned} \right\} \quad (203-9)$$

(ه) نشان دهید که میدانهای (د) در معادلات ماکسول (۶۷-۹) صدق می‌کنند.

(و) بردار پوینتینگ را برای میدانهای (د) بسازید، و نشان دهید که انرژی مستقل شده در جهت z ، به طور میانگین، صفر است.

! مسئله ۳۸-۹ یک کاواک تشدید را که از بستن دو انتهای یک موجبر مستطیلی، در $z = 0$ و $z = d$ در به وجود آمده است به گونه‌ای که یک جعبه رسانای کامل و خالی بسازد در نظر بگیرید. نشان دهید که بسامدهای تشدید مدهای هم TE و هم TM از معادله زیر برای عددهای درست l ، m و n به دست می‌آیند

$$\omega_{lmn} = c\pi \sqrt{(l/d)^2 + (m/a)^2 + (n/b)^2} \quad (204-9)$$

□ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی وابسته را بیابید.

پتانسیلها و میدانها

۱-۱۰ فرمولبندی پتانسیل

۱-۱-۱۰ پتانسیلهای نرده‌ای و برداری

در این فصل این پرسش مطرح است که چشمه‌های (ρ و \mathbf{J}) چگونه میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را تولید می‌کنند؛ به عبارت دیگر جواب عمومی معادلات ماکسول مورد نظر ماست

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho & (1) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (3) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & (2) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & (4) \end{array} \right. \quad (1-10)$$

با معلوم بودن $\rho(\mathbf{r}, t)$ و $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ ، میدانهای $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ و $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ کدام‌اند؟ در مورد استاتیک قانون کولن و قانون بیوساوار جواب مسئله را می‌دهند. آنچه به دنبالش هستیم، تعمیم این قوانین به پیکربندیهای وابسته به زمان است.

این مسئله ساده‌ای نیست، و برای شروع بررسی باید میدانها را برحسب پتانسیلها نمایش دهیم. در الکتروستاتیک $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ما را مجاز می‌کرد که \mathbf{E} را از گرادین پتانسیل نرده‌ای به دست

آوریم، یعنی $\mathbf{E} = -\nabla V$. چنین کاری در الکترودینامیک ممکن نیست، زیرا تاو \mathbf{E} غیر صفر است. از طرفی چون \mathbf{B} دیورژانس ندارد هنوز هم همانند مغناطوستاتیک می توان نوشت

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}} \quad (۲-۱۰)$$

قرار دادن این معادله در قانون فاراده (۳) می دهد

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A})$$

و یا

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

در اینجا کمیتی وجود دارد که برعکس \mathbf{E} تنها، تاو آن صفر است؛ بنابراین می توان آن را به صورت گرادیان یک پتانسیل نرده ای نوشت

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

و بنابراین \mathbf{E} بر حسب V و \mathbf{A} می شود

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}} \quad (۳-۱۰)$$

بدیهی است معادله اخیر وقتی که \mathbf{A} ثابت باشد به همان صورت قدیمی برمی گردد.

دو فرمول نمایش پتانسیل [معادلات (۲-۱۰) و (۳-۱۰)] با معادلات همگن ماکسول یعنی (۲) و (۳) کاملاً سازگارند. اما درباره قانون گاوس (۱) و قانون آمپر/ماکسول (۴) چه می توان گفت؟ هر گاه معادله (۳-۱۰) را در (۱) قرار دهیم درمی یابیم که

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (۴-۱۰)$$

و این هم در وضعیت استاتیک به معادله پواسون منجر می شود. با قرار دادن معادلات (۲-۱۰) و (۳-۱۰) در (۴) نتیجه می گیریم که

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

و یا با استفاده از اتحاد برداری $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ و کمی مرتب کردن جملات نتیجه می‌گیریم که

$$\left(\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (5-10)$$

معادلات (۴-۱۰) و (۵-۱۰) حاوی تمام اطلاعات ماکسول هستند.

مثال ۱-۱۰

توزیعهای بار و جریان را طوری بیابید که به پتانسیلهای زیر منجر شوند

$$V = 0, \quad \mathbf{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 k}{4c} (ct - |x|)^2 \hat{\mathbf{z}} & |x| < ct \\ 0 & |x| > ct \end{cases}$$

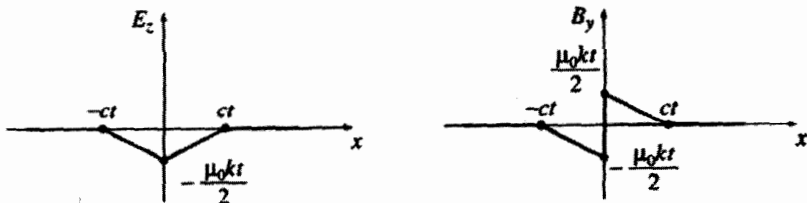
که در آن k یک ثابت و $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ است.

حل: نخست میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را با استفاده از (۲-۱۰) و (۳-۱۰) تعیین می‌کنیم

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k}{2} (ct - |x|) \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 k}{4c} \frac{\partial}{\partial x} (ct - |x|)^2 \hat{\mathbf{y}} = \pm \frac{\mu_0 k}{2c} (ct - |x|) \hat{\mathbf{y}}$$

(علامت مثبت برای $x > 0$ و منفی برای $x < 0$ است). این جواب برای موقعی است که $|x| < ct$ باشد؛ وقتی $|x| > ct$ باشد $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$ می‌شود (شکل ۱-۱۰). با مشتق‌گیری درمی‌یابیم



شکل ۱-۱۰

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{E} = \mp \frac{\mu_0 k}{\gamma} \hat{y}; \quad \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 k}{\gamma c} \hat{z}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k c}{\gamma} \hat{z}; \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \pm \frac{\mu_0 k}{\gamma} \hat{y}$$

به‌سادگی می‌توانید بررسی کنید که معادلات ماکسول، با در نظر گرفتن هم ρ و هم \mathbf{J} برابر با صفر، صادق هستند. با وجود این توجه کنید که \mathbf{B} در نقطه $x = 0$ ناپیوسته است و این به معنی وجود جریان سطحی \mathbf{K} در صفحه yz است. اعمال شرط مرزی (۴) از معادله (۶۳-۷) می‌دهد

$$k t \hat{y} = \mathbf{K} \times \hat{x}$$

و بنابراین

$$\mathbf{K} = k t \hat{z}$$

در اینجا یک جریان سطحی یکنواخت داریم که در امتداد z روی صفحه $x = 0$ سیلان دارد به‌گونه‌ای که از لحظه $t = 0$ شروع و متناسب با t زیاد می‌شود. توجه کنید که اطلاعات (در این دو جهت) با سرعت نور به بیرون منتشر می‌شود؛ برای نقاط $|x| > ct$ پیام (اینکه جریان وجود دارد) هنوز وارد نشده است، بنابراین میدانها صفر هستند. ■

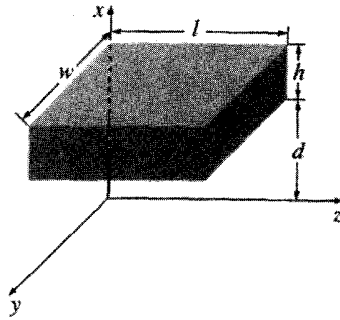
مسئله ۱-۱۰ نشان دهید که معادلات دیفرانسیل V و \mathbf{A} [معادلات (۴-۱۰) و (۵-۱۰)] می‌توانند به شکل متقارن‌تر زیر باشند

$$\begin{cases} \square^2 V + \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \square^2 \mathbf{A} - \nabla L = -\mu_0 \mathbf{J} \end{cases} \quad (۶-۱۰)$$

که در آن

$$\square^2 \equiv \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \text{و} \quad L \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$$

مسئله ۲-۱۰ برای پیکربندی مثال ۱-۱۰، یک جعبه مکعب مستطیل به طول l ، عرض w ، و ارتفاع h را که به فاصله d در بالای صفحه yz قرار دارد در نظر بگیرید (شکل ۲-۱۰).



شکل ۲-۱۰

(الف) انرژی موجود در جعبه را در $t_1 = d/c$ و $t_2 = (d+h)/c$ بیابید.

(ب) بردار پوئینتینگ را به دست آورید و انرژی وارد به جعبه را در بازه $t_1 < t < t_2$ بیابید.

(ج) از نتیجه حاصل در (ب) از t_1 تا t_2 انتگرال بگیرید و تأیید کنید که افزایش انرژی در

قسمت (الف) برابر با شار ورودی است. □

۲-۱-۱۰ تبدیلات پیمانه‌ای

معادلات (۴-۱۰) و (۵-۱۰) زشت‌اند و حتی ممکن است در این مرحله بخواهیم از فرمولبندیهای پتانسیلی صرف‌نظر کنیم. با وجود این در تبدیل شش مسئله یعنی پیدا کردن \mathbf{E} و \mathbf{B} (هر یک با سه مؤلفه)؛ به چهار مسئله یعنی: V (با یک مؤلفه) و \mathbf{A} (با سه مؤلفه) موفق بوده‌ایم. افزون بر این، معادلات (۲-۱۰) و (۳-۱۰) پتانسیل را به‌طوریکتا معین نمی‌کنند؛ ما برای اعمال شرایط اضافی روی V و \mathbf{A} ، تا جایی که \mathbf{E} و \mathbf{B} تغییر نکنند آزادیم. ببینیم دقیقاً این آزادی پیمانه‌ای چیست. فرض کنید دو مجموعه پتانسیل مانند (V, \mathbf{A}) و (V', \mathbf{A}') داشته باشیم که هر دو با یک میدان الکتریکی و مغناطیسی متناظرند. چقدر این دو مجموعه می‌توانند متفاوت باشند؟ فرض کنید

$$V' = V + \beta \quad \text{و} \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha}$$

چون هر دو مقدار \mathbf{A} به یک \mathbf{B} منجر می‌شوند، تاو آنها باید برابر باشد، و بنابراین

$$\nabla \times \boldsymbol{\alpha} = 0$$

بنابراین می‌توانیم $\boldsymbol{\alpha}$ را گرادیان یک کمیت نرده‌ای به‌صورت زیر در نظر بگیریم

$$\boldsymbol{\alpha} = \nabla \lambda$$

به همین ترتیب هر دو پتانسیل یک میدان الکتریکی \mathbf{E} را می‌دهند و این ایجاب می‌کند که

$$\nabla\beta + \frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0$$

یا

$$\nabla\left(\beta + \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right) = 0$$

بنابراین جمله داخل پرانتز مستقل از مکان است (فقط می‌تواند به زمان وابسته باشد)؛ آن را $k(t)$ بنامید، پس

$$\beta = -\frac{\partial\lambda}{\partial t} + k(t)$$

می‌توانیم $k(t)$ را هم در λ ادغام کنیم به طوری که λ جدیدی با افزودن $\int_0^t k(t')dt'$ به λ قبلی تعریف کنیم. این کار، گرادیان λ را تغییر نمی‌دهد؛ فقط $k(t)$ را به $\partial\lambda/\partial t$ اضافه می‌کند. بعد از این عمل نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda \\ V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t} \end{cases} \quad (7-10)$$

نتیجه‌گیری: برای هر تابع زده‌ای قدیمی λ می‌توانیم $\nabla\lambda$ را به \mathbf{A} بیفزاییم به شرط آنکه همزمان با آن $\partial\lambda/\partial t$ را از V کم کنیم. هیچ‌یک از این دو کار کمیت‌های فیزیکی \mathbf{E} و \mathbf{B} را تغییر نمی‌دهند. این‌گونه تغییرات V و \mathbf{A} را تبدیلات پیمانه‌ای می‌نامند. از این تبدیلات برای تنظیم دیورژانس \mathbf{A} ، با هدف ساده و زیبا کردن معادلات "زشت" $(4-10)$ و $(5-10)$ استفاده می‌شود. در مغناطوستاتیک بهترین شیوه این بود که در نظر بگیریم $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ [معادله $(5-61)$ ؛ در الکترودینامیک وضعیت چندان روشن نیست و مناسبترین پیمانه تا حدودی به مسئله مورد نظر بستگی دارد. پیمانه‌های مشهور زیادی در کتابهای مرجع وجود دارند، اما، در این مقطع فقط دو تا از رایجترین آنها را ذکر می‌کنیم.

مسئله ۳-۱۰ توزیع میدانها، توزیع بار و توزیع جریان متناظر به پتانسیلهای زیر را بیابید.

$$V(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qt}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

مسئله ۴-۱۰ فرض کنید $V = 0$ و $\mathbf{A} = A_0 \sin(kx - \omega t)\hat{y}$ که در آن A_0 ، ω و k ثابت هستند. \mathbf{E} و \mathbf{B} را بیاید و نشان دهید که این دو در معادلات ماکسول در خلأ صدق می‌کنند. چه شرطی برای ω و k باید اعمال شود؟

مسئله ۵-۱۰ با استفاده از تابع پیمانه‌ای $\lambda = -(1/4\pi\epsilon_0)(qt/r)$ پتانسیل‌های مسئله ۳-۱۰ را تبدیل و نتایج حاصل را تفسیر کنید. □

۳-۱-۱۰ پیمانه کولن و پیمانه لورنتس^۱
پیمانه کولن. همانند مغناطوستاتیک داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (8-10)$$

با توجه به این، معادله (۴-۱۰) می‌شود

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (9-10)$$

این، معادله پواسون است. جواب آن را هم می‌دانیم: در بینهایت قرار می‌دهیم $V = 0$ و مانند الکتروستاتیک می‌نویسیم

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{\pi} d\tau' \quad (10-10)$$

توجه کنید که برعکس الکتروستاتیک، V به تنهایی \mathbf{E} را به شما نمی‌دهد؛ شما باید \mathbf{A} را هم داشته باشید [معادله (۳-۱۰)].

نکته جالبی در مورد پتانسیل زنده‌ای در پیمانه کولن وجود دارد: آن را می‌توان هم‌اکنون با دانستن توزیع بار مشخص کرد. اگر در آزمایشگاه الکترونی به حرکت واداشته شود، پتانسیل V در کره‌ماه این تغییر را فوراً ثبت می‌کند. این مطلب با نظریه نسبیت خاص که می‌گوید هیچ پیامی سریعتر از سرعت نور منتشر نمی‌شود در تعارض است. نکته اینجاست که V به تنهایی یک کمیت سنجش‌پذیر فیزیکی نیست — چیزی که در ماه قابل اندازه‌گیری است، میدان \mathbf{E} است که آن

۱. پرسشی وجود دارد مبنی بر اینکه این بحث به H. A. Lorentz مربوط است یا L. V. Lorenz. مرجع زیر را ببینید:

J. Van Bladel *IEEE Antennas and Propagation Magazine* 33 (2), 69 (1991).

اما تمام کتابهای مرجع استاندارد حرف t را در نام لورنتس نوشته‌اند و ما هم به همین استناد می‌کنیم.

خود شامل A هم می‌شود. به‌گونه‌ای مسئله در پتانسیل برداری و در پیمانه کولنی مستقر است در حالی که V تمام تغییرات ρ را فوری منعکس می‌کند ترکیب $-\nabla V - (\partial \mathbf{A} / \partial t)$ این خاصیت را ندارد؛ \mathbf{E} تنها وقتی تغییر می‌کند که "اخبار" دریافت شده باشد و این هم زمان لازم دارد.^۱ امتیاز پیمانه کولن این است که محاسبه پتانسیل زده‌ای نسبتاً ساده است؛ نقطه ضعف پیمانه (به غیر از نکته‌ای که درباره V در بالا گفتیم) آن است که محاسبه \mathbf{A} دشوار است. معادله دیفرانسیل \mathbf{A} (۵-۱۰) در پیمانه کولن عبارت است از

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) \quad (11-10)$$

پیمانه لورنتس. در پیمانه لورنتس در نظر می‌گیریم

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}} \quad (12-10)$$

علت این انتخاب حذف کامل جمله میانی در معادله (۵-۱۰) است: (با زبان مسئله ۱-۱۰ یعنی $L = 0$). بدین قرار که

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (13-10)$$

در این شرایط معادله V ، (۴-۱۰)، می‌شود

$$\nabla^2 V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (14-10)$$

نکته مهم در پیمانه لورنتس آن است که با V و \mathbf{A} یکسان برخورد می‌کند، یعنی برای هر دو معادله یک عملگر دیفرانسیلی

$$\boxed{\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \square^2} \quad (15-10)$$

که دالامبری نامیده می‌شود در نظر می‌گیرد

$$\square^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (۱)$$

$$\square^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (۲)$$

(۱۶-۱۰)

این برخورد آزادانه با V و \mathbf{A} با در نظر گرفتن نظریه نسبیت به‌ویژه جالب است زیرا در آنجا دالامبری تا حدودی نقش لاپلاسی در فیزیک کلاسیک را ایفا می‌کند، و معادلات (۱۶-۱۰) را می‌توان بیان چهار بعدی معادله پواسون در نظر گرفت. (به همین منوال معادله موج و برای سرعت انتشار c معادله $\square^2 f = 0$ را می‌توان شکل چهار بعدی معادله لاپلاس در نظر گرفت.) در پیمانه لورنتس V و \mathbf{A} در معادله موج غیرهمگن که در آن عبارت مربوط به "چشمه" (به جای صفر) در سمت راست قرار می‌گیرد صدق می‌کند. از حالا به بعد به‌طور انحصاری از پیمانه لورنتس استفاده خواهیم کرد؛ در این صورت کل الکترودینامیک به مسئله حل معادله موج غیرهمگن برای چشمه‌های مشخص، تبدیل می‌شود؛ این، پروژه ما در بخش بعدی است.

مسئله ۶-۱۰ کدامیک از پتانسیلهای مثال ۱-۱۰، مسئله ۳-۱۰ و مسئله ۴-۱۰ در پیمانه کولن هستند؟ کدامیک در پیمانه لورنتس؟ (توجه کنید که این دو پیمانه متقابلاً ناقص هم نیستند).

مسئله ۷-۱۰ در فصل ۵ نشان دادیم که همواره امکان دارد که پتانسیلی برداری در نظر بگیریم که دیورژانس آن صفر باشد (پیمانه کولن). نشان دهید که انتخاب $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \epsilon_0 (\partial V / \partial t)$ لازمۀ پیمانه لورنتس است همواره امکان‌پذیر است. فرض کنیم راه حل معادلاتی به صورت (۱۶-۱۰)، را می‌دانیم. آیا همواره می‌توان در نظر گرفت که $V = 0$ ؟ برای $\mathbf{A} = 0$ چطور؟ □

۱-۲ توزیعهای پیوسته

۱-۲-۱ پتانسیل تأخیری

در حالت استاتیک، معادلات (۱۶-۱۰) به (چهارکبی) معادله پواسون تبدیل می‌شوند

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

که جوابهای آشنای آنها عبارت‌اند از

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \quad (۱۷-۱۰)$$

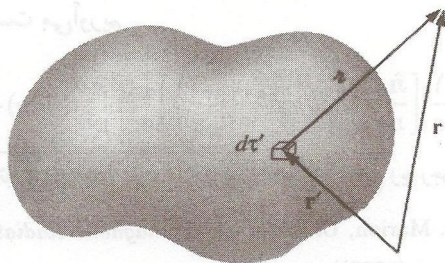
در اینجا، مانند قبل، π فاصله بین چشمه \mathbf{r}' و نقطه \mathbf{r} است (شکل ۱۰-۳). اما "اطلاعات" الکترومغناطیسی با سرعت نور منتشر می‌شود. پس در مورد غیراستاتیک، این وضعیت کنونی چشمه نیست که حائز اهمیت است، بلکه وضعیت آن در زمان کمی جلوتر ارسال "پیام" t_r (به نام زمان تأخیری) است که اهمیت دارد. چون این پیام باید فاصله π را بپیماید تأخیر زمانی برابر است با π/c :

$$t_r \equiv t - \frac{\pi}{c} \quad (18-10)$$

بنابراین تعمیم طبیعی معادله (۱۰-۱۷) برای چشمه‌های غیراستاتیک به صورت زیر است

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\pi} d\tau' \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\pi} d\tau' \quad (19-10)$$

در اینجا $\rho(\mathbf{r}', t_r)$ چگالی بار در نقطه \mathbf{r}' در زمان تأخیری t_r است. چون انتگرالها در زمان تأخیری حساب شده‌اند آنها را پتانسیلهای تأخیری می‌نامند. (یادآوری می‌کنیم که وقتی از زمان تأخیری صحبت می‌کنیم قسمتهایی از توزیع بار که در نقاط دورتر واقع‌اند زمان تأخیر زودتری نسبت به نقاط نزدیکتر دارند. این شبیه آسمان شب است. نوری که در هر لحظه از ستارگان می‌بینیم ستاره را در یک زمان تأخیری ترک گفته است که خود به فاصله هر ستاره از زمین بستگی دارد). توجه کنید که پتانسیل تأخیری در حالت استاتیک به معادله (۱۰-۷) تبدیل می‌شود زیرا ρ و \mathbf{J} مستقل از زمان هستند. خوب، با وجود اینکه همه گفته‌ها منطقی و نسبتاً ساده به نظر می‌رسند، اما آیا مطمئن هستیم که کاملاً درست هستند؟ در حقیقت ما این فرمولهای مربوط به V و \mathbf{A} را استخراج نکرده‌ایم؛ آنچه ما بر آن اشاره کردیم، بهره‌گیری از استدلال آموزشی (اطلاعات الکترومغناطیسی با سرعت نور منتشر می‌شوند) برای توجیه آنها بود. برای اثبات این ادعا باید نشان دهیم که آنها در معادله غیرهمگن موج (۱۰-۱۶) و شرط لورنتس (۱۰-۱۲) صدق می‌کنند. اگر فکر می‌کنید وسواس



شکل ۱۰-۳

به خرج می‌دهیم، به شما توجه می‌دهیم که اگر همین استدلال را برای میدانها به‌کار ببریم جوابی غلط دریافت خواهیم کرد:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \neq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{r^2} \hat{\mathbf{r}} d\tau', \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \neq \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r) \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau'$$

این نتایج را با اعمال همان "منطق" به‌کار گرفته در قانون کولن و قانون بیوساوار به‌دست خواهیم آورد. با کمی تأمل و بررسی می‌بینیم که پتانسیل نرده‌ای تأخیری در معادله (۱۶-۱۰) صدق می‌کند؛ اساساً همین استدلال برای پتانسیل برداری تأخیری هم صادق است. اثبات این را که پتانسیلها تأخیری در شرط لورنتس صدق می‌کنند را به خواننده واگذار می‌کنیم (مسئله ۸-۱۰).

در محاسبه لاپلاسی $V(\mathbf{r}, t)$ ، نکته مهمی که باید به آن توجه کنیم این است که انتگرال [در معادله (۱۹-۱۰)] در دو مورد به \mathbf{r} بستگی دارد: به‌طور صریح از طریق $\pi = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ در مخرج کسر و به‌طور ضمنی، توسط $t_r = t - \pi/c$ در صورت کسر. بنابراین

$$\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[(\nabla\rho) \frac{1}{\pi} + \rho \nabla \left(\frac{1}{\pi} \right) \right] d\tau' \quad (20-10)$$

و

$$\nabla\rho = \dot{\rho}(\nabla t_r) = -\frac{1}{c} \dot{\rho} \nabla \pi \quad (21-10)$$

(نقطه بالای ρ به معنی مشتق نسبت به زمان است). اما $\nabla \pi = \hat{\mathbf{r}}/\pi^2$ و $\nabla(1/\pi) = -\hat{\mathbf{r}}/\pi^2$ (مسئله ۱۳-۱)، بنابراین

$$\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[-\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{\pi} - \rho \frac{\hat{\mathbf{r}}}{\pi^2} \right] d\tau' \quad (22-10)$$

با دیورژانس گرفتن به‌دست می‌آوریم

$$\nabla^2 V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left\{ -\frac{1}{c} \left[\frac{\hat{\mathbf{r}}}{\pi} \cdot (\nabla\dot{\rho}) + \dot{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{\pi} \right) \right] - \left[\frac{\hat{\mathbf{r}}}{\pi^2} \cdot (\nabla\rho) + \rho \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{\pi^2} \right) \right] \right\} d\tau'$$

۱. این را که ساده پذیرفتیم اثبات پیچیده‌ای دارد؛ برای بررسی دقیقتر به مرجع زیر رجوع کنید:

M. A. Heald and J. B. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation*, 3d ed., Sect. 8.1 (Orlando, FL: Saunders (1995)).

۲. دقت کنید که $\partial/\partial t_r = \partial/\partial t$ ، زیرا $t_r = t - \pi/c$ و π هم به t بستگی ندارد.

$$\nabla \dot{\rho} = -\frac{1}{c} \dot{\rho} \nabla \pi = -\frac{1}{c} \dot{\rho} \hat{\pi}$$

که همانند معادله (۲۱-۱۰) است، و

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\pi}}{\pi} \right) = \frac{1}{\pi^2}$$

(مسئله ۱-۶۲) و نیز

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\pi}}{\pi^2} \right) = \frac{1}{\pi} \delta^3(\mathbf{x})$$

(معادله ۱-۱۰۰). بنابراین

$$\nabla^2 V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\rho}}{\pi} - \frac{1}{\pi} \rho \delta^3(\mathbf{x}) \right] d\tau' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t'^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t)$$

ما را متقاعد می‌کند که پتانسیل تأخیری (۱۹-۱۰) در معادله موج ناهمگن (۱۶-۱۰) صدق می‌کند. این اثبات به همین ترتیب برای پتانسیلهای تعجیلی هم صادق است

$$V_a(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_a)}{\pi} d\tau' \quad \mathbf{A}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_a)}{\pi} d\tau' \quad (23-10)$$

در این معادله چگالی بار و جریان زمان تعجیلی زیر محاسبه شده‌اند

$$t_a \equiv t + \frac{\pi}{c} \quad (24-10)$$

چند علامت تغییر کرده است، اما نتیجه نهایی تغییری نکرده است. گرچه پتانسیلهای تعجیلی با معادلات ماکسول سازگارند اما آنها با مقدس‌ترین اصل در تمام فیزیک یعنی اصل علیت مغایرت دارند. معنای حاصل از آنها این است که پتانسیلهای فعلی به نحوه توزیع بار و جریان در زمانی در آینده بستگی دارند. به عبارت دیگر معلول از علت پیشی می‌گیرد. گرچه پتانسیلهای تعجیلی از دیدگاه نظری جالب هستند اما مستقیماً از نظر فیزیکی اهمیتی ندارند.^۱

۱. چون دالامبری شامل t' (در مقابل t) است، خود نظریه نسبت به برگشت زمان ناورد است و "گذشته" را از "حال" تمیز نمی‌دهد. بی‌تقارنی زمانی وقتی داخل می‌شود که پتانسیلهای تأخیری را بر تعجیلی ترجیح دهیم تا این باور را که تأثیرات الکترومغناطیسی در طول زمان، به جلو و نه به عقب انتشار می‌یابند، منعکس کرده باشیم (که نامعقول هم نیست).

مثال ۲-۱۰

در یک سیم مستقیم نامتناهی جریانی زیر برقرار است

$$I(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ I_0 & t > 0 \end{cases}$$

یعنی در لحظه $t = 0$ جریان ثابتی در سیم برقرار می‌شود. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی آن را پیدا کنید.

حل: خود سیم احتمالاً از نظر الکتریکی خنثی است و بنابراین پتانسیل نرده‌ای صفر است. سیم را در راستای z (شکل ۴-۱۰) در نظر بگیرید. پتانسیل برداری تأخیری در نقطه P برابر است با

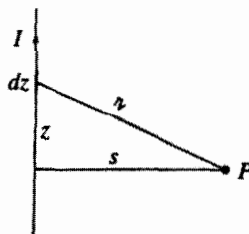
$$\mathbf{A}(s, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{\mathbf{z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(t_r)}{R} dz$$

تا لحظه $t < s/c$ هنوز "خبر" به نقطه P نرسیده است و پتانسیل صفر است. به ازای $t > s/c$ فقط قسمت

$$|z| \leq \sqrt{(ct)^2 - s^2} \quad (۲۵-۱۰)$$

در ایجاد پتانسیل سهمیم است [خارج از این نقاط t_r منفی است و بنابراین $I(t_r) = 0$ است]؛ از این رو

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(s, t) &= \left(\frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \hat{\mathbf{z}} \right) \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{dz}{\sqrt{s^2 + z^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \hat{\mathbf{z}} \ln(\sqrt{s^2 + z^2} + z) \Big|_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \ln \left(\frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2}}{s} \right) \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$



شکل ۴-۱۰

میدان الکتریکی برابر است با

$$\mathbf{E}(s, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi \sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{\mathbf{z}}$$

و میدان مغناطیسی برابر است با

$$\mathbf{B}(s, t) = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi s} \frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{\phi}$$

توجه کنید که به ازای $t \rightarrow \infty$ همان شرایط استاتیک به دست می‌آید: $\mathbf{B} = (\mu_0 I_0 / 2\pi s) \hat{\phi}$, $\mathbf{E} = 0$.

! مسئله ۱۰-۸ ثابت کنید که پتانسیلهای تأخیری در شرط پیمانه لورنتس صدق می‌کنند. [راهنمایی: نخست نشان دهید

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} (\nabla \cdot \mathbf{J}) + \frac{1}{\pi} (\nabla' \cdot \mathbf{J}) - \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{\pi} \right)$$

که در آن ∇ نمایانگر مشتق نسبت به \mathbf{r} و ∇' مشتق نسبت به \mathbf{r}' است. در مرحله بعد این را در نظر داشته باشید که $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \pi/c)$ به \mathbf{r}' هم به طور صریح و هم از طریق π بستگی دارد، در حالی که به \mathbf{r} فقط از راه π بستگی دارد. ثابت کنید

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{J}} \cdot (\nabla \pi), \quad \nabla' \cdot \mathbf{J} = -\dot{\rho} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{J}} \cdot (\nabla' \pi)$$

با استفاده از معادله اخیر دیورژانس \mathbf{A} [معادله (۱۰-۱۹)] را حساب کنید.

! مسئله ۱۰-۹ (الف) فرض کنید از سیم مثال ۱۰-۲ جریان خطی فزاینده‌ای به صورت زیر بگذرد

$$I(t) = kt$$

میدانهای الکتریکی و مغناطیسی حاصل را به ازای $t > 0$ پیدا کنید.

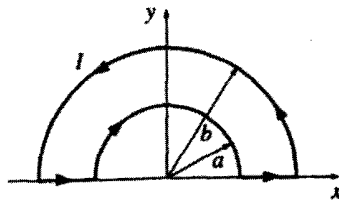
(ب) همان مسئله را در صورتی که برقراری جریان آنی باشد حل کنید:

$$I(t) = q_0 \delta(t)$$

مسئله ۱۰-۱۰ سیمی را مطابق شکل ۵-۱۰ به صورت یک حلقه در آورده‌ایم و از آن جریانی فزاینده با زمان به صورت زیر می‌گذرد:

$$I(t) = kt$$

پتانسیل برداری تأخیری A را در مرکز حساب کنید. میدان الکتریکی را هم در مرکز پیدا کنید. چرا این سیم (خنثی) میدان الکتریکی تولید می‌کند؟ (چرا نمی‌توان میدان مغناطیسی را از این عبارت برای A تعیین کرد؟)



شکل ۵-۱۰

۱۰-۲-۲ معادلات جفیمنکو^۱

با داشتن پتانسیلهای تأخیری

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\pi} d\tau', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\pi} d\tau' \quad (26-10)$$

از نظر اصولی تعیین میدانها کار ساده‌ای است

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (27-10)$$

اما جزئیات مسئله بدیهی نیست، زیرا همان‌طور که قبلاً متذکر شدیم انتگرالده، هم به‌طور صریح از راه $\pi = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ در مخرج، و هم به‌طور ضمنی از راه زمان تأخیری $t_r = t - \pi/c$ در صورت شناسه، به \mathbf{r} بستگی دارد.

گرادیان V [معادله (۱۰-۲۲)] را محاسبه کرده‌ایم؛ مشتق زمانی A نیز ساده است

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\dot{\mathbf{J}}}{\pi} d\tau' \quad (28-10)$$

با جمع‌بندی اینها (و استفاده از $c^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0$):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{r^2} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}', t_r)}{cr} \hat{\mathbf{r}} - \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t_r)}{c^2 r} \right] d\tau' \quad (29-10)$$

این معادله تعمیم وابسته به زمان قانون کولن است که (وقتی دومین و سومین جمله حذف شوند و وابستگی جمله اول به t_r هم از میان برود) به مورد ایستا (استاتیک) تبدیل می‌شود. همانند \mathbf{B} ، تاو \mathbf{A} حاوی دو جمله است:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{1}{r} (\nabla \times \mathbf{J}) - \mathbf{J} \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\tau'$$

حال

$$(\nabla \times \mathbf{J})_x = \frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z}$$

و

$$\frac{\partial J_z}{\partial y} = j_z \frac{\partial t_r}{\partial y} = -\frac{1}{c} j_z \frac{\partial \pi}{\partial y}$$

بنابراین

$$(\nabla \times \mathbf{J})_x = -\frac{1}{c} \left(j_z \frac{\partial \pi}{\partial y} - j_y \frac{\partial \pi}{\partial z} \right) = \frac{1}{c} [\mathbf{J} \times (\nabla \pi)]_x$$

اما $\nabla \pi = \hat{\mathbf{r}} \pi$ (مسئله ۱۳-۱)، بنابراین

$$\nabla \times \mathbf{J} = \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{r}} \quad (30-10)$$

ضمناً $\nabla(1/r) = -\hat{\mathbf{r}}/r^2$ (باز هم مسئله ۱۳-۱)، و بنابراین

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{r^2} + \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t_r)}{cr} \right] \times \hat{\mathbf{r}} d\tau' \quad (31-10)$$

این معادله، تعمیم وابسته به زمان قانون بیوساوار است که به مورد ایستا (استاتیک) قابل تبدیل است.

معادله‌های (۱۰-۲۹) و (۱۰-۳۱) جوابهای (علیّتی) معادلات ماکسول‌اند. به دلایلی تا این اواخر چنین نتایجی منتشر نشده بودند. اولین گزاره صریح، تا جایی که ما می‌دانیم، از آلف گفینکو به سال ۱۹۹۶ میلادی است.^۱ در عمل معادلات جفینکو محدودیت کاربردی دارند، زیرا نوعاً محاسبه پتانسیل تأخیری و مشتق‌گیری از آنها ساده‌تر از بررسی مستقیم میدان است. با وجود این بستگی منطقی قانع‌کننده‌ای با نظریه دارند. همچنین این معادلات بحث بخش قبل ما را روشن می‌کنند: برای یافتن پتانسیلهای تأخیری تنها کاری که می‌کنید، به جای t در فرمولهای الکتروستاتیک و مغناطوستاتیک t_r قرار می‌دهید، اما در مورد میدانها، نه تنها زمان جای خود را به زمان تأخیری می‌دهد، بلکه جمله‌های کاملاً جدیدی (که در آنها مشتقهای ρ و \mathbf{J} وجود دارند) ظاهر می‌شوند و تعجب‌آور اینکه پشتوانه‌ای قوی برای تقریب شبه‌ایستا (مسئله ۱۰-۱۲)، فراهم می‌کنند.

مسئله ۱۰-۱۱ فرض کنید $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ نسبت به زمان ثابت باشد، بنابراین (مسئله ۷-۵۵) داریم

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, 0) + \dot{\rho}(\mathbf{r}, 0)t$$

نشان دهید که

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{r^2} \hat{\mathbf{r}} d\tau'$$

یعنی اینکه، قانون کولن وقتی چگالی بار در یک زمان بدون تأخیر محاسبه می‌شود صادق است.

مسئله ۱۰-۱۲ فرض کنید تغییرات چگالی جریان به‌گونه‌ای کند صورت گیرد که (با تقریب خوبی) بتوانیم از مشتقهای بالاتر در بسط تایلور صرف‌نظر کنیم:

$$\mathbf{J}(t_r) = \mathbf{J}(t) + (t_r - t)\dot{\mathbf{J}}(t) + \dots$$

(برای سادگی از بستگی به \mathbf{r} که مورد بحث نیست صرف‌نظر کرده‌ایم). نشان دهید که یک حذف

مناسب در معادله (۱۰-۳۱) منجر به نتیجه زیر می‌شود

1. O. D. Jefimenko, *Electricity and Magnetism*, Sect. 15.7 (New York: Appleton-Century-Crofts, 1996).

برای تغییر و تحلیل روش‌تر مراجع زیر را ببینید:

W. K. H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Sect. 14.3

(Reading, MA: Addison-Wesley, 1962). K. T. McDonald, *Am. J. Phys.* **65**, 1074 (1997)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t) \times \hat{\mathbf{n}}}{\pi^2} d\tau'$$

یعنی: قانون بیوساوار وقتی که \mathbf{J} را از زمان بدون تأخیر محاسبه می‌کنیم صادق است. مفهوم این گفته آن است که تقریب شبه‌ایستا در واقع به مراتب بهتر از آنچه انتظار داشتیم هست: دو خطای موجود (صرف نظر کردن از تأخیر و حذف جمله دوم در معادله (۱۰-۳۱) یکدیگر را تا مرتبه اول خنثی می‌کنند.

۱۰-۳ بارهای نقطه‌ای

۱۰-۳-۱ پتانسیلهای لناردویشرت

هدف بعدی ما محاسبه پتانسیلهای (تأخیری)، $V(\mathbf{r}, t)$ و $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ یک بار نقطه‌ای q است که بر مسیر مشخصی حرکت می‌کند

$$\mathbf{w}(t) \equiv \text{موضع } q \text{ در زمان } t \quad (۱۰-۳۲)$$

زمان تأخیر به طور ضمنی از معادله زیر به دست می‌آید

$$|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)| = c(t - t_r) \quad (۱۰-۳۳)$$

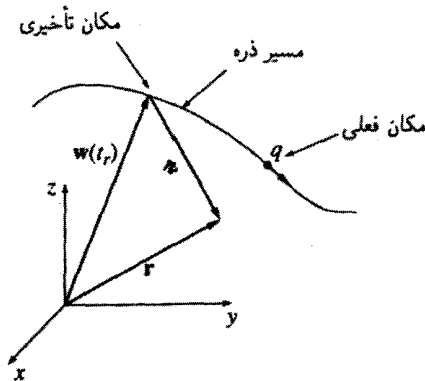
سمت چپ نشان‌دهنده مسافتی است که "پیام" باید طی کند و $(t - t_r)$ زمان لازم برای این سفر است (شکل ۱۰-۶). عبارت $\mathbf{w}(t_r)$ را مکان تأخیری بار می‌نامیم؛ \mathbf{r} را هم بردار مکان تأخیری به نقطه میدان \mathbf{r} در نظر می‌گیریم:

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r) \quad (۱۰-۳۴)$$

توجه به این نکته حائز اهمیت است که در هر زمان t حداکثر یک نقطه از مسیر "در ارتباط" با \mathbf{r} است. چه اگر فرض کنید دو نقطه مثل آن، با زمانهای تأخیر t_1 و t_2 وجود داشته باشند:

$$\boldsymbol{\pi}_2 = c(t - t_2) \quad \text{و} \quad \boldsymbol{\pi}_1 = c(t - t_1)$$

در این صورت $\boldsymbol{\pi}_1 - \boldsymbol{\pi}_2 = c(t_2 - t_1)$ می‌شود و بنابراین سرعت میانگین ذره در جهت \mathbf{r} باید برابر c باشد — و این بدون توجه به سرعتی است که ممکن است بار در جهات دیگر داشته



شکل ۱۰-۶

باشد. چون هیچ ذره بارداری نمی‌تواند با سرعت نور حرکت کند نتیجه می‌گیریم که فقط یک نقطه تأخیری در ایجاد پتانسیل در هر لحظه دخالت دارد.^۱ با مطالعهٔ سطحی فرمول پتانسیل

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\pi} d\tau' \quad (۱۰-۳۵)$$

ممکن است چنین نتیجه بگیرید که پتانسیل تأخیری یک بار نقطه‌ای عبارت است از

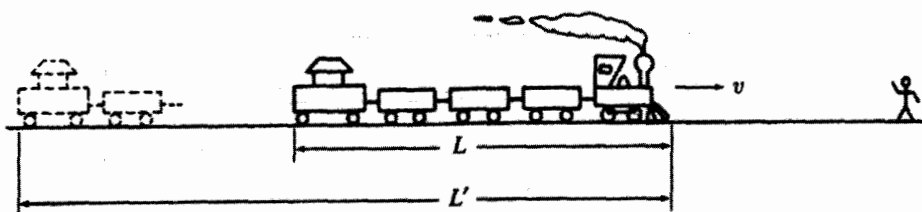
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\pi}$$

(یعنی همان فرمول حالت ایستا با این تفاوت است که در وضع اخیر π فاصله از مکان تأخیری بار خواهد بود.) اما این برداشت غلط است. دلیل غلط بودنش آن است که گرچه برای یک چشمه نقطه‌ای، π در مخرج از زیر انتگرال بیرون می‌آید، اما آنچه باقی می‌ماند یعنی

$$\int \rho(\mathbf{r}', t_r) d\tau' \quad (۱۰-۳۶)$$

برابر با بار ذره نیست. برای به‌دست آوردن بار کلی در این توزیع باید از ρ روی کل توزیع در یک

۱. به همان دلیل ناظری واقع در \mathbf{r} یک ذره را در هر زمان فقط در یک نقطه می‌بیند. بر خلاف آن، شنیدن همزمان صداهایی که در دو نقطه تولید شده باشند از نظر اصولی امکان‌پذیر است. فرض کنید خرسی بعد از آنکه بر شما غرید با سرعت صوت به طرف شما بدود و دوباره بغرد: شما هر دو غرش را همزمان اما از دو نقطه مختلف خواهید شنید، اما در واقع فقط یک خرس در کار است.



شکل ۷-۱۰

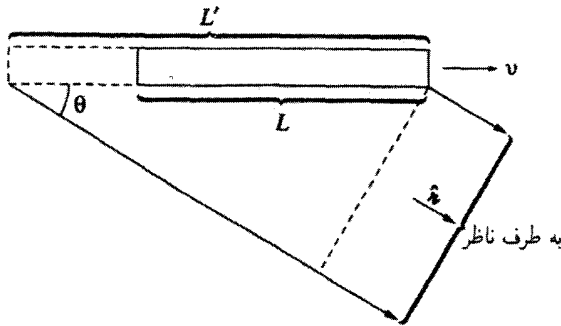
لحظه از زمان انتگرال گرفت، اما در اینجا زمان $t_r = t - \pi/c$ ما را مجبور می‌کند تا ρ را در زمانهای مختلف برای قسمتهای متفاوت پیکربندی حساب کنیم. اگر چشمه متحرک باشد بار کلی درست محاسبه نمی‌شود. حال ممکن است بگویید این مشکل برای بار نقطه‌ای وجود ندارد، اما این طور نیست. در الکترودینامیک ماکسول که برحسب بار و چگالی جریان فرمولبندی شده است یک بار نقطه‌ای به منزله حد یک توزیع بار پیوسته در نظر گرفته می‌شود که ابعادش به صفر میل می‌کنند. همان‌گونه که در بند بعد می‌بینیم برای یک ذره گسترده، هر قدر هم کوچک، تأخیر در معادله (۳۶-۱۰) عامل $(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v}/c)^{-1}$ را سبب می‌شود که در آن v سرعت بار در زمان تأخیری است:

$$\int \rho(\mathbf{r}', t_r) d\tau' = \frac{q}{1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v}/c} \quad (37-10)$$

اثبات: به این واقعیت ممکن است تا به حال فکر نکرده باشید که طول قطاری که به طرف شما می‌آید کمی بیشتر از طول واقعی آن به نظر می‌رسد. زیرا نوری که از واگن خدمه قطار واقع در عقب آن می‌آید زودتر از نوری که از لوکوموتیو که در جلو است باید حرکت کرده باشد تا هر دو را همزمان دریافت کنید. در زمان گسیل نور از واگن خدمه هم فاصله قطار از شما بیشتر بوده است. (شکل ۷-۱۰). در مدتی که نور این مسافت اضافی یعنی L' را می‌پیماید خود قطار فاصله $L' - L$ را طی می‌کند:

$$L' = \frac{L}{1 - v/c} \quad \text{یا} \quad \frac{L'}{c} = \frac{L' - L}{v}$$

بنابراین هنگامی که قطار به طرف شما نزدیک می‌شود به نسبت $(1 - v/c)^{-1}$ طولانی‌تر دیده می‌شود. برعکس، اگر قطار از شما دور شود به نسبت $(1 + v/c)^{-1}$ کوتاهتر دیده می‌شود. در ۱. لطفاً توجه کنید که این تغییر ظاهری طول با آنچه در نسبیت خاص (با انقباض لورنتس) گفته می‌شود هیچ ارتباطی ندارد.



شکل ۸-۱۰

حالت کلی اگر سرعت قطار زاویه θ با خط دید شما بسازد، فاصله اضافی قبلی برابر می شود با $L' \cos \theta$ (شکل ۸-۱۰). در مدت $L' \cos \theta / c$ هم قطار فاصله $(L' - L)$ را می پیماید:

$$L' = \frac{L}{1 - v \cos \theta / c} \quad \text{یا} \quad \frac{L' \cos \theta}{c} = \frac{L' - L}{v}$$

توجه کنید که این تغییرات، ابعاد دیگر قطار (عرض و ارتفاع) عمود بر جهت حرکت را تغییر نمی دهد. به این نکته هم که نور از نقطه دور (نسبت به نوری که از نقطه نزدیک می آید) با تأخیر به شما می رسد توجهی نکنید زیرا در آن راستا حرکتی وجود ندارد، یعنی آنها به یک اندازه از هم فاصله دارند. پس حجم ظاهری قطار، τ' ، برحسب حجم واقعی آن، τ ، برابر است با

$$\tau' = \frac{\tau}{1 - \beta \cdot \mathbf{\hat{n}} \cdot \mathbf{v} / c} \quad (38-10)$$

که در آن $\mathbf{\hat{n}}$ بردار یکه ای است که از قطار به طرف ناظر رسم می شود.

در موردی که ارتباط بین قطار متحرک و پتانسیلهای تأخیری برایتان مسئله آفرین می شود به این نکته توجه کنید: وقتی شما انتگرالی به صورت (۳۷-۱۰) می گیرید که انتگرالده در زمان تأخیر محاسبه می شود، حجم مؤثر توسط ضریب معادله (۳۸-۱۰) تصحیح می شود، همان گونه که در مورد حجم ظاهری قطار، و به همان دلیل، دیدیم. از آنجایی که این عامل تصحیح در اندازه ذره تأثیری نمی گذارد، اهمیت آن برای یک بار نقطه ای همانند یک بار توزیع شده (گسترده) است. از

۱. فرض می کنیم که یا قطار خیلی دور است یا طول آن کوچک به طوری که پرتوهای نور قسمت عقب و جلو قطار را بتوان موازی در نظر گرفت.

این گفته‌ها نتیجه می‌گیریم که

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(\pi c - \mathbf{\hat{n}} \cdot \mathbf{v})} \quad (39-10)$$

که در آن \mathbf{v} سرعت بار در زمان تأخیر و $\mathbf{\hat{n}}$ برداری است از مکان تأخیر به نقطه \mathbf{r} . از طرفی چون چگالی جریان یک جسم صلب برابر است با $\rho\mathbf{v}$ [معادله (۲۶-۵)]، نتیجه زیر نیز به دست می‌آید

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)\mathbf{v}(t_r)}{\pi} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{v}}{\pi} \int \rho(\mathbf{r}', t_r) d\tau'$$

یا

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qc\mathbf{v}}{(\pi c - \mathbf{\hat{n}} \cdot \mathbf{v})} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} V(\mathbf{r}, t) \quad (40-10)$$

معادلات (۳۹-۱۰) و (۴۰-۱۰) پتانسیلهای معروف لناردویشرت یک بار نقطه‌ای متحرک‌اند.^۱

مثال ۳-۱۰

پتانسیل یک بار نقطه‌ای متحرک با سرعت ثابت را حساب کنید.

حل: برای سادگی فرض می‌کنیم که در لحظه $t = 0$ ذره از مبدأ می‌گذرد، بنابراین

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{v}t$$

۱. راههای مختلفی برای به دست آوردن پتانسیلهای لناردویشرت وجود دارد. آنچه در بالا گفتیم بر اساس تأکید بر مبنای هندسی عامل $(1 - \mathbf{\hat{n}} \cdot \mathbf{v}/c)^{-1}$ بود؛ برای توضیحات بیشتر و یا به دست آوردن دقیقتر معادلات به دو مرجع زیر رجوع کنید:

W. K. H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2d ed., pp. 342-3 (Reading, MA: Addison-Wesley, 1962). J. R. Reitz, F. J. Milford, and R. W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory*, 3d ed., sect. 12.1 (Reading, MA: Addison-Wesley, 1979), or M. A. Heald and J. B. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation*, 3d ed., Sect. 8.3 (Orlando, FL: Saunders, 1995).

نخست زمان تأخیری را با استفاده از (۳۳-۱۰) محاسبه می‌کنیم:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{v}t_r| = c(t - t_r)$$

با مجذور کردن این معادله داریم

$$r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}t_r + v^2 t_r^2 = c^2(t^2 - 2tt_r + t_r^2)$$

و از روی آن t_r می‌شود

$$t_r = \frac{(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \pm \sqrt{(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}}{c^2 - v^2} \quad (41-10)$$

برای مشخص کردن علامت، حالتی که در آن $v = 0$ است را در نظر می‌گیریم:

$$t_r = t \pm \frac{r}{c}$$

در این حالت بار به حالت سکون در مبدأ قرار دارد و زمان تأخیری باید $(t - r/c)$ باشد؛ بدیهی است که علامت مورد قبول، علامت منفی است.

حال با استفاده از (۳۳-۱۰) و (۳۴-۱۰) داریم

$$\pi = c(t - t_r) \quad \text{و} \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}t_r}{c(t - t_r)}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \pi(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}/c) &= c(t - t_r) \left[1 - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{v}t_r)}{c(t - t_r)} \right] = c(t - t_r) - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c} - \frac{v^2}{c} t_r \\ &= \frac{1}{c} [(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) - (c^2 - v^2)t_r] \\ &= \frac{1}{c} \sqrt{(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)} \end{aligned}$$

(در آخرین مرحله، معادله (۴۱-۱۰) را با علامت منفی به‌کار بردیم). بنابراین

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{\sqrt{(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}} \quad (42-10)$$

و معادله (۴۰-۱۰) می‌شود

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qc\mathbf{v}}{\sqrt{(c^2t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}} \quad (۴۳-۱۰)$$

مسئله ۱۳-۱۰ ذره‌ای با بار q بر دایره‌ای به شعاع a با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حرکت می‌کند. فرض کنید صفحه دوران، صفحه xy که مرکز آن بر مبدأ واقع است بوده و در لحظه $t = 0$ بار الکتریکی در نقطه $(a, 0)$ در جهت مثبت محور x ها قرار دارد. پتانسیلهای لناردویشرت نقاط واقع بر محور z را حساب کنید.

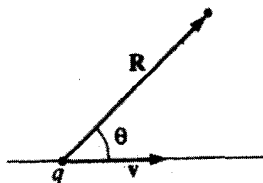
• مسئله ۱۴-۱۰ نشان دهید که پتانسیل یک بار نقطه‌ای که با سرعت ثابت حرکت می‌کند [معادله (۴۲-۱۰)] را می‌توان به صورت زیر هم نوشت

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R\sqrt{1 - v^2 \sin^2 \theta / c^2}} \quad (۴۴-۱۰)$$

که در آن برداری است که مکان فعلی (۱) ذره را از نقطه میدان \mathbf{r} مشخص می‌کند و θ زاویه بین \mathbf{R} و \mathbf{v} (شکل ۹-۱۰) است. بدیهی است که برای سرعت‌های غیرنسبیتی ($v^2 \ll c^2$) داریم

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

مسئله ۱۵-۱۰ گفتیم که در هر زمان معین حداکثر یک نقطه روی مسیر ذره با \mathbf{r} ارتباط برقرار می‌کند. در مواردی ممکن است چنین نقطه‌ای وجود نداشته باشد (ناظری واقع در \mathbf{r} ذره را نبیند - به زبان نسبیت عام در "ورای افق" قرار داشته باشد). به عنوان مثال یک حرکت هذلولوی



شکل ۹-۱۰

در طول محور x را در نظر بگیرید:

$$w(t) = \sqrt{b^2 + (ct)^2} \hat{x} \quad (-\infty < t < \infty) \quad (۴۵-۱۰)$$

(این معادله مسیر ذره‌ای است که تحت تأثیر نیروی ثابت $F = mc^2/b$ بر طبق نظریه نسبیت خاص حرکت می‌کند.) نمودار w بر حسب t را رسم کنید. در چهار یا پنج نقطه روی منحنی مسیر یک سیگنال نوری تابش شده توسط ذره در آن نقطه را هم در جهت مثبت x و هم در جهت منفی x رسم کنید. کدام ناحیه روی نموداری که رسم کرده‌اید مربوط به نقاط و زمانهای (x, t) است که ذره در آنها دیده نمی‌شود؟ در یک نقطه مفروض x در چه زمانی اولین بار ذره دیده می‌شود؟ (قبل از این لحظه پتانسیل نقطه x صفر است.) آیا ممکن است که ذره‌ای از دید ناظر ناپدید شود؟

! مسئله ۱۰-۱۶ پتانسیلهای لئاردویشرت را برای ذره‌ای که دارای حرکت هذلولوی است بیابید [معادله (۴۵-۱۰)]. نقطه \mathcal{P} را روی محور x و در سمت راست بار در نظر بگیرید. □

۱۰-۳-۲ میدان یک بار نقطه‌ای متحرک

حال می‌توانیم میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یک بار نقطه‌ای با حرکت دلخواه را با استفاده از پتانسیلهای لئاردویشرت که به صورت مناسب نوشته می‌شوند حساب کنیم:^۱

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(\pi c - \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v})}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}}{c^2} V(\mathbf{r}, t) \quad (۴۶-۱۰)$$

و معادلات زیر را هم برای \mathbf{E} و \mathbf{B} داریم

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

مشقتگیری آن‌گونه که به نظر می‌رسد ساده نیست، معذالک چون

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r) \quad \text{و} \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{w}}(t_r) \quad (۴۷-۱۰)$$

۱. میدان را می‌توان مستقیماً از معادلات جفیمینکو به دست آورد، اما کار ساده‌ای نیست. به عنوان مثال به مرجع زیر رجوع کنید

M. A. Heald and J. B. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation*, 3d ed., Sect. 8.4 (Orlando, FL: Saunders, 1995).

هر دو در زمان تأخیر حساب می‌شوند و t_r نیز با معادله زیر تعریف می‌شود

$$|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)| = c(t - t_r) \quad (48-10)$$

که خودش به \mathbf{r} و t بستگی دارد.^۱ بنابراین توجه کنید: در صفحه بعدی تقریبی بحث شده است ... اما ارزش بررسی جواب را دارد. از گرادیان V شروع می‌کنیم

$$\nabla V = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{(\pi c - \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v})^2} \nabla(\pi c - \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}) \quad (49-10)$$

چون $\pi = c(t - t_r)$ داریم

$$\nabla \pi = -c \nabla t_r \quad (50-10)$$

برای جمله دوم از قاعده حاصلضرب^۲ استفاده می‌کنیم

$$\nabla(\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}) = (\boldsymbol{\pi} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{\pi}) \quad (51-10)$$

جمله‌ها را حساب می‌کنیم

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\pi} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= \left(\pi_x \frac{\partial}{\partial x} + \pi_y \frac{\partial}{\partial y} + \pi_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{v}(t_r) \\ &= \pi_x \frac{d\mathbf{v}}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} + \pi_y \frac{d\mathbf{v}}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} + \pi_z \frac{d\mathbf{v}}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} \\ &= \mathbf{a}(\boldsymbol{\pi} \cdot \nabla t_r) \end{aligned} \quad (52-10)$$

۱. محاسبات زیر با مستقیم‌ترین روش "نیروی فیزیکی" انجام گرفته است. برای یک بررسی دقیقتر و منظری متفاوت به مرجع زیر رجوع کنید.

که در آن $\mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{v}}$ شتاب ذره در زمان تأخیر است. حال می‌نویسیم

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\pi} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{r} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} \quad (۵۳-۱۰)$$

و

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{r} &= \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}) \\ &= v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{v} \end{aligned} \quad (۵۴-۱۰)$$

در حالی‌که [به همان دلیل معادله (۵۲-۱۰)] داریم

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} = \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla t_r)$$

حال سومین جمله (۵۱-۱۰) را بررسی می‌کنیم

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \\ &= \left(\frac{dv_z}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} - \frac{dv_y}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{dv_x}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} - \frac{dv_z}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{dv_y}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} - \frac{dv_x}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \\ &= -\mathbf{a} \times \nabla t_r \end{aligned} \quad (۵۵-۱۰)$$

و سرانجام اینکه

$$\nabla \times \boldsymbol{\pi} = \nabla \times \mathbf{r} - \nabla \times \mathbf{w} \quad (۵۶-۱۰)$$

اما $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ است، در حالی‌که به همان دلیل معادله (۵۵-۱۰) داریم

$$\nabla \times \mathbf{w} = -\mathbf{v} \times \nabla t_r \quad (۵۷-۱۰)$$

با قرار دادن اینها در معادله (۵۱-۱۰) و استفاده از قاعده "BAC-CAB" برای تحویل حاصلضرب

سه‌گانه برداری داریم

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{J} \cdot \mathbf{v}) &= \mathbf{a}(\mathbf{J} \cdot \nabla t_r) + \mathbf{v} - \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla t_r) - \mathbf{J} \times (\mathbf{a} \times \nabla t_r) + \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \nabla t_r) \\ &= \mathbf{v} + (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a} - v^2) \nabla t_r\end{aligned}\quad (58-10)$$

با در نظر گرفتن معادلات (۵۸-۱۰) و (۵۰-۱۰) داریم

$$\nabla V = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\mathcal{R}c - \mathbf{J} \cdot \mathbf{v})^2} \left[\mathbf{v} + (c^2 - v^2 + \mathbf{J} \cdot \mathbf{a}) \nabla t_r \right] \quad (59-10)$$

برای تکمیل محاسبات، نیاز به داشتن ∇t_r داریم. برای این منظور گرادینان معادله (۴۸-۱۰) را همان‌گونه که در معادله (۵۰-۱۰) کردیم، حساب می‌کنیم و $\nabla \mathcal{R}$ را بسط می‌دهیم

$$\begin{aligned}-c\nabla t_r &= \nabla \mathcal{R} = \nabla \sqrt{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}} = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}}} \nabla(\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}) \\ &= \frac{1}{\mathcal{R}} [(\mathbf{J} \cdot \nabla)\mathbf{J} + \mathbf{J} \times (\nabla \times \mathbf{J})]\end{aligned}\quad (60-10)$$

اما

$$(\mathbf{J} \cdot \nabla)\mathbf{J} = \mathbf{J} - \mathbf{v}(\mathbf{J} \cdot \nabla t_r)$$

[با همان ایده معادله (۵۳-۱۰)]، در حالی که [از معادله (۵۶-۱۰) و (۵۷-۱۰)] داریم

$$\nabla \times \mathbf{J} = (\mathbf{v} \times \nabla t_r)$$

از این رو

$$-c\nabla t_r = \frac{1}{\mathcal{R}} [\mathbf{J} - \mathbf{v}(\mathbf{J} \cdot \nabla t_r) + \mathbf{J} \times (\mathbf{v} \times \nabla t_r)] = \frac{1}{\mathcal{R}} [\mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{v}) \nabla t_r]$$

و بنابراین

$$\nabla t_r = \frac{-\mathbf{J}}{\mathcal{R}c - \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}} \quad (61-10)$$

با قرار دادن این نتیجه در معادله (۵۹-۱۰) به معادله زیر می‌رسیم

$$\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(\pi c - \pi \cdot v)^2} [(\pi c - \pi \cdot v)v - (c^2 - v^2 + \pi \cdot a)\pi] \quad (62-10)$$

با محاسبه‌ای مشابه که انجام آن به خواننده واگذار می‌شود (مسئله ۱۷-۱۰) داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(\pi c - \pi \cdot v)^2} & \left[(\pi c - \pi \cdot v)(-v + \pi a/c) \right. \\ & \left. + \frac{\pi}{c} (c^2 - v^2 + \pi \cdot a)v \right] \end{aligned} \quad (63-10)$$

با ترکیب این نتایج و معرفی بردار زیر

$$\mathbf{u} \equiv c\hat{\pi} - \mathbf{v} \quad (64-10)$$

به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi}{(\pi \cdot \mathbf{u})^2} [(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \pi \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})] \quad (65-10)$$

در این حال داریم

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \nabla \times (V\mathbf{v}) = \frac{1}{c^2} [V(\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla V)]$$

قبلاً $\nabla \times \mathbf{v}$ [معادله (۵۵-۱۰)] و ∇V [معادله (۶۲-۱۰)] را حساب کرده‌ایم. در نتیجه داریم

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\mathbf{u} \cdot \pi)^2} \pi \times [(c^2 - v^2)\mathbf{v} + (\pi \cdot \mathbf{a})\mathbf{v} + (\pi \cdot \mathbf{u})\mathbf{a}]$$

کمیت‌های داخل کروشه تا حد زیادی شبیه معادله (۶۵-۱۰) اند که می‌توان با استفاده از قاعده BAC-CAB به صورت $[(c^2 - v^2)\mathbf{u} + (\pi \cdot \mathbf{a})\mathbf{u} - (\pi \cdot \mathbf{u})\mathbf{a}]$ نوشت؛ تفاوت مهم آن است که به جای \mathbf{u} در دو جمله اول قرار گرفته است. در واقع چون تمام در π ضرب شده‌اند با تغییر \mathbf{v} به $-\mathbf{u}$ جمله اضافی متناسب با $\hat{\pi}$ حذف شده و نتیجه می‌شود

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\pi} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (66-10)$$

بدیهی است که میدان مغناطیسی یک بار نقطه‌ای همواره بر میدان الکتریکی و نیز بر برداری که از نقطه تأخیری رسم شده است عمود است.

جمله اول در معادله \mathbf{E} [جمله‌ای شامل $\mathbf{u}(c^2 - v^2)$ متناسب با عکس مجذور فاصله کوچک می‌شود. هرگاه سرعت و شتاب هر دو صفر باشند، به همان حالت قدیمی الکتروستاتیک نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

به این دلیل است که جمله اول \mathbf{E} را گاه میدان کولنی تعمیم یافته می‌نامند. (از آنجایی که این میدان به شتاب بستگی ندارد آن را میدان سرعت نیز می‌نامند.) جمله دوم [که شامل $\boldsymbol{\pi} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})$ است] متناسب با عکس توان اول $\boldsymbol{\pi}$ کم می‌شود و بنابراین در فواصل بزرگ عملاً حذف می‌شود. همان‌گونه که در فصل ۱۱ خواهید دید این جمله است که عامل تابش الکترومغناطیسی است و از این رو است که آن را میدان تابش و یا به دلیل عمود بودن بر \mathbf{a} آن را میدان شتاب می‌نامند. بحث مشابهی هم برای میدان مغناطیسی قابل ارائه است.

برگردیم به فصل ۲ که صرفاً نیروی بین دو بار الکتریکی را بحث کردیم. باید همین کار را بتوان از نظر اصولی برای الکترودینامیک هم انجام داد. این عمل و نیز اعمال اصل برهم‌نهی، نیروی وارد بر بار آزمون Q از طرف هر مجموعه‌ای از بارها را مشخص می‌کند. یادتان باشد که معادلات (۶۵-۱۰) و (۶۶-۱۰) میدانها را معرفی می‌کنند و بنابراین با استفاده از این معادلات و قانون نیروی لورنتس به نتیجه زیر می‌رسیم

$$\mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{\pi}}{(\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{u})^2} \left\{ [(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \boldsymbol{\pi} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})] + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \left[\hat{\boldsymbol{\pi}} \times [(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \boldsymbol{\pi} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})] \right] \right\} \quad (۶۷-۱۰)$$

که \mathbf{V} سرعت Q است و $\boldsymbol{\pi}$ ، \mathbf{u} ، \mathbf{v} و \mathbf{a} در زمان تأخیر حساب می‌شوند. کل نظریه الکترودینامیک کلاسیک در معادله اخیر نهفته است، اما می‌بینید که چرا ترجیح دادیم از قانون کولن شروع کنیم.

مثال ۱۰-۴

میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یک بار نقطه‌ای را که با سرعت ثابت حرکت می‌کند حساب کنید.

حل: در معادله (۶۵-۱۰) قرار می‌دهیم $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(c^2 - v^2)\boldsymbol{\pi}}{(\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{u})^3} \mathbf{u}$$

در این حالت داریم $\mathbf{w} = \mathbf{v}t$

$$\boldsymbol{\pi} \mathbf{u} = c\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{v} = c(\mathbf{r} - \mathbf{v}t_r) - c(t - t_r)\mathbf{v} = c(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$$

در مثال ۱۰-۳ پیدا کرده بودیم که

$$\boldsymbol{\pi} c - \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{u} = \sqrt{(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}$$

در مسئله ۱۰-۱۴ هم شما نشان دادید که رادیکال را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$Rc\sqrt{1 - v^2 \sin^2 \theta / c^2}$$

که در آن

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{v}t$$

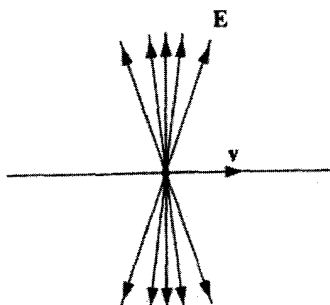
بردار از مکان فعلی ذره تا \mathbf{r} و θ هم زاویه بین \mathbf{R} و \mathbf{v} (شکل ۱۰-۹) است. از این رو

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - v^2 \sin^2 \theta / c^2)^{3/2}} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \quad (۶۸-۱۰)$$

توجه کنید که \mathbf{E} در امتداد برداری است که از مکان فعلی ذره می‌گذرد. این یک تطابق فوق‌العاده است، چون "پیام" از مکان تأخیری می‌آید. به سبب وجود $\sin^2 \theta$ در مخرج، میدان یک بار متحرک با سرعت زیاد مانند یک کیک تابه‌ای در راستای عمود بر حرکت پهن می‌شود (شکل ۱۰-۱۰). \mathbf{E} در جهت‌های جلو و عقب به میزان $(1 - v^2/c^2)$ نسبت به بار در حال سکون کاهش یافته و در جهت عمودی به میزان $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ اضافه شده است.

همانند \mathbf{B} داریم

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}t_r}{\boldsymbol{\pi}} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) + (t - t_r)\mathbf{v}}{\boldsymbol{\pi}} = \frac{\mathbf{R}}{\boldsymbol{\pi}} + \frac{\mathbf{v}}{c}$$



شکل ۱۰-۱۰

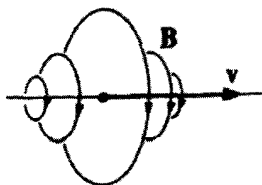
و بنابراین

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \quad (۶۹-۱۰)$$

خطوط \mathbf{B} به صورت دایره‌هایی حول بار مطابق شکل ۱۱-۱۰، قرار دارند. میدانهای یک بار نقطه‌ای متحرک با سرعت ثابت [معادلات (۶۸-۱۰) و (۶۹-۱۰)] را اولین بار آلپور هویساید در سال ۱۸۸۸ میلادی به دست آورد. وقتی که $v \ll c$ باشد، آنها به صورت زیر در می‌آیند

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \hat{\mathbf{R}}; \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{R^2} (\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{R}}) \quad (۷۰-۱۰)$$

اولین معادله همان قانون کولن و دومی "قانون بیوساوار برای یک بار نقطه‌ای" است. در این باره در فصل ۵ [معادله (۴۰-۵)] بحث کرده بودیم.



شکل ۱۱-۱۰

مسئله ۱۰-۱۷ معادله (۱۰-۶۳) را به دست آورید. نخست نشان دهید که

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{\pi c}{\pi \cdot u} \quad (10-71)$$

مسئله ۱۰-۱۸ فرض کنید یک بار نقطه‌ای q ، مقید به حرکت روی محور x باشد. نشان دهید میدانهای نقاط واقع در محور سمت راست بار به صورت زیر هستند

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{c+v}{c-v} \right) \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{B} = 0$$

میدانهای نقاط واقع در محور سمت چپ بار کدام‌اند؟

مسئله ۱۰-۱۹ (الف) با استفاده از معادله (۱۰-۶۸)، میدان الکتریکی را در فاصله d از سیم مستقیم نامتناهی با چگالی بار خطی λ که با سرعت ثابت v در طول سیم حرکت می‌کند حساب کنید.

(ب) با استفاده از معادله (۱۰-۶۹)، میدان مغناطیسی این سیم را حساب کنید.

مسئله ۱۰-۲۰ برای پیکربندی گفته شده در مسئله ۱۰-۱۳ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را در مرکز حساب کنید. از روی فرمول \mathbf{B} میدان مغناطیسی را در مرکز یک مدار دایره‌ای حامل جریان ثابت I پیدا کنید و جواب خودتان را با نتیجه مثال ۵-۶ مقایسه کنید. □

مسائل تکمیلی فصل ۱۰

مسئله ۱۰-۲۱ فرض کنید یک حلقه پلاستیکی به شعاع a دارید و می‌توانید بار را روی آن به گونه‌ای قرار دهید که چگالی بار به صورت $|\sin(\theta/2)| \lambda_0$ باشد. آنگاه حلقه را نسبت به محور خود با سرعت زاویه‌ای ω بچرخانید. پتانسیل برداری و نرده‌ای را در مرکز حلقه پیدا کنید.

$$\mathbf{A} = (\mu_0 \lambda_0 \omega a / 3\pi) \{ \sin[\omega(t - a/c)] \hat{\mathbf{x}} - \cos[\omega(t - a/c)] \hat{\mathbf{y}} \} \quad \text{پاسخ:}$$

مسئله ۱۰-۲۲ در شکل ۲-۳۵ قوانین الکتروستاتیک را به صورت "نمودار مثلی" که در آن چشمه (ρ) ، میدان (\mathbf{E}) و پتانسیل (V) را به یکدیگر مربوط می‌کند نشان داده‌ایم. شکل (۵-۴۸) همان کار را برای مغناطوستاتیک نشان می‌دهد که معادله بین چشمه (\mathbf{J}) ، میدان (\mathbf{B}) و پتانسیل (\mathbf{A}) را مشخص می‌کند. نموداری مشابه برای الکترودینامیک رسم کنید که معادلات بین چشمه‌های ρ و \mathbf{J} (با در نظر گرفتن قید معادله پیوستگی)، میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} و پتانسیلهای V و \mathbf{A} (مقید به شرط پیمانه لورنتس) را مشخص کند. از فرمولهای V و \mathbf{A} بر حسب \mathbf{E} و \mathbf{B} صرف نظر کنید.

مسئله ۲۳-۱۰ نشان دهید که پتانسیل‌های یک بار نقطه‌ای متحرک با سرعت ثابت [معادلات (۱۰-۴۲) و (۱۰-۴۳)] در شرط پیمانه‌ای لورنتس [معادله (۱۰-۱۲)] صدق می‌کنند.

مسئله ۲۴-۱۰ یک ذره دارای بار q_1 را به حال سکون در مبدأ قرار می‌دهیم. ذره دیگری با بار q_2 بر روی محور x حرکت "هذلولوی" دارد:

$$x(t) = \sqrt{b^2 + (ct)^2}$$

(این ذره در لحظه $t = 0$ به نزدیکترین نقطه یعنی b می‌رسد و آن‌گاه به سمت بینهایت دور می‌شود.)

(الف) نیروی F_2 مؤثر بر q_2 (ناشی از بار q_1) در لحظه t چقدر است؟

(ب) ضربه کلی مؤثر بر بار q_2 توسط q_1 (یعنی $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} F_2 dt$) چقدر است؟

(ج) نیروی F_1 وارد بر ذره q_1 (ناشی از q_2) در لحظه t چقدر است؟

(د) ضربه مؤثر کل وارد بر q_1 ناشی از q_2 (یعنی $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} F_1 dt$) چقدر است؟ [راهنمایی:

قبل از محاسبه انتگرال اخیر بد نیست به مسئله ۱۰-۱۵ مجدداً رجوع کنید.]

پاسخ: $I_2 = -I_1 = q_1 q_2 / 4\epsilon_0 b c$

مسئله ۲۵-۱۰ ذره‌ای با بار q با سرعت ثابت v روی محور x حرکت می‌کند. توان کلی گذرنده

از صفحه $x = a$ را در لحظه‌ای که خود ذره در مبدأست حساب کنید.

پاسخ: $q^2 v / 32\pi\epsilon_0 a^2$

مسئله ۲۶-۱۰ ذره‌ای با بار q_1 به حال سکون در مبدأست. ذره دیگری با بار q_2 روی محور z

با سرعت ثابت v حرکت می‌کند.

(الف) نیروی $F_{12}(t)$ وارد از q_1 به q_2 در لحظه t (که q_2 در $z = vt$ است) را حساب کنید.

(ب) نیروی $F_{21}(t)$ وارد از q_2 به q_1 در لحظه t را حساب کنید. آیا قانون سوم نیوتون در این

حالت برقرار است؟

(ج) تکانه خطی $\mathbf{p}(t)$ میدانهای الکترومغناطیسی را در زمان t محاسبه کنید. [در باره

جملات ثابت نسبت به زمان نگران نباشید، زیرا در قسمت (د) به آنها نیازی ندارید.]

پاسخ: $(\mu_0 q_1 q_2 / 4\pi t) \hat{z}$

(د) نشان دهید که مجموع نیروها برابر است با منهای آهنگ تغییرات تکانه میدانها، و این نتایج

را از نظر فیزیکی تفسیر کنید.

□

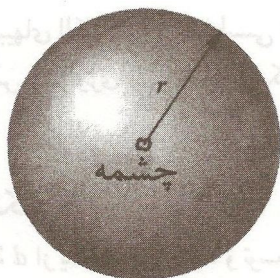
تابش

۱-۱۱ تابش دوقطبی

۱-۱-۱۱ تابش چیست؟

در فصل ۹ انتشار امواج الکترومغناطیسی تخت را در محیطهای مختلفی بررسی کردیم، اما از اینکه امواج در آغاز چگونه ایجاد می‌شوند صحبتی نکردیم. منشأ همه میدانهای الکترومغناطیسی نوعی آرایش بارهای الکتریکی است. اما می‌دانیم که بار ساکن امواج الکترومغناطیسی ایجاد نمی‌کند؛ همین‌طور جریان پایا هم مولد این امواج نیست. چنان‌که خواهیم دید این امواج از بارهای شتابدار و جریانهای متغیر ناشی می‌شوند. هدف ما در این فصل آن است که نشان دهیم چگونه بارهای الکتریکی شتابدار، امواج الکترومغناطیسی تولید می‌کنند — به عبارت دیگر چگونه تابش می‌کنند. همین‌که امواج الکترومغناطیسی به‌وجود آمدند، در خلأ^۱ “تابینهایت” انتشار می‌یابند و انرژی با خود منتقل می‌کنند؛ وجه مشخصه تابش، سیلان برگشت‌ناپذیر انرژی از چشمه است. در تمام این فصل فرض می‌کنیم که چشمه در نزدیکی مبدأ جایگزیده است.^۱ یک پوسته کروی بسیار بزرگی

۱. در مورد چشمه‌های جایگزیده — نظیر صفحات نامتناهی، سیمها یا سیملوله‌ها — تمام مفاهیم “تابش را باید از نو فرمولبندی کرد؛ مسئله ۱-۲۴ را ببینید.



شکل ۱-۱۱

را به شعاع r (شکل ۱-۱۱) در نظر بگیرید؛ توان کل که از این سطح خارج می‌شود برابر است با انتگرال بردار پوینتینگ

$$P(r) = \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\mu_0} \oint (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} \quad (1-11)$$

توان تابشی، حد این مقدار است وقتی r به بینهایت میل می‌کند

$$P_{\text{تابشی}} \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} P(r) \quad (2-11)$$

این همان انرژی (در واحد زمان) است که به بینهایت منتقل شده است و هرگز برنمی‌گردد. اما چون سطح کره $4\pi r^2$ است، برای اینکه تابش روی دهد، باید کاهش بردار پوینتینگ (در r بزرگ) سریعتر از $1/r^2$ نباشد (مثلاً اگر به صورت $1/r^3$ می‌بود، آنگاه $P(r)$ به صورت $1/r$ تغییر می‌کرد، و تابش P صفر می‌شد). بنابر قانون کولن، میدانهای الکتروستاتیکی به صورت $1/r^2$ (یا حتی سریعتر از آن، در صورتی که بار کل صفر باشد) فرو می‌افتند، و قانون بیوساوار می‌گوید که میدانهای مغناطوستاتیکی به صورت $1/r^2$ (یا سریعتر) تغییر می‌کنند و این به معنی آن است که برای پیکربندیهای ایستا، $S \sim 1/r^4$ است. بنابراین چشمه‌های ایستا تابش نمی‌کنند. اما معادلات جفیمتکو [۱۰-۲۹ و ۱۰-۳۱] نشان می‌دهند که میدانهای وابسته به زمان دارای جمله‌هایی (شامل $\dot{\mathbf{J}}$ و $\ddot{\mathbf{J}}$) هستند که به صورت $1/r$ تغییر می‌کنند؛ این جملات هستند که باعث تابش الکترومغناطیسی می‌شوند.

پس، مطالعه تابش با انتخاب قسمتهایی که در آنها \mathbf{E} و \mathbf{B} ، برای فواصل بزرگ از چشمه به صورت $1/r$ تغییر می‌کنند شروع می‌شود و سپس از روی آنها جمله $1/r^2$ در \mathbf{S} شکل می‌گیرد، و با انتگرال‌گیری روی یک سطح کروی بزرگ^۱ و گرفتن حد به‌ازای $r \rightarrow \infty$ خاتمه می‌یابد. در

۱. البته لزومی ندارد که شکل یک کره باشد، اما این فرض محاسبات را خیلی ساده‌تر می‌کند.

این بخش ما نخست برای دوقطبیهای الکتریکی و مغناطیسی نوسانی این شیوه را به کار می‌بندیم، آن‌گاه، در بخش ۱۱-۲، مورد بس دشوارتری را که تابش از یک بار نقطه‌ای شتابدار است، مورد توجه قرار می‌دهیم.

۱۱-۱-۲ تابش دوقطبی الکتریکی

دو کره فلزی نازک را که به فاصله d از یکدیگر قرار دارند و توسط سیم نازکی به هم متصل شده‌اند در نظر بگیرید (شکل ۱۱-۲). فرض کنید دستگاه از نظر الکتریکی کاملاً خنثی است. از این رو اگر در لحظه t بار کره بالایی $q(t)$ باشد بار کره پایینی $-q(t)$ خواهد بود. نیز فرض کنید به شیوه‌ای بار را به حرکت رفت و برگشت بین دو کره از راه سیم و با بسامد زاویه‌ای ω و می‌داریم

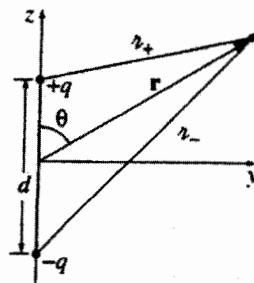
$$q(t) = q_0 \cos \omega t \quad (۳-۱۱)$$

نتیجه این کار، یک دوقطبی الکتریکی نوسان‌کننده است^۱

$$\mathbf{p}(t) = p_0 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{z}} \quad (۴-۱۱)$$

که در آن

$$p_0 \equiv q_0 d$$



شکل ۱۱-۲

۱. ممکن است فکر کنید که الگوی طبیعی‌تر آن باشد که بارهای مساوی و مخالف روی فیزی قرار گرفته باشند به طوری که q ثابت بماند اما d نوسان کند، یعنی برعکس حالتی که در بالا گفتیم. این الگو هم به همان نتیجه فرض بالا منجر می‌شود. اما مسئله‌ای که برای آن وجود دارد محاسبه پتانسیلهای تأخیری یک بار نقطه‌ای متحرک است که بحث آن را به بخش ۱۱-۲ موکول می‌کنیم.

مقدار بیشینه گشتاور دوقطبی است.

پتانسیل تأخیری [معادله (۱۰-۱۹)] برابر است با

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q_0 \cos[\omega(t - \pi_+/c)]}{\pi_+} - \frac{q_0 \cos[\omega(t - \pi_-/c)]}{\pi_-} \right\} \quad (۵-۱۱)$$

در حالی که بنابر قانون کسینوسها داریم

$$\pi_{\pm} = \sqrt{r^2 \mp rd \cos \theta + (d/2)^2} \quad (۶-۱۱)$$

حال برای اینکه این دوقطبی فیزیکی به یک دوقطبی کامل تبدیل شود نیازمند آنیم که فاصله آنها بسیار کم باشد:

$$d \ll r \quad \text{تقریب ۱:} \quad (۷-۱۱)$$

بدیهی است اگر $d = 0$ باشد اصلاً پتانسیلی نداریم؛ آنچه ما نیاز داریم استفاده از یک بسط است تا جمله مرتبه اول در d را ملحوظ داریم. از این رو

$$\pi_{\pm} \cong r \left(1 \mp \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \quad (۸-۱۱)$$

و یا

$$\frac{1}{\pi_{\pm}} \cong \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \quad (۹-۱۱)$$

و

$$\begin{aligned} \cos[\omega(t - \pi_{\pm}/c)] &\cong \left[\omega(t - r/c) \pm \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right] \\ &= \cos[\omega(t - r/c)] \cos \left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right) \mp \sin[\omega(t - r/c)] \sin \left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right) \end{aligned}$$

در حالت حدی یک دوقطبی کامل، علاوه بر این، داریم

$$d \ll \frac{c}{\omega} \quad \text{تقریب ۲:} \quad (۱۰-۱۱)$$

(چون امواج با بسامد ω دارای طول موج $\lambda = 2\pi c/\omega$ هستند، تقریب ۲ به معنی این شرط است که $d \ll \lambda$ باشد.) در این شرایط داریم

$$\cos[\omega(t - r_{\pm}/c)] \cong \cos[\omega(t - r/c)] \mp \frac{\omega d}{2c} \cos\theta \sin[\omega(t - r/c)] \quad (11-11)$$

با قرار دادن معادلات (۹-۱۱) و (۱۱-۱۱) در معادله (۵-۱۱)، پتانسیل یک دوقطبی نوسان‌کننده کامل را به دست می‌آوریم

$$V(r, \theta, t) = \frac{p_0 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ -\frac{\omega}{c} \sin[\omega(t - r/c)] + \frac{1}{r} \cos[\omega(t - r/c)] \right\} \quad (12-11)$$

در حد ایستایی ($\omega \rightarrow 0$)، جمله دوم همان فرمول قدیمی پتانسیل دوقطبی مانای معادله (۳-۹۹) را به ما می‌دهد

$$V = \frac{p_0 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

با وجود این در وضعیت مورد بحث این جمله مورد نظر ما نیست؛ آنچه مورد توجه ماست، میدانهایی هستند که در فواصل زیادی از چشمه، در فضایی که آن را اصطلاحاً منطقه تابش^۱ می‌نامیم وجود دارند

$$r \gg c/\omega \quad \text{تقریب ۳} \quad (13-11)$$

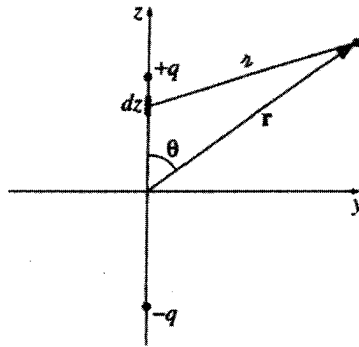
(و یا، برحسب طول موج، $r \gg \lambda$) در این ناحیه پتانسیل به مقدار زیر تبدیل می‌شود

$$V(r, \theta, t) = -\frac{p_0 \omega}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{\cos\theta}{r} \right) \sin[\omega(t - r/c)] \quad (14-11)$$

در این ضمن، پتانسیل برداری توسط جریان گذرنده از سیم تعیین می‌شود که برابر است با

$$\mathbf{I}(t) = \frac{dq}{dt} \hat{\mathbf{z}} = -q_0 \omega \sin(\omega t) \hat{\mathbf{z}} \quad (15-11)$$

۱. توجه داشته باشید که تقریبهای ۲ و ۳ با هم تقریب ۱ را نتیجه می‌دهند. در کل داریم $d \ll \lambda \ll r$



شکل ۳-۱۱

با توجه به شکل ۳-۱۱ داریم

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{-q_0 \omega \sin[\omega(t - r/c)] \hat{\mathbf{z}}}{r} dz \quad (16-11)$$

چون خود انتگرال‌گیری یک ضریب d به دست می‌دهد، می‌توان انتگرال را با مقدار آن در مرکز تقریب (مرتبه اول) زد:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \theta, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \sin[\omega(t - r/c)] \hat{\mathbf{z}} \quad (17-11)$$

(یادآوری می‌کنیم که در به دست آوردن معادله (۱۷-۱۱)، تقریبهای ۱ و ۲ را به منظور آنکه d را در مرتبه اول بگیریم به طور ضمنی به کار بردیم؛ در این معادله تقریب ۳ به کار برده نشد.) میدانها را می‌توان به سادگی از روی پتانسیلها پیدا کرد

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= -\frac{p_0 \omega}{4\pi \epsilon_0 c} \left\{ \cos \theta \left(-\frac{1}{r^2} \sin[\omega(t - r/c)] - \frac{\omega}{rc} \cos[\omega(t - r/c)] \right) \hat{\mathbf{r}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \theta}{r^2} \sin[\omega(t - r/c)] \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} \\ &\cong \frac{p_0 \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^2} \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

(با توجه به تقریب ۳ از جملات اول و آخر صرف نظر کردیم.) به همین ترتیب

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \cos[\omega(t - r/c)] (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

و بنابراین

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (18-11)$$

ضمناً داریم

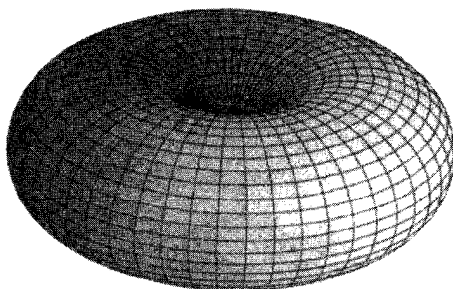
$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &= -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \left\{ \frac{\omega}{c} \sin \theta \cos[\omega(t - r/c)] + \frac{\sin \theta}{r} \sin[\omega(t - r/c)] \right\} \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned}$$

جمله دوم، باز هم بنابر تقریب ۳، حذف می‌شود. بنابراین

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (19-11)$$

معادلات (۱۸-۱۱) و (۱۹-۱۱) نمایانگر امواج تکفام با بسامد ω هستند که در جهت شعاعی و با سرعت نور حرکت می‌کنند. \mathbf{B} و \mathbf{E} همفاز، متقابلاً متعامد و عرضی هستند، نسبت بین دامنه این دو برابر است با $E_0/B_0 = c$. اینها دقیقاً نتایجی است که برای امواج الکترومغناطیسی در فضای آزاد انتظارش را داشتیم. (اینها در واقع امواج کروی‌اند و نه امواج تخت، و دامنه آنها ضمن پیشروی‌شان، متناسب با $1/r$ کم می‌شود. اما به‌ازای r بزرگ این امواج در نواحی کوچک تقریباً تخت هستند — درست مثل سطح کره زمین که در هر محل منطقاً می‌توان آن را مسطح گرفت.) انرژی تابیده از یک دوقطبی الکتریکی نوسان‌کننده را توسط بردار پوینتینگ مشخص می‌کنیم:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{\mu_0}{c} \left\{ \frac{p_0 \omega^2}{4\pi} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \right\}^2 \hat{\mathbf{r}} \quad (20-11)$$



شکل ۴-۱۱

شدت را با میانگین‌گیری (زمانی) روی یک چرخه کامل به دست می‌آوریم

$$\langle S \rangle = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{r} \quad (21-11)$$

توجه کنید که در امتداد محور دوقطبی (که $\sin \theta = 0$ است) تابشی وجود ندارد؛ نمودار مقطع عرضی^۱ شدت چیزی شبیه شکل ۴-۱۱ است و بیشینه مقدار آن در صفحه استوایی است. توان تابشی کل از انتگرال‌گیری $\langle S \rangle$ روی کره‌ای به شعاع r به دست می‌آید:

$$\langle P \rangle = \int \langle S \rangle \cdot da = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c} \quad (22-11)$$

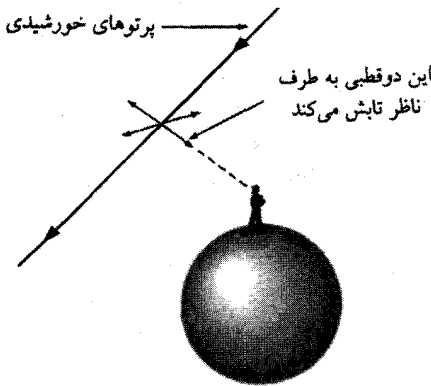
چنان که از بایستگی انرژی هم انتظار می‌رود (با تقریب ۳ حد $\infty \rightarrow r$ را به کار بردیم) مقدار این توان به شعاع کره بستگی ندارد.

مثال ۱-۱۱

بستگی زیاد فرمول توان به بسامد همان چیزی است که موجب رنگ آبی آسمان می‌شود. نور خورشید که از اتمسفر می‌گذرد آنها را همانند دوقطبیهای ظریفی به نوسان وامی‌دارد. در تابش خورشیدی فرودی گستره وسیعی از طول‌موجها (نور سفید) وجود دارد، اما انرژی جذب و تابش شده توسط دوقطبیهای اتمسفر در بسامدهای بالا با توجه به بستگی آن به ω^4 در معادله (۲۲-۱۱) قویترند. بنابراین شدت در رنگ آبی بیشتر از رنگ قرمز است. وقتی به آسمان نگاه می‌کنیم نوری را می‌بینیم که دوباره گسیل شده است، مگر آنکه مستقیماً به خورشید نگاه کنیم.

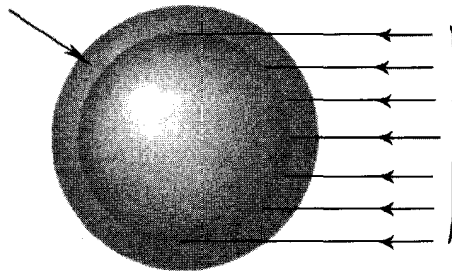
چون امواج الکترومغناطیسی عرضی هستند دوقطبیها در صفحه عمود بر پرتو خورشیدی

۱. مشخصه "شعاعی" در شکل ۴-۱۱ نشانگر مقدار $\langle S \rangle$ ، در r ثابت، به صورت تابعی از θ و ϕ است.



شکل ۵-۱۱

جو (ضخامت آن بی اندازه اغراق آمیز است)



شکل ۶-۱۱

نوسان می‌کنند، یعنی امتدادی که وجود رنگ آبی بارزتر است، دو قطبیهایی که در طول خط دید نوسان می‌کنند تابشی برای ناظر ندارند [به علت عامل $\sin^2 \theta$ در معادله (۱۱-۲۱)]; بنابراین نوری که در این زاویه می‌رسد در امتداد عمود بر پرتوهای خورشیدی قطبیده است (شکل ۵-۱۱).

سرخ‌ی به هنگام غروب هم روی دیگر سکه است: نوری که به صورت مماس به سطح زمین می‌رسد از ضخامت بیشتری از جو می‌گذرد تا پرتوهایی که مستقیماً از بالا سر به زمین می‌تابند (شکل ۱۱-۶). در نتیجه کسر بزرگتری از آبی توسط پراکندگی حذف می‌شود و آنچه باقی می‌ماند قرمز است.

مسئله ۱-۱۱ نشان دهید که پتانسیلهای تأخیری یک دو قطبی نوسان‌کننده [معادلات (۱۱-۱۲) و (۱۱-۱۷)] در شرط پیمانه لورتس صدق می‌کنند. از تقریب ۳ استفاده نکنید.

مسئله ۲-۱۱ معادله (۱۱-۱۴) را می‌توان به صورتی "مستقل از مختصات" به صورت

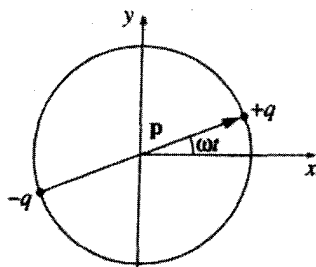
و (۱۱-۲۱) این کار را انجام دهید. برای این معادله و نیز معادلات (۱۱-۱۷)، (۱۱-۱۸)، (۱۱-۱۹)

مسئله ۱۱-۳ مقاومت تابشی سیمی را که دو انتهای دوقطبی را به یکدیگر وصل می‌کند، بیابید. (این مقاومتی است که توان تلف شده میانگین به صورت گرما در آن، با توان دوقطبیهای نوسان‌کننده که به صورت تابش بیرون می‌رود، برابر است.) نشان دهید که $R = 790 (d/\lambda)^2 \Omega$ است که در آن λ طول موج تابش است. در مورد سیمهای یک رادیوی معمولی (مثلاً $d = 5 \text{ cm}$) آیا در مقاومت کل سیم اثر تابشی هم نقشی دارد؟

! مسئله ۱۱-۴ یک دوقطبی الکتریکی در حال دوران را می‌توان متشکل از برهم‌نهی دو دوقطبی نوسان‌کننده دانست که یکی در جهت x و دیگری در جهت y (شکل ۱۱-۷) بوده و اختلاف فاز این دو 90° باشد

$$\mathbf{p} = p_0 [\cos(\omega t) \hat{x} + \sin(\omega t) \hat{y}]$$

با استفاده از اصل برهم‌نهی و معادلات (۱۱-۱۸) و (۱۱-۱۹) [احتمالاً به صورت مطرح در مسئله ۱۱-۲] میدانهای دوقطبی دوار را حساب کنید. همچنین بردار پوینتینگ و شدت تابش را محاسبه کنید. نمایه شدت را برحسب زاویه قطبی θ رسم کنید و توان تابشی کل را به دست آورید. آیا جواب حاصل به نظرتان منطقی می‌رسد؟ (توجه کنید که توان در معادله میدان از درجه دوم بوده و از اصل برهم‌نهی تبعیت نمی‌کند. اما در این حالت گویا چنین نیست. آیا توجیهی دارید؟)



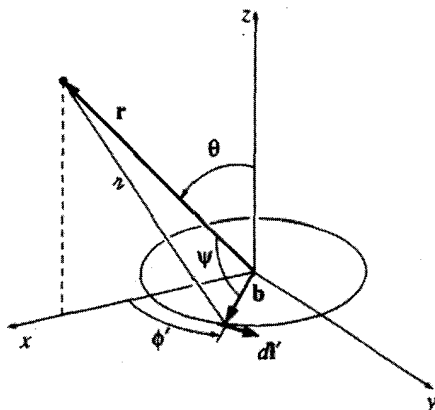
شکل ۱۱-۷

□

۱۱-۱-۳ تابش دوقطبی مغناطیسی

فرض کنید حلقه سیمی به شعاع b (شکل ۱۱-۸) داریم که از آن جریان متناوبی با بسامد ω می‌گذرد

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t) \quad (۱۱-۲۳)$$



شکل ۸-۱۱

این، الگویی برای یک دوقطبی مغناطیسی نوسان‌کننده است

$$\mathbf{m}(t) = \pi b^2 I(t) \hat{\mathbf{z}} = m_0 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{z}} \quad (۲۴-۱۱)$$

که در آن

$$m_0 \equiv \pi b^2 I_0 \quad (۲۵-۱۱)$$

بیشترین مقدار گشتاور دوقطبی مغناطیسی است.

چون حلقه حامل بار الکتریکی نیست پتانسیل زده‌ای آن صفر است. پتانسیل برداری تأخیری عبارت است از

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I_0 \cos[\omega(t - \pi/c)]}{\pi} d\mathbf{l}' \quad (۲۶-۱۱)$$

برای یک نقطه \mathbf{r} واقع در بالای محور x (شکل ۸-۱۱)، \mathbf{A} باید در امتداد y باشد؛ چون مؤلفه‌های x نقاط متقارن در دو طرف محور x یکدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi} \hat{\mathbf{y}} \int_0^\pi \frac{\cos[\omega(t - \pi/c)]}{\pi} \cos \phi' d\phi' \quad (۲۷-۱۱)$$

(ϕ' در واقع مؤلفه l مربوط به dl' را مشخص می‌کند). بنابه قانون کسینوسها

$$\pi = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \psi}$$

که در آن ψ زاویه بین بردارهای r و b است

$$\mathbf{r} = r \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + r \cos \theta \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{b} = b \cos \phi' \hat{\mathbf{x}} + b \sin \phi' \hat{\mathbf{y}}$$

بنابراین $rb \cos \psi = \mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = rb \sin \theta \cos \phi'$ و از این رو

$$\pi = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \sin \theta \cos \phi'} \quad (28-11)$$

در یک دوقطبی "کامل" با حلقه بسیار کوچک فرض کنید داشته باشیم

$$b \ll r \quad \text{تقریب ۱:} \quad (29-11)$$

با تقریب مرتبه اول در b داریم

$$\pi \cong r \left(1 - \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi' \right)$$

و بنابراین

$$\frac{1}{\pi} \cong \frac{1}{r} \left(1 + \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi' \right) \quad (30-11)$$

و

$$\begin{aligned} \cos[\omega(t - \pi/c)] &\cong \cos \left[\omega(t - r/c) + \frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \right] \\ &= \cos[\omega(t - r/c)] \cos \left(\frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \right) - \sin[\omega(t - r/c)] \sin \left(\frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \right) \end{aligned}$$

مانند قبل، همچنین فرض می‌کنیم که اندازه دوقطبی از طول موج به مراتب کوچکتر است

$$b \ll c/\omega \quad \text{تقریب ۲:} \quad (31-11)$$

در این صورت داریم

$$\cos[\omega(t - \pi/c)] \cong \cos[\omega(t - r/c)] - \frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \sin[\omega(t - r/c)] \quad (۳۲-۱۱)$$

با قرار دادن معادلات (۱۱-۳۰) و (۱۱-۳۲) در معادله (۱۱-۲۷) و صرف نظر کردن از جمله‌های مرتبه دوم:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cong \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi r} \hat{\mathbf{y}} \int_0^{2\pi} \left\{ \cos[\omega(t - r/c)] + b \sin \theta \cos \phi' \left(\frac{1}{r} \cos[\omega(t - r/c)] - \frac{\omega}{c} \sin[\omega(t - r/c)] \right) \right\} \cos \phi' d\phi'$$

انتگرال جمله اول صفر می‌شود، زیرا

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = 0$$

در جمله دوم هم انتگرال مجذور کسینوس داریم که می‌شود

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi' d\phi' = \pi$$

با قرار دادن این مقدار انتگرال و توجه به اینکه به طور کلی \mathbf{A} در امتداد $\hat{\phi}$ قرار دارد، درمی‌یابیم که پتانسیل برداری یک دوقطبی نوسان‌کننده مغناطیسی کامل برابر است با

$$\mathbf{A}(r, \theta, t) = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \left\{ \frac{1}{r} \cos[\omega(t - r/c)] - \frac{\omega}{c} \sin[\omega(t - r/c)] \right\} \hat{\phi} \quad (۳۳-۱۱)$$

در حد ایستایی ($\omega = 0$) فرمول مشهور پتانسیل دوقطبی مغناطیسی [معادله (۸۵-۵)]

$$\mathbf{A}(r, \theta) = \frac{\mu_0 m_0 \sin \theta}{4\pi r^2} \hat{\phi}$$

را به دست می‌آوریم. در منطقه تابش

$$r \gg c/\omega \quad \text{تقریب ۳} \quad (۳۴-۱۱)$$

جمله اول در \mathbf{A} ناچیز است و بنابراین

$$\mathbf{A}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \sin[\omega(t - r/c)] \hat{\phi} \quad (35-11)$$

از روی \mathbf{A} میدانها را برای فواصل بزرگ r به دست می آوریم

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\phi} \quad (36-11)$$

و

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\theta} \quad (37-11)$$

از تقریب ۳ برای محاسبه \mathbf{B} استفاده کرده ایم.) این میدانها همگاز و دوهذو برهم و بر امتداد انتشار \hat{r} عمودند. نسبت دامنه هایشان برابر است با $E_0/B_0 = c$ و همان طوری است که برای امواج الکترومغناطیسی انتظار داشتیم. این میدانها تا حدود زیادی شبیه میدانهای دوقطبی الکتریکی نوسان کننده، [معادلات (۱۸-۱۱) و (۱۹-۱۱)] هستند، با این تفاوت که این دفعه \mathbf{B} در جهت $\hat{\theta}$ و \mathbf{E} در جهت $\hat{\phi}$ قرار می گیرند، در حالی که برای دوقطبیهای الکتریکی جهتها برعکس است. شار انرژی برای تابش دوقطبی مغناطیسی برابر است با

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{\mu_0}{c} \left\{ \frac{m_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \right\}^2 \hat{r} \quad (38-11)$$

و شدت برابر است با

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \left(\frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^2} \right) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{r} \quad (39-11)$$

از این رو توان تابشی کل برابر است با

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3} \quad (40-11)$$

باز هم نمایه شدت شبیه شکل ۱۱-۴ و توان تابشی متناسب با ω^4 است. با این همه، یک اختلاف مهم بین تابش دوقطبی مغناطیسی و الکتریکی وجود دارد: در پیکربندیهای با ابعاد قابل مقایسه، توان الکتریکی تابشی به میزان زیادی بزرگتر است. مقایسه معادلات (۱۱-۲۲) و (۱۱-۴۰) نشان می‌دهد که

$$\frac{P_{\text{مغناطیسی}}}{P_{\text{الکتریکی}}} = \left(\frac{m_0}{p_0 c} \right)^2 \quad (۱۱-۴۱)$$

که در آن $p_0 = q_0 d$ و $m_0 = \pi b^2 I_0$ است. دامنه جریان در مورد الکتریکی، [معادله (۱۱-۱۵)]، برابر بود با $I_0 = q_0 \omega$. برای مقایسه فرض کنید $d = \pi b$ ، بنابراین

$$\frac{P_{\text{مغناطیسی}}}{P_{\text{الکتریکی}}} = \left(\frac{b\omega}{c} \right)^2 \quad (۱۱-۴۲)$$

اما $(b\omega/c)$ مقداری است که با توجه به تقریب ۲ آن را بسیار کوچک فرض کردیم. در اینجا باید آن را به توان ۲ برسانیم. بنابراین انتظار می‌رود تابش دوقطبی الکتریکی غالب باشد. تنها وقتی دستگاه را طوری با دقت مرتب کنیم که سهم الکتریکی آن حذف شده باشد (مانند حالتی که اخیراً بحث کردیم) تابش دوقطبی مغناطیسی نقش خود را آشکار خواهد کرد.

مسئله ۱۱-۵ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یک دوقطبی مغناطیسی نوسان‌کننده را بدون استفاده از تقریب ۳ حساب کنید. [آیا جوابها به نظرتان آشنا می‌رسند؟ با مسئله ۹-۳۳ مقایسه کنید.] بردار پوینتینگ را حساب کنید و نشان دهید که شدت تابش دقیقاً با موردی که تقریب ۳ را به‌کار بردیم برابر است.

مسئله ۱۱-۶ مقاومت تابشی (مسئله ۱۱-۳) دوقطبی مغناطیسی نوسان‌کننده شکل ۱۱-۸ را بیابید. جواب خود را برحسب λ و b بنویسید و با مقاومت تابشی دوقطبی الکتریکی مقایسه کنید. پاسخ: $3 \times 10^5 (b/\lambda)^4 \Omega$

مسئله ۱۱-۷ با استفاده از تبدیل "دوگانگی" مسئله ۷-۶ و نیز میدانهای یک دوقطبی الکتریکی نوسان‌کننده [معادلات (۱۱-۱۸) و (۱۱-۱۹)]، میدانهای حاصل از یک دوقطبی مغناطیسی "گیلبرت" نوسان‌کننده (مشکل از بارهای مساوی و متقابل مغناطیسی به‌جای یک حلقه. جریان الکتریکی) را تعیین کنید. □

۴-۱-۱۱ تابش از یک چشمه دلخواه

در بخشهای قبل تابش حاصل از دو دستگاه خاص را بررسی کردیم: دوقطبیهای الکتریکی نوسانکننده و دوقطبیهای مغناطیسی نوسانکننده. حال می‌خواهیم همان شیوه را برای یک پیکربندی بار و جریان که کاملاً دلخواه است، اما این محدودیت را دارد که در ناحیه کوچکی در نزدیکی مبدأ جایگزیده است (شکل ۹-۱۱) به‌کار گیریم. پتانسیل زده‌ای تأخیری عبارت است از

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \pi/c)}{\pi} d\tau' \quad (۴۳-۱۱)$$

که در آن

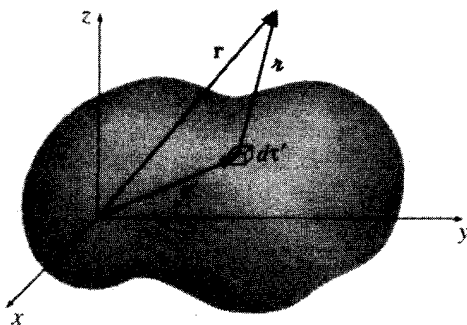
$$\pi = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} \quad (۴۴-۱۱)$$

مانند سابق فرض می‌کنیم که نقطه میدان مورد نظر \mathbf{r} در مقایسه با اندازه و ابعاد چشمه بسیار دور است

$$r' \ll r \quad \text{تقریب ۱:} \quad (۴۵-۱۱)$$

(در حقیقت r' یک متغیر انتگرال‌گیری است؛ تقریب بدین معناست که بیشینه مقدار r' که از چشمه گسترش می‌یابد به مراتب از r کوچکتر است.) با این فرض داریم

$$\pi \cong r \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right) \quad (۴۶-۱۱)$$



شکل ۹-۱۱

بنابراین

$$\frac{1}{\pi} \cong \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right) \quad (۴۷-۱۱)$$

و

$$\rho(\mathbf{r}', t - \pi/c) \cong \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right)$$

ρ را با سری تیلور برحسب متغیر t و حول زمان تأخیر در مبدأ بسط می‌دهیم:

$$t_0 \equiv t - \frac{r}{c} \quad (۴۸-۱۱)$$

پس داریم

$$\rho(\mathbf{r}', t - \pi/c) \cong \rho(\mathbf{r}', t_0) + \dot{\rho}(\mathbf{r}', t_0) \left(\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) + \dots \quad (۴۹-۱۱)$$

که در آن نماد نقطه به معنی مشتق نسبت به زمان است. جمله بعدی سری می‌شود

$$\frac{1}{2} \ddot{\rho} \left(\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right)^2, \frac{1}{3!} \dddot{\rho} \left(\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right)^3, \dots$$

از این جملات می‌توان صرف‌نظر کرد به شرط آنکه

$$r' \ll \frac{c}{|\ddot{\rho}/\dot{\rho}|}, \frac{c}{|\ddot{\rho}/\dot{\rho}|^{1/2}}, \frac{c}{|\ddot{\rho}/\dot{\rho}|^{1/3}}, \dots \quad \text{تقریب ۲:} \quad (۵۰-۱۱)$$

برای یک دستگاه نوسان‌کننده هر یک از این نسبتها برابر است با c/w و تقریب ۲ مجدداً نمایان می‌شود؛ به‌طور کلی توجیه معادله (۵۰-۱۱) مشکلتر است، اما به‌عنوان روال کار می‌پذیریم که با توجه به تقریبهای ۱ و ۲ فقط جمله‌های مرتبه اولی r' را نگاه داریم.

با قرار دادن معادلات (۴۷-۱۱) و (۴۹-۱۱) در فرمول V [معادله (۱۱-۳۴)] و باز هم با

صرف‌نظر کردن از جملات مرتبه دوم، داریم

$$V(\mathbf{r}, t) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\int \rho(\mathbf{r}', t_0) d\tau' + \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \cdot \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t_0) d\tau' + \frac{\hat{\mathbf{r}}}{c} \cdot \frac{d}{dt} \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t_0) d\tau' \right]$$

انتگرال اول نشان‌دهنده بار کل، Q ، در زمان t_0 است. ولی چون بار پایسته است، در واقع مستقل از زمان است. دو انتگرال دیگر، گشتاور دوقطبی الکتریکی در زمان t_0 را معلوم می‌دارند. بنابراین

$$V(\mathbf{r}, t) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}(t_0)}{r^2} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0)}{rc} \right] \quad (51-11)$$

در حالت ایستا، اولین دو جمله عبارت‌اند از سهم تک‌قطبی و دوقطبی موجود در بسط چندقطبی مربوط به V ؛ سومین جمله دیگر حضور نخواهد داشت. در این حال، پتانسیل برداری عبارت است از

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \pi/c)}{\pi} d\tau' \quad (52-11)$$

به‌زودی خواهید دید که با در نظر گرفتن تقریب مرتبه اول برای r' کافی است به جای π در انتگرال زیر قرار دهیم π

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cong \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}', t_0) d\tau' \quad (53-11)$$

بنابر مسئله ۷-۵، انتگرال \mathbf{J} ، مشتق زمانی گشتاور دوقطبی است، بنابراین

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cong \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t_0)}{r} \quad (54-11)$$

حال ملاحظه می‌کنید که چرا لزومی نداشت تقریب π را بالاتر از مرتبه صفر ($\pi \cong r$) به‌کار بگیریم: \mathbf{p} از هم‌اکنون نسبت به r' از مرتبه اول است و هرگونه اصلاحی منجر به تصحیحی از مرتبه دوم خواهد شد. در مرحله بعد باید میدانها را محاسبه کنیم. باز هم منطقه تابشی (یعنی در میدانهایی که در فواصل دور از چشمه برقرارند) مورد توجه ماست، بنابراین فقط جملاتی را نگه می‌داریم که به‌صورت $1/r$ هستند:

$$\text{تقریب ۳: از جمله‌های شامل } 1/r^2 \text{ در } \mathbf{E} \text{ و } \mathbf{B} \text{ صرف‌نظر می‌کنیم} \quad (55-11)$$

به‌عنوان مثال، میدان کولنی

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

که از جمله اول معادله (۵۱-۱۱) ناشی می‌شود، در تابش الکترومغناطیسی نقشی ندارد. در واقع، تابش تماماً از جمله‌هایی ناشی می‌شود که در آنها از شناسه t مشتق می‌گیریم. از معادله (۴۸-۱۱) نتیجه می‌گیریم که

$$\nabla t_0 = -\frac{1}{c} \nabla r = -\frac{1}{c} \hat{r}$$

و بنابراین

$$\nabla V \cong \nabla \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0)}{rc} \right] \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\hat{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t_0)}{rc} \right] \nabla t_0 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[\hat{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t_0)]}{r} \hat{r}$$

همین‌طور داریم

$$\nabla \times \mathbf{A} \cong \frac{\mu_0}{4\pi r} [\nabla \times \dot{\mathbf{p}}(t_0)] = \frac{\mu_0}{4\pi r} [(\nabla t_0) \times \ddot{\mathbf{p}}(t_0)] = -\frac{\mu_0}{4\pi r c} [\hat{r} \times \ddot{\mathbf{p}}(t_0)]$$

که در آن

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cong \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_0)}{r}$$

بنابراین

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cong \frac{\mu_0}{4\pi r} [(\hat{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}}) \hat{r} - \ddot{\mathbf{p}}] = \frac{\mu_0}{4\pi r} [\hat{r} \times (\hat{r} \times \ddot{\mathbf{p}})] \quad (56-11)$$

که در زمان $t_0 = t - r/c$ محاسبه شده است، و

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cong -\frac{\mu_0}{4\pi r c} [\hat{r} \times \ddot{\mathbf{p}}] \quad (57-11)$$

اگر مختصات قطبی کروی را به‌گونه‌ای به‌کار ببریم که محور z در جهت $\ddot{\mathbf{p}}(t_0)$ باشد، داریم

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(r, \theta, t) &\cong \frac{\mu_0 \ddot{p}(t_0)}{4\pi} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \hat{\theta} \\ \mathbf{B}(r, \theta, t) &\cong \frac{\mu_0 \ddot{p}(t_0)}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \hat{\phi} \end{aligned} \right\} \quad (58-11)$$

بردار پوئین تینگ هم به صورت زیر است

$$\mathbf{S} \cong \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2 c} [\ddot{\mathbf{p}}(t_0)]^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}} \quad (59-11)$$

و توان تابشی کل برابر است با

$$P \cong \int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0 \ddot{\mathbf{p}}^2}{4\pi c} \quad (60-11)$$

توجه داشته باشید که \mathbf{E} و \mathbf{B} متقابلاً بر یکدیگر عمودند و نسبت به جهت انتشار $\hat{\mathbf{r}}$ عرضی هستند و مانند همیشه برای میدانهای تابشی نسبت $E/B = c$ برقرار است.

مثال ۲-۱۱

(الف) در مورد یک دوقطبی الکتریکی نوسانکننده

$$p(t) = p_0 \cos(\omega t), \quad \ddot{p}(t) = -\omega^2 p_0 \cos(\omega t)$$

تمام فرمولها به نتایج بخش ۲-۱۱-۱۱ تحویل می‌یابند.

(ب) گشتاور دوقطبی یک تک‌بار نقطه‌ای q برابر است با

$$\mathbf{p}(t) = q\mathbf{d}(t)$$

که در آن \mathbf{d} مکان q نسبت به مبدأست. بنابراین داریم

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) = q\mathbf{a}(t)$$

که در آن \mathbf{a} شتاب بار است. در این صورت توان تابشی [معادله (۶۰-۱۱)] برابر است با

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{4\pi c} \quad (61-11)$$

این معادله همان فرمول مشهور لارمور است؛ در بخش بعد از راه دیگری این فرمول را اثبات می‌کنیم. توجه کنید که توان تابشی یک بار نقطه‌ای با مجذور شتاب متناسب است. ■

کاری که ما در این بخش کرده‌ایم عبارت است از بسط چندقطبی پتانسیلهای تأخیری تا کمترین مرتبه 3^r به صورتی که قادر به ایجاد تابش الکترومغناطیسی باشد (یعنی میدانهای به صورت

۱/۳). معلوم می‌شود که این، جملهٔ دوقطبی الکتریکی است. چون بار پایسته است، یک تک‌قطب الکتریکی تابش نمی‌کند — اگر بار پایسته نمی‌بود، اولین جمله معادله (۱۱-۵) به صورت زیر می‌شد

$$V_{\text{تک‌قطبی}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(t_0)}{r}$$

و ما یک میدان تک‌قطبی متناسب با ۱/۳ می‌داشتیم، یعنی

$$\mathbf{E}_{\text{تک‌قطبی}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\dot{Q}(t_0)}{r} \hat{\mathbf{r}}$$

ممکن است فکر کنید که، یک کرهٔ باردار که شعاعش به داخل و خارج نوسان می‌کند، تابش خواهد کرد، اما چنین نیست، زیرا میدان در خارج کره بنابه قانون گاوس دقیقاً برابر است با $\hat{\mathbf{r}} (Q/4\pi\epsilon_0 r^2)$ و افت‌وخیزهای شعاع تأثیری در آن ندارد. (ضمناً، در مشابه آکوستیکی، تک‌قطبها تابش می‌کنند: شاهد مدعا هم غورغور قورباغه است).

اگر گشتاور دوقطبی الکتریکی صفر می‌شد (یا به هر صورت مشتق دوم زمانی آن صفر می‌شد) در آن صورت تابش دوقطبی الکتریکی وجود نمی‌داشت و باید جملهٔ بعدی را، که جمله‌ای از مرتبه دوم نسبت به r' است، در نظر می‌گرفتیم. این جمله چنان که هست خود به دو قسمت تقسیم شده است، یکی مربوط به گشتاور دوقطبی مغناطیسی چشمه، و دیگری گشتاور چهارقطبی الکتریکی. (قسمت اول همان تعمیم تابش دوقطبی مغناطیسی است که در بخش ۱۱-۳ دیدیم.) اگر سهم دوقطبی مغناطیسی و چهارقطبی الکتریکی از میان برود، باید جملهٔ حاوی $(r')^2$ را در نظر گرفت. در این صورت با تابش چهارقطبی مغناطیسی و هشت‌قطبی الکتریکی سروکار داریم و ... به همین ترتیب است اگر جملات حاوی توانهای بالاتری از r' منظور ما باشد.

مسئله ۸-۱۱ معادلات (۱۱-۵۹) و (۱۱-۶۰) را بر روی دوقطبی دوار مسئله ۴-۱۱ اعمال کنید. هرگونه ناسازگاری را که جواب حاصل با جواب قبلی دارد توجیه کنید.

مسئله ۹-۱۱ یک حلقهٔ دایره‌ای عایق به شعاع b در صفحهٔ xy و متقارن نسبت به مبدأ قرار دارد. این حلقه دارای چگالی بار خطی $\lambda = \lambda_0 \sin \phi$ است که در آن λ_0 ثابت و ϕ هم زاویهٔ سمتی است. اگر این حلقه را با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور z بچرخانیم توان تابشی آن چقدر می‌شود؟

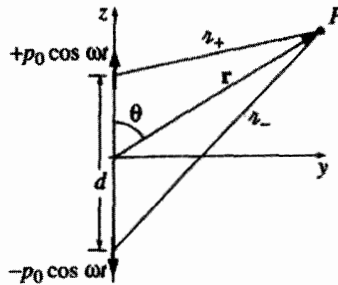
مسئله ۱۰-۱۱ یک الکترون از حال سکون، تحت تأثیر وزن خودش، سقوط می‌کند. در یک سانتیمتر اول سقوط، چه کسری از انرژی پتانسیل آن به صورت تابش تلف می‌شود؟

! مسئله ۱۱-۱۱ الگویی برای تابش چهارقطبی الکتریکی به صورت دوتا دوقطبی الکتریکی نوسان‌کننده متقابل (با جهت‌های مخالف) که به فاصله d از یکدیگر مطابق شکل ۱۱-۱۰ واقع‌اند در نظر بگیرید. از نتایج بخش ۱۱-۲ برای پتانسیل هر دوقطبی استفاده کنید. اما توجه کنید که این دوقطبیها در مبدأ قرار ندارند. با در نظر گرفتن فقط جملات مرتبه اول برحسب d :

(الف) پتانسیل‌های زده‌ای و برداری را بیابید.

(ب) میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را پیدا کنید.

(ج) بردار پوئینتینگ و توان تابشی را حساب کنید. نمایه شدت را برحسب θ رسم کنید.



شکل ۱۱-۱۰

! مسئله ۱۲-۱۱ از حلقه دایره‌ای شکل ۱۱-۸ یک جریان $I(t)$ می‌گذرد. فرمول کلی توان تابشی [شبه معادله (۱۱-۶۰)] را پیدا کنید. پاسخ خود را برحسب گشتاور دوقطبی مغناطیسی $m(t)$ حلقه بنویسید.

□

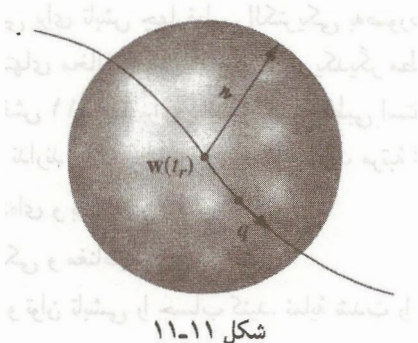
پاسخ: $P = \mu_0 \ddot{m}^2 / 6\pi c^3$

۲-۱۱ بارهای نقطه‌ای

۱-۲-۱۱ توان تابشی یک بار نقطه‌ای

در فصل ۱۰ میدانهای یک بار نقطه‌ای q با حرکت دلخواه را به دست آوردیم [معادلات (۱۰-۶۵) و (۱۰-۶۶)]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{\pi}}{(\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{u})^3} [(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \boldsymbol{\pi} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})] \quad (۱۱-۶۲)$$



شکل ۱۱-۱۱

که در آن $\mathbf{u} = c\hat{n} - \mathbf{v}$ و

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (۶۳-۱۱)$$

جمله اول معادله (۶۲-۱۱) را میدان سرعت و دومی را (با ضرب خارجی سه تایی) میدان شتاب می نامند. بردار پوینتینگ عبارت است از

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0 c} [\mathbf{E} \times (\hat{n} \times \mathbf{E})] = \frac{1}{\mu_0 c} [E^2 \hat{n} - (\hat{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}] \quad (۶۴-۱۱)$$

ولی، تمام این شار انرژی ایجاد تابش نمی کند؛ قسمتی از این شار، انرژی میدانی است که ذره در حین حرکت با خود حمل می کند. انرژی تابشی بخشی از انرژی است که عملاً از بار جدا و تا بینهایت منتشر می شود. (این شبیه پشه هایی است که در ماشین حمل زباله تخم گذاری کرده اند: بعضی از آنها ضمن حرکت ماشین در حوالی آن می مانند، برخی دیگر از آن دور می شوند و دیگر بر نمی گردند.) برای محاسبه توان کلی تابش ذره در زمان t_r یک کره بسیار بزرگ به شعاع Π (شکل ۱۱-۱۱) به مرکز مکان ذره (در زمان t_r) رسم می کنیم و تا بازه زمانی مناسب

$$t - t_r = \frac{\Pi}{c} \quad (۶۵-۱۱)$$

صبر می کنیم تا تابش به کره برسد و در آن لحظه از بردار پوینتینگ روی سطح کره انتگرال می گیریم.^۱ علت به کار بردن t_r آن است که برای تمام نقاط واقع در لحظه t روی کره این زمان زمان تأخیر است. حال با توجه به اینکه سطح کره با π^2 متناسب است هر جمله ای در \mathbf{S} ، به صورت

۱. به تغییر محسوس راه برد در اینجا توجه کنید. در بخش ۱-۱۱ برای یک نقطه ثابت (مبدأ) کار کردیم، اما در اینجا مناسبتر آن است که مکان (متحرک) بار را در نظر بگیریم. اهمیت این کار به زودی روشن خواهد شد.

$1/\pi^2$ ، به یک پاسخ متناهی منجر می‌شود، اما جملاتی که با $1/\pi^2$ یا $1/\pi^2$ بستگی دارند وقتی $\pi \rightarrow \infty$ باشد، نقشی ایفا نمی‌کنند. به این دلیل است که فقط میدانهای شتاب نمایانگر تابش واقعی هستند (از این روست که نام دیگر آنها میدانهای تابش است):

$$\mathbf{E}_{\text{تابش}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi}{(\pi \cdot \mathbf{u})^2} [\pi \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})] \quad (66-11)$$

میدانهای سرعت حامل انرژی‌اند، و این انرژی با حرکت بار همراه آن می‌رود — اما این تابش نیست. (این، نظیر پشه‌هایی است که در ماشین مانده‌اند). اما تابش \mathbf{E} بر $\hat{\pi}$ عمود است و بنابراین جمله دوم معادله (۶۶-۱۱) صفر می‌شود

$$\mathbf{S}_{\text{تابش}} = \frac{1}{\mu_0 c} E_{\text{تابش}}^2 \hat{\pi} \quad (67-11)$$

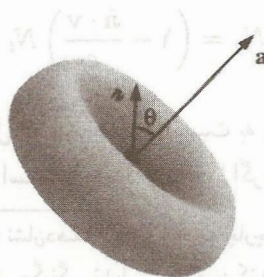
اگر بار به‌طور لحظه‌ای در حال سکون باشد (در زمان t_r)، آنگاه $\mathbf{u} = c\hat{\pi}$ و

$$\mathbf{E}_{\text{تابش}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 \pi} [\hat{\pi} \times (\hat{\pi} \times \mathbf{a})] = \frac{\mu_0 q}{4\pi\pi} [(\hat{\pi} \cdot \mathbf{a})\hat{\pi} - \mathbf{a}] \quad (68-11)$$

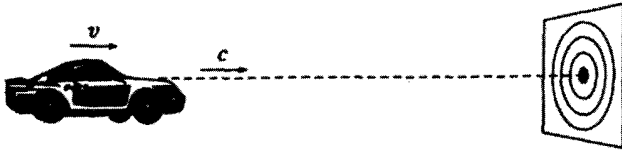
در آن حالت

$$\mathbf{S}_{\text{تابش}} = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0 q}{4\pi\pi} \right)^2 [a^2 - (\hat{\pi} \cdot \mathbf{a})^2] \hat{\pi} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \left(\frac{\sin^2 \theta}{\pi^2} \right) \hat{\pi} \quad (69-11)$$

در معادله اخیر زاویه بین \mathbf{a} و $\hat{\pi}$ است. هیچ توانی در سمت جلو و عقب تابیده نمی‌شود بلکه گسیل تابشی در جهت شتاب لحظه‌ای است (شکل ۱۲-۱۱).



شکل ۱۲-۱۱



شکل ۱۱-۱۳

توان تابشی کل برابر است با

$$P = \oint \mathbf{S}_{\text{تابش}} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \int \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

یا

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} \quad (۱۱-۷۰)$$

این نیز همان فرمول لارمور است که قبلاً با روشی دیگر آن را به دست آورده بودیم [معادله (۱۱-۶۱)]. گرچه معادلات را با فرض $v = 0$ به دست آوردیم، معادلات (۱۱-۶۹) و (۱۱-۷۰)، تا هنگامی که $v \ll c$ باشد با تقریب خوب برقرارند. بررسی دقیق برای موردی که $v \neq 0$ است مشکلتر است.^۱ دلیل این دشواری یکی آن است که تابش \mathbf{E} پیچیده تر می شود و دیگر آنکه تابش \mathbf{S} یعنی آهنگ عبور انرژی از کره با آهنگ انرژی جداشده از ذره مساوی نیست. فرض کنید شخصی گلوله هایی را از پنجره یک اتومبیل در حال حرکت شلیک کند (شکل ۱۱-۱۳). به دلیل حرکت اتومبیل، آهنگ N_t ، برخورد گلوله ها به هدف ساکن با آهنگ N_g خروج آنها از تفنگ مساوی نیست. در این باره می توان بررسی کرد که $N_g = (1 - v/c)N_t$ ، در صورتی که اتومبیل به هدف نزدیک شود، و در حالت کلی، رابطه بین آنها به صورت زیر است

$$N_g = \left(1 - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}}{c}\right) N_t$$

در این معادلات v سرعت اتومبیل، c سرعت گلوله نسبت به زمین و $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه ای است که از اتومبیل به سمت هدف رسم شده است. در مورد مسئله ما اگر dW/dt آهنگ عبور انرژی از کره

۱. به بیان نسبیت خاص، شرط $v = 0$ نشان دهنده انتخاب مناسب چارچوب مرجع است، بی آنکه عمومیت مسئله به طور اساسی مخدوش شود. اگر بتوانید چگونگی تبدیل P را تعیین کنید می توانید به نتیجه عام (لنارد) از روی $v = 0$ یعنی فرمول لارموری بربید (مسئله ۱۲-۶۹ را ببینید).

به شعاع π باشد، آن‌گاه آهنگ انرژی گسیل شده از بار برابر است با

$$\frac{dW}{dt_r} = \frac{dW/dt}{\partial t_r / \partial t} = \left(\frac{\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{u}}{\pi c} \right) \frac{dW}{dt} \quad (۷۱-۱۱)$$

(برای محاسبه $\partial t_r / \partial t$ از معادله (۷۱-۱۰) استفاده کرده‌ایم.)

$$\frac{\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{u}}{\pi c} = 1 - \frac{\hat{\boldsymbol{\pi}} \cdot \mathbf{v}}{c}$$

دقیقاً نسبت N_g به N_t است، و صرفاً یک عامل هندسی است (همانند اثر دوپلر).

بنابراین توان تابشی از ذره به جزء سطح $d\Omega = \pi^2 \sin \theta d\theta d\phi$ روی کره برابر است با

$$\frac{dP}{d\Omega} = \left(\frac{\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{u}}{\pi c} \right) \frac{1}{\mu_0 c} E_{\text{grad}}^2 \pi^2 = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{|\hat{\boldsymbol{\pi}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})|^2}{(\hat{\boldsymbol{\pi}} \cdot \mathbf{u})^5} \quad (۷۲-۱۱)$$

$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ عبارت است از زاویه فضایی که این توان به آن تابیده‌است. با انتگرال‌گیری از معادله اخیر نسبت به θ و ϕ توان تابشی کل، با محاسبه‌ای دشواری به دست می‌آید که جواب آن می‌شود

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left(a^2 - \left| \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{c} \right|^2 \right) \quad (۷۳-۱۱)$$

که در آن $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ است. این همان تعمیم لِنارد از فرمول لامور است و پیداست که به‌ازای $v = 0$ به فرمول لامور می‌رسیم. ضریب γ^6 نشان‌دهنده آن است که توان تابشی با افزایش سرعت ذره و میل کردن آن به سرعت نور بسیار افزایش می‌یابد.

مثال ۳-۱۱

فرض کنید در زمان t_r بردارهای \mathbf{v} و \mathbf{a} به‌طور لحظه‌ای همخط باشند، مثلاً مانند حرکت روی خط مستقیم. توزیع زاویه‌ای تابش [معادله (۷۲-۱۱)] و توان گسیلی کل را بیابید.

حل: در این مورد داریم $(\mathbf{u} \times \mathbf{a}) = c(\hat{\boldsymbol{\pi}} \times \mathbf{a})$ ، بنابراین

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 c^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{|\hat{\boldsymbol{\pi}} \times (\hat{\boldsymbol{\pi}} \times \mathbf{a})|^2}{(c - \hat{\boldsymbol{\pi}} \cdot \mathbf{v})^2}$$

اما می‌توان نوشت

$$\hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{a}) = (\hat{n} \cdot \mathbf{a})\hat{n} - \mathbf{a}, \implies |\hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{a})|^2 = a^2 - (\hat{n} \cdot \mathbf{a})^2$$

در حالت خاصی که \mathbf{v} را در جهت z در نظر بگیریم نتیجه عبارت است از

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (۷۴-۱۱)$$

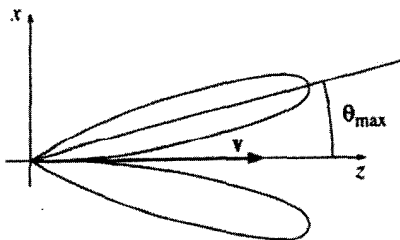
که در آن $\beta \equiv v/c$ است. این با فرمول (۱۱-۶۹) به‌ازای $v = 0$ سازگار است. ولی به‌ازای مقادیر خیلی بزرگ v یعنی $\beta \approx 1$ تابش شکل ۱۱-۱۲ به دلیل عامل $(1 - \beta \cos \theta)^{-5}$ به طرف جلو کشیده می‌شود و به‌صورت شکل ۱۱-۱۴ در می‌آید. گرچه هنوز تابشی دقیقاً به سمت جلو وجود ندارد بیشتر تابش در امتداد مخروطی متمرکز می‌شود که زاویهٔ رأس آن به‌طور فزاینده‌ای در حال کوچک شدن است (مسئلهٔ ۱۱-۱۵).

توان گسیلی کل را می‌توان با انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۱۱-۷۴) روی تمام زوایا حساب کرد

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \int \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \sin \theta d\theta d\phi$$

می‌دانیم انتگرال $d\phi$ می‌شود 2π ؛ انتگرال θ هم با قرار دادن $x \equiv \cos \theta$ به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{4\pi c} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)}{(1-\beta x)^5} dx$$



شکل ۱۱-۱۴

با انتگرال‌گیری جزء به جزء به جواب $(4/3)(1 - \beta^2)^{-2}$ می‌رسیم و نتیجه نهایی می‌شود

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^6}{6\pi c} \quad (۷۵-۱۱)$$

این جواب در صورتی با فرمول لنارد [معادله (۱۱-۷۳)] سازگار می‌شود که v و a هم‌مخت شوند. توجه کنید که توزیع تابش چه ذره دارای شتاب مثبت و چه شتاب منفی باشد یکی است، زیرا به مجذور a بستگی دارد. وقتی یک الکترون با سرعت بالا به یک هدف فلزی برخورد می‌کند شتاب منفی بزرگی پیدا می‌کند و تابش ترمزی نتیجه آن است. آنچه در این مثال توصیف کردیم اساساً نظریه کلاسیک تابش ترمزی است. ■

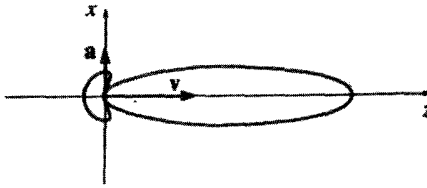
مسئله ۱۱-۱۳ (الف) فرض کنید سرعت الکترونی از مقدار اولیه v_0 با شتاب کندشونده ثابت a به صفر برسد. چه کسری از انرژی جنبشی اولیه آن به صورت تابش تلف می‌شود؟ (بقیه انرژی با سازوکاری که شتاب را ثابت نگه می‌دارد جذب می‌شود). فرض کنید $c \ll v_0$ است به گونه‌ای که فرمول لارمور قابل استفاده باشد.

(ب) برای تخمین اعداد دخیل در مسئله فرض کنید سرعت اولیه گرمایی باشد (حدود 10^5 m/s) و فاصله‌ای را که الکترون می‌پیماید 30 \AA بگیرید. درباره تلفات تابشی الکترونیهای یک رسانای معمولی چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

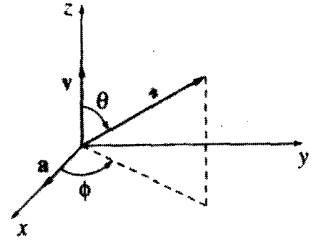
مسئله ۱۱-۱۴ در نظریه بور برای اتم هیدروژن، الکترون در حالت پایه روی مدارى به شعاع تقریبی 5×10^{-11} m، که توسط جاذبه کولنی پروتون نگاهداری می‌شود، می‌چرخد. بنابر نظریه الکتروپدینامیک کلاسیک این الکترون تابش می‌کند و لذا در یک مدار مارپیچی به طرف هسته می‌رود. بنابراین می‌توانید از فرمول لارمور استفاده کنید. نشان دهید که برای قسمت اعظم حرکت $c \ll v$ است (بنابراین می‌توانید از فرمول لارمور استفاده کنید)، و زمان کل گردش را برای اتم بور پیدا کنید. (فرض کنید همه چرخشها الزاماً دایره‌ای است.)

مسئله ۱۱-۱۵ در مثال ۱۱-۳ بیشینه زاویه، θ_{\max} ، را که در آن بیشترین تابش گسیل می‌شود بیابید (شکل (۱۱-۱۴)). نشان دهید که در سرعت‌های فرانسیتی (v نزدیک به c) داریم $\theta_{\max} \cong \sqrt{(1 - \beta)/2}$. شدت تابش در این جهت بیشینه (برای همان سرعت فرانسیتی) چه کسری از همان کمیت برای یک ذره در حال سکون لحظه‌ای است؟ پاسخ خود را برحسب γ بنویسید.

! مسئله ۱۱-۱۶ در مثال ۱۱-۳ فرض کردیم که سرعت و شتاب (حداقل لحظه‌ای) بر هم



شکل ۱۱-۱۶



شکل ۱۱-۱۵

منطبق‌اند. همان تحلیل را برای موردی که این دو برهم عمودند به‌کار ببرید. محورها را به‌گونه‌ای انتخاب کنید که v در امتداد محور z و a به موازات محور x باشد (شکل ۱۱-۱۵)، که در آن صورت داریم $\hat{n} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$ و $a = a \hat{x}$ ، $v = v \hat{z}$

پاسخ:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{[(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \phi]}{(1 - \beta \cos \theta)^5}, \quad P = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^2}{6\pi c}$$

در سرعتهای فرانسبیتی ($\beta \approx 1$) باز هم تابش به‌صورت قله تیزی در امتداد جلو (شکل ۱۱-۱۶) است. مهمترین کاربرد این فرمولها در حرکت دورانی است. تابش این مورد را تابش سنکروترونی می‌نامند. برای الکترون نسبیتی، تابش گسیل شده همزمان با حرکت ذره مانند چراغهای جلو لکوموتیو محیط اطرافش را روشن می‌کند.

۱۱-۲-۲ واکنش تابشی

بنابر قوانین الکترودینامیک کلاسیک، یک بار شتابدار تابش می‌کند. لازمه این تابش صرف انرژی است که از انرژی جنبشی ذره گرفته می‌شود. بنابراین تحت تأثیر یک نیروی مشخص، شتاب یک ذره باردار کمتر از شتاب ذره مشابه بدون بار است. بدیهی است که تابش هم نیرویی بر بار وارد می‌کند (تابش F)؛ یک نیروی پس‌زنی همانند نیروی وارد از یک گلوله بر یک تفنگ. در این بخش می‌خواهیم این نیروی واکنش تابشی را با استفاده از پایستگی انرژی حساب کنیم. در بخش بعد سازوکار واقعی مسئول در ایجاد این نیرو را نشان می‌دهیم و با استفاده از الگویی ساده آن را مجدداً به‌دست می‌آوریم.

برای یک ذره غیرنسبیتی ($v \ll c$) توان تابشی کل طبق فرمول لارمور [معادله (۱۱-۷۰)] برابر است با

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} \quad (۱۱-۷۶)$$

اصل پایستگی انرژی این باور را به وجود می‌آورد که این مقدار در عین حال باید نشان‌دهندهٔ آهنگ اتلاف انرژی ذره تحت تأثیر نیروی واکنش تابشی، تابش F ، باشد:

$$F_{\text{تابش}} \cdot v = -\frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} \quad (۷۷-۱۱)$$

عبارت "باور" را آگاهانه به کار بردیم زیرا در حقیقت این معادله نادرست است. علت آن است که ما توان تابشی را با انتگرال‌گیری از بردار پوئین تینگ روی کره‌ای به شعاع "نامتناهی" حساب کردیم، و در این محاسبه، میدانهای سرعت، به دلیل کاهش سریع برحسب π ، نقشی ایفا نکردند. اما میدانهای سرعت خود حامل انرژی‌اند — فقط آن را به بینهایت انتقال نمی‌دهند. وقتی ذره شتاب مثبت یا منفی پیدا می‌کند میان آن و میدانهای سرعت، انرژی به عقب و جلو پمپ می‌شود و همزمان با آن، میدانهای شتاب انرژی را به بیرون و به‌طور برگشت‌ناپذیر تابش می‌کنند. معادلهٔ (۷۷-۱۱) فقط برای مورد اخیر نوشته شده است، اما اگر بخواهیم نیروی پس‌زنی وارد از میدانها را روی بار بدانیم باید توان کل تلف‌شده در هر لحظه را در نظر بگیریم و نه فقط قسمتی را که سرانجام به‌صورت تابش فرار می‌کند. (عبارت "واکنش تابشی" ناموجه و بی‌مسماست. بهتر آن بود که آن را واکنش میدانی می‌نامیدیم. به‌زودی خواهیم دید که تابش F از روی مشتق زمانی شتاب به‌دست می‌آید و مقدار آن می‌تواند غیرصفر باشد، حتی زمانی که خود شتاب در یک لحظه صفر است و در آن‌صورت ذره هم تابشی ندارد.)

انرژی تلف‌شده توسط ذره در هر بازهٔ زمانی باید با انرژی بیرون برده شده توسط تابش به‌علاوهٔ انرژی دیگری که به میدانهای سرعت^۱ پمپ شده باشد برابر باشد. حال اگر بازه‌های زمانی را در لحظاتی بگیریم که دستگاه به حالت اولیه خود برگشته است، آن‌گاه انرژی میدانهای سرعت در هر دو انتها برابرند و تنها اتلاف خالص انرژی به‌صورت تابش است. بنابراین معادلهٔ (۷۷-۱۱) گرچه به‌طور لحظه‌ای نادرست است اما از نظر میانگین درست است:

$$\int_{t_1}^{t_2} F_{\text{تابش}} \cdot v \, dt = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \int_{t_1}^{t_2} a^2 \, dt \quad (۷۸-۱۱)$$

مشروط بر آنکه حالت دستگاه در t_1 و t_2 همانند باشد. در مورد حرکت دوره‌ای باید انتگرال‌گیری

۱. در حقیقت، چون میدان کل برابر است با مجموع میدانهای سرعت و شتاب، $E = E_v + E_a$ ، انرژی با سرعت (E_v^2) ، انرژی تابش‌شده به خارج (E_a^2) ، و عبارت مربوط به $E_v \cdot E_a$ برای ساده کردن بیان ترکیب $(E_v^2 + 2E_v \cdot E_a)$ را "انرژی ذخیره‌شده در میدانهای سرعت" می‌نامیم. این جملات به ترتیب با $1/\pi^2$ و $1/\pi^2$ بستگی داشته و بنابراین هیچ‌کدام در تابش نقشی ندارند.

به تعداد چندین دوره (تناوب) انجام گیرد.^۱ سمت راست معادله (۷۸-۱۱) را به صورت جزء به جزء انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{t_1}^{t_2} a^y dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dv}{dt} \right) \cdot \left(\frac{dv}{dt} \right) dt = \left(v \cdot \frac{dv}{dt} \right) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^y v}{dt^y} \cdot v dt$$

چون سرعتها و شتابهای لحظات t_1 و t_2 با یکدیگر برابرند جمله مرزی حذف می‌شود و بنابراین معادله (۷۸-۱۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(F_{\text{تابش}} - \frac{\mu_0 q^y}{4\pi c} \dot{a} \right) \cdot v dt = 0 \quad (79-11)$$

این معادله در صورتی صادق است که داشته باشیم

$$\boxed{F_{\text{تابش}} = \frac{\mu_0 q^y}{4\pi c} \dot{a}} \quad (80-11)$$

رابطه اخیر را فرمول آبراهام-لورنتس برای نیروی واکنش تابشی می‌نامند.

بدیهی است که معادله (۷۹-۱۱) اثبات‌کننده معادله (۸۰-۱۱) نیست. همچنین این معادله درباره مؤلفه تابش F عمود بر v صحبتی نمی‌کند؛ تنها از این معادله میانگین زمانی مؤلفه موازی معلوم می‌شود که آن میانگین هم برای بازه زمانی خاصی است. همچنان‌که در دو بخش بعد خواهیم دید دلایل دیگری برای باور داشتن فرمول آبراهام-لورنتس وجود دارد، اما فعلاً بهترین چیزی که می‌توان گفت آن است که فرمول مورد بحث ساده‌ترین صورت ممکن نیروی واکنش تابشی را، که با پایستگی انرژی سازگار است، نشان می‌دهد.

فرمول آبراهام-لورنتس پیامدهای ناخوشایندی دارد که تمام آنها نزدیک به یک قرن بعد از بیان قانون ناشناخته مانده‌اند. زیرا فرض می‌کنیم ذره‌ای تحت تأثیر هیچ نیروی خارجی قرار نداشته باشد؛ بنابه قانون دوم نیوتون داریم

$$F_{\text{تابش}} = \frac{\mu_0 q^y}{4\pi c} \dot{a} = ma$$

۱. برای حرکت غیردوره‌ای برقراری این شرط که انرژی میدانهای سرعت در زمانهای t_1 و t_2 برابر باشد بسیار دشوارتر است. این کافی نیست که سرعتها و شتابهای لحظه‌ای برابر باشند، زیرا میدانها به v و a زمانهای قبلی بستگی دارند. از نظر اصولی v و a و تمام مشتقهای بالاتر باید در t_1 و t_2 همانند باشند. از جنبه عملی چون میدانهای سرعت سریعاً برحسب x کاهش می‌یابند کافی است که v و a برای بازه‌ای کوچک از زمان و قبل از t_1 و t_2 برابر باشند.

و از روی آن نتیجه می‌گیریم

$$a(t) = a_0 e^{t/\tau} \quad (۸۱-۱۱)$$

که در آن τ عبارت است از

$$\tau \equiv \frac{\mu_0 q^2}{6\pi m c} \quad (۸۲-۱۱)$$

(برای الکترون $\tau = 6 \times 10^{-24}$ s است.) شتاب به‌خودی خود به‌صورت نمایی نسبت به زمان افزایش می‌یابد! البته اگر $a_0 = 0$ باشد از این بحث بی‌فایده می‌توان احتراز کرد، اما نتیجه این کار آن است که حذف سیستماتیک چنین راه‌حلهای "گریزی" پیامد ناخوش‌آیند دیگری دارد: اگر یک نیروی خارجی اعمال کنید، ذره قبل از تأثیر نیرو شروع به پاسخ گفتن می‌کند! (مسئله ۱۱-۱۹ را ببینید.) این پیش‌شتاب غیرعلییتی کار را فقط برای زمان کوتاه τ قبل از موعد مقرر انجام می‌دهد؛ معذالک (به عقیده ما) اینکه اصلاً نظریه می‌بایست به نحوی آن را تأیید کند از منظر فلسفی نفرت‌انگیز است.^۱

مثال ۴-۱۱

میرایی تابشی یک ذره باردار متصل به فنری با بسامد طبیعی ω_0 را که با بسامد ω به حرکت واداشته شده است حساب کنید.

حل: معادله حرکت عبارت است از

$$m\ddot{x} = F_{\text{محرک}} + F_{\text{تابش}} + F_{\text{نفر}} = -m\omega_0^2 x + m\tau\ddot{x} + F_{\text{محرک}}$$

وقتی دستگاه در بسامد ω نوسان می‌کند داریم

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \delta)$$

۱. این مشکلات در بیان نسبیتی آبراهام-لورنتس که می‌توان با شروع از فرمول لئارد به‌جای لارمور به‌دست آورد، هم وجود دارد (مسئله ۱۲-۷۰). شاید آنها به ما می‌گویند که چنین چیزی به‌عنوان بار نقطه‌ای در الکترودینامیک کلاسیک وجود ندارد، یا به بحث مکانیک کوانتومی مربوط است. به‌عنوان راهنمایی در ادبیات موضوع، مرجع زیر را ببینید

D. Teplitz, ed., *Electromagnetism: Paths to Research* (New York: Plenum, 1982) and F. Rohrlich, *Am. J. Phys.* **65**, 1051 (1997).

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

و از این رو داریم

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = F_{\text{driving}} \quad (۸۳-۱۱)$$

که در آن عامل میرایی γ برابر است با

$$\gamma = \omega^2 \tau \quad (۸۴-۱۱)$$

[وقتی در فصل ۹ (معادله ۹-۱۵۲) نوشتیم $F_{\text{میرایی}} = -\gamma mv$ ، برای سهولت در کار فرض کردیم که میرایی با سرعت متناسب است. حال می‌دانیم که میرایی تابشی، حداقل، با \dot{v} متناسب است. اما این چیزی را تغییر نمی‌دهد، زیرا در نوسانات سینوسی هر تعداد زوج از مشتقات v ، خود با \dot{v} متناسب هستند.] ■

مسئله ۱۱-۱۷ (الف) ذره‌ای با بار q روی دایره‌ای به شعاع R با سرعت ثابت v حرکت می‌کند. برای برقراری چنین حرکتی بدیهی است که یک نیروی مرکزی mv^2/R لازم است؛ برای مقابله با واکنش تابشی، چه نیروی اضافی (F_e) باید اعمال شود؟ (ساده‌ترین راه آن است که جواب را برحسب سرعت لحظه‌ای v بنویسید.) این نیروی اضافی چه توانی (P_e) تحویل می‌دهد؟ آن را با توان تابشی (فرمول لارمور) مقایسه کنید.

(ب) قسمت (الف) را برای ذره‌ای با حرکت هماهنگ ساده، دامنه A و بسامد زاویه‌ای ω ، تکرار کنید $[\omega(\mathbf{w}(t) = A \cos(\omega t)\hat{\mathbf{z}})]$. اختلاف موجود را توجیه کنید.

(ج) ذره‌ای در حال سقوط آزاد (با شتاب ثابت g) در نظر بگیرید. نیروی واکنش تابشی در این مورد چیست؟ توان تابشی چقدر است؟ درباره این نتایج بحث کنید.

مسئله ۱۱-۱۸ (الف) با فرض آنکه γ تماماً به میرایی تابشی مربوط باشد [معادله (۸۴-۱۱)] نشان دهید که برای پاشش اپتیکی، میرایی "کوچک" است ($\gamma \ll \omega_0$). یادآوری می‌کنیم که در پاشش اپتیکی تشدیدهای مربوط، نزدیک و یا روی گستره بسامد اپتیکی قرار می‌گیرند.

(ب) با استفاده از نتایج مسئله ۹-۲۴، پهنای ناحیه پاشش غیرعادی را برای مسئله ۹-۲۳

تخمین بزنید.

! مسئله ۱۱-۱۹ با در نظر گرفتن واکنش تابشی [معادله (۱۱-۸)], قانون دوم نیوتون برای یک ذره باردار به صورت زیر در می‌آید

$$a = \tau \dot{a} + \frac{F}{m}$$

که در آن F نیروی خارجی مؤثر بر ذره است.

(الف) برعکس مورد مربوط به ذره بدون بار (که برای آن $a = F/m$ است) اکنون، شتاب هم مانند مکان و سرعت باید تابع پیوسته‌ای از زمان باشد، حتی اگر نیرو ناگهان تغییر کند. (از نظر فیزیکی، واکنش تابشی هر گونه تغییر سریع در a را کم می‌کند). با انتگرال‌گیری از معادله حرکت بالا از $(t - \varepsilon)$ تا $(t + \varepsilon)$ و استفاده از حد $\varepsilon \rightarrow 0$ ثابت کنید که a در هر زمان t پیوسته است. (ب) ذره‌ای تحت تأثیر نیروی ثابت F که در لحظه $t = 0$ شروع و تا زمان T اثر می‌کند، قرار دارد. عمومیت‌ترین جواب $a(t)$ برای معادله حرکت را در هر یک از سه دوره ذره زیر به دست آورید: (۱) $t < 0$, (۲) $0 < t < T$, (۳) $t > T$.

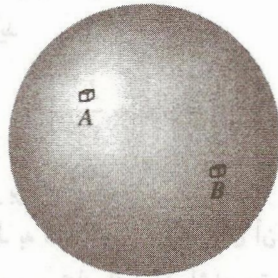
(ج) از شرط پیوستگی (الف) برای $t = 0$ و $t = T$ استفاده کنید و نشان دهید که می‌توانید یا گریز در ناحیه (۳) را حذف کنید و یا از پیش شتاب ناحیه (۱) اجتناب ورزید، اما این هر دو با هم امکان‌پذیر نیست.

(د) در صورت انتخاب اول [گریز در ناحیه (۳)], سرعت را به صورت تابعی از زمان به دست آورید (بدیهی است سرعت در $t = 0$ و $t = T$ باید پیوسته باشد). فرض کنید ذره از اول به حال سکون باشد: $v(-\infty) = 0$.

(ه) نمودار $a(t)$ و $v(t)$ را هم برای یک ذره بدون بار و هم برای ذره باردار که تحت تأثیر این نیروست رسم کنید. □

۱۱-۲-۳ مبنای فیزیکی واکنش تابشی

در بخش قبل فرمول آبراهام-لورنتس را برای واکنش تابشی با استفاده از پایستگی انرژی به دست آوردیم. درباره سازوکار واقعی این نیرو کار مهمی نکردیم و فقط متذکر شدیم که باید نوعی اثر پس‌زنی میدانهای ذرات بر روی بار وجود داشته باشد. متأسفانه میدان یک بار نقطه‌ای در محل خود بار بینهایت می‌شود و محاسبه نیروی حاصل از آن دشوار است.^۱ برای رهایی از این دشواری ۱. این محاسبه را با در نظر گرفتن میانگین متناسب برای میدان می‌توان انجام داد، اما کار ساده‌ای نیست. برای اطلاع بیشتر به مقاله زیر رجوع کنید:



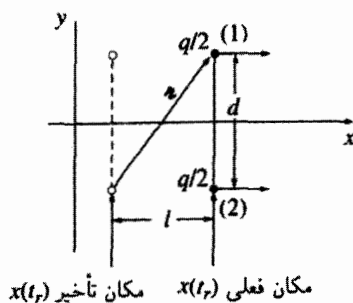
شکل ۱۱-۱۷

می‌توان یک توزیع بار گسترده که میدان حاصل از آن در همه جا متناهی است در نظر گرفت؛ با این روش، سرانجام وقتی اندازه بار به صفر میل می‌کند به مقدار حدی می‌رسیم. در مورد یک بار گسترده به‌طور کلی نتیجه می‌شود که نیروی وارد از یک قسمت (A) بر قسمت دیگر (B) برابر و مخالف نیروی وارد از (B) به (A) نیست (شکل ۱۱-۱۷). هرگاه توزیع بار را به قسمتهای بینهایت کوچک تقسیم کنیم و عدم توازنها برای تمام زوج نیروها را جمع کنیم به نیروهای خالصی که بار بر خودش وارد می‌کند پی می‌بریم. این خود-نیرو ناشی از نقض قانون سوم نیوتون در داخل ساختار ذره است که واکنش تابشی را به‌وجود می‌آورد.

لورنتس محاسبه این خود-نیروی الکترومغناطیسی را با در نظر گرفتن یک توزیع کروی بار که، منطقی اما پر زحمت، به نظر می‌رسد انجام داد.^۱ چون ما فقط در صدد نشان دادن سازوکار کار هستیم، الگویی نه چندان "واقع‌بینانه" به‌کار می‌بریم: این الگو به‌صورت یک "دمبل" است یعنی کل بار q به دو نیمه که به فاصله d از یکدیگر واقع هستند تقسیم شده است (شکل ۱۱-۱۸). این، ساده‌ترین آرایشی برای بار است که سازوکار اساسی (عدم توازن نیروهای الکترومغناطیسی داخلی) را ممکن می‌کند. بگذریم از اینکه این الگو برای یک ذره بنیادی نامحتمل است: در حد نقطه‌ای (یعنی $d \rightarrow 0$) هر الگویی باید به فرمول آبراهام-لورنتس منجر شود، تا حدی که اصل پایستگی انرژی تعیین‌کننده جواب باشد.

فرض کنید دمبل در جهت x حرکت کند و در زمان تأخیری به حال سکون لحظه‌ای در آید.

۱. مرجع زیر را ببینید:



شکل ۱۱-۱۸

میدان الکتریکی در (۱) ناشی از (۲) برابر است با

$$\mathbf{E}_1 = \frac{(q/2)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi}{(\pi \cdot \mathbf{u})^2} [(c^2 + \pi \cdot \mathbf{a}) \mathbf{u} - (\pi \cdot \mathbf{u}) \mathbf{a}] \quad (۸۵-۱۱)$$

[همان معادله (۱۰-۶۵) که در آن

$$\mathbf{u} = c\hat{\pi} \quad \text{و} \quad \pi = l\hat{x} + d\hat{y} \quad (۸۶-۱۱)$$

به‌گونه‌ای که

$$\pi = \sqrt{l^2 + d^2} \quad \text{و} \quad \pi \cdot \mathbf{a} = la, \quad \pi \cdot \mathbf{u} = c\pi \quad (۸۷-۱۱)$$

ما در واقع به مؤلفه x میدان \mathbf{E}_1 توجه داریم، زیرا مؤلفه‌های y با جمع کردن نیروهای دو انتها صفر می‌شود. (به همین دلیل هم نگران نیروهای مغناطیسی نیستیم.) حال می‌توان نوشت

$$u_x = \frac{vl}{\pi} \quad (۸۸-۱۱)$$

و بنابراین

$$E_{1x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(lc^2 - ad^2)}{(l^2 + d^2)^{3/2}} \quad (۸۹-۱۱)$$

با توجه به تقارن، $E_{\gamma x} = E_{\gamma x}$ ، بنابراین نیروی کل مؤثر بر دمبل می‌شود

$$\mathbf{F}_{\text{خودنیرو}} = \frac{q}{\gamma} (\mathbf{E}_{\gamma} + \mathbf{E}_{\gamma'}) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(lc^2 - ad^2)}{(l^2 + d^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{x}} \quad (90-11)$$

تا اینجا همه چیز درست و دقیق است. حال در این اندیشه‌ایم که معادله را برحسب توانهای d بسط دهیم؛ وقتی اندازه "ذره" به صفر می‌رسد تمام توانهای مثبت از بین می‌روند. با استفاده از قضیه تیلور، یعنی

$$x(t) = x(t_r) + \dot{x}(t_r)(t - t_r) + \frac{1}{2} \ddot{x}(t_r)(t - t_r)^2 + \frac{1}{3!} \ddot{\ddot{x}}(t_r)(t - t_r)^3 + \dots$$

داریم

$$l = x(t) - x(t_r) = \frac{1}{2} aT^2 + \frac{1}{6} \dot{a}T^3 + \dots \quad (91-11)$$

برای سادگی قرار داده‌ایم $T = t - t_r$. حال T را با استفاده از شرط زمان تأخیری حساب می‌کنیم

$$(cT)^2 = l^2 + d^2 \quad (92-11)$$

بنابراین

$$d = \sqrt{(cT)^2 - l^2} = cT \sqrt{1 - \left(\frac{aT}{2c} + \frac{\dot{a}T^2}{6c} + \dots \right)^2} = cT - \frac{a^2}{8c} T^3 + \dots$$

این معادله، d را برحسب T مشخص می‌کند: ما نیاز "به حل" آن برای یافتن T به صورت تابعی از d داریم. یک شیوه نظام‌مند برای این منظور وجود دارد که آن را بازگشت سری^۱ می‌نامند، اما دو جمله اول را به صورت ساده زیر می‌توانیم بیابیم: با صرف نظر کردن از توانهای بالای T

$$d \cong cT \implies T \cong \frac{d}{c}$$

۱. به عنوان مثال به مرجع زیر رجوع کنید:

با استفاده از معادلهٔ اخیر به‌عنوان تقریبی برای جملهٔ مکعبی، داریم

$$d \cong cT - \frac{a^2}{\lambda c} \frac{d^2}{c^2} \implies T \cong \frac{d}{c} + \frac{a^2 d^2}{\lambda c^3}$$

و به همین ترتیب، بدیهی است که

$$T = \frac{1}{c} d + \frac{a^2}{\lambda c^3} d^2 + (\dots) d^3 + \dots \quad (۹۳-۱۱)$$

با برگشت به معادلهٔ (۹۱-۱۱)، سری توانی l برحسب d را بنا می‌کنیم

$$l = \frac{a}{2c^2} d^2 + \frac{\dot{a}}{6c^2} d^3 + (\dots) d^4 + \dots \quad (۹۴-۱۱)$$

با قرار دادن رابطهٔ اخیر در معادلهٔ (۹۰-۱۱)، نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{F}_{\text{خودنیرو}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{a}{4c^2 d} + \frac{\dot{a}}{12c^2} + (\dots) d + \dots \right] \hat{\mathbf{x}} \quad (۹۵-۱۱)$$

در اینجا a و \dot{a} در زمان تأخیری (t_r) ارزیابی شده‌اند، اما بازنویسی نتیجه برحسب زمان حال t آسان است

$$a(t_r) = a(t) + \dot{a}(t)(t - t_r) + \dots = a(t) - \dot{a}(t)T + \dots = a(t) - \dot{a}(t) \frac{d}{c} + \dots$$

و پیامد آن این است

$$\mathbf{F}_{\text{خودنیرو}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{a(t)}{4c^2 d} + \frac{\dot{a}(t)}{12c^2} + (\dots) d + \dots \right] \hat{\mathbf{x}} \quad (۹۶-۱۱)$$

جملهٔ اول سمت راست با شتاب بار متناسب است؛ اگر آن را به طرف دیگر قانون دوم نیوتون منتقل کنیم خیلی ساده با جرم دمیل جمع می‌شود. در نتیجه لختی کل دمیل باردار برابر است با

$$m = 2m_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4dc^2} \quad (۹۷-۱۱)$$

که در آن m_0 جرم هریک از دو انتهاست. با توجه به نظریه نسبیت، افزایش جرم دمبل ناشی از دافعه الکتریکی بارها تعجب آور نیست. انرژی پتانسیل این پیکربندی (در حالت استاتیک) برابر است با

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q/2)^2}{d} \quad (98-11)$$

و بنابر فرمول اینشتین، $E = mc^2$ ، این انرژی باید به صورت لختی جسم در آید.^۱ جمله دوم معادله (۹۶-۱۱)، واکنش تابشی است

$$F_{\text{تابش}}^{\text{داخلی}} = \frac{\mu_0 q^2 \dot{a}}{12\pi c} \quad (99-11)$$

این جمله به تنهایی (غیر از تصحیح جرم^۲)، "دمبل نقطه‌ای" را در حد $d \rightarrow 0$ مشخص می‌کند. متأسفانه این جواب یا ضریب ۲ از فرمول آبراهام-لورنتس تفاوت دارد. اما این فقط خود-نیروی وابسته به برهم‌کنش بین ۱ و ۲ است و از این رو در فرمول (۹۹-۱۱) با نوشتن "int" تأکید بر نیروی داخلی کرده‌ایم. حال می‌ماند نیروی هر انتها بر خودش. اگر این نیرو را هم منظور کنیم (مسئله ۱۱-۲۰) نتیجه می‌گیریم

$$F_{\text{تابش}} = \frac{\mu_0 q^2 \dot{a}}{6\pi c} \quad (100-11)$$

و فرمول آبراهام-لورنتس مجدداً به دست می‌آید. نتیجه‌گیری: واکنش تابشی ناشی از نیرویی است که هر بار بر خودش اعمال می‌کند و یا به صورت دقیقتر نیروی کلی است که میدانهای حاصل از قسمتهای مختلف توزیع بار بر یکدیگر وارد می‌کنند.

مسئله ۱۱-۲۰ به کمک معادله (۹۹-۱۱)، معادله (۱۰۰-۱۱) را به صورت زیر نتیجه بگیرید:

۱. نتیجه این نوع پیکربندی آن است که اعداد واقعی به صورت کامل عمل می‌کنند. در نظر گرفتن همان توزیع دمبل در حرکت طولی ما را به تصحیح جرمی به میزان نصف آنچه باید می‌شد می‌رساند [در معادله (۹-۱۴۵) به جای ضریب ۴ به ضریب ۲ می‌رسیم] و در مورد کره با ضریبی برابر ۳/۴ این فاصله زیاد می‌شود. این پارادوکس مشهور مورد بحث زیادی در طی سالیان بوده است. مرجع زیر را ببینید:

D. J. Griffiths and R. E. Owen, *Am. J. Phys.* **51**, 1120 (1983).

۲. البته، حد $d \rightarrow 0$ روی جمله جرم اثر مهمی دارد. از یک نظر این مهم نیست، زیرا فقط جرم کل m مشاهده‌پذیر است؛ شاید m_0 به نحوی اثری جبران‌کنندگی (منفی!) روی بینهایت دارد، از این رو جرم متناهی حساب می‌شود. این مسئله با الکترودینامیک کوانتومی در تعارض است و در آنجا فرایندی به نام باز بهنجارش جرم نامیده می‌شود.

(الف) با استفاده از فرمول آبراهام-لورنتس واکنش تابشی بر هر انتهای دمیل را حساب کنید؛ این را با جملهٔ برهم‌کنشی [معادلهٔ (۱۱-۹۹)] بیفزایید.

(ب) عیب روش (الف) این است که از فرمول آبراهام-لورنتس در آن استفاده می‌شود — فرمولی که می‌خواستیم خودش را به‌دست آوریم. برای اجتناب از آن بار موجود در یک نوار به طول L را که عمود بر جهت حرکت است در نظر بگیرید (یعنی چگالی بار $\lambda = q/L$ است). نیروی برهم‌کنشی جمعی تمام زوج قطعات را با استفاده از معادلهٔ (۱۱-۹۹) حساب کنید (با این تناظر که $\lambda dy_1 \rightarrow q/2$ در یک انتها و $\lambda dy_2 \rightarrow q/2$ در انتهای دیگر است). مراقب باشید که برای هر زوج، نیرو دو بار حساب نشود. □

مسائل تکمیلی فصل ۱۱

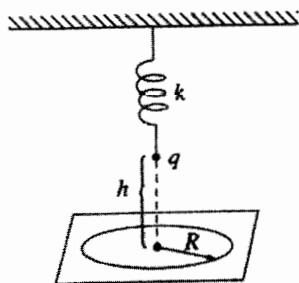
مسئله ۱۱-۲۱ ذره‌ای به جرم m و بار q به فتری با ثابت k متصل و از سقفی آویزان است (شکل ۱۱-۱۹). مکان تعادل آن به فاصلهٔ h بالای زمین قرار دارد. آن را در لحظهٔ $t = 0$ تا فاصلهٔ d از وضعیت تعادل به پایین کشیده و رها می‌کنیم.

(الف) با فرضهای معمولی ($d \ll \lambda \ll h$) شدت تابش برخوردی با کف زمین را برحسب فاصلهٔ R از نقطه‌ای که مستقیماً زیر q واقع است حساب کنید. [تذکر: شدت در اینجا عبارت است از توان میانگین بر واحد سطح کف زمین.] به‌ازای چه مقدار از R تابش شدیدترین مقدار را دارد؟ از میرایی تابشی نوسان‌کننده صرف‌نظر کنید.

$$\text{پاسخ: } \mu_0 q^2 d^2 \omega^2 R^2 h / 32 \pi^2 c (R^2 + h^2)^{5/2}$$

(ب) برای امتحان کردن فرمولتان، فرض کنید گسترهٔ کف نامتناهی است، و میانگین انرژی در واحد زمان را که به کل کف وارد می‌شود حساب کنید. آیا نتیجه مطابق انتظار شماست؟

(ج) به علت اتلاف انرژی به‌صورت تابش، از دامنهٔ نوسان به‌تدریج کاسته می‌شود. بعد از چه مدت زمان τ دامنهٔ نوسان d/e می‌شود؟ (فرض کنید کسر انرژی کل ناپدیدشده در هر چرخه بسیار اندک است.)



شکل ۱۱-۱۹

مسئله ۱۱-۲۲ یک برج رادیویی تا ارتفاع h از سطح افقی زمین قرار دارد. در بالای برج یک آنتن دوقطبی مغناطیسی به شعاع b که محورش قائم است مستقر است. یک ایستگاه FM (KRUD) از این آنتن با بسامد زاویه‌ای ω برنامه پخش می‌کند و توان تابشی کل آن P است (یعنی میانگین توان در یک چرخه کامل). همسایگان درباره مشکلات ناشی از تابش بالای برج شکوه دارند، و ادعا می‌کنند که این تابش با دستگاههای استریوی آنها تداخل می‌کند، درهای مکانیکی گاراژ آنها به‌طور اسرارآمیزی باز و بسته می‌شوند و نیز انواع مسائل مشکوک پزشکی و سلامتی. اما مهندس ناظر شهر که تراز تابش در پای برج را اندازه می‌گیرد معتقد است که مقدار آن از استاندارد پذیرفته شده کمتر است. انجمن همسایگان از شما می‌خواهند که گزارش این مهندس را ارزیابی کنید.

(الف) برحسب متغیرهای داده شده (که ممکن است همگی آنها هم ارتباطی به مسئله نداشته باشند)، فرمول شدت تابش در طبقه همکف و به فاصله R از پای برج را بیابید. می‌توانید فرض کنید $h \ll c/\omega \ll a$ است. [تذکر: ما فقط به مقدار تابش توجه داریم نه جهت آن — در موقع اندازه‌گیری، آشکارساز مستقیماً به سوی آنتن گرفته می‌شود.]

(ب) مهندس ناظر از چه فاصله‌ای نسبت به پایه برج باید اندازه‌گیری را انجام داده باشد؟ فرمول شدت در این محل چیست؟

(ج) توان واقعی KRUD فرستنده برابر ۳۵ کیلووات، بسامد آن ۹۰ MHz، شعاع آنتن ۶ cm، و ارتفاع برج ۲۰۰ m است. حد مجاز گسیل رادیویی شهر $20 \mu\text{W}/\text{cm}^2$ است. آیا کار فرستنده طبق ضوابط KRUD است؟

مسئله ۱۱-۲۳ همان‌گونه که می‌دانید قطب شمال مغناطیسی زمین بر قطب شمال جغرافیایی آن منطبق نیست و این انحراف حدود 11° است. بنابراین نسبت به محور دوران ثابت، بردار گشتاور دوقطبی مغناطیسی زمین نسبت به زمان تغییر می‌کند و از این رو زمین باید تابش دوقطبی مغناطیسی داشته باشد.

(الف) فرمولی برای تعیین توان تابشی کل برحسب پارامترهای زیر را بیابید: Ψ (زاویه بین قطبهای شمال مغناطیسی و شمال جغرافیایی زمین)، M (مقدار گشتاور دوقطبی مغناطیسی زمین)، و ω (سرعت زاویه‌ای چرخش زمین). [راهنمایی: به مسئله ۱۱-۴ یا ۱۱-۱۲ مراجعه کنید.]

(ب) با در نظر گرفتن اینکه میدان مغناطیسی زمین در استوا حدوداً 5×10^{-5} گاوس است، گشتاور دوقطبی مغناطیسی M زمین را تخمین بزنید.

(ج) توان تابشی را برحسب وات حساب کنید.

پاسخ: $4 \times 10^{-5} \text{ W}$

(د) فرض کنید که تب اخترها ستاره‌های نوترونی در حال دوران‌اند با شعاعی حدود 10^6 کیلومتر، دوره تناوب چرخشی حدود 10^{-2} ثانیه و میدان مغناطیسی سطحی 10^8 تسلا چه توان تابشی از چنین ستاره‌هایی انتظار دارید؟
پاسخ: $2 \times 10^{26} \text{ W}$

مسئله ۱۱-۲۴ فرض کنید صفحه yz (که از نظر الکتریکی خنثی است) دارای جریان سطحی وابسته به زمان اما یکتواخت $K(t)\hat{z}$ باشد.

(الف) میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را در ارتفاع x بالای صفحه در حالت‌های زیر حساب کنید
(۱) یک جریان ثابت را در لحظه $t = 0$ برقرار می‌کنیم:

$$K(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ K_0 & t > 0 \end{cases}$$

(۲) در لحظه $t = 0$ یک جریان که به صورت خطی زیاد می‌شود اعمال می‌کنیم

$$K(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \alpha t & t > 0 \end{cases}$$

(ب) نشان دهید که پتانسیل برداری تأخیری را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{A}(x, t) = \frac{\mu_0 c}{4} \hat{z} \int_0^\infty K \left(t - \frac{x}{c} - u \right) du$$

و از روی آن \mathbf{E} و \mathbf{B} را تعیین کنید.

(ج) نشان دهید که توان تابشی کل برای واحد مساحت سطح برابر است با

$$\frac{\mu_0 c}{4} [K(t)]^2$$

توضیح دهید، در این مورد که چشمه جایگزیده نیست، معنی "تابش" چیست.^۲

۱. به مقاله J. P. Ostriker and J. E. Gunn, در مجله *Astrophys. J.* 157, 1395 (1969) رجوع کنید.

۲. برای بحث و بررسی مسائل ذی‌ربط مرجع زیر را ببینید:

B. R. Holstein, *Am. J. Phys.* 63, 217 (1995), T. A. Abbott and D. J. Griffiths, *Am. J. Phys.* 53, 1203 (1985).

مسئله ۱۱-۲۵ وقتی ذره بارداری به یک سطح رسانا نزدیک (یا از آن دور می‌شود)، گسیل تابشی بر اثر تغییر گشتاور دوقطبی الکتریکی میان بار و تصویر آن صورت می‌گیرد. هرگاه جرم ذره m و بار آن q باشد، توان کل تابشی را به صورت تابعی از ارتفاع z نسبت به صفحه بیابید. پاسخ: $z^4 / 6m^2 (\mu_0 c q^2 / 4\pi)^3$

مسئله ۱۱-۲۶ با استفاده از تبدیل دوگانه (مسئله ۷-۶۰) میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یک تک قطبی مغناطیسی q_m با حرکت دلخواه را طراحی کنید، و "فرمول لارمور" برای توان تابشی را بیابید.^۱

مسئله ۱۱-۲۷ فرض کنید جواب خارج از کنترل مسئله ۱۱-۱۹ را کنار بگذارید، مطلوب است محاسبه

(الف) کار انجام شده توسط نیروی خارجی.

(ب) انرژی جنبشی نهایی (با فرض صفر بودن انرژی جنبشی اولیه).

(ج) انرژی تابشی کل.

پایستگی انرژی در این فرایند را امتحان کنید.^۲

مسئله ۱۱-۲۸ (الف) مسئله ۱۱-۱۹ را با این فرض تکرار کنید که نیروی خارجی یک تابع دلتای دیراک باشد: $F(t) = k\delta(t)$ (که k یک ثابت است).^۲ [توجه کنید که اکنون شتاب در $t = 0$ ناپیوسته است (گرچه سرعت باید همچنان پیوسته باشد)؛ با استفاده از روش مسئله ۱۱-۱۹ (الف)، نشان دهید که $\Delta a = -k/m\tau$. در این مسئله فقط دو بازه قابل بررسی است: (۱) $t < 0$ و (۲) $t > 0$].

(ب) همانند مسئله ۱۱-۲۷ پایستگی انرژی در این فرایند را امتحان کنید.

! مسئله ۱۱-۲۹ یک ذره بارداری که در روی محور x از $-\infty$ حرکت می‌کند، با یک سد انرژی پتانسیل مستطیلی شکل

$$U(x) = \begin{cases} U_0 & \text{اگر } 0 < x < L \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۱. برای کاربردهای ذی ربط، مرجع زیر را ببینید:

J. A. Heras, *Am. J. Phys.* **63**, 242 (1995).

۲. مسائل ۱۱-۲۷ و ۱۱-۲۸ توسط G. L. Pollack مطرح شده است.

۳. این مثال اولین بار توسط P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. A* **167**, 148 (1938) مورد تحلیل قرار گرفت.

مواجه می‌شود. نشان دهید که به دلیل واکنش تابشی، امکان تونل‌زنی ذره از داخل سد وجود دارد — یعنی حتی اگر انرژی جنبشی ذره کمتر از U_0 باشد، ذره می‌تواند از مانع عبور کند.^۱ راهنمایی: کاری که باید بکنید حل معادله

$$a = \tau \dot{a} + \frac{F}{m}$$

در معرض نیروی زیر است

$$F(x) = U_0 [-\delta(x) + \delta(x - L)]$$

به مسائل ۱۱-۱۹ و ۱۱-۲۸ مراجعه کنید، اما توجه کنید که این دفعه نیرو تابع مشخصی از x است و نه t . سه ناحیه را باید بررسی کنید: (۱) $x < 0$ ، (۲) $0 < x < L$ ، (۳) $x > L$. جواب عمومی را [برای $a(t)$ ، $v(t)$ و $x(t)$] در هر ناحیه بیابید، قسمت‌گیزی ناحیه (۳) را حذف کنید، و شرایط مرزی مناسب برای $x = 0$ و $x = L$ را بیان کنید. نشان دهید که سرعت نهایی (v_f) به زمان T لازم برای عبور از تونل به صورت زیر وابسته است

$$L = v_f T - \frac{U_0}{mv_f} (\tau e^{-T/\tau} + T - \tau)$$

و سرعت اولیه (در $x = -\infty$) عبارت است از

$$v_i = v_f - \frac{\mu_0}{mv_f} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{U_0}{mv_f^2} (e^{-T/\tau} - 1)} \right]$$

برای ساده کردن این نتایج (چون تمام چیزی که به دنبالش هستیم یک مثال خاص است)، فرض کنید که انرژی جنبشی نهایی نصف ارتفاع سد است. نشان دهید که در این صورت

$$v_i = \frac{v_f}{1 - (L/v_f \tau)}$$

۱. مقاله زیر را ببینید:

در حالت خاصی که $L = v_f r / 4$ ، آنگاه $v_i = (4/3)v_f$ ، انرژی جنبشی اولیه $(8/9)U_0$ می‌شود، و ذره از مانع می‌گذرد، گرچه انرژی لازم برای عبور از بالای سد هم نداشته باشد!

! مسئله ۱۱-۳۰ (الف) نیروی واکنش تابشی وارد بر یک ذره در حرکت با سرعت دلخواه و در مسیری مستقیم را با بازسازی استدلال بخش ۱۱-۲-۳، بدون فرض $v(t_r) = 0$ ، بیابید. پاسخ: $(\mu_0 q^2 \gamma^4 / 6\pi c)(\ddot{a} + 3\gamma^4 a^2 v / c^2)$
 (ب) نشان دهید که این جواب [در معنای معادله (۱۱-۷۸)] با توان تابشی چنین ذره‌ای [معادله (۱۱-۷۵)] سازگار است.

مسئله ۱۱-۳۱ (الف) آیا یک ذره دارای حرکت هذلولوی [معادله (۱۰-۴۵)] تابش می‌کند؟ [از فرمول دقیق معادله (۱۱-۷۵) برای محاسبه توان تابشی استفاده کنید].
 (ب) آیا برای یک ذره دارای حرکت هذلولوی واکنش تابشی وجود دارد؟ (از فرمول دقیق مسئله ۱۱-۳۰ برای محاسبه نیروی واکنشی استفاده کنید).
 [گوشزد: این پرسشهای معروف حاوی مضمونهای مهمی برای اصل هم‌ارزی‌اند]. □

۱. مراجع زیر را ببینید:

T. Fulton and F. Rohrlich, *Annals of Physics* **9**, 499 (1960); J. Cohn, *Am. J. Phys.* **46**, 225 (1978); Chapter 8 of R. Peierls, *Surprises in Theoretical Physics* (Princeton: Princeton University Press, 1979); and the article by P. Pearle in *Electromagnetism: Paths to Research*, ed. D. Teplitz (New York: Plenum Press, 1982).]

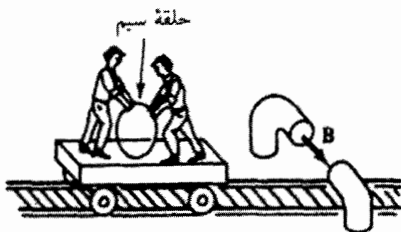
الکترو دینامیک و نسبیت

۱-۱۲ نظریه نسبیت خاص

۱-۱-۱۲ اصول موضوع اینشتین

مکانیک کلاسیک از اصل نسبیت تبعیت می‌کند: برای تمام چارچوبهای مرجع لخت قوانین یکسانی به‌کار می‌روند. منظور از "لخت" آن است که دستگاه در حال سکون است، و یا با سرعت ثابت حرکت می‌کند.^۱ به‌عنوان مثال فرض کنید که شما یک میز بیلیارد را در یک واگن راه‌آهن قرار داده‌اید و قطار هم با سرعت ثابت بر روی ریل مستقیمی حرکت می‌کند. اگر بازی کنید بازی شما دقیقاً به همان صورتی پیش خواهد رفت که اگر قطار در ایستگاه متوقف بود پیش می‌رفت؛ شما

۱. این خود مسئله‌ساز است: اگر قوانین فیزیک در یک چارچوب در حال حرکت یکنواخت نیز به‌خوبی صادق باشند، در این صورت در وهله اول، راهی برای تعریف چارچوب "ساکن" نداریم، و از این رو راهی برای آزمون حرکت یکنواخت چارچوبهای دیگر نداریم. برای احتراز از این دام، یک چارچوب لخت را به‌طور صوری به‌صورت چارچوبی که قانون اول نیوتون در آن صادق است تعریف می‌کنیم. برای اطلاع از اینکه در یک چارچوب لخت قرار دارید یا خیر، سنگی پرتاب کنید. اگر سنگ به خط مستقیم و با سرعت ثابت حرکت کرد خود را چارچوب لخت بدانید. و هر چارچوبی که با سرعت ثابت نسبت به شما حرکت می‌کند چارچوب لخت دیگری است. (مسئله ۱-۱۲).



شکل ۱-۱۲

نیازی ندارید که بازی خود را به سبب حرکت قطار "اصلاح" کنید. در واقع اگر برده‌های واگن را پایین می‌کشیدید راهی برای تشخیص اینکه آیا قطار حرکت می‌کرده است یا نه نداشتید. برعکس، اگر قطار سرعتش زیاد یا کم می‌شد و یا به سمتی می‌پیچید و یا شیبی را بالا می‌رفت فوری از این تغییرات مطلع می‌شدید — در این موارد توپهای بلیارد در مسیرهای منحنی منحرف می‌شدند و خود شما هم احساس می‌کردید بازی‌تان عقب رفته است. بنابراین قوانین مکانیک به‌طور قطع در چارچوب‌های مرجع شتابدار یکی نیستند.

کاربرد اصل نسبیت در مکانیک کلاسیک چیز تازه‌ای نیست؛ گالیله به روشنی آن را بیان کرده بود. پرسش: آیا این اصل برای قوانین الکترو دینامیک نیز صادق است؟ در وهله نخست به نظر می‌رسد جواب منفی باشد. مگر نه این است که یک بار در حال حرکت میدان مغناطیسی تولید می‌کند در حالی که بار ساکن چنین خاصیتی ندارد. باری که توسط یک قطار حمل می‌شود، یک میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند، اما کسی که در قطار است و قوانین الکترو دینامیک را برای آن دستگاه اعمال می‌کند، هیچ میدان مغناطیسی پیش‌بینی نمی‌کند. در واقع بسیاری از معادلات الکترو دینامیک که با قانون لورنتس آغاز می‌شوند به‌طور صریح "به سرعت" بار ارتباط می‌یابند. بنابراین به‌طور قطع آشکار است که پیش فرض نظریه الکترومغناطیس وجود یک چارچوب مرجع در حال سکون یکتاست، که همه سرعتها باید نسبت به آن سنجیده شوند.

و با وجود این موضوع فوق‌العاده جالبی وجود دارد که ما را وادار به تأمل می‌کند. فرض کنید یک حلقه سیم را روی یک واگن آویزان کنیم و قطار از میان قطب‌های یک آهنربای غول‌پیکر عبور کند (شکل ۱-۱۲). وقتی حلقه سیم از میدان مغناطیسی می‌گذرد، یک emf حرکتی بنا بر قاعده شار [معادله (۷-۱۳)] ایجاد می‌شود

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

به خاطرتان باشد که این emf از نیروی مغناطیسی وارد بر بارهای حلقه سیم که با قطار در

حرکت اند ناشی می‌شود. از طرف دیگر برای شخصی که در قطار است اعمال ساده لوحانه قوانین الکترودینامیک در آن دستگاه چه پیش‌بینی در بر دارد؟ هیچ نیروی مغناطیسی وجود نخواهد داشت زیرا که حلقه به حال سکون است. اما هنگامی که قطار از آهنربا رد می‌شود میدان مغناطیسی در واگن تغییر می‌کند، و بنابر قانون فاراده، یک میدان مغناطیسی متغیر، میدان الکتریکی القا می‌کند. نیروی الکتریکی حاصل هم در حلقه بنابه معادله (۷-۱۴) یک emf ایجاد می‌کند

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

چون قانون فاراده و قاعده شار دقیقاً مقدار واحدی را برای emf پیش‌بینی می‌کنند، کسانی که در قطار هستند پاسخ درست را دریافت می‌کنند، هر چند که تعبیر فیزیکی آنها از این فرایند کاملاً غلط است.

آیا چنین است؟ اینشتین نمی‌توانست باور کند که این صرفاً یک تصادف است؛ او این مسئله را به‌عنوان نشانه‌ای دال بر اینکه پدیده‌های الکترومغناطیسی همانند مکانیکی از اصل نسبیت پیروی می‌کنند، تلقی کرد. از دیدگاه وی، تحلیل ناظر مستقر در قطار به همان اندازه معتبر است که تحلیل ناظر روی زمین. هرگاه تفاسیر آنها تفاوت داشته باشد (یعنی یک نفر فرایند را الکتریکی و دیگری مغناطیسی بنامد)، بگذار چنین باشد؛ بیش‌بینهای واقعی آنها در توافق‌اند. در اینجا نوشته‌ اینشتین در صفحه اول مقاله‌اش را که در سال ۱۹۰۵ میلادی برای معرفی نظریه نسبیت خاص ارائه داد، می‌آوریم:

معلوم شده است که الکترودینامیک ماکسول — آن‌چنان که در حال حاضر معمولاً از آن برداشت می‌شود — هنگام اعمال به اجسام متحرک به بی‌تقارنیهایی منجر می‌شود که به نظر نمی‌رسد ذاتی پدیده‌ها باشند. به‌عنوان مثال کنش الکترودینامیکی و ارون یک آهنربا و یک رسانا را در نظر بگیرید: پدیده مشاهده‌پذیر در اینجا فقط به حرکت نسبی رسانا و آهنربا بستگی دارد، در حالی‌که دیدگاه متعارف تمایز مشخصی میان دو مورد که در آن اینکه کدام یک از دو جسم نسبت به دیگری در حرکت است قائل است، زیرا هرگاه آهنربا در حرکت و رسانا ساکن باشد، در مجاورت آهنربا یک میدان الکتریکی ایجاد می‌شود ... که خود عامل تولید یک جریان در مکانهایی که بخشهایی از رسانا در آن قرار دارد است. اما هرگاه آهنربا ساکن و رسانا در حرکت باشد در اطراف آهنربا هیچ میدان الکتریکی ایجاد نمی‌شود. ولی در رسانا یک نیروی محرکه الکتریکی مشهود است ... که — با فرض برابری حرکت نسبی در هر دو مورد بحث‌شده — موجب جریانهای الکتریکی در همان مسیر و با همان شدت می‌شود که توسط نیروهای الکتریکی در مورد اول تولید شده بودند. مثالهایی از این نوع و نیز کوششهای ناموفق برای کشف هر نوع حرکت زمین نسبت به

”محیط نور“ چنین معنا می دهند که پدیده های الکترودینامیک و مکانیک دارای خواصی متناظر با ایده مفهوم سکون مطلق^۱ نیستند.

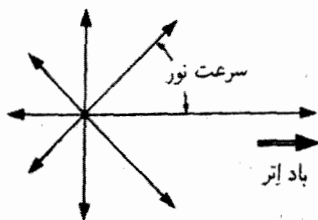
داستان را بیشتر دنبال می کنیم. از دیدگاه پیشینیان اینشتین، تساوی دو emf صرفاً یک تصادف می نمود؛ برای آنها شکی وجود نداشت که مشاهدات یک ناظر درست و از آن دیگری نادرست است. آنها میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را به صورت کشفهایی در یک محیط ژله مانند نامرئی به نام اتر که تمام فضا را پر کرده است تصور می کردند. سرعت بار باید نسبت به اتر سنجیده می شد و فقط در این شرایط، قوانین الکترودینامیک معتبر بودند. ناظر درون قطار در اشتباه است چون چارچوب او نسبت به اتر در حرکت است.

اما کمی تأمل کنید! از کجا بدانیم که ناظر زمینی نسبت به اتر حرکتی ندارد؟ گذشته از اینها زمین حول محور خودش روزی یک بار و نسبت به خورشید سالی یک مرتبه می چرخد؛ منظومه شمسی حول کهکشان می چرخد و تا آنجا که می دانیم کهکشان نیز خود ممکن است با سرعت بالایی در کیهان حرکت کند. همه اینها روی هم باید با سرعتی بیش از 50 km/s نسبت به اتر حرکت کنند. همانند یک موتورسوار در جاده ای باز، ما هم با یک ”باد اتر“ با سرعت بالا مواجه ایم — مگر اینکه با یک تصادف معجزه آسا در باد موافق با همان شدت قرار گرفته باشیم، یا اینکه، زمین دارای نوعی ”حفاظ بادی“ باشد و اتر محلی موجود را با خود بکشد. یکبار خود را با موضوعی که دارای اهمیت قطعی است مواجه می بینیم، و آن پیدا کردن چارچوب اتر به صورت تجربی است، و گر نه همه محاسباتمان باطل خواهند شد.

پس مسئله تعیین حرکتشان در داخل اتر است تا بتوانیم اندازه و جهت ”باد اتر“ را اندازه بگیریم. چگونه این کار میسر است؟ در وهله اول ممکن است تصور شود هر آزمایش الکترومغناطیسی کافی است: هرگاه معادلات ماکسول فقط نسبت به چارچوب اتر معتبر باشند، هرگونه عدم توافق بین نتایج تجربی و پیش بینی نظری را می توان به باد اتر مربوط دانست. متأسفانه، همان گونه که فیزیکدانان قرن نوزدهم به زودی دریافتند، خطای مورد انتظار در یک آزمایش نوعی بی اندازه کوچک است؛ چنان که در مثال بالا، همواره به نظر می رسد ”تصادفها“ دست به یکی کرده اند و طوری اتفاق افتاده اند که استفاده از چارچوب مرجع ”غلط“ توسط ما را پنهان کنند. لذا برای رسیدن به نتیجه مطلوب، باید آزمایش ظریف و حساسی ترتیب داد.

یکی از نتایج الکترودینامیک کلاسیک این پیش بینی است که امواج الکترومغناطیسی در خلأ

۱. ترجمه اولین مقاله نسبیت اینشتین، ”درباره الکترودینامیک اجسام متحرک“ مجدداً در مرجع زیر منتشر شد.



شکل ۲-۱۲

با سرعت

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

نسبت به (احتمالاً) اثر حرکت می‌کند. پس اصولاً می‌توان با اندازه‌گیری سرعت نور در جهت‌های مختلف، باد اتر را آشکار ساخت. همان‌گونه که سرعت یک قایق موتوری بر روی رودخانه در حرکت "در جهت جریان" بیشینه است در اینجا هم نور وقتی همسو با اتر است سرعت بیشتری دارد، اما در جهت مخالف که در آن برخلاف جریان است سرعت کمینه است (شکل ۲-۱۲). در حالی که ایده چنین آزمایشی ساده‌تر از این نمی‌توانست باشد، اجرای آن مطلب دیگری است، زیرا نور با سرعت بسیار زیاد حرکت می‌کند. اگر به دلیل این "جزئیات فنی" نبود، انجام آن با یک چراغ دستی و یک ساعت امکان‌پذیر بود. چنان‌که می‌دانید آزمایشی ماهرانه و زیبا توسط مایکلسون و مورلی، با استفاده از یک تداخل‌سنج نوری با دقت بسیار بالا طرح‌ریزی و ابداع شده بود. در اینجا به جزئیات آزمایش نمی‌پردازیم تا توجه شما از دو نکته اساسی زیر منحرف نشود: (۱) تمام کوشش مایکلسون و مورلی مقایسه سرعت نور در جهت‌های مختلف بود و (۲) آنچه از آزمایش خود کشف کردند، این بود که سرعت نور در تمام جهتها دقیقاً یکی بود.

این روزها، وقتی به دانش‌آموزان سالهای آخر دبیرستان می‌آموزند که به ساده‌لوحانه بودن الگوی اتر بپوزخند بزنند، قدرت تصویری برای درک کامل اینکه نتیجه گیج‌کننده آزمایش چه بوده است لازم دارند. همه امواج دیگر (امواج آب، امواج صوتی، امواج روی یک تار) با سرعتی از قبل مشخص نسبت به محیط انتشار (ماده‌ای که موج می‌زند) حرکت می‌کنند، و هرگاه این محیط نسبت به ناظر حرکت کند سرعت خالص همواره "در جهت جریان" بیشتر از "خلاف جریان" آن است. در ۲۰ سال بعدی یک رشته طرح‌های غیرمتملی برای کوشش در بیان اینکه چرا در مورد نور این مسئله صادق نیست ارائه شدند. مایکلسون و مورلی آزمایش خود را به‌عنوان تأیید فرضیه "گشش اتر" تعبیر کردند که بر اساس آن زمین به‌گونه‌ای اتر را با خود می‌کشد، اما این تعبیر با سایر

مشاهدات سازگار نبود، به خصوص دربارهٔ آبراه‌ی نور ستاره‌ها^۱ نظریه‌های به اصطلاح «گسیل» گوناگونی پیشنهاد شدند که بر اساس آنها سرعت امواج الکترومغناطیسی به حرکت چشمه بستگی دارد — چنان‌که در مورد نظریهٔ ذره‌ای (در نظر گرفتن نور به صورت جریانی از ذرات) صادق می‌بود. این نظریه‌ها، تصحیح غیرمنطقی معادلات ماکسول را ایجاد می‌کردند، اما در هیچ موردی با آزمایش توسط منابع نوری فرایزینی سازگار نبودند. در این میان فیتزجرالد و لورنتس معتقد بودند که باد اتر از نظر فیزیکی تمام مواد (از جمله دستگاه آزمایش مایکلسون-مورلی) را متراکم می‌کند، به‌گونه‌ای که اثر تغییرات سرعت بر حسب جهت را جبران می‌کند. چنان‌که معلوم است نشانه‌ای از حقیقت در این استدلال وجود دارد، گرچه ایدهٔ آنها برای علت انقباض کاملاً غلط بود.

به هر حال تا زمان اینشتین کسی نبود که نتیجهٔ مایکلسون-مورلی را قبول کند و معتقد باشد بر اینکه، سرعت نور یک ثابت جهانی است که در تمام جهات مستقل از تأثیر حرکت ناظر یا منبع است. باد اتر وجود خارجی ندارد زیرا خود اتر هم وجود ندارد. هر دستگاه لخت، چارچوب مرجع مناسبی برای کاربرد معادلات ماکسول است، و نباید سرعت یک بار الکتریکی را نسبت به یک چارچوب سکون مطلق (که وجود ندارد) سنجید و نه نسبت به اتر (که آن هم وجود ندارد)، بلکه تنها باید نسبت به دستگاه مرجع خاصی که انتخاب می‌شود اندازه گرفت.

با الهام از رهنمودهای نظری داخلی (این واقعیت که قوانین الکترودینامیک به‌گونه‌ای هستند که حتی در کاربرد با دستگاه «غلط» هم جواب درست می‌دهند) و نیز با توجه به شهود تجربی خارجی (آزمایش مایکلسون مورلی)^۲ اینشتین دو اصل موضوع مشهور خود را چنین بیان کرد:

۱. اصل نسبیت. قوانین فیزیک در تمام دستگاههای مرجع لخت به‌کار می‌روند.

۲. سرعت جهانی نور. سرعت نور در خلأ برای همهٔ ناظران (دستگاههای) لخت یکسان و از حرکت چشمه مستقل است.

نظریهٔ نسبیت خاص از این دو اصل موضوع نتیجه می‌شود. اصل اول تعمیم مشاهدات گالیله دربارهٔ مکانیک کلاسیک به صورت قانون عمومی برای تمام فیزیک است. این اصل بیان می‌کند که هیچ دستگاه سکون مطلق وجود ندارد. اصل دوم را ممکن است پاسخ اینشتین به آزمایش مایکلسون-مورلی تلقی کرد. معنایش این است که اتری وجود ندارد (بعضی مؤلفان اصل موضوع دوم اینشتین را زائد می‌دانند و چیزی جز مورد خاصی از اصل اول تلقی نمی‌کنند. آنها معتقدند که

۱. بحث آزمایش مایکلسون-مورلی و موضوعات مربوط به آن را در کتاب زیر می‌توان یافت

R. Resnick's *Introduction to Special Relativity*, Chap. 1 (New York: John Wiley, 1968).

۲. به نظر می‌رسد در واقع اینشتین در آن زمان از آزمایش مایکلسون مورلی اندکی مطلع بود. از نظر او استدلال نظری مسئله به تنهایی، عامل تعیین‌کننده بوده‌است.

خود وجود اثر با اصل نسبیت، در این معنا که یک چارچوب مرجع ساکن یکتا را تعریف می‌کند ناسازگار است. ما این ادعا را قبول نداریم. وجود هوا به عنوان محیطی برای صوت نظریه نسبیت را بی اعتبار نمی‌کند. اثر یک دستگاه سکون مطلق فراتر از آب موجود در یک تنگ ماهی قرمز که خود دستگاه ویژه‌ای است — نیست. اگر شما این ماهی قرمز باشید به ندرت "مطلق" هستید.^۱ برخلاف اصل نسبیت که ریشه‌های چندین صدساله دارد، سرعت جهانی نور کاملاً جدید و برخورد با آن نامعقول بود. چرا که فرضاً اگر در راهروی قطاری که با سرعت 60 mi/h در حرکت است و در جهت حرکت قطار با سرعت 5 mi/h راه بروید سرعت شما نسبت به زمین "آشکارا" 65 mi/h می‌شود. سرعت A (شما) نسبت به C (زمین) برابر است با مجموع سرعت A نسبت به B (قطار) به اضافه سرعت B نسبت به C

$$v_{AC} = v_{AB} + v_{BC} \quad (1-12)$$

با وجود این اگر A یک سیگنال نوری (حاصل از یک چراغ چشمک‌زن در قطار و یا لامپی واقع در زمین یا ستاره‌ای در آسمان) باشد، اینشتین بر این باور بود که سرعت این سیگنال نسبت به قطار C و نسبت به زمین هم C است:

$$v_{AC} = v_{AB} = C \quad (2-12)$$

بدیهی است معادله (۱-۱۲) که حال ما آن را قاعده جمع سرعت گالیلیه می‌نامیم (قبل از اینشتین کسی نگران نام نهادن بر آن نبود) با اصل موضوع دوم سازگار نیست. در نسبیت خاص چنانکه خواهیم دید، این قاعده جای خود را به قاعده جمع سرعت اینشتین می‌دهد:

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + (v_{AB}v_{BC}/c^2)} \quad (3-12)$$

در سرعت‌های "معمولی" ($v_{AB} \ll c, v_{BC} \ll c$) مخرج بی‌اندازه به یک نزدیک و اختلاف بین دو فرمول گالیلیه و اینشتین ناچیز است. از طرفی دیگر فرمول اینشتین این ویژگی را دارد که اگر $v_{AB} = c$ ، آن‌گاه خود به خود $v_{AC} = c$ می‌شود

$$v_{AC} = \frac{c + c_{BC}}{1 + (cv_{BC}/c^2)} = c$$

۱. این نوع بیان را ما برای رفع هر توجیه نادرست در این باره که چارچوب سکون مطلق از چه چیز تشکیل یافته است، انتخاب کرده‌ایم. در سال ۱۹۷۷ توانستند سرعت زمین را در تابش زمینه 3 K باقیمانده از مه‌بانگ اندازه بگیرند. آیا این به معنی یافتن یک دستگاه سکون مطلق و طرد نسبیت است؟ قطعاً خیر.

اما چگونه قاعدهٔ گالیله که بر مبنای عقل سلیم است می‌تواند غلط باشد؟ و اگر چنین باشد چه تأثیری بر تمام فیزیک کلاسیک می‌گذارد؟ پاسخ آن است که نظریهٔ نسبیت ما را وامی‌دارد که برداشتمان نسبت به زمان و مکان، و بنابراین نسبت به کمیت‌هایی نظیر سرعت، تکانه و انرژی را تغییر دهیم. گرچه پیشرفت این نظریه به لحاظ تاریخی جدا از افکار اینشتین دربارهٔ الکترودینامیک است، نظریهٔ نسبیت خاص محدود به طبقهٔ خاصی از پدیده‌ها نیست بلکه توصیفی است از "عرصه" فضاهای زمان که در آن همه پدیده‌های فیزیکی اتفاق می‌افتند، و با وجود اشاره به سرعت نور در اصل موضوع دوم نسبیت با نور کاری ندارد: c به‌طور اجتناب‌ناپذیر یک سرعت بنیادی است و برحسب اتفاق نور با چنین سرعتی حرکت می‌کند، از این‌رو وجود جهانی که در آن هیچ بار الکتریکی وجود نداشته و به تبع آن هیچ میدان الکترومغناطیسی یا امواجی نباشد، اما نسبیت بر آن حاکم باشد، کاملاً ممکن به نظر می‌رسد. زیرا نسبیت ساختار فضا و زمان را تعریف می‌کند، این فرضیه نه تنها تمام پدیده‌های شناخته‌شده را بلکه تمام پدیده‌هایی را که هنوز کشف نشده‌اند نیز توصیف می‌کند. این فرضیه همان‌گونه که کانت گفته است "پیش‌درآمدی بر فیزیک در آینده است".

مسئله ۱۲-۱. قاعدهٔ جمع سرعت گالیله را به‌کار ببرید. فرض کنید S یک دستگاه مرجع لخت است. (الف) فرض کنید \bar{S} با سرعت ثابت نسبت به S حرکت کند. نشان دهید که \bar{S} نیز یک دستگاه مرجع لخت است. [راهنمایی: از تعریف پانوشت ۱ صفحهٔ ۶۰۹ استفاده کنید].
(ب) برعکس، نشان دهید که هرگاه \bar{S} یک دستگاه لخت باشد، آن‌گاه نسبت به S با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

مسئله ۱۲-۲. برای نمایش اصل نسبیت در مکانیک کلاسیک، برخورد نوعی زیر را در نظر بگیرید: در چارچوب لخت S ، ذره A (به جرم m_A ، سرعت u_A) با ذرهٔ B (به جرم m_B) برخورد می‌کند. بر اثر برخورد مقداری از جرم A به B منتقل می‌شود و بنابراین دو ذرهٔ C (به جرم m_C ، سرعت u_C) و D (به جرم m_D ، سرعت u_D) خواهیم داشت. فرض کنید تکانه $(p \equiv mu)$ در S پایسته است.

(الف) ثابت کنید تکانه در چارچوب لخت \bar{S} که با سرعت v حرکت می‌کند نیز پایسته است. [از قاعدهٔ جمع گالیله که کاملاً محاسبه‌ای کلاسیک است استفاده کنید. دربارهٔ جرم چه فرضی باید بکنید؟]

(ب) فرض کنید برخورد در S کشسان است؛ نشان دهید در \bar{S} نیز چنین است.

مسئله ۱۲-۳. (الف) خطای ما در به‌کار بردن قاعدهٔ گالیله به‌جای قاعدهٔ اینشتین برای $v_{AB} = 5 \text{ mi/h}$ و $v_{BC} = 60 \text{ mi/h}$ چند درصد است؟

(ب) فرض کنید بتوانید با نصف سرعت نور در راهرو قطار و در جهت حرکت بدوید. شما نسبت به زمین چقدر است؟

(ج) با استفاده از معادله ۳-۱۲ ثابت کنید که هرگاه $v_{AB} < c$ و $v_{BC} < c$ باشد آن‌گاه $v_{AC} < c$ است. این نتیجه را تفسیر کنید.

مسئله ۴-۱۲ افسر پلیسی که در اتومبیلی با سرعت نصف سرعت نور در حرکت است به طرف اتومبیل در حال فرار قانون شکنانی که با سرعت $c(3/4)$ فرار می‌کردند شلیک می‌کند (شکل ۳-۱۲). سرعت گلوله (نسبت به تفنگ) برابر است با $c(1/3)$. آیا گلوله به هدف می‌رسد (الف) یا قاعده گالیله؛ (ب) یا قاعده ایششتین؟



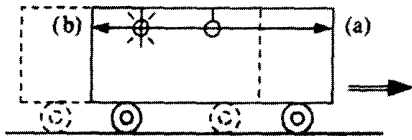
شکل ۳-۱۲

□

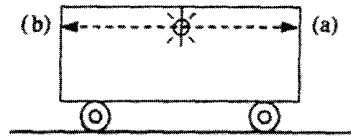
۲-۱-۱۲ هندسه نسبیت

در این بخش یک سری آزمایش خیالی ارائه می‌کنیم که به معرفی سه تا از بارزترین پیامدهای هندسی اصول موضوع ایششتین یعنی اتساع زمان، انقباض لورنتس و نسبیت همزمانی کمک می‌کنند. در بخش ۳-۱-۱۲ همین نتایج را به‌طور نظام‌مند با استفاده از تبدیلهای لورنتس به‌دست می‌آوریم.

۱. نسبیت همزمانی. یک واگن باری را که با سرعت ثابت روی یک مسیر مستقیم و هموار ریلی حرکت می‌کند در نظر بگیرید (شکل ۴-۱۲). در مرکز واگن لامپی آویخته است. وقتی کلید آن را می‌زنیم نور با سرعت c به اطراف منتشر می‌شود. چون فاصله لامپ از دو انتها مساوی است، ناظری که در قطار است می‌بیند که نور لامپ در یک لحظه به دو انتها می‌رسند. دو رویداد مورد نظر که عبارت‌اند از (الف) رسیدن نور به قسمت جلو و (ب) رسیدن نور به قسمت عقب، همزمان اتفاق می‌افتند. ولی از دیدگاه یک ناظر زمینی این دو رویداد همزمان نیستند. زیرا در حالی که نور لامپ حرکت می‌کند خود قطار هم به سمت جلو می‌رود، و بنابراین پرتو نوری که به قسمت عقب می‌رود فاصله کوتاهتری را نسبت به پرتو سمت جلو باید بپیماید (شکل ۵-۱۲). بنابراین، از دید این ناظر، رویداد (ب) قبل از رویداد (الف) رخ می‌دهد. در این میان، ناظری که با قطاری سریع‌السیر عبور می‌کند خبر از تقدم (الف) بر (ب) می‌دهد.



شکل ۱۲-۵



شکل ۱۲-۶

نتیجه‌گیری: دو رویداد که در یک دستگاه لخت همزمان هستند، در حالت کلی، در دستگاه لخت دیگر همزمان نیستند.

بدیهی است که سرعت قطار باید بسیار زیاد باشد تا این اختلاف قابل آشکارسازی باشد و از این‌روست که به هیچ‌وجه به این مسئله توجهی نمی‌شود.

البته برای یک ناظر ساده‌لوح، همواره امکان اشتباه دربارهٔ همزمانی وجود دارد: شما صدای رعد را بعد از دیدن برق آن می‌شنوید، و به نظر یک کودک ممکن است چشمه نور با چشمه صوت همزمان نباشد. اما این خطایی جزئی است و به ناظران متحرک یا نسبیت مربوط نیست. بدیهی است باید در مدت زمان رسیدن سیگنال (صوتی-نوری یا هر چیز دیگر) به خود تصحیح به عمل آورید. وقتی از یک ناظر صحبت می‌کنیم منظورمان کسی است که درک لازم برای انجام چنین تصحیحی را دارد و مشاهده به چیزی می‌گوییم که ناظر بعد از انجام این عمل ثبت می‌کند. بنابراین آنچه شما می‌بینید، همان چیزی نیست که مشاهده می‌کنید. مشاهده را با دوربین عکاسی نمی‌توان انجام داد. این کار، یک بازسازی مصنوعی رویداد بعد از ضبط همه داده‌ها در مورد یک امر محقق است. در حقیقت، یک ناظر با هوش بدین ترتیب از کل مسئله احتراز می‌کند که دستیاری را که مجهز به ساعت‌هایی همزمان‌شده با یک ساعت اصلی هستند در مواضع راه‌بردی قرار می‌دهد تا اندازه‌گیری‌های زمان هر صحنه در محل صورت گیرد. تذکر مطالب فوق برای تأکید بر آن است که نسبیت همزمانی یک مغایرت اصیل میان اندازه‌گیری‌هایی است که توسط ناظرانی توانا و ماهر و در حال حرکت نسبت به هم انجام می‌شوند و نه یک قصور در منظورکردن زمان حرکت سیگنال نوری.

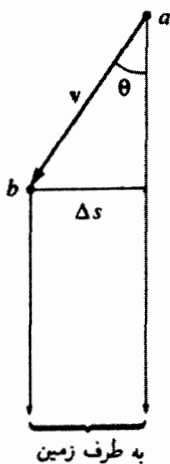
مسئله ۱۲-۵ ساعت‌های همزمان‌شده‌ای به فواصل مساوی یک میلیون کیلومتری از یکدیگر روی خط مستقیمی قرار دارند. وقتی اولین ساعت نزدیک شما ساعت ۱۲ ظهر را می‌خواند:

(الف) روی ۹۰امین ساعت چه زمانی را می‌بینید؟

(ب) چه زمانی را روی آن ساعت مشاهده می‌کنید؟

مسئله ۱۲-۶ تقریباً هر ۲ سال یک بار، روزنامهٔ نیویورک تایمز مقاله‌ای دربارهٔ ادعای یک منجم دال بر یافتن جسم جدیدی که تندتر از سرعت نور حرکت می‌کند منتشر می‌کند. بسیاری از این گزارشها ناشی از عدم تشخیص بین آنچه دیده‌شده از آنچه مشاهده شده است و این همان قصور

در منظور کردن زمان حرکت سیگنالهای نوری است. به مثالی می پردازیم: ستاره ای با سرعت v ، تحت زاویه θ نسبت به خط دید، حرکت می کند (شکل ۱۲-۶). سرعت ظاهری آن در آسمان چقدر است؟ (فرض کنید سیگنال نوری از b در زمان Δt بعد از سیگنال a به زمین می رسد، و در این میان ستاره مسافت Δs را در کره آسمانی با "سرعت ظاهری" یعنی $\Delta s / \Delta t$ پیماید.) به ازای چه زاویه θ ، سرعت ظاهری بیشینه است؟ نشان دهید که سرعت ظاهری می تواند به مراتب از c بزرگتر باشد، حتی اگر v خود کمتر از c باشد.



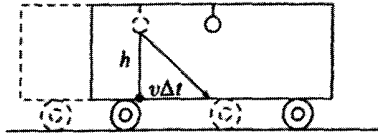
شکل ۱۲-۶

۲. اتساع زمان. حال پرتو نوری را در نظر بگیرید که از لامپ آویخته در واگن، مستقیماً به کف آن برخورد می کند. پرسش: این حرکت چه مدت طول می کشد؟ از دیدگاه ناظر مستقر در قطار جواب آسان است: اگر ارتفاع واگن را h بنامیم، زمان برابر است با

$$\Delta \bar{t} = \frac{h}{c} \quad (۴-۱۲)$$

(پاره خط بالای $\Delta \bar{t}$ نشان دهنده اندازه گیری داخل قطار است). از طرفی دیگر، از دید ناظر زمینی این پرتو باید راه طولانیتری برود، زیرا خود قطار در حرکت است. در شکل ۱۲-۷ می بینیم که این مسافت برابر است با $\sqrt{h^2 + (v\Delta t)^2}$ ، از این رو

$$\Delta t = \frac{\sqrt{h^2 + (v\Delta t)^2}}{c}$$



شکل ۱۲-۷

با ساده کردن داریم

$$\Delta t = \frac{h}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

و بنابراین

$$\Delta \bar{t} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \Delta t \quad (۵-۱۲)$$

بدیهی است که زمان سپری شده بین این دو رویداد — (الف) خروج نور از لامپ، و (ب) رسیدن نور به کف — از دیدگاه دو ناظر، متفاوت است. در واقع بازه ثابت شده در ساعت قطار، $\Delta \bar{t}$ ، با ضریب زیر کوتاهتر است

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (۶-۱۲)$$

نتیجه گیری: ساعت‌های متحرک کند کار می‌کنند.

این را اتساع زمان می‌نامند. این مسئله ارتباطی با مکانیک ساعت‌ها ندارد بلکه گزاره‌ای در مورد سرشت زمان است که در تمام موارد مربوط به زمان به کار می‌رود.

هیچ یک از پیش‌بینی‌های اینشتین، بیش از اتساع زمان، تأییدات تماشایی و قانع‌کننده ندارند. بیشتر ذرات بنیادی ناپایدارند: این ذرات بعد از طول عمر مشخصه‌ای^۱ که برای ذرات مختلف متفاوت است و امی‌باشند. طول عمر یک نوترون ۱۵ دقیقه، موئون $10^{-6} \text{ s} \times 2$ و از آن یک پیون خنثی $10^{-17} \text{ s} \times 9$ است. اما اینها همگی طول عمر ذرات در حال سکون‌اند. وقتی ذرات با سرعت‌هایی نزدیک به c حرکت می‌کنند عمر طولانیتری دارند، زیرا ساعت‌های درونی آنها (هر چیزی که به آنها گذشت زمان را نشان می‌دهد) بنا بر فرمول اتساع زمان اینشتین کندتر کار می‌کنند.

۱. در واقع یک ذره مشخص ممکن است طول عمر کمتری یا بیشتر از این زمان داشته باشد. فروپاشی ذرات فرایندی کاتوره‌ای است، و در واقع باید از زمان عمر متوسط برای ذرات صحبت کنیم. اما برای احتراز از پیچیدگی نامربوط چنین وانمود می‌کنیم که هر ذره دقیقاً بعد از زمان عمر متوسط فرو می‌باشد.

مثال ۱-۱۲

موثونی با سرعت $3/5$ سرعت نور در آزمایشگاه حرکت می‌کند. طول عمر آن چقدر است؟

حل: در این مورد

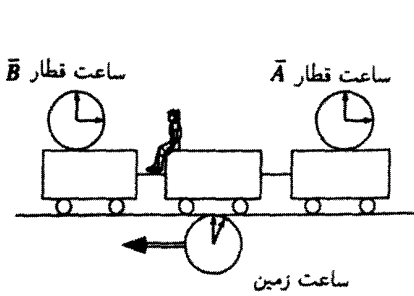
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}} = \frac{5}{4}$$

و بنابراین عمر طولانیتری (نسبت به حال سکون) با ضریب $5/4$ برابر دارد

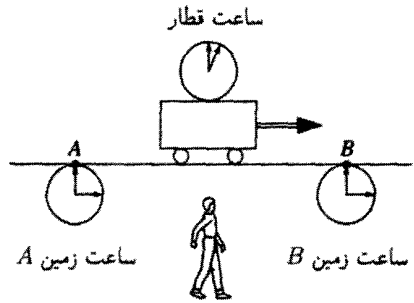
$$\frac{5}{4} \times (2 \times 10^{-6}) \text{ s} = 2.5 \times 10^{-6} \text{ s}$$

ممکن است تصور کنید اتساع زمان با اصل نسبیت سازگار نیست. زیرا اگر ناظر زمینی می‌گوید ساعت قطار کند کار می‌کند، به همین ترتیب ناظر مستقر در قطار هم می‌تواند مدعی کند کارکردن ساعت زمینی شود؛ از دید قطار زمین در حرکت است. کدام ناظر درست می‌گوید؟ پاسخ: هر دو درست می‌گویند! در یک بررسی دقیقتر این تضاد از بین می‌رود. بگذارید این را توضیح دهیم: ناظر زمینی برای امتحان کردن آهنگ ساعت قطار از دو ساعت خودش استفاده می‌کند (شکل ۱۲-۸): از یکی برای مقایسه زمان شروع بازه، وقتی که ساعت قطار از نقطه A می‌گذرد، از ساعت دیگر برای مقایسه زمان در انتهای بازه وقتی که ساعت قطار از نقطه B می‌گذرد. البته قبل از آزمایش ساعت‌هایش باید همزمان شده باشند. آنچه وی می‌یابد این است که، فرضاً اگر ساعت قطار گذشت ۳ دقیقه را نشان دهد، بازه میان اعدادی که دو ساعت خودش نشان می‌دهند، ۵ دقیقه است. از این رو نتیجه می‌گیرد که ساعت قطار کند کار می‌کند.

در این حال ناظر مستقر در قطار نیز ساعت زمینی را به همان ترتیب امتحان می‌کند: او هم دو ساعت دقیقاً همزمان شده قطار را به‌کار می‌برد و زمان آنها را با ساعت زمینی به ترتیب عبور از مقابل آن مقایسه می‌کند (شکل ۱۲-۹). او نیز درمی‌یابد که وقتی ساعت زمینی ۳ دقیقه را ثبت می‌کند بازه میان ساعت‌های قطار ۵ دقیقه است و چنین نتیجه می‌گیرد که ساعت زمینی کند کار می‌کند. آیا تضادی در این میان هست؟ خیر، زیرا دو ناظر چیزهای مختلفی را اندازه گرفته‌اند. ناظر زمینی یک ساعت قطار را با دو ساعت زمینی مقایسه کرده است؛ ناظر مستقر در قطار یک ساعت زمینی را با دو ساعت قطار مقایسه کرده است. بنابراین، هر دو شیوه درستی را پی گرفته‌اند. بدین ترتیب که یک ساعت متحرک را با دو ساعت ساکن مقایسه کرده‌اند. "که این‌طور" خواهید گفت "ساعت‌های ساکن در هر مورد همزمان شده‌اند و بنابراین استفاده از دو ساعت مختلف مانعی



شکل ۹-۱۲



شکل ۸-۱۲

ندارد. اما نکته اینجاست که ساعت‌های کاملاً همزمان شده در یک دستگاه وقتی از دستگاه دیگری مشاهده می‌شوند همزمان نیستند. اینها نمی‌توانند همزمان باشند زیرا گفتن اینکه دو ساعت همزمان هستند به معنی آن است که همزمان ساعت ۱۲ را نشان می‌دهند، و قبلاً دیدیم که چیزی که از دید یک ناظر همزمان است نسبت به ناظر دیگر همزمان نیست. بنابراین، در حالی که هر ناظر از دید خودش یک اندازه‌گیری سالم و دقیقی را انجام داده است ناظر دیگر که فرایند را تماشا می‌کند بر این باور است که دیگری اشتباه فاحشی می‌کند و آن این است که از دو ساعت همزمان نشده استفاده می‌کند. بدین سان، به رغم این حقیقت که ساعت‌های ناظر روی زمین در واقع کند کار می‌کنند وی نتیجه می‌گیرد که ساعت‌های ناظر در قطار کند کار می‌کنند (و بالعکس).

از آنجایی که ساعت‌های متحرک همزمان شده نیستند، برای آزمون اتساع زمان، لازم است اساساً توجه خود را به یک تک ساعت متحرک معطوف داریم. همه ساعت‌های متحرک به یک نسبت کند کار می‌کنند، اما نمی‌توانید سنجش زمان را از یک ساعت شروع کنید و بعد به ساعت دیگر متوسل شوید، زیرا این دو در آغاز یکسان نبودند. اما می‌توانید هر تعداد ساعت ساکن به کار ببرید. (ساکن نسبت به شما به عنوان ناظر) زیرا اینها دقیقاً همزمان شده‌اند (ناظران متحرک در این مورد بحث می‌کنند، اما این مسئله آنهاست).

مثال ۲-۱۲

پارادوکس دوقلوها. شخصی در ۲۱ امین سالگرد تولد خود با یک سفینه فضایی با سرعت $c(12/13)$ از زمین بلند می‌شود. بعد از ۵ سال از روی ساعت خودش با همان سرعت به طرف زمین برمی‌گردد تا به برادر دوقلوی خود که در خانه مانده بود بپیوندد. پرسش: سن هر یک در این تجدید دیدار چقدر است؟

حل: مسافر ما ۱۰ سال پیر شده است (۵ سال رفتن و ۵ سال برگشتن) و بنابراین در برگشت دقیقاً ۳۱ امین سالگرد خود را جشن می‌گیرد. با وجود این از دیدگاه ناظران زمینی ساعت

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (12/13)^2}} = \frac{13}{5}$$

کند کار کرده است. ساعت‌های زمینی $26 = 10 \times (13/5)$ سال را نشان می‌دهند و بنابراین برادر مسافر ماکه در زمین است ۴۷ امین سالگرد تولد خودش را جشن می‌گیرد و از مسافر ما ۱۶ سال پیرتر است! اما فریب نخورید: این چشمه جوانی برای دوقلوی مسافر نیست و دلیلی ندارد که عمری طولانی‌تر از برادرش بکند. مسافر تنها کندتر زندگی کرده است. در طول مسافرت تمام فرایندهای زیست‌شناختی، سوخت‌وساز، نبض، افکار و گفتار تحت تأثیر اتساع زمانی بوده‌اند که بر ساعت وی تأثیر گذارده است. پارادوکس دوقلوا هنگامی به وجود می‌آید که سعی کنیم این داستان را از دیدگاه مسافر بگوئیم. مسافر ما به مدت پنج سال زمین را با سرعت $c(12/13)$ در حال دور شدن از خود و سپس برگشت آن را به سوی خود می‌بیند. از دید مسافر، خودش در حال سکون و استراحت و برادرش در حال حرکت است و از این نظر برادر زمینی باید در مواجهه موقع برگشت، جوانتر به نظر برسد. مقاله‌های متعددی درباره پارادوکس دوقلوا به رشته تحریر در آمده‌اند اما واقعیت آن است که اصلاً پارادوکسی در این میان وجود ندارد: تحلیل دوم قطعاً غلط است. این دوقلوا هم‌ارز نیستند. به مسافر ما در برگشت به زمین شتاب وارد می‌شود، اما به برادرش خیر. به زبان ساده‌تر مسافر ما در دستگاه لخت قرار ندارد، به عبارت دقیقتر، در دور شدن از زمین در یک دستگاه لخت و در برگشت به آن در دستگاهی کاملاً متفاوت قرار دارد. در مسئله ۱۲-۱۶ نحوه تحلیل درست مسئله را از دیدگاه مسافر خواهید دید، اما برای رفع پارادوکس کافی است توجه کنید که دوقلوی مسافر ما نمی‌تواند ادعا کند یک ناظر ساکن است زیرا امکان ندارد کسی تحت تأثیر شتاب قرار گرفته در عین حال ساکن بماند. ■

مسئله ۱۲-۷ در یک تجربه آزمایشگاهی مشاهده می‌شود که موثونی قبل از فروپاشی 800 متر را طی می‌کند. دانشجویی که طول عمر موثون را (2×10^{-6} s) اندازه گرفته است، سرعت حرکت موثون را چنین محاسبه می‌کند.

$$v = \frac{800 \text{ m}}{2 \times 10^{-6} \text{ s}} = 4 \times 10^8 \text{ m/s}$$

یعنی سرعتی بالاتر از سرعت نور! خطای دانشجو در کجاست و سرعت واقعی موثون چقدر است؟

مسئله ۱۲-۸ یک سفینه فضایی با سرعت $c(3/5)$ زمین را ترک می‌کند. بعد از یک ساعت حرکت (از روی ساعت سفینه فضایی) از سفینه یک سیگنال نوری به زمین ارسال می‌شود.

(الف) ساعت ارسال سیگنال از روی ساعت زمینی کی بوده است؟

(ب) از روی ساعت زمینی چه مدت بعد از شروع حرکت سفینه سیگنال به زمین می‌رسد؟

(ج) از دیدگاه ناظر مستقر در سفینه چه مدت بعد از حرکت سفینه طول می‌کشد سیگنال به

□

زمین برسد؟

۳. انقباض لورنتس. برای سومین آزمایش خیالی فرض کنید در یک انتهای قطاری یک لامپ و در طرف مقابل آن یک آینه قرار داده باشیم تا بتوانیم یک سیگنال نوری را توسط آن بازتابانیم (شکل ۱۰-۱۲). پرسش: رفت و برگشت سیگنال چه مدت طول می‌کشد؟ از دید ناظر مستقر در قطار جواب چنین است

$$\Delta \bar{t} = 2 \frac{\Delta \bar{x}}{c} \quad (7-12)$$

که در آن $\Delta \bar{x}$ طول قطار است (همانند گذشته اندازه‌گیرها در قطار صورت گرفته است). از دید یک ناظر بر روی زمین فرایند بر اثر حرکت قطار بسیار پیچیده‌تر است. اگر زمان رسیدن سیگنال نوری به جلو را با Δt_1 و برگشت آن به عقب را Δt_2 بنامیم، آنگاه (شکل ۱۱-۱۲)

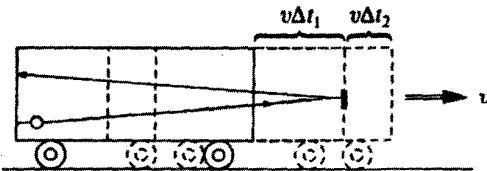
$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x + v \Delta t_1}{c}, \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta x - v \Delta t_2}{c}$$

و با حل آنها داریم

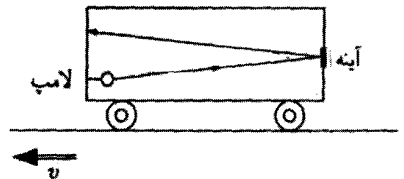
$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x}{c - v}, \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta x}{c + v}$$

و بنابراین زمان رفت و برگشت می‌شود

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2 \frac{\Delta x}{c} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)} \quad (8-12)$$



شکل ۱۱-۱۲



شکل ۱۰-۱۲

در این میان، همین بازه‌های زمانی بنابه فرمول اتساع زمان، معادله (۱۲-۵)، به همدیگر مرتبط‌اند

$$\Delta \bar{t} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \Delta t$$

با قرار دادن معادله اخیر در معادلات (۱۲-۷) و (۱۲-۸) نتیجه می‌گیریم که

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Delta x \quad (9-12)$$

یعنی طول قطار از دید ناظر زمینی با ناظر مستقر در آن یکی نیست. از دیدگاه ناظر زمینی این طول قدری کوتاه‌تر است.

نتیجه‌گیری: اجسام متحرک کوتاه می‌شوند.

این را انقباض لورنتس می‌نامیم. توجه کنید که همان ضریب

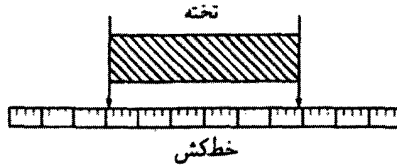
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

هم در فرمول اتساع زمان و هم در فرمول انقباض لورنتس ظاهر می‌شود. از این‌رو همواره راحت به یادتان می‌آید که: ساعت‌های متحرک کند کار می‌کنند و خط‌کش‌های متحرک کوتاه می‌شوند و ضریب تبدیل همواره γ است.

بدیهی است ناظر مستقر در قطار فکر نمی‌کند طول قطارش کوتاه شده باشد. متر اندازه‌گیری او با همان ضریب منقبض شده است، از این‌رو تمام اندازه‌گیریهای او با زمانی که قطار در ایستگاه ساکن است برابر است. در واقع از دید او اجسام روی زمین کوتاه شده‌اند. اینجا هم دوباره یک مسئله پارادوکسی ایجاد می‌شود: اگر A بگوید متر B کوتاه‌شده و B هم معتقد باشد متر A کوتاه‌شده کدام به حق هستند؟ پاسخ: هر دو! اما برای بررسی دقیق باید فرایند واقعی اندازه‌گیری طول را یاد بگیریم.

فرض کنید طول تخته‌ای را می‌خواهید اندازه بگیرید. اگر تخته (نسبت به شما) ساکن باشد به‌سادگی خط‌کش خود را زیر آن می‌گذارید و اعداد دو طرف را خوانده از هم کم می‌کنید تا طول تخته معلوم شود (شکل ۱۲-۱۲). (اگر واقعاً باهوش باشید یک انتهای خط‌کش را مقابل یک انتهای تخته قرار می‌دهید — آن‌گاه باید فقط یک عدد بخوانید).

حال اگر تخته در حرکت باشد چه؟ داستان مثل قبل است با این تفاوت که باید دو سر را در یک و همان لحظه زمانی بخوانید. اگر چنین عمل نکنید با حرکت تخته جواب غلط خواهید گرفت.



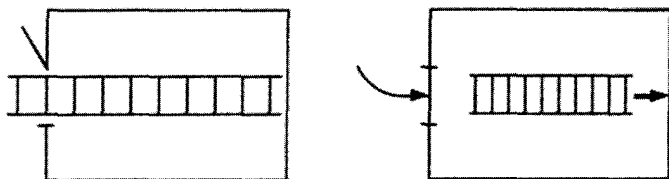
شکل ۱۲-۱۲

مسئله در اینجاست: به دلیل نسبیت همزمانی، دو ناظر در آنچه "یک لحظه زمانی" را تشکیل می‌دهد، هم عقیده نیستند. وقتی شخص مستقر در روی زمین طول قطار را اندازه می‌گیرد، وی مکان دو انتها را در یک لحظه در دستگاه خودش می‌خواند. اما ناظر مستقر در قطار که او را نظاره می‌کند اعتراض می‌کند که او ابتدا قسمت جلو را می‌خواند، سپس لحظه‌ای صبر می‌کند و آن‌گاه قسمت عقب را می‌خواند. در نتیجه، طبیعتاً طول را کوتاه اندازه می‌گیرد، گرچه به نظر (ناظر در قطار) او خطکش کوتاه شده‌ای را به کار می‌برد که در غیر این صورت عددی بسیار بزرگ را به دست می‌داد. هر دو ناظر، طولها را (از دید چارچوبهای لختی که در آن هستند) درست اندازه می‌گیرند و هر یک خطکش دیگری را کوتاه شده می‌بیند. با این همه، هیچ ناسازگاری وجود ندارد، زیرا آنها چیزهای متفاوتی را اندازه می‌گیرند و هر یک روش دیگری را ناکامل می‌داند.

مثال ۱۲-۳

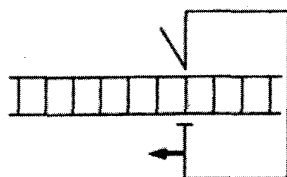
پارادوکس نردبان و انبار. برخلاف اتساع زمان، هیچ روش مستقیمی برای تأیید انقباض لورنتس وجود ندارد، زیرا یافتن جسمی قابل اندازه‌گیری که با سرعتی نزدیک به نور حرکت کند بسیار دشوار است. تمثیل زیر نشان می‌دهد که اگر رسیدن به سرعت نور آسانتر امکان‌پذیر بود چه دنیای عجیبی داشتیم.

کشاورزی نردبانی بسیار طویل داشت که در انبار جا نمی‌گرفت [شکل ۱۲-۱۳ (الف)]. برحسب تضادف روزی درباره نسبیت مطالعه کرد و خودش راه‌حلی برای مسئله‌اش پیشنهاد کرد. او دخترش را وادار کرد با در دست داشتن نردبان هر چه سریعتر بدود — نردبان متحرک، و کوتاه شده بر اثر انقباض لورنتس، ممکن بود به‌سادگی در انبار قرار گیرد. برای این کار دختر می‌بایست با سرعت به طرف در انبار بدود، سپس کشاورز محکم در را بسته و نردبان در داخل بماند [شکل ۱۲-۱۳ (ب)]. این دختر هم کمی بیشتر از پدرش درباره نسبیت کتاب خوانده بود؛ او می‌گفت که نسبت به چارچوب مرجع خودش انبار کوتاه می‌شود، نه نردبان و بنابراین جا گرفتن نردبان در مقایسه با وضعیتی که هر دو در حال سکون باشند هم مشکلتر است [شکل ۱۲-۱۳ (ج)]. پرسش: کدام یک درست می‌گویند؟ آیا نردبان داخل انبار جا می‌گیرد یا خیر؟



(الف)

(ب)



(ج)

شکل ۱۲-۱۳

حل: هر دو درست می‌گویند! وقتی می‌گویید "نردبان در داخل انبار است"، منظورتان آن است که تمام اجزای آن در یک لحظه زمانی داخل انبار هستند، اما از نظر نسبیت همزمانی، این وضعیتی است که به ناظر بستگی دارد. در واقع دو رویداد مربوط به هم در اینجا وجود دارند:

الف) قسمت عقب نردبان به دیوار می‌رسد.

ب) قسمت جلو نردبان به دیوار انتهایی انبار برخورد می‌کند.

کشاورز می‌گوید الف قبل از ب رخ می‌دهد، بنابراین زمانی وجود دارد که در آن کل نردبان در داخل انبار قرار گرفته است؛ دختر کشاورز می‌گوید ب قبل از الف اتفاق می‌افتد و بنابراین چنین زمانی وجود ندارد. آیا تناقضی هست؟ خیر — تنها تفاوت، مربوط به دیدگاه است.

ممکن است اعتراض کنید و بگویید، همه چیز شفاف است؛ یا نردبان داخل انبار است یا داخل انبار نیست در این صورت اعتراضی وجود ندارد. درست است اما عنصر جدیدی را به داستان افزوده‌اید: وقتی که نردبان متوقف می‌شود، چه اتفاقی می‌افتد؟ فرض کنید کشاورز آخرین پله نردبان را محکم با یک دست بگیرد و با دست دیگر در را محکم ببندد. حال نردبان با فرض ثابت و محکم بودن باید به طول حالت سکونش انبساط یابد. از قرار معلوم قسمت جلو نردبان حتی وقتی قسمت عقب آن متوقف شده است به حرکت ادامه می‌دهد! بر اثر این انبساط شبیه آکوردئون، قسمت جلویی نردبان به دیوار انتهایی انبار فرو می‌رود. در حقیقت تمام تصورات ما درباره جسم "صلب" در نسبیت بی‌معنی می‌شود زیرا با تغییرات سرعت قسمتهای مختلف جسم صلب به‌طور کلی همزمان شتاب نمی‌گیرند — بدین ترتیب ماده به‌گونه‌ای کشیده یا جمع می‌شود تا به طول متناظر با سرعت جدید برسد.

اما برای برگشت به پرسش مورد بحث: وقتی در نهایت نردبان به حال سکون در می‌آید آیا داخل انبار است یا نه؟ پاسخ مبهم است. وقتی قسمت جلو نردبان به دیوار مقابل انبار برخورد می‌کند چیزی باید اتفاق افتد و کشاورز یا با یک نردبان شکسته در داخل انبار مواجه است یا با نردبان سالم که به زور، در سوراخی در دیوار قرار گرفته است. در هر صورت وی از نتیجه کار ناخرسند است.

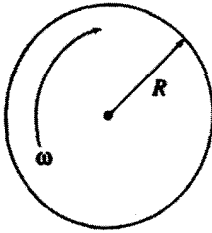
آخرین اظهار نظر دربارهٔ انقباض لورنتس. یک جسم متحرک فقط در امتداد حرکتش کوتاه می‌شود:

ابعاد عمود بر سرعت متقبض نمی‌شوند.

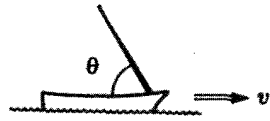
در به دست آوردن فرمول اتساع زمان، اطمینان داشتیم که ارتفاع قطار از دید هر دو ناظر مساوی است. حال با یک آزمایش خیالی جالب، که تیلور و ویلر^۱ مطرح کرده‌اند، این را اثبات می‌کنیم. فرض کنید دیواری در کنار خط راه‌آهن بنا کنیم، و یک متر بالاتر از ریلها (برحسب اندازه‌گیری در روی زمین)، یک خط افقی آبی رنگ روی دیوار بکشیم. وقتی قطار عبور می‌کند، یک مسافر در حالی که از پنجره قطار به بیرون خم شده است به فاصلهٔ یک متر بالاتر از ریلها (برحسب اندازه‌گیری در داخل قطار) یک خط قرمز روی دیوار می‌کشد. پرسش: آیا این خط قرمز ترسیمی مسافر بالاتر از خط آبی است یا پایینتر از آن؟ اگر در امتداد عمود بر حرکت هم انقباض حاصل می‌شد آن‌گاه ناظر زمینی انتظار می‌داشت که خط قرمز پایینتر باشد، در حالی که ناظر مستقر در قطار می‌گفت آبی پایینتر است (بدیهی است برای ناظر اخیر، زمین متحرک است). اصل نسبیت می‌گوید که هر دو ناظر به یک اندازه درست می‌گویند، اما هر دو گفتار نمی‌تواند درست باشد. هیچ دقت و نیزیبنی در همزمانی و هماهنگی ساعتها نمی‌تواند این تناقض را تعبیر کند؛ یا خط آبی بالاتر است یا خط قرمز — مگر اینکه آن دو دقیقاً برهم منطبق باشند که این یک نتیجه‌گیری اجتناب‌ناپذیر است. بنابراین قانون انقباض (یا انبساط) برای ابعاد عمود بر مسیر حرکت نمی‌تواند صادق باشد، چه در این صورت به پیش‌بینیهای ناسازگار مرتفع‌ناشدنی می‌رسیم.

مسئله ۹-۱۲ طول اتومبیل A در حال سکون ۲ برابر طول اتومبیل B است. وقتی اتومبیل A از اتومبیل B سبقت می‌گیرد، پلیسی (ساکن) مشاهده می‌کند که طول هر دو اتومبیل با هم برابر است. اتومبیل B با نصف سرعت نور در حرکت است. سرعت اتومبیل A چقدر است؟ (جواب را به صورت مضربی از c بنویسید.)

1. E. F. Taylor and J. A. Wheeler, *Spacetime Physics* (San Francisco: W. H. Freeman, 1966). J. H. Smith, *Introduction to Special Relativity* (Champaign, IL: Stipes, 1965).



شکل ۱۲-۱۵



شکل ۱۲-۱۴

مسئله ۱۰-۱۲ یک قایق بادبانی به‌گونه‌ای ساخته شده است که تیرک آن نسبت به سطح قایق زاویه θ می‌سازد. از دید ناظری که در ساحل قرار دارد قایق با سرعت v حرکت می‌کند (شکل ۱۲-۱۴). از دید این ناظر زاویه تیرک چقدر است؟

! مسئله ۱۱-۱۲ یک میزگرد به شعاع R با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند (شکل ۱۲-۱۵). محیط میز احتمالاً آنقباض لورنتسی می‌یابد، اما شعاع میز (که عمود بر سرعت است) خیر. نسبت محیط به قطر برحسب ω و R چقدر است؟ بنابه قواعد هندسه معمولی این نسبت باید π باشد در این مورد چه می‌شود؟ [این را پارادوکس ارنفست می‌نامند].
□

۳-۱-۱۲ تبدیلات لورنتس

هر فرایند فیزیکی از یک یا چند رویداد تشکیل می‌شود. "رویداد" چیزی است که در یک محل مشخص (x, y, z) و در زمان مشخص (t) صورت می‌گیرد. به‌عنوان مثال انفجار یک ترقه یک رویداد است؛ اما یک تور مسافرت به اروپا رویداد نیست. فرض کنید مختصات (x, y, z) رویداد خاص E را در یک دستگاه لخت K بدانیم، حال می‌خواهیم مختصات $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ همان رویداد را در دستگاه لخت دیگر \bar{K} بدانیم. آنچه ما نیاز داریم یک "واژه‌نامه" برای ترجمه زبان K به زبان \bar{K} است.

محورها را مطابق شکل ۱۲-۱۶ طوری انتخاب می‌کنیم که \bar{K} در راستای محور x با سرعت v حرکت کند. "مبدأ زمان" ($t = 0$) را لحظه‌ای می‌گیریم که مبدأ O و \bar{O} دو دستگاه برهم

۱. برای بحث و مراجع کتاب و مجله زیر را ببینید:

منطبق باشند، در این صورت \bar{O} در زمان t فاصله vt را از O خواهد داشت، و بنابراین

$$x = d + vt \quad (۱۰-۱۲)$$

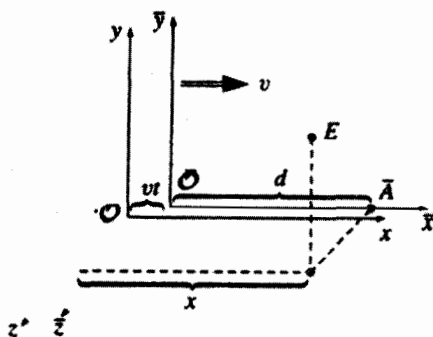
که در آن d به فاصله \bar{O} از \bar{A} در لحظه t است (\bar{A} نقطه‌ای روی محور \bar{x} است که در عین حال با E وقتی رویداد اتفاق می‌افتد هم‌تراز است). قبل از اینشتین هر کسی فوری می‌گفت که

$$d = \bar{x} \quad (۱۱-۱۲)$$

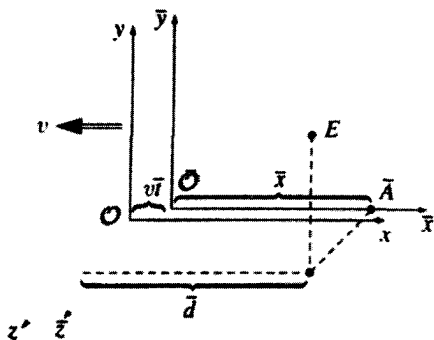
و "واژه‌نامه"، را تدوین می‌کرد

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} = x - vt \quad (۱) \\ \bar{y} = y \quad (۲) \\ \bar{z} = z \quad (۳) \\ \bar{t} = t \quad (۴) \end{array} \right\} \quad (۱۲-۱۲)$$

این تبدیلات را تبدیلات گالیله می‌نامند، گرچه نیازی به اسم خاصی نیست. معادله (۴) همیشه برقرار بود و نیازی به گفتن نداشت، زیرا از نظر همه گذشت زمان برای تمام ناظرها یکسان بود. ولی از نظر نسبیت خاص ما باید منتظر آن باشیم که معادله (۴) جای خود را به معادله‌ای بدهد که در اتساع زمان، نسبیت همزمانی، و همزمان نبودن ساعتهای متحرک نقش داشته باشد. به همین ترتیب تصحیحی در (۱) داریم که انقباض لورنتس را بیان می‌کند. اما حداقل برای (۲) و (۳)



شکل ۱۲-۱۶



شکل ۱۲-۱۷

تغییراتی انتظار نداریم زیرا هم‌اکنون دیده‌ایم که در طولهای عمود بر راستای حرکت تغییری حاصل نمی‌شود.

اما معادله کلاسیک (۱) کجا نقض می‌شود؟ پاسخ: در معادله (۱۲-۱۱). زیرا d فاصله \bar{O} از \bar{A} است که در S اندازه‌گیری شده است در حالی که x فاصله \bar{O} از \bar{A} با اندازه‌گیری در \bar{S} است. چون \bar{O} و \bar{A} در \bar{S} به حال سکون‌اند، همان \bar{x} همان "خطکش متحرک" است که نسبت به S کوتاه شده است

$$d = \frac{1}{\gamma} \bar{x} \quad (12-13)$$

با قرار دادن معادله اخیر در (۱۲-۱۰) معادله (۱) به صورت نسبیتی را چنین به دست می‌آوریم

$$\bar{x} = \gamma(x - vt) \quad (12-14)$$

بدیهی است همین استدلال را از دیدگاه \bar{S} هم می‌توان ارائه داد. نمودار شکل ۱۲-۱۷ شبیه قبلی است، اما در این مورد مقایسه را در زمان \bar{t} نشان می‌دهد، در حالی که شکل ۱۲-۱۶ مربوط به زمان t بود. (توجه کنید که t و \bar{t} یک لحظه فیزیکی را در E به نمایش می‌گذارند، اما نه در جایی دیگر و این به دلیل نسبیت همزمانی است.) اگر فرض کنیم \bar{S} نیز مبدأ زمان را به گونه‌ای برگزیند که دو مبدأ برهم منطبق باشند، آن‌گاه در زمان \bar{t} مبدأ \bar{O} از \bar{O} به اندازه $v\bar{t}$ فاصله دارد، و بنابراین

$$\bar{x} = \bar{d} - v\bar{t} \quad (12-15)$$

که در آن \bar{d} فاصله O از A در زمان \bar{t} است، و A همان نقطه روی محور x است که در لحظه وقوع رویداد هم سطح E است. فیزیکیان کلاسیک خواهد گفت که $x = \bar{d}$ ، و با استناد به (۴) دوباره (۱) به دست می‌آید. اما، همانند گذشته، نسبیت ادعا می‌کند که یک تمایز ظریف قابل مشاهده است: x فاصله O از A در دستگاه S است در حالی که \bar{d} فاصله O از A در \bar{S} است. چون O و A در S به حال سکون‌اند، x "خطکش متحرک" است و

$$\bar{d} = \frac{1}{\gamma} x \quad (16-12)$$

و در نتیجه

$$x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t}) \quad (17-12)$$

معادله اخیر تعجب‌آور نیست زیرا تقارن وضعیت ایجاب می‌کند که فرمول x برحسب \bar{x} و \bar{t} باید همانند فرمول \bar{x} برحسب x و t [معادله (۱۴-۱۲)] باشد، به استثنای تغییر علامت v . (اگر \bar{S} با سرعت v نسبت به S به سمت راست برود آنگاه S نسبت به \bar{S} با سرعت v به سمت چپ می‌رود.) معذالک، این نتیجه مفیدی است، زیرا اگر \bar{x} را از معادله (۱۴-۱۲) جایگذاری و سپس نسبت به \bar{t} مرتب کنیم، "واژه‌نامه" نسبیتی را کامل کرده‌ایم:

$\bar{x} = \gamma(x - vt)$	(۱)	(18-12)
$\bar{y} = y$	(۲)	
$\bar{z} = z$	(۳)	
$\bar{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$	(۴)	

اینها معروف به تبدیلات لورنتس هستند که اینستین آنها را جایگزین تبدیلات گالیه کرد. همان‌گونه که مثالهای زیر نشان می‌دهند آنها حاوی تمام اطلاعات هندسی در نظریه نسبیت خاص‌اند. تبدیل معکوسی که ما \bar{S} را به S برمی‌گرداند به طریق جبری، با حل (۱) و (۲) برای x و t ، یا بسیار ساده‌تر، با تغییر علامت v به دست می‌آید.

$x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t})$	(۱')	(۱۹-۱۲)
$y = \bar{y}$	(۲')	
$z = \bar{z}$	(۳')	
$t = \gamma\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}\right)$	(۴')	

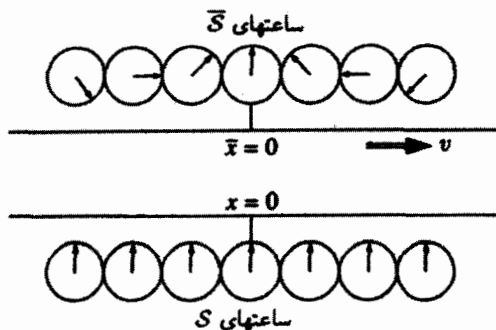
مثال ۴-۱۲

همزمانی، همزمان‌سازی و اتساع زمان. فرض کنید رویداد A در $x_A = 0$ ، $t_A = 0$ و رویداد B در $x_B = b$ و $t_B = 0$ اتفاق می‌افتد. این دو رویداد در S همزمان‌اند (هر دو در $t = 0$ روی می‌دهند)، اما در \bar{S} همزمان نیستند، زیرا بنا بر تبدیلات لورنتس $\bar{x}_A = 0$ و $\bar{x}_B = \gamma b$ و $\bar{t}_B = -\gamma(v/c^2)b$ نشان می‌دهند که B قبل از A اتفاق می‌افتد. البته این چیز تازه‌ای نیست، همان نسبیت همزمانی است اما خواستیم مسئله را از روی تبدیلات لورنتس نشان دهیم.

حال فرض کنید در زمان $t = 0$ ناظر S تصمیم به امتحان همه ساعت‌های مستقر در \bar{S} بگیرد. او در می‌یابد که این ساعتها بسته به مکانشان و قتهای متفاوتی نشان می‌دهند؛ از معادله (۴) داریم

$$\bar{t} = -\gamma \frac{v}{c^2} x$$

بنابراین ساعت‌هایی که در سمت چپ مبدأ (x منفی) قرار دارند، جلو، و آنهایی که در سمت راست آن واقع‌اند، عقب هستند و تفاوتها متناسب با فاصله آنها افزایش می‌یابد (شکل ۱۸-۱۲). فقط



شکل ۱۸-۱۲

ساعت اصلی واقع در مبدأ $\bar{t} = 0$ را نشان می‌دهد. بنابراین ناهمزمانی ساعت‌های متحرک نیز مستقیماً از تبدیلات لورنتس نتیجه می‌شود. بدیهی است از دید \bar{S} این ساعت‌های S هستند که ناهمزمان‌اند و این را می‌توانید با قرار دادن $\bar{t} = 0$ در معادله (۵) امتحان کنید. سرانجام، فرض کنید S توجه خود را معطوف به یک ساعت در \bar{S} (مثلاً در $\bar{x} = a$) کند، و آن ساعت را در بازه زمانی Δt تحت نظر بگیرد. چه مدت زمان از روی ساعت متحرک سپری می‌شود؟ چون \bar{x} ثابت است بنابر معادله (۵') داریم $\Delta \bar{t} = \gamma \Delta t$ و یا

$$\Delta \bar{t} = \frac{1}{\gamma} \Delta t$$

این همان فرمول قدیمی اتساع زمان است که حالا با تبدیلات لورنتس به آن رسیده‌ایم. لطفاً توجه کنید که در اینجا این \bar{x} است که آن را ثابت گرفتیم، زیرا که یک ساعت متحرک را نگاه می‌کنیم. اگر x را ثابت بگیریم، آن‌گاه ناظر عبور یک سری کامل ساعت‌های مختلف \bar{S} از مقابلمان هستیم و نمی‌توانیم بگوییم که آیا یکی از آنها کند کار می‌کند. ■

مثال ۱۲-۵

انقباض لورنتس. فرض کنید خط‌کشی با سرعت v به سمت راست حرکت کند. طول در حال سکون آن (یعنی طول اندازه‌گیری شده در \bar{S}) برابر است با $\bar{x}_r - \bar{x}_l$ که شاخص‌های پایین دلالت بر راست و چپ خط‌کش دارند. اگر ناظری مستقر در S بخواهد طول خط‌کش را اندازه بگیرد باید مکان‌های دو انتهای خط‌کش را در یک لحظه از زمان خود t بخواند: $\Delta x = x_r - x_l$. پس بنابر (۱) داریم

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma} \Delta \bar{x}$$

این همان فرمول آشنای انقباض لورنتس است. توجه کنید، که این t است که در اینجا ثابت گرفتیم، زیرا ما دربارهٔ اندازه‌گیری در S صحبت می‌کنیم، و ناظر در یک لحظه از زمان خود دو انتهای خط‌کش را علامت می‌گذارد. (ناظر \bar{S} لازم نیست چنین عجله کند زیرا خط‌کش در چارچوب او به حال سکون است.) ■

مثال ۱۲-۶

قاعدهٔ جمع سرعت اینشتین. فرض کنید ذره‌ای فاصلهٔ dx (در S) را در مدت dt بپیماید.

سرعت ذره، u برابر است با

$$u = \frac{dx}{dt}$$

در \bar{S} این ذره بنابر (۱) فاصله زیر را می‌پیماید

$$d\bar{x} = \gamma(dx - vdt)$$

و مدت حرکت بنابر (۴) برابر است با

$$d\bar{t} = \gamma \left(dt - \frac{v}{c^2} dx \right)$$

بنابراین سرعت در \bar{S} برابر است با

$$\bar{u} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma(dt - v/c^2 dx)} = \frac{(dx/dt - v)}{1 - v/c^2 dx/dt} = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} \quad (۲۰-۱۲)$$

این، قاعده جمع سرعت اینشتین است. برای رسیدن به نمادگذاری شفاف معادله (۱۲-۳)، A را ذره، B را دستگاه S و C را دستگاه \bar{S} بگیرید. آنگاه $u = v_{AB}$ ، $\bar{u} = v_{AC}$ و $v = v_{CB} = -v_{BC}$ از این رو معادله (۱۲-۲) همانند گذشته می‌شود

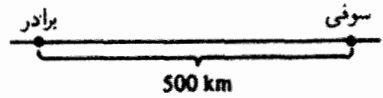
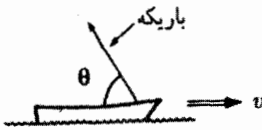
$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{(1 + v_{AB}v_{BC}/c^2)}$$

مسئله ۱۲-۱۲ معادله (۱۲-۱۸) را برای x, y, z, t بر حسب $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ حل کنید و امتحان کنید که به معادله (۱۲-۱۹) رسیده‌اید.

مسئله ۱۲-۱۳ دختر غیب‌گویی درست در لحظه‌ای که به انگشت برادر دوقلویش در 500 کیلومتری او با چکش ضربه می‌خورد، فریاد می‌کشد. یک دانشمند شکاک هر دو رویداد (حادثه برای برادر و گریه خواهر) را در هواپیمایی که با سرعت $c(12/13)$ به سمت راست در پرواز بود، مشاهده کرد (شکل ۱۲-۱۹). از دیدگاه این دانشمند کدام رویداد زودتر اتفاق افتاد؟ چند ثانیه زودتر بود؟

مسئله ۱۲-۱۴ (الف) در تمرین ۱۲-۶ چگونگی تبدیل سرعتها در امتداد x را با انتقال از S به \bar{S} دیدیم. فرمولهای مشابهی برای مؤلفه‌های y و z سرعت بیابید.

(ب) یک نورافکن در نقطه‌ای روی قایقی طوری نصب شده است که باریکه نور آن با کف قایق زاویه θ می‌سازد (شکل ۱۲-۲۰). اگر این قایق با سرعت v حرکت کند، زاویه‌ای که تحت آن، ناظر واقع در لنگرگاه باریکه را نسبت به کف قایق می‌بیند، چقدر است؟ این را با مسئله ۱۲-۱۰ مقایسه و تفاوت آنها را بیان کنید.



شکل ۱۲-۲۰

شکل ۱۲-۱۹

مسئله ۱۲-۱۵ احتمالاً مسئله ۱۲-۴ را از دیدگاه یک ناظر واقع بر روی زمین بررسی کردید. حال، مسئله را از دیدگاه پلیس، خلافکاران، و گلوله حل کنید. یعنی جاهای خالی جدول زیر را پر کنید.

→ سرعت ↓ نسبت به	زمین	پلیس	خلافکاران	گلوله	آیا آنها فرار می‌کنند؟
زمین	۰	$\frac{1}{3}c$	$\frac{3}{4}c$		
پلیس				$\frac{1}{3}c$	
خلافکاران					
گلوله					

! مسئله ۱۲-۱۶ باز هم پارادوکس دوقلوها. در ۲۱ امین سالروز تولد دوقلوها، خواهر وسیله پروازی پیدا می‌کند که او را با سرعت $c(4/5)$ به طرف ستاره X می‌برد در حالی که برادر دوقلویش در زمین می‌ماند. خواهر با رسیدن به ستاره X فوراً به وسیله مشابهی که در حال برگشت به زمین است می‌پرد و با همان سرعت $c(4/5)$ به زمین برمی‌گردد. او در ۳۹ امین سالروز تولد (با ساعت خودش) به زمین می‌رسد.

(الف) برادر او (که در زمین مانده) چند ساله است؟

(ب) ستاره X چقدر از زمین فاصله دارد؟ (جواب را برحسب سال نوری بنویسید).

دستگاه پرواز به طرف ستاره را با \bar{K} و دستگاه مربوط به وسیله برگشت دهنده را با \bar{K}' نشان دهید (دستگاه زمین S است). هر سه دستگاه، ساعت‌های اصلی خود را میزان کرده و مبدأ خود را طوری انتخاب می‌کنند که در لحظه عزیمت $t = \bar{t} = \bar{t}' = 0$, $x = \bar{x} = \bar{x}' = 0$ باشد.

(ج) مختصات (x, t) پرش (از وسیله دورشونده به وسیله بازگرداننده) در S کدام‌اند؟

(د) مختصات (\bar{x}, \bar{t}) پرش در \bar{K} کدام‌اند؟

(ه) مختصات (\bar{x}', \bar{t}') پرش در \bar{K}' کدام‌اند؟

(و) اگر دوقلوی مسافر بخواد ساعتش با ساعت \bar{K} همزمان شود، چگونه بلافاصله بعد از پرش باید آن را تنظیم کند؟ در صورت موفقیت در این کار، وقتی به زمین می‌رسد ساعتش چه عددی نشان می‌دهد؟ (البته با این کار سن او تغییری نمی‌کند، بدیهی است باز هم او ۳۹ ساله است، تنها ساعت خود را با \bar{K} همزمان کرده است).

(ز) اگر از دوقلوی مسافر بپرسیم که: همین الان سن برادرت چقدر است؟ پاسخ درست او (۱) درست قبل از پرش و (۲) درست بعد از پرش چیست؟ (بدیهی است در فاصله کوتاه بین (۱) و (۲) هیچ اتفاقی برای برادرش روی نمی‌دهد؛ آنچه سریعاً تغییر می‌کند منظور خواهرش از معنی عبارت "همین حالا به خانه برگردد، است").

(ح) زمان برگشت به مدت چند سال زمینی طول می‌کشد؟ این جواب را به (۲) از قسمت (ز) اضافه کنید تا معلوم شود، خواهر درباره سن برادرش در لحظه دیدار مجدد چه انتظاری داشته است؟ جوابتان را با (الف) مقایسه کنید. □

۴-۱-۱۲ ساختار فضا-زمان

۱. چار-بردار، تبدیلات لورنتس را می‌توان به صورت ساده‌تری، با استفاده از قراردادهای زیر، نوشت

$$x^\circ \equiv ct, \quad \beta \equiv \frac{v}{c} \quad (21-12)$$

استفاده از x° (به جای t) و β (به جای v) به مفهوم تغییر یکای زمان از ثانیه به متر است یعنی ۱ متر از x° متناظر با زمان لازم برای یک متر حرکت نور (در خلأ) است. اگر همزمان، مختصات x, y, z را طوری نشان دهیم که

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (22-12)$$

باشد، آن‌گاه تبدیلات لورنتس چنین نوشته می‌شوند

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ \bar{x}^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ \bar{x}^2 &= x^2 \\ \bar{x}^3 &= x^3 \end{aligned} \right\} \quad (۲۳-۱۲)$$

یا به صورت ماتریسی

$$\begin{pmatrix} \bar{x}^0 \\ \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (۲۴-۱۲)$$

با انتخاب اندیسه‌های یونانی از 0 تا 3 می‌توان از تک معادله زیر استفاده کرد

$$\bar{x}^\mu = \sum_{\nu=0}^3 (\Lambda^\mu_\nu) x^\nu \quad (۲۵-۱۲)$$

که در آن Λ ماتریس تبدیل لورنتس در معادله (۲۴-۱۲) است. (شاخص بالای μ علامت سطر و شاخص پایین ν علامت ستون است). یک امتیاز نوشتن به این روش فشرده این است که می‌توانیم از آن، به همان شکل، در یک تبدیل عمومی‌تری که در آن حرکت نسبی در راستای محور مشترک x نیست نیز استفاده کنیم؛ ماتریس Λ پیچیده‌تر خواهد شد اما ساختار معادله (۲۵-۱۲) تغییری نمی‌کند.

اگر این روش، دورانها را که در بخش ۱-۱-۵ مطالعه کردیم به یادتان آورد، تصادفی نیست. در آنجا توجه ما به تغییر مؤلفه‌ها در نتیجه تبدیل به دستگاه مختصات چرخیده بود؛ در اینجا می‌خواهیم از تغییر مؤلفه‌ها وقتی از یک دستگاه مختصات متحرک استفاده می‌کنیم آگاه شویم. در فصل اول یک "سه-بردار" را به صورت هر مجموعه‌ای از سه مؤلفه که تبدیل دورانی را به همان شیوه (x, y, z) انجام می‌دهند، تعریف کردیم؛ با گسترش این مفهوم، حل یک چار-بردار را به صورت هر مجموعه چهار مؤلفه‌ای، که تبدیلات لورنتس را با همان شیوه (x^0, x^1, x^2, x^3)

انجام می‌دهند تعریف می‌کنیم:

$$\bar{a}^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_\nu^\mu a^\nu \quad (26-12)$$

برای مورد خاص تبدیل روی محور x

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}^0 &= \gamma(a^0 - \beta a^1) \\ \bar{a}^1 &= \gamma(a^1 - \beta a^0) \\ \bar{a}^2 &= a^2 \\ \bar{a}^3 &= a^3 \end{aligned} \right\} \quad (27-12)$$

یک چار-بردار وجود دارد که مشابه حاصلضرب نقطه‌ای

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)$$

است، اما درست برابر با مجموع حاصلضرب مؤلفه‌های همنام نیست؛ بلکه مؤلفه‌های صفرم دارای علامت منفی‌اند

$$-a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \quad (28-12)$$

این، حاصلضرب عددی چهاربعدی است؛ باید خودتان امتحان کنید (مسئله ۱۲-۱۷) که مقدار آن در تمام دستگاه‌های لخت برابر است

$$-\bar{a}^0 \bar{b}^0 + \bar{a}^1 \bar{b}^1 + \bar{a}^2 \bar{b}^2 + \bar{a}^3 \bar{b}^3 = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \quad (29-12)$$

و همان‌گونه که ضرب نقطه‌ای، تحت دوران محورها ناورد (لاپتغیر) است، این ترکیب نیز تحت تبدیلات لورنتس ناورد است.

برای ملحوظ داشتن علامت منها، مناسب آن است که بردار هموردای a_μ را که تنها تفاوت آن با پادوردای a^μ فقط در علامت مؤلفه صفرم است معرفی کنیم:

$$a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3) \equiv (-a^0, a^1, a^2, a^3) \quad (30-12)$$

در شاخص‌گذاری باید بسیار دقت کنید: شاخصهای بالا مربوط به بردارهای پادوردا و شاخصهای پایین متعلق به بردارهای هموردا هستند. نتیجهٔ بالا یا پایین آوردن شاخص زمانی، اضافه شدن علامت منهای است ($a_0 = -a^0$)؛ بالا یا پایین آوردن شاخص مکانی تغییری را باعث نمی‌شود ($a_1 = a^1, a_2 = a^2, a_3 = a^3$). حال حاصلضرب عددی را می‌توان با نماد جمع‌بندی زیر نوشت

$$\sum_{\mu=0}^3 a_{\mu} b^{\mu} \quad (31-12)$$

یا به صورت فشرده‌تر

$$a_{\mu} b^{\mu} \quad (32-12)$$

هر آن‌گاه که یک شاخص یونانی در حاصلضربی تکرار شود، به مضمون جمع‌بندی است. یک بار به صورت شاخص هموردا و یک بار به صورت پادوردا. این قرارداد که ابداع اینشتین است و خودش آن را یکی از مهمترین کارهایش تلقی می‌کرد قرارداد جمع‌بندی اینشتین می‌نامند. البته می‌توانیم به علامت منها بدین ترتیب هم توجه کنیم که از هموردای b استفاده کنیم

$$a_{\mu} b^{\mu} = a^{\mu} b_{\mu} = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \quad (33-12)$$

• مسئله ۱۲-۱۷ با استفاده از معادله (۱۲-۲۷)، معادله (۱۲-۲۹) را امتحان کنید. [این کار صرفاً ناوردایی حاصلضرب عددی را در تبدیلات در امتداد x نشان می‌دهد. اما حاصلضرب عددی، تحت دوران نیز ناورداست، زیرا بر اولین جمله کاملاً بی‌تأثیر است و سه‌تای بعدی هم یک ضرب نقطه‌ای سه‌بعدی $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ تشکیل می‌دهند. با یک دوران مناسب، امتداد x را هر جا بخواهید می‌توانید انتخاب کنید، از این رو حاصلضرب عددی چهار-بعدی در واقع تحت تبدیلات لورنتس دلخواه ناوردا هستند.]

مسئله ۱۲-۱۸ (الف) ماتریسی بنویسید که تبدیل گالیله را توصیف کند [معادله (۱۲-۱۲)].

(ب) ماتریسی بنویسید که بیانگر تبدیل لورنتس در امتداد محور y باشد.

(ج) ماتریسی بنویسید که توصیف‌کنندهٔ یک تبدیل لورنتس با سرعت v در طول محور x و به دنبال آن تبدیل لورنتسی با سرعت \bar{v} در طول محور y باشد. آیا اینکه تبدیلات در چه مرتبه‌ای انجام یابد، مهم است؟

مسئله ۱۲-۱۹ هم‌ارزی بین دورانها و تبدیلات لورنتس با معرفی کمیت زیر به نام چالاکی^۱ نمایانتر می‌شود:

$$\theta \equiv \tanh^{-1}(v/c) \quad (۱۲-۳۴)$$

(الف) ماتریس تبدیل لورنتس Λ [معادله (۱۲-۲۴)] را برحسب θ بیان کنید، و آن را با ماتریس دوران [معادله (۱-۲۹)] مقایسه کنید.

برای توصیف حرکت، چالاکی از بعضی جهات مفهوم طبیعی‌تری نسبت به سرعت است.^۲ یک دلیل آن این است که تغییرات آن به جای $-c$ تا $+c$ از $-\infty$ تا $+\infty$ است. مهمتر اینکه، چالاکیها جمع می‌شوند در حالی که سرعتها جمع نمی‌شوند.

(ب) قانون جمع سرعت اینشتین را برحسب چالاکی بنویسید. □

۲. بازه ناوردایی. فرض کنید رویداد A در $(x_A^0, x_A^1, x_A^2, x_A^3)$ و رویداد B در $(x_B^0, x_B^1, x_B^2, x_B^3)$ حادث شوند. تفاضل

$$\Delta x^\mu \equiv x_A^\mu - x_B^\mu \quad (۱۲-۳۵)$$

چار-بردار جابه‌جایی است. حاصلضرب عددی Δx^μ با خودش کمیتی مهم است؛ ما آن را بازه میان دو رویداد می‌نامیم

$$I \equiv (\Delta x)_\mu (\Delta x)^\mu = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = -c^2 t^2 + d^2 \quad (۱۲-۳۶)$$

که در آن t اختلاف زمانی و d فاصله مکانی بین دو رویداد است. با انتقال به یک دستگاه متحرک، زمان بین A و B تغییر می‌کند ($\bar{t} \neq t$) و نیز فاصله مکانی هم تغییر می‌کند ($\bar{d} \neq d$)، اما بازه I ثابت باقی می‌ماند.

بسته به دو رویداد مورد بحث، بازه می‌تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد.

۱. اگر $I < 0$ باشد بازه را زمان‌گونه می‌نامیم، زیرا وقتی این علامت به دست می‌آید

که دو رویداد هم‌مکان ($d = 0$)، و فقط از نظر زمانی متفاوت باشند.

1. rapidity

2. E. F. Taylor and J. A. Wheeler, *Spacetime Physics* (San Francisco: W. H. Freeman, 1966).

۲. اگر $I > 0$ باشد بازه را فضاگونه می‌نامیم، زیرا این علامت ناشی از دو رویداد است که همزمان ($t = 0$) حادث شده اما از نظر مکانی از هم فاصله دارند.
۳. اگر $I = 0$ باشد، بازه را نورگونه می‌نامیم، زیرا هرگاه دو رویداد توسط سیگنالی که با سرعت نور حرکت می‌کند به همدیگر مربوط باشند، این معادله برقرار است.

اگر بازه مابین دو رویداد زمان‌گونه باشد، یک دستگاه لخت (که با تبدیل لورنتس قابل دسترسی است) وجود دارد که در آن، این دو رویداد، در یک نقطه اتفاق می‌افتند. زیرا اگر در قطاری که از A با سرعت $v = d/t$ به B می‌رود لی‌لی کنید، اگر رویداد A را در وقتی که رخ می‌دهد ترک کنید، می‌توانید به موقع از رویداد B در لحظه وقوع هم بگذرید؛ در دستگاه قطار، A و B در یک نقطه اتفاق می‌افتند. بدیهی است این کار را برای بازه فضاگونه نمی‌توانید انجام دهید، زیرا باید v بزرگتر از c باشد و هیچ ناظری نمی‌تواند از سرعت نور فراتر برود (موهومی می‌شود و تبدیلات لورنتس بی‌معنی). از طرف دیگر، اگر رویداد فضاگونه باشد، آنگاه دستگاهی وجود دارد که در آن، دو رویداد، همزمان روی می‌دهند (مسئله ۱۲-۲۱).

مسئله ۱۲-۲۰ (الف) رویداد A در نقطه $(x_A = 5, y_A = 3, z_A = 0)$ و در زمان t_A ($ct_A = 15$) و رویداد B در $(10, 8, 0)$ و $ct_B = 5$ ، هر دو دستگاه S روی می‌دهند.

۱. بازه ناوردای میان A و B چیست؟

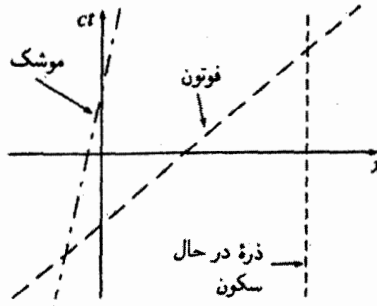
۲. آیا دستگاه لختی وجود دارد که در آن هر دو همزمان اتفاق افتند؟ اگر وجود دارد، سرعت آن را نسبت به S از نظر مقدار و جهت بیابید.

۳. آیا دستگاه لختی وجود دارد که در آن هر دو در یک نقطه روی دهند؟ اگر وجود دارد سرعت آن را نسبت به S بیابید.

(ب) قسمت (الف) را برای $A = (2, 0, 0)$ ، $ct = 1$ ؛ $B = (5, 0, 0)$ ، $ct = 3$ تکرار کنید.

مسئله ۱۲-۲۱ مختصات رویداد A عبارت‌اند از t_A ، $(x_A, 0, 0)$ ، و مختصات رویداد B عبارت‌اند از t_B ، $(x_B, 0, 0)$. با فرض آنکه بازه بین آنها فضاگونه باشد، سرعت دستگاهی را بیابید که در آن رویدادها همزمان باشند.

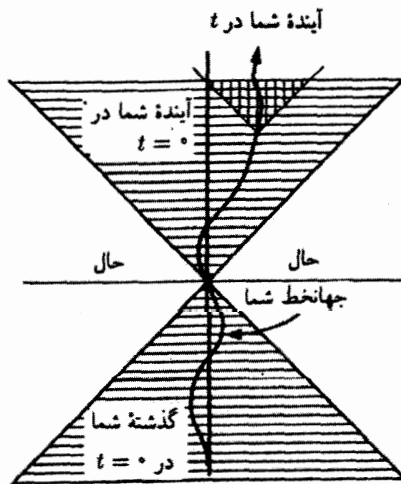
۳. نمودارهای فضا-زمان. اگر بخواهید حرکت ذره‌ای را به صورت ترسیمی نشان دهید، روش معمول رسم نمودار مکان نسبت به زمان است (یعنی x محور قائم و t محور افقی است). در چنین نموداری، سرعت را با خواندن شیب منحنی می‌توان به دست آورد. به دلایلی در نسبیت قرار داد را برعکس می‌گیرند: مکان را افقی و زمان (یا بهتر بگوییم $ct = x^0$) را قائم می‌گیریم. در این صورت سرعت از معکوس شیب به دست می‌آید. یک ذره ساکن به صورت خط قائم، فوتون



شکل ۲۱-۱۲

که با سرعت نور حرکت می‌کند با خطی به زاویه 45° و موشکی که با سرعتی میان آن دو حرکت می‌کند با خطی به شیب $c/v = 1/\beta$ (شکل ۲۱-۱۲) نمایش داده می‌شوند. چنین ترسیمی را نمودارهای مینکوفسکی می‌نامیم.

مسیر یک ذره در نمودار مینکوفسکی را جهانخط می‌نامند. فرض کنید از مبدأ در زمان $t = 0$ شروع کنید از آنجایی که هیچ ماده‌ای نمی‌تواند با سرعت بیشتر از نور حرکت کند جهانخط شما هیچگاه شیبی کمتر از یک ندارد، بنابراین حرکت شما منحصراً به ناحیه گوه‌ای شکل محدود به دو خط 45° است (شکل ۲۲-۱۲). این ناحیه را "آینده" شما می‌خوانیم زیرا مکان هندسی نقاط قابل دسترس شماست. بدیهی است، همچنان که زمان می‌گذرد و شما روی جهانخط برگزیده



شکل ۲۲-۱۲

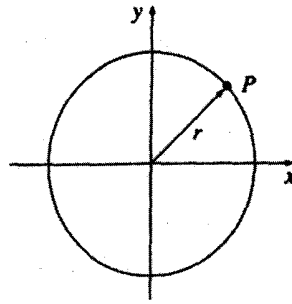
خودتان حرکت می‌کنید، حق انتخاب شما به تدریج کم می‌شود؛ "آینده" شما هر لحظه "گوه" رو به جلویی است که در هر نقطه‌ای که هستید ایجاد می‌شود. در این میان گوه رو به عقب نمایانگر "گذشته" شماست زیرا مکان هندسی تمام نقاطی است که ممکن است از آن آمده باشید. به همین ترتیب بقیه (نواحی خارج از این دو گوه) "حال" تعمیم یافته است. شما نه از آنجا آمده‌اید و نه می‌توانید به آن برسید. در واقع هیچ راهی برای نفوذ بر هر رویداد در "حال" وجود ندارد (زیرا پیام باید با سرعتی بیش از سرعت نور منتقل شود)؛ این یک پهنای گسترده‌ای از فضا زمان است که برایتان مطلقاً قابل دسترسی نیست.

ما امتدادهای y و z را در نظر نگرفته‌ایم. اگر یک محور y که از صفحه به سمت خارج است اضافه کنیم، "گوه‌ها" به مخروط تبدیل می‌شوند — و با یک محور غیر قابل ترسیم z ، مخروطها هم به فوق مخروطها تبدیل می‌شوند. از آنجایی که کرانه‌های این مخروطها مسیر پرتوهای نوری هستند، آن را مخروط نوری رو به جلو و مخروط نوری رو به عقب می‌نامیم. به عبارت دیگر آینده شما درون مخروط نوری رو به جلو و گذشته شما درون مخروط نوری رو به عقب است.

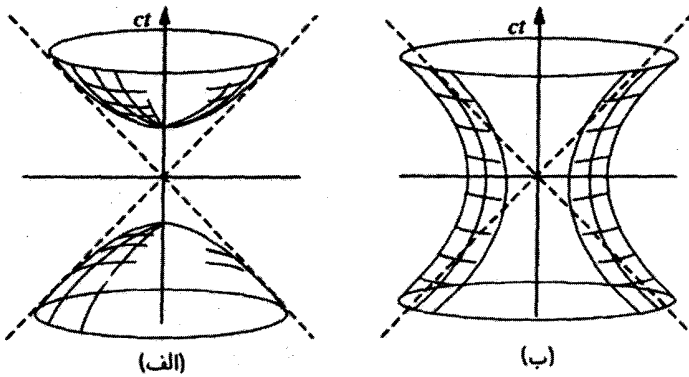
توجه کنید که شیب خطی که دو رویداد در نمودار فضا زمان به هم مربوط می‌کند، فوری به شما می‌گوید که آیا بازه ناوردای بین آنها زمان‌گونه (شیب بزرگتر از یک)، فضاگونه (شیب کمتر از یک)، و یا نورگونه (شیب یک) است. به عنوان مثال تمام نقاط در گذشته و آینده، نسبت به محل حال شما، زمان‌گونه‌اند، در حالی که نقاط در حال، فضاگونه‌اند، و نقاط روی مخروط نوری، نورگونه‌اند.

هرمان مینکوفسکی اولین کسی بود که اهمیت هندسی کامل نسبیت خاص را تشخیص داد. او یک مقاله کلاسیک را با این کلمات آغاز کرده است "از این پس فضا به تنهایی، و زمان به تنهایی محکوم‌اند که رنگ بیازند و سایه‌هایی بیش نباشند، و تنها نوعی اتحاد این دو دارای واقعیت وجود مستقل خواهد بود". این یک اندیشه زیباست، اما باید مراقب باشید زیاد موشکافی نکنید. زیرا به هیچ‌وجه چنین نیست که زمان هم "صرفاً یک مختصه دیگر هم‌مینا با x ، y و z " باشد (بجز اینکه بنابه دلایل مبهمی آن را به جای خط کش با ساعت اندازه می‌گیریم). نخیر: زمان کاملاً از بقیه متفاوت است و نشان تمایز آن هم علامت منها در بازه ناوردایی است. این علامت منها، برای فضا زمان یک هندسه هذلولوی فراهم می‌کند که به مراتب از هندسه دایره‌ای در فضای سه بعدی غنی تر است.

در دوران حول محور z ، نقطه P در صفحه xy یک دایره توصیف می‌کند: مکان هندسی تمام نقاط با فاصله ثابت $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ از مبدأ (شکل ۱۲-۲۳). ولی تحت تبدیلات لورنتس آنچه ثابت می‌ماند بازه $I = (x^2 - c^2 t^2)$ است، و مکان هندسی تمام نقاطی با بازه‌های مساوی یک هذلولوی است یا اگر محور y را هم اضافه کنیم یک هذلولوی وار دورانی. وقتی بازه زمان‌گونه است،



شکل ۱۲-۲۳



شکل ۱۲-۲۴

این یک "هذلولوی وار دو صفحه‌ای" است [شکل ۱۲-۲۴(الف)]; وقتی بازه فضاگونه است، یک "هذلولوی وار یک صفحه‌ای" است [شکل ۱۲-۲۴(ب)]. با استفاده از تبدیل لورنتس (یعنی رفتن به یک دستگاه لخت متحرک) مختصات (x, t) یک رویداد معلوم به (\bar{x}, \bar{t}) تغییر می‌کنند، اما این مختصات جدید در همان هذلولوی قرار می‌گیرند که (x, t) قرار گرفته بود. با ترکیبهای مناسب از تبدیلات لورنتس و دورانها، یک نقطه را می‌توان به دلخواه روی سطح یک هذلولوی وار معلوم به همه جا حرکت داد، اما هیچ ترکیب تبدیلی نمی‌تواند آن را، از صفحه بالایی هذلولوی وار زمان‌گونه به صفحه پایینی، یا به یک هذلولوی وار فضاگونه، حمل کند.

در بحث همزمانی گفتیم که ترتیب زمانی دو رویداد را می‌توان حداقل در موارد خاصی، به سادگی با رفتن به یک دستگاه متحرک معکوس کرد. اما حال می‌بینیم که چنین چیزی همیشه ممکن نیست: هرگاه بازه ناوردایی، بین دو رویداد زمان‌گونه باشد، ترتیب آنها مطلق است؛ اگر بازه فضاگونه باشد، ترتیب آنها به دستگاه لختی که در آن مشاهده می‌شود بستگی دارد. برحسب

نمودار فضا-زمان، یک رویداد در صفحه بالایی هذلولوی وار زمان‌گونه قطعاً بعد از $(0, 0)$ روی داده است، و رویداد صفحه پایین یقیناً قبل از آن؛ اما یک رویداد در هذلولوی وار فضاگونه یا در t مثبت روی داده است، یا در t منفی، و این به چارچوب مرجع شما بستگی دارد. این یک کنجکامی بی‌په‌په نیست، زیرا حافظ اندیشه علیت است که تمام فیزیک بر پایه آن قرار دارد. اگر همواره امکان جابه‌جایی ترتیب دو رویداد وجود می‌داشت، هیچگاه نمی‌توانستیم بگوییم "علت A علت B است" زیرا مشاهده‌کننده رقیب در مقابل خواهد گفت؛ B مقدم بر A است. به شرطی می‌توان از این سردرگمی اجتناب کرد که دو رویداد، فاصله زمان‌گونه داشته باشند. و رویدادهایی که به‌طور علی به هم مربوط‌اند، فاصله زمان‌گونه دارند؛ چه در غیر این صورت هیچ تأثیری نمی‌توانست از یکی به دیگری برسد، نتیجه‌گیری: بازه ناوردا بین رویدادهایی که به‌طور علی به هم مربوط‌اند همیشه زمان‌گونه است و ترتیب زمانی آنها برای همه ناظرین لخت یکسان است.

مسئله ۱۲-۲۲ (الف) یک نمودار فضا-زمان برای مسابقه (یا مکالمه) میان دو نفر در حال سکون، که به فاصله 10^6 فوت از هم قرار دارند رسم کنید. با فرض آنکه فاصله میان آن دو فضاگونه باشد ارتباط بین این دو چگونه ممکن است؟
(ب) شعر طنزآمیزی وجود دارد، بدین مضمون:

دختری بود به نام برایت،
که با سرعتی بیش از نور حرکت می‌کرد
روزی زمین را در جاده اینشتین ترک کرد
و شب قبل از آن به زمین برگشت.

چه فکر می‌کنید؟ حتی در صورتی که او با سرعتی بالاتر از نور حرکت می‌کرد آیا می‌توانست قبل از عزیمت برگردد؟ آیا می‌توانست قبل از عزیمت به مقصدی میانی برسد؟ یک نمودار فضا-زمان برای نشان دادن این حرکت رسم کنید.

مسئله ۱۲-۲۳ دستگاه لخت S با سرعت $c(3/5)$ نسبت به دستگاه S' در راستای x حرکت می‌کند. (محور \bar{x} روی محور x می‌لغزد و طبق معمول در لحظه $t = \bar{t} = 0$ دو مبدأ برهم منطبق‌اند.)

(الف) روی یک کاغذ میلیمتری یک دستگاه مختصات دکارتی با محورهای ct و x مشخص کنید. با دقت خطوطی را که نشانگر $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$ باشند رسم کنید. همچنین خطوط متناظر به $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$ را رسم کنید. خطوط را با دقت علامت بگذارید.

(ب) مشاهده می‌شود ذره آزادی در \bar{S} از نقطه $\bar{x} = -2$ در زمان $\bar{t} = -2$ به نقطه $\bar{x} = 2$ در $\bar{t} = +3$ جابه‌جا می‌شود. این جابه‌جایی را روی نمودار خود نشان دهید. با استفاده از شیب خط، سرعت ذره را در S تعیین کنید.

(ج) با استفاده از قاعده جمع سرعتها، سرعت را در S به صورت جبری تعیین کنید، و سازگاری جوابتان را با حل ترسیمی (ب) امتحان کنید. □

۱۲-۲ مکانیک نسبیتی

۱۲-۲-۱ زمان ویژه و سرعت ویژه

با پیشروی روی جهانخط، ساعتان کند می‌شود؛ در حالی که ساعت روی دیوار بازه dt را نشان می‌دهد، ساعت شما فقط به اندازه $d\tau$ جلو می‌رود:

$$d\tau = \sqrt{1 - u^2/c^2} dt \quad (۱۲-۳۷)$$

(u) را برای سرعت یک شیء خاص — در این مثال خود شما — و v را برای سرعت نسبی دو دستگاه مختصات به‌کار می‌بریم. زمان τ را که ساعت شما ثبت می‌کند (یا، کلیتر، زمان مربوط به جسم متحرک) را زمان ویژه می‌نامند.^۱ در بعضی موارد، τ کمیتی مفیدتر و مناسبتر از t است. به دلیل اینکه، ویژه زمان ویژه ناورد است. در حالی که زمان “معمولی” به چارچوب مرجع خاص که مورد نظرتان هست بستگی دارد.

حال تصور کنید در هواپیمایی هستید که به مقصد لوس‌آنجلس در حرکت است، و خلبان اعلام می‌کند که هواپیما با سرعت $(4/5)c$ و به طرف جنوب در حرکت است. به‌طور دقیق منظور او از “سرعت” چیست؟ بدیهی است، منظور او جابه‌جایی تقسیم بر زمان است

$$u = \frac{dl}{dt} \quad (۱۲-۳۸)$$

و از آنجایی که احتمالاً درباره سرعت نسبت به زمین صحبت می‌کند، هم dl و هم dt را باید ناظر زمینی اندازه‌گیری کند. این عدد، برای شما، در صورتی که نگران رسیدن به موقع بر سر قرار در لوس‌آنجلس باشید مهم است، اما اگر در این اندیشه‌اید که آیا موقع ورود گرسنه خواهید بود، کمیت جالبتر برای شما، مسافت طی شده برحسب زمان ویژه است

$$\eta \equiv \frac{dl}{d\tau} \quad (۱۲-۳۹)$$

۱. این کلمه ویژه ترجمه ناقص از کلمه فرانسوی propre به معنی “خود” است.

این کمیت دو رگه را که از تقسیم مسافت روی زمین بر زمان اندازه گرفته شده در هواپیما به دست می آید را سرعت ویژه می نامند؛ برای تفکیک بهتر، u را سرعت معمولی می نامیم. رابطه بین این دو سرعت، بنابه معادله (۱۲-۳۷) عبارت است از

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} u \quad (۱۲-۴۰)$$

برای سرعتهایی به مراتب کمتر از سرعت نور، اختلاف بین سرعت معمولی و سرعت ویژه ناچیز است.

اما از دیدگاه نظری، سرعت ویژه نسبت به سرعت معمولی، امتیاز زیادی دارد: این کمیت، به سادگی از یک دستگاه لخت به دستگاه دیگر تبدیل می شود. در واقع، η ، بخش فضایی یک چار-بردار است

$$\eta^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (۱۲-۴۱)$$

و مؤلفه صفرم آن عبارت است از

$$\eta^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (۱۲-۴۲)$$

زیرا صورت این کسر، dx^μ ، یک چار-بردار جابه جایی است، در حالی که مخرج کسر، $d\tau$ ، ناورد است. از این رو مثلاً وقتی با سرعت v در محور مشترک xx' از دستگاه S به S' می روید داریم

$$\left. \begin{aligned} \bar{\eta}^0 &= \gamma(\eta^0 - \beta\eta^1) \\ \bar{\eta}^1 &= \gamma(\eta^1 - \beta\eta^0) \\ \bar{\eta}^2 &= \eta^2 \\ \bar{\eta}^3 &= \eta^3 \end{aligned} \right\} \quad (۱۲-۴۳)$$

به صورت کلیتر

$$\bar{\eta}^\mu = \Lambda_\nu^\mu \eta^\nu \quad (۱۲-۴۴)$$

η^μ را چار-بردار سرعت ویژه یا به اختصار چار-سرعت می نامند.

در مقابل، قاعده تبدیل سرعت معمولی همان‌گونه که در مثال ۱۲-۶ و مسئله ۱۲-۱۴ دیدیم بسیار گیج‌کننده است:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_x &= \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{u_x - v}{(1 - vu_x/c^2)} \\ \bar{u}_y &= \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \frac{u_y}{\gamma(1 - vu_x/c^2)} \\ \bar{u}_z &= \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} = \frac{u_z}{\gamma(1 - vu_x/c^2)} \end{aligned} \right\} \quad (۴۵-۱۲)$$

دلیل این پیچیدگی مضاعف ساده است: ما مجبوریم هم صورت کسر، $d\bar{t}$ ، و هم مخرج آن، dt ، را تبدیل کنیم در حالی که در مورد سرعت ویژه مخرج $d\tau$ ناورداست، بنابراین در محاسبه نسبت، فقط قاعده تبدیل در صورت را به‌کار می‌بریم.

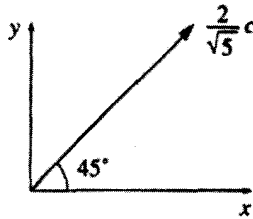
مسئله ۱۲-۲۴ (الف) معادله (۱۲-۴۰)، سرعت ویژه را برحسب سرعت معمولی تعریف می‌کند. فرمول را معکوس کنید تا u را برحسب η به‌دست آورید.
 (ب) چه معادله‌ای بین سرعت ویژه و تندی [معادله (۱۲-۳۴)] وجود دارد؟ با فرض آنکه سرعت در راستای محور x باشد، η را برحسب θ بیابید.

مسئله ۱۲-۲۵ اتومبیلی در طول خط 45° در S (شکل ۱۲-۲۵) با سرعت (معمولی) $c(\frac{1}{\sqrt{2}})$ حرکت می‌کند:

(الف) مؤلفه‌های u_x و u_y سرعت معمولی را بیابید.
 (ب) مؤلفه‌های η_x و η_y سرعت ویژه را بیابید.
 (ج) مؤلفه صفرم چار-سرعت یعنی η^0 را بیابید.
 دستگاه \bar{S} در راستای x با سرعت معمولی $c(\frac{1}{\sqrt{2}})$ نسبت به S حرکت می‌کند. با استفاده از قوانین تبدیل مناسب:

(د) مؤلفه‌های \bar{u}_x و \bar{u}_y سرعت معمولی را در \bar{S} بیابید.
 (ه) مؤلفه‌های $\bar{\eta}_x$ و $\bar{\eta}_y$ سرعت ویژه را در \bar{S} بیابید.
 (و) برای امتحان کردن سازگاری، تحقیق کنید که

$$\bar{\eta} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{1 - \bar{u}^2/c^2}}$$



شکل ۲۵-۱۲

• مسئله ۲۶-۱۲ حاصلضرب ناوردای چار-سرعت با خودش، $\eta^\mu \eta_\mu$ را بیابید.

مسئله ۲۷-۱۲ ذره‌ای را در حرکت هذلولوی در نظر بگیرید

$$x(t) = \sqrt{b^2 + (ct)^2}, \quad y = z = 0$$

(الف) زمان ویژه τ را به صورت تابعی از t با فرض آنکه ساعتها به ازای $t = 0$ و $\tau = 0$

تنظیم شده‌اند، حساب کنید [راهنمایی: از معادله (۳۷-۱۲) انتگرال بگیرید].

(ب) v و x (سرعت معمولی) را به صورت توابعی از τ بیابید.

□ (ج) η^μ (سرعت ویژه) را به صورت تابعی از t تعیین کنید.

۲-۲-۱۲ انرژی و تکانه نسبیتی

در مکانیک کلاسیک تکانه عبارت است از حاصلضرب جرم در زمان. حال می‌خواهیم این تعریف را به حوزه نسبیتی تعمیم دهیم، اما بلافاصله پرسشی مطرح می‌شود: آیا باید سرعت معمولی را به‌کار ببریم یا سرعت ویژه را؟ در فیزیک کلاسیک η و u یکی هستند، بنابراین دلیلی بر رجحان انتخاب یکی نسبت به دیگری نیست. ولی، در زمینه نسبیت این ضرورت اساسی است که از سرعت ویژه استفاده کنیم، زیرا در صورت تعریف تکانه به صورت $m\mathbf{u}$ قانون پایستگی تکانه با اصل نسبیت ناسازگار خواهد بود (مسئله ۲۸-۱۲ را ببینید). از این رو

$$\mathbf{p} \equiv m\boldsymbol{\eta} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (۴۶-۱۲)$$

این معادله تکانه نسبیتی است.

تکانه نسبیتی بخش فضایی چار-بردار است

$$p^\mu \equiv m\eta^\mu \quad (۴۷-۱۲)$$

طبیعی است سؤال کنیم که مؤلفهٔ زمانی نشان‌دهندهٔ چیست

$$p^0 = m\eta^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (48-12)$$

اینشتین، کمیت

$$m_{\text{نسبیتی}} \equiv \frac{m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (49-12)$$

را جرم نسبیتی نام نهاد (بنابراین c نسبیتی $p^0 = m$ و \mathbf{u} نسبیتی $\mathbf{p} = m$ ؛ خود m را جرم سکون می‌نامند)، اما در کاربردهای امروزی به جای آن از انرژی نسبیتی صحبت می‌شود

$$E \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (50-12)$$

(بنابراین $E/c = p^0$ است).^۱ از آنجایی که p^0 (با صرف نظر کردن از ضریب $1/c$)، انرژی نسبیتی است، p^μ را چار-بردار انرژی-تکانه (یا به اختصار چار-بردار تکانه) می‌نامند. توجه کنید که انرژی نسبیتی، حتی در صورتی که جسم به حال سکون باشد، مخالف صفر است؛ این انرژی را انرژی سکون می‌نامیم

$$E_{\text{سکون}} \equiv mc^2 \quad (51-12)$$

بقیهٔ انرژی را، که به حرکت مربوط است انرژی جنبشی می‌نامیم

$$E_{\text{جنبشی}} \equiv E - mc^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right) \quad (52-12)$$

در نظام غیرنسبیتی ($u \ll c$)، رادیکال را می‌توان به صورت توانهای u^2/c^2 بسط داد

$$E_{\text{جنبشی}} = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{3}{8}\frac{mu^4}{c^2} + \dots \quad (53-12)$$

جملهٔ اصلی همان فرمول کلاسیک است.

۱. چون E و نسبیتی m ، تنها با ضریب c^2 با یکدیگر اختلاف دارند استفاده از هر دو در نوشتار لزومی ندارد و نسبیتی m حذف می‌شود.

تا اینجا همه بحث روی نمادگذاری است. جنبه فیزیکی در این واقعیت‌های تجربی مستتر است که E و p که با معادلات (۱۲-۴۶) و (۱۲-۵۰) توصیف می‌شوند پایسته‌اند:

در هر دستگاه بسته، انرژی و تکانه کل نسبیتی پایسته‌اند.

“جرم نسبیتی” (در صورت تمایل به کاربرد آن واژه)، نیز پایسته است — اما این با پایستگی انرژی هم‌ارز است. جرم سکون پایسته نیست — واقعیتی که از ۱۹۴۵ هر کس با آن آشناست (هر چند آنچه “تبدیل جرم به انرژی” نامیده می‌شود، در حقیقت تبدیل انرژی سکون به انرژی جنبشی است). به تمایز بین یک کمیت ناورد (یعنی دارای یک مقدار در تمام دستگاه‌های لخت) با یک پایسته (یعنی مقداری مساوی قبل و بعد از یک فرایند) توجه کنید. جرم ناورد است، اما پایسته نیست؛ انرژی پایسته است اما ناورد نیست؛ بار الکتریکی (به‌گونه‌ای که خواهیم دید) هم پایسته است و هم ناورد؛ سرعت نه پایسته است و نه ناورد. حاصلضرب عددی p^μ در خودش برابر است با

$$p^\mu p_\mu = -(p^0)^2 + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) = -m^2 c^2 \quad (54-12)$$

و این را به‌سادگی با استفاده از نتیجه مسئله ۱۲-۲۶ می‌توان آزمود. برحسب انرژی نسبیتی داریم

$$\boxed{E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4} \quad (55-12)$$

این نتیجه بی‌اندازه مفید است، زیرا شما را قادر به محاسبه E (در صورت دانستن p) یا محاسبه p (به شرط دانستن E) می‌کند، بدون آنکه به محاسبه سرعت نیاز داشته باشید.

مسئله ۱۲-۲۸ (الف) مسئله ۱۲-۲ را با استفاده از تعریف (نادرست) $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ ، اما با توجه به قاعده جمع (درست) اینشتین تکرار کنید. توجه کنید هرگاه تکانه (با تعریفی که شد) در S پایسته باشد، در \bar{S} پایسته نیست. فرض کنید تمام حرکتها در امتداد محور x است.

(ب) همان مسئله را با تعریف درست $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ حل کنید. توجه کنید در صورتی که تکانه (با تعریف اخیر) در S پایسته باشد خودبه‌خود در \bar{S} هم پایسته است. [راهنمایی: از معادله (۱۲-۴۳) برای تبدیل سرعت ویژه استفاده کنید.] درباره انرژی نسبیتی چه فرضی باید بکنید؟

مسئله ۱۲-۲۹ اگر انرژی جنبشی ذره‌ای n برابر انرژی سکون آن باشد سرعت آن چقدر است؟

۱. در صورت وجود نیروهای خارجی (همانند مورد کلاسیک)، انرژی و تکانه دستگاه به‌طور کلی پایسته نیستند.

مسئله ۱۲-۳۰ فرض کنید مجموعه‌ای از ذرات متحرک در جهت x با انرژیهای E_1, E_2, E_3, \dots و تکانه‌های p_1, p_2, p_3, \dots دارید. سرعت چارچوب مرکز تکانه را که در آن تکانه کل صفر است بیابید. □

۱۲-۲-۳ سینماتیک نسبیتی

در این بخش بعضی از کاربردهای پایستگی قوانین را برای واپاشی ذرات و برخوردشان ذکر می‌کنیم.

مثال ۱۲-۷

دو قطعه کلوخ، هر یک به جرم (سکون) m با سرعت $(3/5)c$ برخورد رو در رو می‌کنند (شکل ۱۲-۲۶). این دو به هم می‌چسبند. پرسش: جرم (M) کلوخ مرکب چقدر است؟

حل: در این مورد پایستگی تکانه بی‌اهمیت است، یعنی قبل و بعد از برخورد هر دو صفرند. انرژی هر کلوخ قبل از برخورد برابر است با

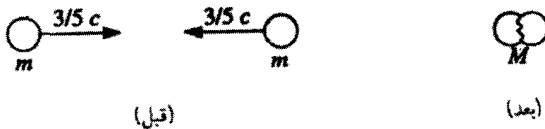
$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - (3/5)^2}} = \frac{5}{4}mc^2$$

و انرژی کلوخ مرکب بعد از برخورد برابر Mc^2 است (زیرا به حال سکون است). از این رو پایستگی انرژی چنین است

$$\frac{5}{4}mc^2 + \frac{5}{4}mc^2 = Mc^2$$

و بنابراین

$$M = \frac{5}{2}m$$



شکل ۱۲-۲۶

توجه کنید که این مقدار از مجموع جرمهای اولیه بزرگتر است! در این برخورد جرم پایسته نمانده است؛ انرژی جنبشی به انرژی سکون تبدیل شده و بنابراین بر جرم افزوده شده است. در تحلیل کلاسیک چنین برخوردی می‌گوییم انرژی جنبشی به انرژی گرمایی تبدیل شده است، یعنی کلوخ مرگب گرمتر از دو قطعه قبلی است. از نظر نسبیتی نیز این درست است. اما انرژی گرمایی چیست؟ این انرژی، مجموع انرژیهای جنبشی کاتوره‌ای و انرژیهای پتانسیل آنها و مولکولهای اجسام است. نسبیت به ما می‌گوید که انرژیهای میکروسکوپی به صورت جرم در جسم نمایان می‌شود، یک سیب‌زمینی داغ از یک سیب‌زمینی سرد سنگینتر است، و یک فنر فشرده شده از یک فنر آزاد سنگینتر است. این تفاوت زیاد نیست. انرژی داخلی (U) مقدار جرم را به اندازه U/c^2 افزایش می‌دهد و c^2 هم با استانداردهای روزانه عددی بسیار بزرگ است. هیچ‌گاه نمی‌توان دو قطعه کلوخ را با سرعتهای چنان زیادی برخورد داد که افزایش جرم، قابل آشکارسازی باشد. اما در قلمرو ذرات بنیادی، اثر قابل ملاحظه است. به عنوان مثال، وقتی مزون π خنثی (به جرم $10^{-28} \text{ kg} \times 2.4$) به یک الکترون و یک پوزیترون وامی‌باشد (که جرم هر یک $10^{-31} \text{ kg} \times 9.11$ است)، تقریباً تمام انرژی سکون به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود به طوری که کمتر از یک درصد جرم اولیه باقی می‌ماند. ■

در مکانیک کلاسیک چیزی به نام ذره بی‌جرم نداریم. زیرا برای چنین ذره‌ای انرژی جنبشی ($\frac{1}{2}mu^2$) و تکانه آن (mu) صفر می‌شود و نمی‌توانید به آن نیرویی ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$) اعمال کنید و بنابراین (طبق قانون سوم نیوتون) آن ذره هم نمی‌تواند به چیزی نیرو وارد کند تا جایی که به فیزیک مربوط است، این مفهومی ندارد. در وهله اول ممکن است تصور کنید چنین چیزی در نسبیت هم صادق است زیرا به هر صورت \mathbf{p} و E با m متناسب‌اند. با وجود این با ارزش خواهد بود که امعان نظر بیشتری در معادلات (۱۲-۴۶) و (۱۲-۵۰) داشته باشیم: اگر $u = c$ باشد، مخرج و صورت کسر هر دو صفر می‌شوند و در نتیجه \mathbf{p} و E مبهم می‌شوند. بنابراین معقول به نظر می‌رسد که ذره‌ای بی جرم بتواند حامل انرژی و تکانه باشد، به شرط آنکه همواره با سرعت نور حرکت کند. گرچه معادلات (۱۲-۴۶) و (۱۲-۵۰) برای تعیین E و \mathbf{p} کافی نیستند، اما معادله (۱۲-۵۵) رابطه بین آن دو را چنین برقرار می‌کند:

$$E = pc \quad (12-56)$$

اگر این واقعیت نبود که حداقل یک ذره بدون جرم به نام فوتون^۱ در طبیعت یافت می‌شود،

۱. تا این اواخر نوترینوها نیز ذرات بی‌جرم تصور می‌شدند، اما آزمایشهای سال ۱۹۹۸ نشان‌دهنده آن است که احتمالاً جرم بسیار کوچکی دارند.

وجود آن را شوخی می‌پنداشتیم. فوتونها با سرعت نور حرکت کرده و از معادله (۱۲-۵۶) تبعیت می‌کنند.^۱ آنها ما را به جبهه یافتن "راه‌گریزی" وا می‌دارند. (از آن جهت که ممکن است بیرسید، چه چیزی یک فوتون پر انرژی را از فوتون کم انرژی متفاوت می‌سازد؟ بالاخره هر دو دارای جرم صفر و سرعت c هستند. نسبیت در این خصوص پاسخی ندارد، اما مکانیک کوانتومی پاسخ دارد: بنابه فرمول پلانک، $E = h\nu$ ، که در آن h ثابت پلانک و ν بسامد است، یک فوتون آبی از یک فوتون قرمز پر انرژی‌تر است!)

مثال ۱۲-۸

بیون ساکنی به یک موثون و یک نوترینو (شکل ۱۲-۲۷) وامی‌باشد. انرژی موثون حاصل را برحسب جرمهای m_μ و m_π (با فرض $m_\nu = 0$) بیابید.

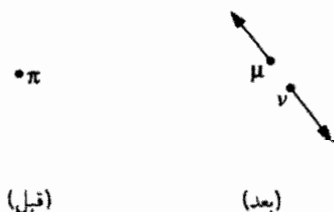
حل: در این مورد داریم

$$\begin{aligned} E_{\text{قبل}} &= m_\pi c^2 & p_{\text{قبل}} &= 0 \\ E_{\text{بعد}} &= E_\mu + E_\nu & p_{\text{بعد}} &= p_\mu + p_\nu \end{aligned}$$

بایستگی تکانه ایجاد می‌کند که $p_\nu = -p_\mu$. بایستگی انرژی هم می‌گوید که

$$E_\mu + E_\nu = m_\pi c^2$$

حال بنابر معادله (۱۲-۵۶) داریم $E_\nu = |p_\nu|c$ ، در حالی‌که بنابر معادله (۱۲-۵۵)،



شکل ۱۲-۲۷

۱. فوتون عبارت است از کوانتوم میدان الکترومغناطیسی، و این امر تصادفی نیست که همان رابطه بین انرژی و تکانه برای امواج الکترومغناطیسی هم برقرار است [معادلات (۹-۶۰) و (۹-۶۲) را ببینید].

$$|\mathbf{p}_\mu| = \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4} / c$$

$$E_\mu + \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4} = m_\pi c^2$$

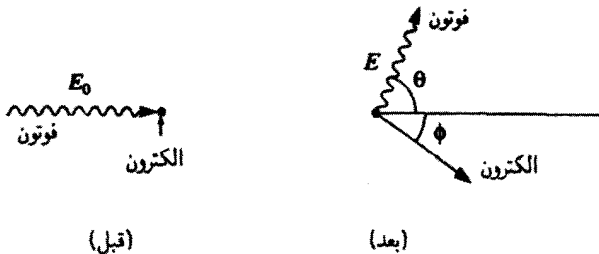
و از روی آن نتیجه زیر حاصل می شود

$$E_\mu = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2) c^4}{2m_\pi}$$

در برخورد کلاسیک، تکانه و جرم همواره پایسته اند، در حالی که عموماً انرژی جنبشی پایسته نیست. یک برخورد "چسبنده" با صرف انرژی جنبشی تولید گرما می کند؛ یک برخورد "انفجاری" با صرف انرژی شیمیایی (یا نوع دیگری از انرژی) تولید انرژی جنبشی می کند. اگر انرژی جنبشی، پایسته باشد (مانند برخورد ایده آل دو توپ بیلیارد)، فرآیند را کشسان می نامیم. در مورد نسبیتی، تکانه و انرژی کل همواره پایسته اند، اما به طور کلی جرم و انرژی جنبشی پایسته نیستند. باز هم تأکید می کنیم که هرگاه انرژی جنبشی پایسته باشد فرآیند کشسان است. در چنین موردی انرژی سکون (یعنی همه انرژی منهای انرژی جنبشی) نیز پایسته است، و بنابراین جرم نیز چنین است. از نظر عملی مفهوم گفته فوق آن است که همان ذراتی که داخل شده اند خارج می شوند. مثالهای ۷-۱۲ و ۸-۱۲ فرآیندهای ناکشسان بودند، مثال بعدی کشسان است.

مثال ۹-۱۲

پراکندگی کامپتون. فوتونی با انرژی E_0 به الکترون ساکنی برخورد می کند. انرژی E فوتون بعد از برخورد را به صورت تابعی از زاویه پراکندگی θ (شکل ۱۲-۲۸) بیابید.



شکل ۱۲-۲۸

حل: نتیجه پایستگی تکانه در جهت "قائم" عبارت است از $p_e \sin \phi = p_p \sin \theta$ و یا چون $p_p = E/c$

$$\sin \phi = \frac{E}{p_e c} \sin \theta$$

پایستگی تکانه در جهت "افقی" می‌گوید که

$$\frac{E_o}{c} = p_p \cos \theta + p_e \cos \phi = \frac{E}{c} \cos \theta + p_e \sqrt{1 - \left(\frac{E}{p_e c} \sin \theta\right)^2}$$

یا

$$p_e^2 c^2 = (E_o - E \cos \theta)^2 + E^2 \sin^2 \theta = E_o^2 - 2E_o E \cos \theta + E^2$$

سرانجام بنابر پایستگی انرژی داریم

$$\begin{aligned} E_o + mc^2 &= E + E_e = E + \sqrt{m^2 c^2 + p_e^2 c^2} \\ &= E + \sqrt{m^2 c^2 + E_o^2 - 2E_o E \cos \theta + E^2} \end{aligned}$$

و از روی آن E می‌شود

$$E = \frac{1}{(\lambda - \cos \theta / mc^2) + (1/E_o)} \quad (57-12)$$

با استفاده از طول موج فوتون معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

بنابراین

$$\lambda = \lambda_o + \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) \quad (58-12)$$

کمیت (h/mc) را طول موج کامپتون الکترون می‌نامند.

مسئله ۳۱-۱۲ سرعت موثون مثال ۱۲-۸ را بیابید.

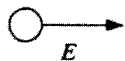
مسئله ۳۲-۱۲ ذره‌ای به جرم m که انرژی کل آن دو برابر انرژی سکونش است به ذره مشابه خود که ساکن است برخورد می‌کند. اگر دو ذره به هم بچسبند، جرم ذره مرکب چقدر است؟ سرعت آن چقدر است؟

مسئله ۳۳-۱۲ یک پیون خنثی به جرم (سکون) m و تکانه (نسبیتی) $p = (3/4)mc$ به دو فوتون وامی‌باشد. یکی از فوتونها در همان جهت پیون اولیه گسیل می‌شود و دیگری در جهت مخالف آن. انرژی (نسبیتی) هر فوتون را بیابید.

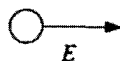
مسئله ۳۴-۱۲ در گذشته، در بیشتر آزمایشهای فیزیک ذرات، هدفهای ساکن دخیل بودند: یک ذره (معمولاً یک پروتون یا الکترون) شتاب می‌گرفت تا به یک انرژی بالای E می‌رسید و با یک ذره هدف ساکن برخورد می‌کرد [شکل ۱۲-۲۹ (الف)]. در صورتی که اگر هر دو ذره را به انرژی E رسانده و آن دو را به هم برخورد دهید انرژیهای نسبی بسیار بالاتری (با همان شتابدهنده) قابل حصول است [شکل ۱۲-۲۹ (ب)]. به لحاظ کلاسیک، انرژی \bar{E} یک ذره نسبت به ذره دیگر برابر است با $4E$ (چرا؟) این مقدار خیلی زیاد نیست و فقط ۴ برابر است. اما از نظر نسبیتی انرژی حاصل عظیم است. هر دو ذره را دارای جرم مساوی m در نظر گرفته و نشان دهید که

$$\bar{E} = \frac{2E^2}{mc^2} - mc^2 \quad (59-12)$$

فرض کنید از پروتونها ($mc^2 = 1 \text{ GeV}$) با انرژی $E = 30 \text{ GeV}$ استفاده می‌کنید. \bar{E} حاصل چقدر است؟ چند برابر E است؟ ($1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$) [به دلیل این افزایش انرژی نسبیتی، بیشتر آزمایشهای امروزی روی ذرات بنیادی، به جای هدفهای ثابت با باریک‌های برخوردی صورت می‌گیرد].



(الف)



(ب)

شکل ۱۲-۲۹

مسئله ۳۵-۱۲ در یک آزمایش نابودی زوج، یک الکترون (به جرم m)، دارای تکانه p_e به یک پوزیترون ساکن (که هم جرم با الکترون و دارای بار مخالف آن است) برخورد می‌کند. دو فوتون،

بر اثر نابودی این دو ذره تولید می‌شوند. (چرا نمی‌توانند فقط یک فوتون ایجاد کنند؟) اگر یکی از فوتونهای حاصل، با زاویه 60° نسبت به جهت الکترون فرودی خارج شود، انرژی آن چقدر است؟ □

۴-۲-۱۲ دینامیک نسبیتی

قانون اول نیوتون همان اصل نسبیت است. قانون دوم نیوتون به صورت

$$\boxed{F = \frac{dp}{dt}} \quad (۶۰-۱۲)$$

نیز اعتبار خود را در مکانیک نسبیتی، به شرط آنکه تکانه نسبیتی را به کار ببریم، حفظ می‌کند.

مثال ۱۰-۱۲

حرکت تحت تأثیر یک نیروی ثابت. به ذره‌ای به جرم m نیروی ثابت F اثر می‌کند. اگر ذره در لحظه $t = 0$ از مبدأ که در آن به حال سکون است شروع به حرکت کند، مکان (x) ذره را به صورت تابعی از t بیابید.

حل:

$$\frac{dp}{dt} = F \implies p = Ft + \text{مقدار ثابت}$$

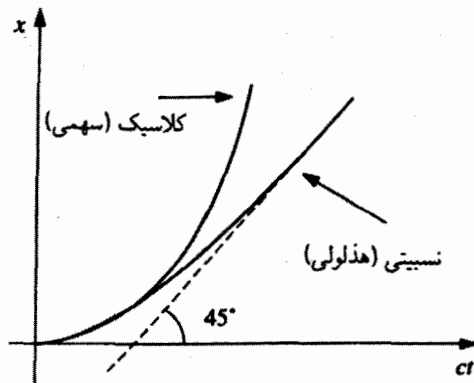
اما چون در $t = 0$ ، $p = 0$ است ثابت بالا صفر است و در نتیجه

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = Ft$$

و از روی آن، u می‌شود

$$u = \frac{(F/m)t}{\sqrt{1 + (Ft/mc)^2}} \quad (۶۱-۱۲)$$

بدیهی است، صورت کسر پاسخ کلاسیک مسئله است، این جواب، اگر $(F/m)t \ll c$ باشد تقریباً درست است. اما مخرج نسبیتی اطمینان می‌دهد که u هیچگاه از c بزرگتر نیست، در واقع اگر $t \rightarrow \infty$ آن‌گاه $u \rightarrow c$.



شکل ۱۲-۳۰

برای تکمیل مسئله باید دوباره انتگرال‌گیری کنیم

$$x(t) = \frac{F}{m} \int_0^t \frac{t'}{\sqrt{1 + (Ft'/mc)^2}} dt'$$

$$= \frac{mc^2}{F} \sqrt{1 + (Ft'/mc)^2} \Big|_0^t = \frac{mc^2}{F} \left[\sqrt{1 + (Ft/mc)^2} - 1 \right] \quad (۶۲-۱۲)$$

نمودار به جای سهمی کلاسیک، $x(t) = (F/2m)t^2$ ، یک هذلولوی است (شکل ۱۲-۳۰)؛ به این دلیل حرکت تحت تأثیر نیروی ثابت را اغلب حرکت هذلولوی می‌نامند. این حرکت به عنوان مثال وقتی اتفاق می‌افتد که یک ذره باردار در میدان الکتریکی یکنواخت قرار بگیرد. ■

کار، چون همیشه، انتگرال خطی نیروست:

$$W \equiv \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (۶۳-۱۲)$$

قضیه کار-انرژی (که می‌گویید "کار خالص انجام شده روی یک ذره برابر است با افزایش انرژی جنبشی آن") به صورت نسبیتی آن صادق است

$$W = \int \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot d\mathbf{l} = \int \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dt} dt = \int \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{u} dt$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{u} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) \cdot \mathbf{u} \\ &= \frac{m\mathbf{u}}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) = \frac{dE}{dt} \end{aligned} \quad (۶۴-۱۲)$$

بنابراین

$$W = \int \frac{dE}{dt} dt = E_f - E_i \quad (۶۵-۱۲)$$

(چون انرژی سکون ثابت است، اینکه انرژی کل را در اینجا به کار ببریم یا انرژی جنبشی تفاوتی نمی‌کند.)

برخلاف دو قانون اول، قانون سوم نیوتون، به طور کلی، به قلمرو نسبیتی قابل تعمیم نیست، در واقع، اگر دو جسم مورد بحث از نظر مکانی از هم فاصله داشته باشند، قانون سوم با نسبیت همزمانی سازگاری ندارد. فرض کنید نیروی وارد از A به B در یک لحظه t برابر $\mathbf{F}(t)$ باشد و نیروی وارد از B بر A در همان لحظه $-\mathbf{F}(t)$ ؛ آن‌گاه قانون سوم در این چارچوب مرجع قابل اعمال است. اما از دیدگاه یک ناظر متحرک این دو نیروی مساوی و متقابل در زمانهای مختلف اعمال می‌شوند، و از این رو قانون سوم در دستگاه این ناظر نقض می‌شود. تنها برای برهم‌کنشهای تماسی، که در آن نیروها در یک نقطه فیزیکی اعمال می‌شوند (و در حالات بدیهی که نیروها ثابت هستند)، قانون سوم صادق است.

از آنجایی که \mathbf{F} مشتق تکانه نسبت به زمان معمولی است، در تبدیل از یک دستگاه به دستگاه دیگر، آن هم رفتار زشت سرعت (معمولی) را دارد: هم صورت و هم مخرج کسر باید تبدیل شوند. از این رو^۱

$$\bar{F}_y = \frac{d\bar{p}_y}{dt} = \frac{dp_y}{\gamma dt - \frac{\gamma\beta}{c} dx} = \frac{dp_y/dt}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{F_y}{\gamma(1 - \beta u_x/c)} \quad (۶۶-۱۲)$$

۱. یادتان باشد که γ و β ، حرکت \vec{S} نسبت به S را نشان می‌دهند و مقادیر ثابت هستند؛ \mathbf{u} سرعت ذره نسبت به S است.

همین طور برای مؤلفهٔ z

$$\bar{F}_z = \frac{F_z}{\gamma(1 - \beta u_x/c)}$$

مؤلفهٔ x ، از اینها هم بدتر است

$$\bar{F}_x = \frac{d\bar{p}_x}{dt} = \frac{\gamma dp_x - \gamma\beta dp^0}{\gamma dt - \frac{\gamma\beta}{c} dx} = \frac{\frac{dp_x}{dt} - \beta \frac{dp^0}{dt}}{1 - \frac{\beta}{c} \frac{dx}{dt}} = \frac{F_x - \frac{\beta}{c} \left(\frac{dE}{dt}\right)}{1 - \beta u_x/c}$$

با توجه به محاسبهٔ dE/dt در معادلهٔ (۶۲-۱۲)، معادلهٔ اخیر می‌شود

$$\bar{F}_x = \frac{F_x - \beta(\mathbf{u} \cdot \mathbf{F})/c}{1 - \beta u_x/c} \quad (۶۷-۱۲)$$

فقط در یک حالت خاص این معادلات به صورت رضایتبخشی ساده می‌شوند: هرگاه ذره در دستگاه S (به طور لحظه‌ای) به حال سکون باشد، به طوری که $\mathbf{u} = 0$ ، آن‌گاه

$$\bar{\mathbf{F}}_{\perp} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{F}_{\perp}, \quad \bar{F}_{\parallel} = F_{\parallel} \quad (۶۸-۱۲)$$

به عبارت دیگر مؤلفه \mathbf{F} به موازات حرکت \bar{K} تغییری نکرده است، در حالی که مؤلفه‌های عمود بر آن بر γ تقسیم شده‌اند.

احتمالاً شما هم به این فکر افتاده‌اید که می‌توانیم از رفتار تبدیل بد \mathbf{F} با معرفی نیروی "ویژه" مشابه با سرعت ویژه، اجتناب کنیم. این نیرو که مشتق تکانه نسبت به زمان ویژه است عبارت است از

$$K^{\mu} \equiv \frac{dp^{\mu}}{d\tau} \quad (۶۹-۱۲)$$

معادلهٔ اخیر را نیروی مینکوفسکی می‌نامند. به سادگی معلوم است که این نیرو یک چاربردار است زیرا p^{μ} یک چاربردار بوده و زمان ویژه هم ناورد است. مؤلفه‌های فضایی K^{μ} با نیروی "معمولی" طبق معادلهٔ زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند

$$\mathbf{K} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right) \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \mathbf{F} \quad (۷۰-۱۲)$$

در حالی که مؤلفه صفرم

$$K^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{dF}{d\tau} \quad (۷۱-۱۲)$$

صرف نظراً از ضریب $1/c$ ، آهنگ (ویژه) ای است که انرژی ذره با آن افزایش می‌یابد، به عبارت دیگر توان (ویژه) منتقل شده به ذره است.

دینامیک نسبیتی را می‌توان برحسب نیروی معمولی یا برحسب نیروی مینکوفسکی فرمولبندی کرد. روش دوم عموماً مناسبتر است، اما چون در نهایت ما با مسیر ذره به صورت تابعی از زمان معمولی سروکار داریم، روش اول اغلب مفیدتر است. وقتی می‌خواهیم یک قانون نیروی کلاسیک، نظیر قانون لورنتس، را به قلمرو نسبیتی تعمیم دهیم، این پرسش مطرح می‌شود: آیا فرمولهای کلاسیک، با نیروی معمولی متناظرند یا با نیروی مینکوفسکی؟ به عبارت دیگر آیا باید بنویسیم

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

یا به جای آن بنویسیم

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})?$$

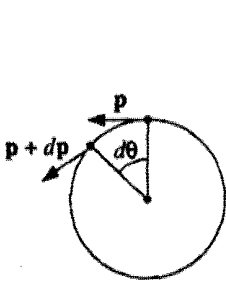
از آنجایی که زمان معمولی و زمان ویژه در فیزیک کلاسیک یکی هستند، راهی برای تصمیم‌گیری در این مقطع نداریم. قانون نیروی لورنتس، آن‌گونه که معلوم می‌شود، یک نیروی معمولی است. بعداً علت را بیان می‌کنیم و به شما نشان می‌دهیم که چگونه نیروی مینکوفسکی الکترومغناطیسی را بنا نهید.

مثال ۱۱-۱۲

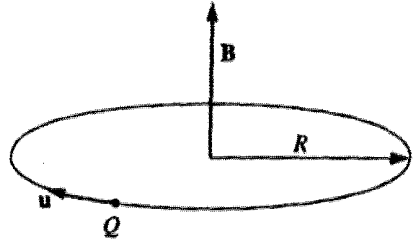
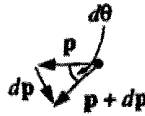
مسیر نوعی برای یک ذره باردار در میدان مغناطیسی یکنواخت، حرکت سیکلوترونی است (شکل ۱۲-۳۱). نیروی مغناطیسی جانب مرکز

$$F = QuB$$

شتاب مرکزگرای لازم برای یک حرکت دورانی را ایجاد می‌کند. ولی توجه داشته باشید که در نسبیت خاص نیروی مرکزگرا همانند مکانیک کلاسیک mu^2/R نیست. بلکه چنان‌که با توجه به



شکل ۱۲-۳۲



شکل ۱۲-۳۱

شکل ۱۲-۳۲، معلوم می شود $dp = p d\theta$ است، لذا

$$F = \frac{dp}{dt} = p \frac{d\theta}{dt} = p \frac{u}{R}$$

(از دیدگاه کلاسیک، البته، $p = mu$ ، و بنابراین $F = mu^2/R$) از این رو

$$QuB = p \frac{u}{R}$$

یا

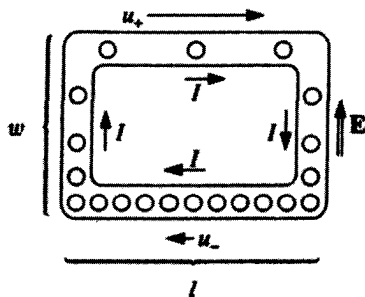
$$p = QBR \quad (۱۲-۷۲)$$

در این شکل، فرمول سیکلوترونی نسبیتی با غیرنسبیتی معادله (۳-۵) همانند است — تنها اختلاف این است که در شق جدید p تکانه نسبیتی است.

مثال ۱۲-۱۲

تکانه پنهان. به عنوان الگویی برای یک دوقطبی مغناطیسی m ، یک حلقه مستطیلی از سیم حامل جریان ثابت را در نظر بگیرید. جریان را به صورت سیلانی از بارهای مثبت بدون برهم کنش که آزادانه در سیم حرکت می کنند در نظر بگیرید. با اعمال یک میدان الکتریکی یکنواخت E (شکل ۱۲-۳۳) بارهای سمت چپ شتاب مثبت و بارهای سمت راست شتاب منفی پیدا می کنند.^۱ تکانه کل همه بارهای حلقه را بیابید.

۱. بدیهی است چنین الگویی برای یک سیم حامل جریان واقعیتناهی نیست، اما الگوهای دیگر نیز دقیقاً به همین



شکل ۱۲-۳۳

حل: تکانه‌های قسمت سمت راست و قسمت چپ یکدیگر را خنثی می‌کنند، بنابراین تنها باید تکانه‌های بالا و پایین را در نظر بگیریم. فرض کنید تعداد بار در قسمت بالا باشند که با سرعت u_+ به سمت راست حرکت می‌کنند، و تعداد N_- بار در قسمت پایین که با سرعت (کمتر) u_- به سمت چپ می‌روند. جریان ($I = \lambda u$) در همهٔ چهار قسمت فوق یکی است (در غیر این صورت بار باید جایی انباشته می‌شد)؛ بنابراین

$$I = \frac{QN_+}{l} u_+ = \frac{QN_-}{l} u_- \implies N_{\pm} u_{\pm} = \frac{Il}{Q}$$

که در آن Q بار هر ذره و l طول مستطیل است. از منظر کلاسیک، تکانهٔ یک ذره منفرد برابر است با $\mathbf{p} = M\mathbf{u}$ (که در آن M جرم ذره است)، و تکانهٔ کل (به سمت راست) برابر است با

$$p_{\text{کلاسیک}} = MN_+u_+ - MN_-u_- = \frac{MIl}{Q} - \frac{MIl}{Q} = 0$$

این را به‌طور قطع انتظار داشتیم (حلقه به‌صورت کلی حرکتی ندارد). اما از دیدگاه نسبیتی $\mathbf{p} = \gamma M\mathbf{u}$ ، و نتیجه می‌گیریم

$$p = \gamma_+ MN_+u_+ - \gamma_- MN_-u_- = \frac{MIl}{Q} (\gamma_+ - \gamma_-)$$

که صفر نیست زیرا ذره‌های قسمت بالا سریعتر حرکت می‌کنند. در واقع بهرهٔ انرژی (γMc^2) از بالا رفتن ذره در قسمت چپ، برابر کار انجام‌شده توسط

نتیجه منجر می‌شوند. مرجع زیر را ببینید:

نیروی الکتریکی، QEw ، است که در آن w ارتفاع مستطیل است. بنابراین

$$\gamma_+ - \gamma_- = \frac{QEw}{Mc^2}$$

و از این رو

$$p = \frac{IlEw}{c^2}$$

اما Ilw برابر است با گشتاور دوقطبی حلقه، از نظر برداری، \mathbf{m} به طرف درون صفحه کتاب و \mathbf{p} به طرف راست است، از این رو

$$\mathbf{p} = \frac{1}{c^2} (\mathbf{m} \times \mathbf{E})$$

بنابراین یک دوقطبی مغناطیسی در یک میدان الکتریکی، حامل تکانه خطی است، حتی اگر حرکتی هم نکند! این تکانه را که تکانه پنهان می‌نامند، دقیقاً نسبیتی و صرفاً مکانیکی است؛ کارش خنثی کردن تکانه الکترومغناطیسی ذخیره شده در میدانهاست (مثال ۸-۳ را ببینید؛ توجه کنید که هر دو نتیجه را می‌توان به صورت $p = Ilv/c^2$ بیان کرد). ■

مسئله ۱۲-۳۶ در مکانیک کلاسیک قانون نیوتون را به صورت $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ می‌نویسند. معادله نسبیتی $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ ، را به این سادگی نمی‌توان بیان کرد. نشان دهید که نیرو به صورت

$$\mathbf{F} = \frac{m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left[\mathbf{a} + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{c^2 - u^2} \right] \quad (12-73)$$

است که در آن $\mathbf{a} \equiv d\mathbf{u}/dt$ ، شتاب معمولی است.

مسئله ۱۲-۳۷ نشان دهید که امکان سبقت گرفتن از یک پرتو نوری برایتان وجود دارد، به شرط اینکه شروع مناسبی داشته باشید و پاهای شما نیروی ثابتی ایجاد کنند.

مسئله ۱۲-۳۸ شتاب ویژه را به صورت آشکار زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha^\mu \equiv \frac{d\eta^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \quad (12-74)$$

(الف) α° و α را بر حسب \mathbf{u} و \mathbf{a} (یعنی شتاب معمولی) بیابید.

(ب) $\alpha_\mu \alpha^\mu$ را بر حسب \mathbf{u} و \mathbf{a} تعیین کنید.

(ج) نشان دهید که $\eta^\mu \alpha_\mu = 0$.

(د) قانون دوم نیوتون به تغییر مینکوفسکی، یعنی معادله (۱۲-۷۰) را برحسب α^μ بنویسید. حاصلضرب ناوردای $K^\mu \eta_\mu$ را محاسبه کنید.

مسئله ۱۲-۳۹ نشان دهید که

$$K_\mu K^\mu = \frac{1 - (u^2/c^2) \cos^2 \theta}{1 - u^2/c^2} F^2$$

که در آن θ زاویه بین \mathbf{u} و \mathbf{F} است.

مسئله ۱۲-۴۰ نشان دهید که شتاب (معمولی) ذره‌ای به جرم m و بار q که با سرعت \mathbf{u} در میدانهای الکترومغناطیسی \mathbf{E} و \mathbf{B} حرکت می‌کند برابر است با

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m} \sqrt{1 - u^2/c^2} \left[\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) \right]$$

□ [راهنمایی: از معادله (۱۲-۷۳) استفاده کنید.]

۱۲-۳ الکترودینامیک نسبیتی

۱۲-۱۳-۱ مغناطیس به‌عنوان یک پدیده نسبیتی

برخلاف مکانیک نیوتونی، الکترودینامیک کلاسیک با نسبیت خاص سازگار است. معادلات ماکسول و قانون نیروی لورنتس را می‌توان به‌درستی در هر دستگاه لخت به‌کار برد. البته، آنچه را که یک ناظر ممکن است به‌عنوان فرایندی الکتریکی تعبیر کند، دیگری می‌تواند به‌صورت یک فرایند مغناطیسی تلقی کند، اما پیش‌بینی هر دو برای حرکت واقعی ذرات همانند است. دلیل اینکه لورنتس و دیگران که مطلب را در اواخر قرن نوزدهم بررسی می‌کردند به چنین نتایجی نمی‌رسیدند، عیب مکانیک غیرنسبیتی بود که از آن استفاده می‌کردند و نه عیب الکترودینامیک. با توجه به مکانیک نیوتونی تصحیح‌شده، ما در حال حاضر در وضعیتی قرار داریم که می‌توانیم یک فرمولبندی کامل و سازگار برای الکترودینامیک نسبیتی به‌وجود آوریم. اما تأکید می‌کنیم که قواعد الکترومغناطیس را به‌هیچ‌وجه هم تغییر نخواهیم داد بلکه این قواعد را به‌گونه‌ای بیان خواهیم کرد که سرشت نسبیتی آنها را نمایان و روشن کند. همچنان‌که پیش می‌رویم، هر از چند گاهی توقف خواهیم کرد تا، با استفاده از تبدیلات لورنتس، نتایجی را که قبلاً با روشی دشوارتر به‌دست آورده بودیم مجدداً تحصیل کنیم. اما هدف اصلی این بخش آن است که شناخت عمیقتری از ساختار الکترودینامیک به خواننده

بدهیم؛ قوانینی که قبلاً دلخواه و نامرتبط به نظر می‌رسیدند، هنگامی که از دیدگاه نسبیت رهیابی می‌شوند، نوعی انسجام و حتمیت پیدا می‌کنند.

در آغاز، مایلیم به شما نشان دهیم، چرا با التفات به الکتروستاتیک و نسبیت باید چیزی به نام مغناطیس وجود داشته باشد، و به‌خصوص، چگونه قادر به محاسبه نیروی مغناطیسی بین یک سیم حامل جریان و یک بار متحرک، بدون استفاده از قوانین مغناطیس، می‌شوید.^۱ فرض کنید سیمی متشکل از بارهای مثبت که در طول آن به سمت راست و با سرعت v در حرکت‌اند، داشته باشیم. فرض می‌کنیم بارها به‌گونه‌ای نزدیک هم باشند که بتوان آنها را یک بار خطی پیوسته λ در نظر گرفت. روی این سیم دارای بارهای مثبت، سیم دیگری با بارهای منفی $-\lambda$ که با همان سرعت v به سمت چپ در حرکت هستند در نظر می‌گیریم. بنابراین جریان خالص به سمت راست برابر است با

$$I = 2\lambda v \quad (75-12)$$

در عین حال در فاصله s از آن سیم، بار نقطه‌ای q که با سرعت $v < u$ به سمت راست حرکت می‌کند [شکل ۱۲-۳۴(الف)] هم داریم. به دلیل خنثی شدن اثر دو بار خطی، هیچ نیروی الکتریکی به بار q در دستگاه S وارد نمی‌شود.

با وجود این مایلیم وضعیت را از نقطه نظر دستگاه S' که با سرعت u به سمت راست در حرکت است بیازماییم [شکل ۱۲-۳۴(ب)]. در این چارچوب مرجع، q ساکن است. حال بنا به قاعده جمع سرعت اینشتین، سرعت بارهای خطی مثبت و منفی برابرند با

$$v_{\pm} = \frac{v \mp u}{1 \mp vu/c^2} \quad (76-12)$$

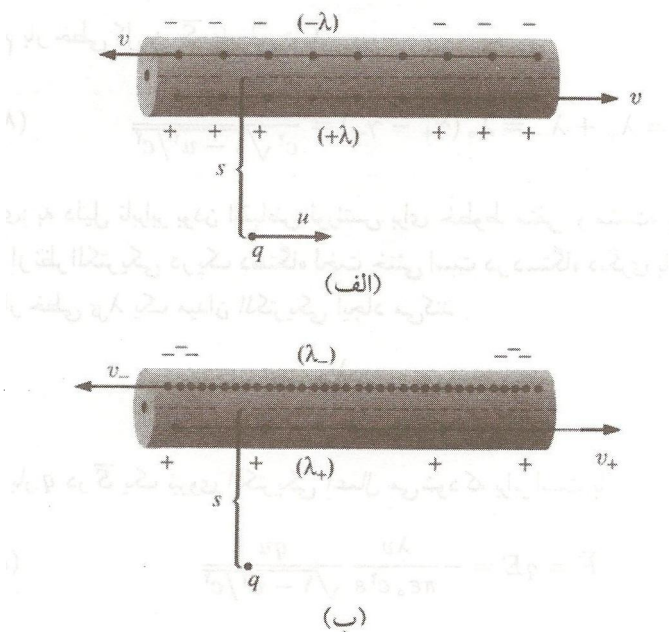
چون v از v_+ بزرگتر است انقباض لورنتس برای فاصله میان بارهای منفی بیش از مقدار مربوط به فاصله بارهای مثبت است؛ بنابراین، در این چارچوب، سیم حامل یک بار منفی برآیند است! در واقع

$$\lambda_{\pm} = \pm(\gamma_{\pm})\lambda_0 \quad (77-12)$$

که در آن

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\pm}^2/c^2}} \quad (78-12)$$

۱. این قسمت و چند بحث دیگر این بخش را از کتاب زیر آورده‌ام.



شکل ۱۲-۳۴

و λ_0 چگالی بار خط مثبت در چارچوب سکون خودش است. البته این با λ یکی نیست - در دستگاه S آنها با سرعت v حرکت می کنند، بنابراین

$$\lambda = \gamma \lambda_0 \quad (۱۲-۷۹)$$

که در آن

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (۱۲-۸۰)$$

برای آنکه γ_{\pm} را به فرم ساده ای درآوریم کمی کار جبری لازم است:

$$\begin{aligned} \gamma_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(v \mp u)^2(1 \mp vu/c^2)^{-2}}} = \frac{c^2 \mp uv}{\sqrt{(c^2 \mp uv)^2 - c^2(v \mp u)^2}} \\ &= \frac{c^2 \mp uv}{\sqrt{(c^2 - v^2)(c^2 - u^2)}} = \gamma \frac{1 \mp uv/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{aligned} \quad (۱۲-۸۱)$$

و سرانجام بار خطی کل در \bar{K} برابر است با

$$\lambda_{\text{tot}} = \lambda_+ + \lambda_- = \lambda_0 (\gamma_+ - \gamma_-) = \frac{-2\lambda uv}{c^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (۸۲-۱۲)$$

نتیجه‌گیری: به دلیل نابرابر بودن انقباض لورنتس برای خطوط منفی و مثبت، یک سیم حامل جریان که از نظر الکتریکی در یک دستگاه لخت خنثی است در دستگاه دیگری باردار خواهد بود. اما بار خطی کل λ یک میدان الکتریکی ایجاد می‌کند

$$E = \frac{\lambda_{\text{کل}}}{2\pi\epsilon_0 s}$$

بنابراین بر بار q در \bar{K} یک نیروی الکتریکی اعمال می‌شود که برابر است با

$$\bar{F} = qE = -\frac{\lambda v}{\pi\epsilon_0 c^2 s} \frac{qu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (۸۳-۱۲)$$

اما اگر بر q در \bar{K} نیرویی وارد شود، در K هم باید نیرویی وارد شود، در واقع این نیرو را می‌توانیم با استفاده از قواعد تبدیل نیروها، محاسبه کنیم. از آنجایی که q در \bar{K} به حال سکون است و \bar{F} بر u عمود است، نیرو در K از معادله (۶۸-۱۲) به دست می‌آید

$$F = \sqrt{1 - u^2/c^2} \bar{F} = -\frac{\lambda v}{\pi\epsilon_0 c^2} \frac{qu}{s} \quad (۸۴-۱۲)$$

بار توسط نیرویی کاملاً الکتریکی در \bar{K} (که در آن سیم باردار، و q به حال سکون است) به طرف سیم کشیده می‌شود، اما این نیرو در K (که در آن سیم خنثی است) غیرالکتریکی است. در مجموع، اینها نشان می‌دهد که الکتروستاتیک و نسبیت وجود نیروی دیگری را ایجاب می‌کنند. بدیهی است این "نیروی دیگر" همان نیروی مغناطیسی است. در واقع با استفاده از $c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$ و نوشتن λv به صورت جریان [معادله (۷۵-۱۲)]، می‌توانیم معادله (۸۴-۱۲) را به صورت آشناتر زیر بنویسیم

$$F = -qu \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s} \right) \quad (۸۵-۱۲)$$

جمله داخل پرانتز عبارت است از میدان مغناطیسی یک سیم مستقیم طویل و نیرو هم دقیقاً همان چیزی است که می‌توانستیم با اعمال قانون نیروی لورنتس در دستگاه K به دست آورده باشیم.

۱۲-۳-۲ میدانها چگونه تبدیل می یابند

در موارد خاص مختلف دیدیم که میدان الکتریکی یک ناظر، میدان مغناطیسی برای ناظری دیگر است. اطلاع از چگونگی قواعد تبدیل عام برای میدانهای الکترومغناطیسی جالب است: اگر میدانها در S معلوم باشند میدانها در S' کدام اند؟ ممکن است حدس اولیه شما این باشد که، E ، قسمت فضایی یک چار-بردار و B ، قسمت فضایی یک چار-بردار دیگر باشد. چنین تصویری غلط است. مسئله از این بسیار پیچیده تر است، حال بیایید پنداری را که تا به حال به طور ضمنی در بخش ۱۲-۳-۱ مورد استفاده قرار دادیم به طور صریح روشن کنیم و آن این است که: بار ناورد است. از این نظر بار همانند جرم است نه انرژی. باریک ذره، عدد مشخصی است که مستقل از سرعت حرکت آن است. همچنین فرض می کنیم که قواعد تبدیل به نحوه تشکیل میدان بستگی ندارند و یکی هستند، یعنی میدانهای الکتریکی حاصل از میدانهای مغناطیسی متغیر به همان شیوه ای تبدیل می شوند که میدانهای حاصل از بارهای ساکن. اگر چنین نمی بود مجبور می شدیم تمام فرمولبندی میدان را کنار بگذاریم، زیرا این، شالوده هر نظریه میدان است که میدانها در هر نقطه معلوم هر چه را که باید از نظر الکترومغناطیسی درباره آن بدانیم به ما می گویند، بدون آنکه اطلاعات اضافی در مورد چشمه میدان لازم باشد.

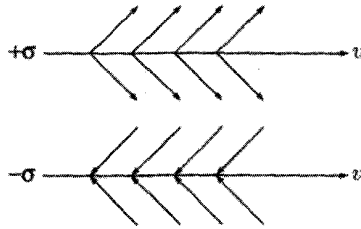
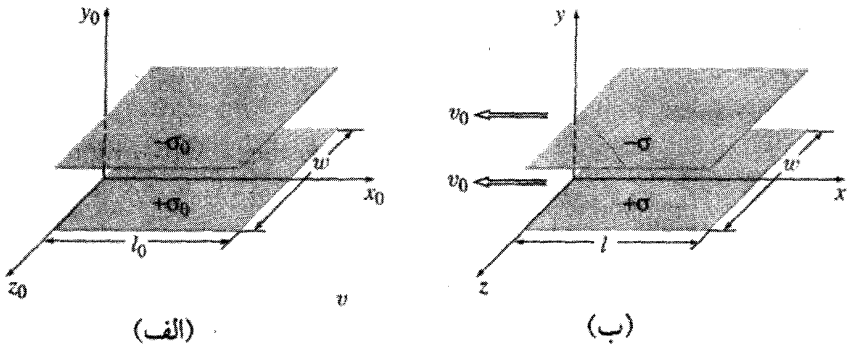
با توجه به این نکته، ساده ترین میدان الکتریکی ممکن یعنی میدان یکنواخت در ناحیه بین صفحات یک خازن با صفحات موازی بزرگ را در نظر بگیرید [شکل ۱۲-۳۵(الف)]. فرض کنید خازن در S_0 به حال سکون و حامل بارهای سطحی $\pm\sigma_0$ باشد. در آن صورت

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{y} \quad (۱۲-۸۶)$$

حال، این خازن را از دید دستگاه S که با سرعت v_0 به سمت راست حرکت می کند چگونه ارزیابی می کنید [شکل ۱۲-۳۵(ب)]؟ در این دستگاه صفحات به سمت چپ حرکت می کنند، اما میدان هنوز هم به صورت زیر است

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{y} \quad (۱۲-۸۷)$$

که تنها تفاوت آن مقدار بار سطحی σ است. [کمی تأمل کنید! آیا این تنها تفاوت است؟ فرمول $E = \sigma/\epsilon_0$ برای یک خازن موازی از قانون گاوس به دست آمده و نظر به اینکه قانون گاوس در مورد بارهای متحرک کاملاً اعتبار دارد، این کاربرد خاص نیز بر تقارن استوار است. آیا مطمئن هستید که میدان هنوز هم بر صفحات عمود است؟ اگر میدان یک صفحه متحرک، کج شود چطور؟



(ج)

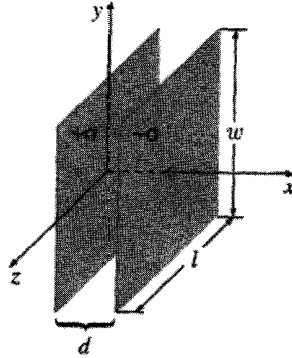
شکل ۳۵-۱۲

مثلاً در جهت حرکت، مانند شکل ۳۵-۱۲(ج)؟ حتی اگر این اتفاق بیفتد (که نمی‌افتد) میدان بین صفحات که از برهم‌نهی میدان $+\sigma$ و میدان $-\sigma$ حاصل می‌شود عمود بر صفحات خواهد بود، زیرا میدان حاصل از $-\sigma$ همانند شکل ۳۵-۱۲(ج) جهت می‌گیرد (و با تغییر علامت بار جهت میدان برعکس می‌شود)، و در نتیجه، در جمع برداری، مؤلفه‌های موازی خنثی می‌شوند].
 اما بار کل هر صفحه ناورداست، و عرض (w) هم تغییر نمی‌کند، اما طول (l) به میزان ضریب زیر انقباض (لورنتس) می‌یابد

$$\frac{1}{\gamma_0} = \sqrt{1 - v_0^2/c^2} \quad (۸۸-۱۲)$$

بنابراین بار واحد سطح به میزان γ_0 افزایش می‌یابد

$$\sigma = \gamma_0 \sigma_0 \quad (۸۹-۱۲)$$



شکل ۱۲-۳۶

در نتیجه

$$\mathbf{E}^\perp = \gamma_0 \mathbf{E}_0^\perp \quad (۹۰-۱۲)$$

علامت \perp را به صورت شاخص بالا استفاده کردیم که روشن شود این قاعده، مربوط به مؤلفه‌های \mathbf{E} عمود بر راستای حرکت \mathcal{S} هستند. برای یافتن قاعده برای مؤلفه موازی میدان، خازنی در صفحه yz (شکل ۱۲-۳۶) در نظر بگیرید. این دفعه فاصله بین دو صفحه (d) است که انقباض لورنتس پیدا می‌کند، در حالی که w و l (و نیز σ) در هر دو چارچوب، یکی هستند. نظر به اینکه میدان به d بستگی ندارد، در نتیجه

$$E^\parallel = E_0^\parallel \quad (۹۱-۱۲)$$

مثال ۱۲-۱۳

میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای که با سرعت ثابت حرکت می‌کند. بار نقطه‌ای q در مبدأ دستگاه \mathcal{S}_0 به حال سکون است. پرسش: میدان الکتریکی این بار در دستگاه \mathcal{S} که نسبت به \mathcal{S}_0 با سرعت v_0 به سمت راست حرکت می‌کند چیست؟

حل: میدان در \mathcal{S}_0 برابر است با

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_0^2} \hat{\mathbf{r}}_0$$

$$\begin{cases} E_{x_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ E_{y_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qy_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ E_{z_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \end{cases}$$

بنابه قواعد تبدیل [معادلات (۹۰-۱۲) و (۹۱-۱۲)] داریم

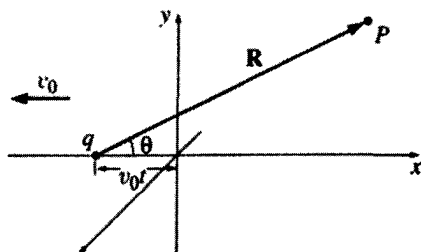
$$\begin{cases} E_x = E_{x_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ E_y = \gamma_0 E_{y_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0 qy_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ E_z = \gamma_0 E_{z_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0 qz_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \end{cases}$$

این جوابها هنوز هم برحسب مختصات S_0 نقطه میدان (P) یعنی (x_0, y_0, z_0) توصیف شده‌اند؛ ترجیح می‌دهیم که آنها را برحسب مختصات S مربوط به P بنویسیم. بنابر تبدیلات لورنتس (یا، در واقع، تبدیلات وارون)،

$$\begin{cases} x_0 = \gamma_0 (x + v_0 t) = \gamma_0 R_x \\ y_0 = y = R_y \\ z_0 = z = R_z \end{cases}$$

که در آن \mathbf{R} برداری از q به P است (شکل ۱۲-۳۷). ازا این رو

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0 q\mathbf{R}}{(\gamma_0^2 R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(1 - v_0^2/c^2)}{[1 - (v_0^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \end{aligned} \quad (۹۲-۱۲)$$



شکل ۱۲-۳۷

این همان میدان حاصل از بار نقطه‌ای متحرک با سرعت ثابت است؛ در فصل ۱۰ همین نتیجه را با استفاده از پتانسیل تأخیری [معادله (۱۰-۶۸)] داشتیم. روش جدید بسیار کارا تر است و بر این واقعیت مهم تأکید می‌کند که جهت میدان به طرف بیرون از مکان لحظه‌ای بار (در مقابل مکان تأخیری) است؛ ضریب γ_0 برای E_x از تبدیلات مختصات لورنتس ناشی می‌شود؛ E_y و E_z ضرایب خود را از تبدیلات میدان به دست می‌آورند. توازن این دو γ_0 است که \mathbf{E} را موازی \mathbf{R} قرار می‌دهد.

اما معادلات (۱۲-۹۰) و (۱۲-۹۱) عمومیت‌ترین قوانین تبدیل نیستند، زیرا ما از یک دستگاه S_0 که در آن بارها به حال سکون بودند، شروع کردیم و بنابراین با میدان مغناطیسی مواجه نبودیم. برای تحصیل قاعده عمومی، باید از دستگاهی شروع کنیم که هم میدان الکتریکی و هم میدان مغناطیسی در آن وجود داشته باشد. برای این منظور، خود S به خوبی کارآمد است. علاوه بر میدان الکتریکی

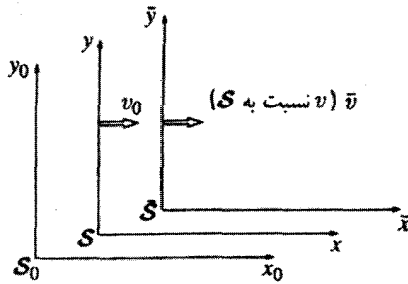
$$E_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (۱۲-۹۳)$$

یک میدان مغناطیسی ناشی از جریانهای سطحی هم وجود دارد [شکل ۱۳-۳۵ (ب)]:

$$\mathbf{K}_{\pm} = \mp \sigma v_0 \hat{x} \quad (۱۲-۹۴)$$

بنابر قاعده دست راست، این میدان در جهت منفی z قرار داشته و مقدار آن طبق قانون آمپر برابر است با

$$B_z = -\mu_0 \sigma v_0 \quad (۱۲-۹۵)$$



شکل ۳۸-۱۲

در یک دستگاه سوم \bar{S} ، که با سرعت v نسبت به S به سمت راست حرکت می‌کند (شکل ۳۸-۱۲)، میدانها عبارت‌اند از

$$\bar{E}_y = \frac{\bar{\sigma}}{\epsilon_0}, \quad \bar{B}_z = -\mu_0 \bar{\sigma} \bar{v} \quad (۹۶-۱۲)$$

که در آن \bar{v} سرعت \bar{S} نسبت به S_0 است

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{1 + vv_0/c^2}, \quad \bar{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{v}^2/c^2}} \quad (۹۷-۱۲)$$

و

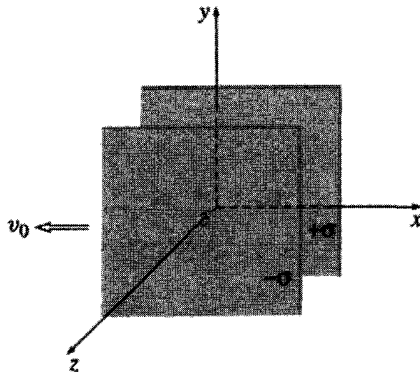
$$\bar{\sigma} = \bar{\gamma} \sigma_0 \quad (۹۸-۱۲)$$

می‌ماند فقط بیان \bar{E} و \bar{B} [معادله (۹۶-۱۲)] بر حسب E و B [معادلات (۹۳-۱۲)] و (۹۵-۱۲). از نقطه نظر معادلات (۸۹-۱۲) و (۹۸-۱۲)، داریم

$$\bar{E}_y = \left(\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0} \right) \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \bar{B}_z = - \left(\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0} \right) \mu_0 \sigma \bar{v} \quad (۹۹-۱۲)$$

با مختصر استفاده از جبر به این نتیجه خواهید رسید که

$$\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0} = \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{\sqrt{1 - \bar{v}^2/c^2}} = \frac{1 - vv_0/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \left(1 + \frac{vv_0}{c^2} \right) \quad (۱۰۰-۱۲)$$



شکل ۳۹-۱۲

که در آن چون همیشه

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (۱۰۱-۱۲)$$

از این رو

$$\bar{E}_y = \gamma \left(1 + \frac{vv_0}{c^2} \right) \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \gamma \left(E_y - \frac{v}{c^2 \epsilon_0 \mu_0} B_z \right)$$

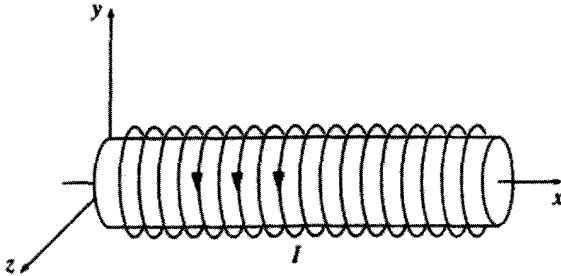
در حالی که

$$\bar{B}_z = -\gamma \left(1 + \frac{vv_0}{c^2} \right) \mu_0 \sigma \left(\frac{v + v_0}{1 + vv_0/c^2} \right) = \gamma (B_z - \mu_0 \epsilon_0 v E_y)$$

و چون $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ داریم

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_y &= \gamma (E_y - v B_z) \\ \bar{B}_z &= \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \end{aligned} \right\} \quad (۱۰۲-۱۲)$$

معادلات اخیر چگونگی تبدیل E_y و B_z را نشان می‌دهند. برای انجام تبدیل E_z و B_y همان خازن را به جای صفحه xz در موازی صفحه xy تنظیم می‌کنیم (شکل ۳۹-۱۲). بنابراین میدانها



شکل ۱۲-۴۰

در S عبارت‌اند از

$$E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B_y = \mu_0 \sigma v_0$$

(برای علامت B_y از قاعده دست راست استفاده کنید.) بقیه استدلالتان مانند قبل است یعنی هر جا که E_y داشتیم بخوانید E_z و هر جا که B_z داشتیم بخوانید $-B_y$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_z &= \gamma(E_z + vB_y) \\ \bar{B}_y &= \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) \end{aligned} \right\} \quad (12-103)$$

همان‌طور که درباره مؤلفه x (با قرار دادن خازن به موازات صفحه yz) دیدیم داریم

$$\bar{E}_x = E_x \quad (12-104)$$

چون در این مورد میدان مغناطیسی همراه وجود ندارد نمی‌توانیم قاعده تبدیل برای B_x بیابیم. اما پیکربندی دیگری این کار را انجام می‌دهد: سیمولت طولی را به موازات محور x (شکل ۱۲-۴۰) که در S به حال سکون است در نظر بگیرید. میدان مغناطیسی داخل آن برابر است با

$$B_x = \mu_0 nI \quad (12-105)$$

که در آن n تعداد دور سیمها در واحد طول و I جریان است. در \bar{S} ، طول کوتاه، و بنابراین بر n افزوده می‌شود

$$\bar{n} = \gamma n \quad (12-106)$$

از طرف دیگر، اتساع زمان روی می‌دهد: ساعت S که همراه با سیمولوه است کند کار می‌کند. بنابراین جریان (بار در واحد زمان) در \bar{S} برابر است با

$$\bar{I} = \frac{1}{\gamma} I \quad (107-12)$$

این دو ضریب γ یکدیگر را دقیقاً خنثی می‌کنند و در نتیجه

$$\bar{B}_x = B_x$$

همانند \mathbf{E} ، مؤلفه B موازی با حرکت تغییر نمی‌کند. حال بیاید مجموعهٔ کل قواعد تبدیل را با هم گردآوری کنیم

$$\begin{aligned} \bar{E}_x &= E_x, & \bar{E}_y &= \gamma(E_y - vB_z), & \bar{E}_z &= \gamma(E_z + vB_y) \\ \bar{B}_x &= B_x, & \bar{B}_y &= \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), & \bar{B}_z &= \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \end{aligned}$$

(108-12)

دو مورد خاص جالب توجه عبارت‌اند از:
۱. اگر در S داشته باشیم $\mathbf{B} = 0$ ، آنگاه

$$\bar{\mathbf{B}} = \gamma \frac{v}{c^2} (E_z \hat{y} - E_y \hat{z}) = \frac{v}{c^2} (\bar{E}_z \hat{y} - \bar{E}_y \hat{z})$$

و یا چون $\mathbf{v} = v \hat{x}$

$$\bar{\mathbf{B}} = -\frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{E}}) \quad (109-12)$$

۲. اگر در S داشته باشیم $\mathbf{E} = 0$ ، آنگاه

$$\bar{\mathbf{E}} = -\gamma v (B_z \hat{y} - B_y \hat{z}) = -v (\bar{B}_z \hat{y} - \bar{B}_y \hat{z})$$

$$\boxed{\vec{E} = \mathbf{v} \times \vec{B}} \quad (۱۱۰-۱۲)$$

به عبارت دیگر، اگر \vec{E} یا \vec{B} (در یک نقطه خاص) در یک دستگاه صفر باشند، آنگاه در هر دستگاه دیگر، میدانها (در آن نقطه) به سادگی بسیار طبق معادله (۱۲-۱۰۹) یا معادله (۱۲-۱۱۰) با هم بستگی دارند.

مثال ۱۲-۱۴

میدان مغناطیسی یک بار نقطه‌ای در حرکت یکنواخت. میدان مغناطیسی یک بار نقطه‌ای q را که با سرعت ثابت v حرکت می‌کند بیابید.

حل: در چارچوب سکون ذره (S_0)، میدان مغناطیس (در هر نقطه) صفر است، بنابراین در دستگاه S که با سرعت v به سمت راست حرکت می‌کند داریم

$$\vec{B} = -\frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \vec{E})$$

میدان الکتریکی را در مثال ۱۲-۱۳ محاسبه کردیم. بنابراین میدان مغناطیسی برابر است با

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv(1 - v^2/c^2) \sin \theta}{[1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} \frac{\hat{\phi}}{R^2} \quad (۱۱۱-۱۲)$$

که در آن $\hat{\phi}$ وقتی شما با بار متحرک مواجه می‌شوید در جهت پاد ساعتگرد است. اتفاقاً در حد غیرنسبیتی ($v^2 \ll c^2$)، معادله (۱۱۱-۱۲) به شکل زیر در می‌آید

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{R}}{R^2}$$

که دقیقاً همان نتیجه‌ای است که با اعمال ساده قانون بیوساوار به یک بار نقطه‌ای [معادله (۵-۴۰)] به دست می‌آید.

مسئله ۱۲-۴۱ چرا میدان الکتریکی در شکل ۱۲-۳۵ (ب) نمی‌تواند مؤلفه z داشته باشد؟ به هر حال، میدان مغناطیسی چنین مؤلفه‌ای دارد.

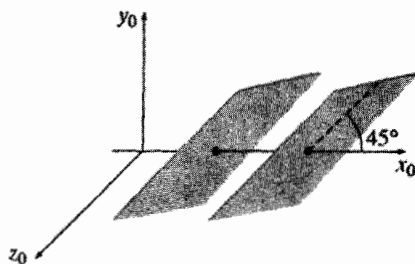
مسئله ۱۲-۴۲ یک خازن تخت موازی که در S_0 ساکن و زاویه 45° نسبت به محور x دارد، دارای چگالیهای بار $\pm \sigma_0$ روی صفحات خود است (شکل ۱۲-۴۱). دستگاه S با سرعت v نسبت به S_0 به سمت راست حرکت می‌کند.

(الف) \mathbf{E}_0 یعنی میدان در S_0 را بیابید.

(ب) \mathbf{E} یعنی میدان در S را پیدا کنید.

(ج) زاویه بین صفحات با محور x چقدر است؟

(د) آیا در S ، میدان بر صفحات عمود است؟



شکل ۱۲-۴۱

مسئله ۱۲-۴۳ (الف) با انتگرال‌گیری روی کره‌ای به شعاع R و به مرکز بار نشان دهید که یک بار نقطه‌ای متحرک با سرعت ثابت واقع بر مرکز کره از قانون گاوس محصور $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = (1/\epsilon_0)Q$ تبعیت می‌کند.

(ب) بردار پوئین‌تینگ را برای یک بار نقطه‌ای در حرکت یکنواخت بیابید، مثلاً فرض کنید

بار با سرعت v در راستای z حرکت می‌کند و S را در لحظه عبور q از مبدأ محاسبه کنید.

مسئله ۱۲-۴۴ (الف) بار q_A در مبدأ S ساکن است؛ بار q با سرعت v در مسیری موازی محور x و به فاصله d $y = d$ حرکت می‌کند. نیروی الکترومغناطیسی روی q_B در موقع عبور آن از محور y چقدر است؟

(ب) حال همین مسئله را از دستگاه \bar{S} که با سرعت v به سمت راست در حرکت است

بررسی کنید. نیروی وارد بر q_B وقتی q_A از محور \bar{y} می‌گذرد چقدر است؟ [با دو روش مسئله را

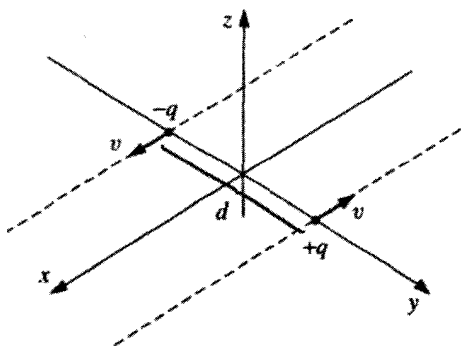
حل کنید: (۱) با استفاده از جوابتان در قسمت (الف) و تبدیل نیرو، (۲) با محاسبه میدانها در \bar{S}

و با توجه به قانون نیروی لورنتس.]

مسئله ۱۲-۴۵ دو بار $\pm q$ بر روی مسیرهای موازی که به فاصله d از هم قرار دارند با سرعتهای

مساوی v در جهت‌های مخالف هم حرکت می‌کنند. می‌خواهیم نیروی وارد بر $+q$ از طرف $-q$ را در لحظه‌ای که این دو از مقابل هم عبور می‌کنند (شکل ۱۲-۴۲) بدانیم. جدول زیر را با آزمون کردن همه آنچه لازم است پر کنید.

دستگاه C	دستگاه B	دستگاه A	
		(شکل ۱۲-۴۲)	
			E در محل $+q$ ناشی از $-q$
			B در محل $+q$ ناشی از $-q$
			F وارد بر $+q$ ناشی از $-q$



شکل ۱۲-۴۲

مسئله ۱۲-۴۶ (الف) نشان دهید که $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$ ناوردای نسبیتی است.

(ب) نشان دهید که $(E^2 - c^2 B^2)$ ناوردای نسبیتی است.

(ج) فرض کنید در یک دستگاه لخت (و برای نقطه‌ای مانند P) داشته باشیم $\mathbf{B} = 0$ اما

$\mathbf{E} \neq 0$. آیا امکان دارد دستگاه دیگری بیابیم که در آن میدان الکتریکی در P صفر باشد؟

مسئله ۱۲-۴۷ یک موج تخت الکترومغناطیسی با بسامد (زاویه‌ای) ω در خلأ در جهت x

حرکت می‌کند. این موج در امتداد y قطبیده است و دامنه میدان الکتریکی آن E_0 است.

(الف) میدانهای الکتریکی و مغناطیسی، $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ و $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ را بنویسید. [مطمئن

شوید که هر کمیت کمکی را که وارد می‌کنید، برحسب ω ، E_0 و ثابتهای طبیعت نوشته شوند].

(ب) همین موج در دستگاه \bar{S} که در جهت x با سرعت v نسبت به S در حرکت است

مشاهده می‌شود. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را در \bar{S} بیابید و آنها را برحسب مختصات

\vec{K} بیان کنید: $\vec{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ و $\vec{B}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$. [باز هم کمیت‌های کمکی مورد نیاز خود را تعریف کنید].

(ج) بسامد ω موج در \vec{K} چقدر است؟ این جواب را تفسیر کنید. طول موج λ موج در \vec{K} چیست؟ از روی ω و λ سرعت موج در \vec{K} را تعیین کنید. آیا این همان چیزی است که انتظار داشتید؟
 (د) نسبت شدت در \vec{K} به شدت در \mathcal{S} کدام است؟ اینشتین در جوانی از خود می‌پرسید که اگر با سرعت نور در کنار یک موج الکترومغناطیسی حرکت کنیم، موج چگونه به نظر می‌رسد. به او دربارهٔ بسامد و شدت موج وقتی $v \rightarrow c$ باشد، چه می‌توانید بگویید؟ \square

۱۲-۳-۳ تانسور میدان

همان‌گونه که معادله (۱۰۸-۱۲) نشان می‌دهد، \mathbf{E} و \mathbf{B} مسلماً نظیر قسمتهای فضایی دو چار-بردار تبدیل نمی‌شوند. در واقع، مؤلفه‌های \mathbf{E} و \mathbf{B} وقتی از یک دستگاه لخت به دستگاه لخت دیگری می‌روند با همدیگر در ارتباط‌اند. این چه نوع چیزی است که ۶ مؤلفه دارد و طبق معادله (۱۰۸-۱۲) تبدیل می‌شود؟ پاسخ: این یک تانسور پاد-متقارن رتبه دوم است. به خاطر آورید که تبدیل چار-بردار با قاعدهٔ زیر صورت می‌گیرد

$$\bar{a}^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu \quad (112-12)$$

(جمع‌بندی روی v صورت می‌گیرد)، که در آن Λ ماتریس تبدیل لورنتس است. اگر \vec{K} با سرعت v حرکت کند، Λ به صورت زیر می‌شود

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (113-12)$$

و Λ^μ_ν ورودی مربوط به ردیف μ و ستون ν است. یک تانسور (رتبهٔ دوم) چیزی با دو شاخص است، که در آن با دو ضریب Λ (برای هر شاخص یک عدد) تبدیل انجام می‌شود:

$$\bar{t}^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\lambda \Lambda^\nu_\sigma t^{\lambda\sigma} \quad (114-12)$$

یک تانسور (در ۴ بعد) دارای $۱۶ = ۴ \times ۴$ مؤلفه است که می‌توانیم به صورت یک آرایه ۴×۴ نمایش دهیم

$$t^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} t^{00} & t^{01} & t^{02} & t^{03} \\ t^{10} & t^{11} & t^{12} & t^{13} \\ t^{20} & t^{21} & t^{22} & t^{23} \\ t^{30} & t^{31} & t^{32} & t^{33} \end{pmatrix}$$

با وجود این، ۱۶ جزء الزاماً همه متفاوت نیستند. به عنوان مثال، یک تانسور متقارن دارای خاصیت زیر است

$$t^{\mu\nu} = t^{\nu\mu} \quad (\text{تانسور متقارن}) \quad (۱۱۵-۱۲)$$

در این حالت ۱۰ مؤلفه متمایز وجود دارند؛ ۶ تا از آنها تکرار می‌شوند

$$(t^{01} = t^{10}, t^{02} = t^{20}, t^{03} = t^{30}, t^{12} = t^{21}, t^{13} = t^{31}, t^{23} = t^{32})$$

به گونه‌ای مشابه، یک تانسور پادمتقارن از معادله زیر پیروی می‌کند

$$t^{\mu\nu} = -t^{\nu\mu} \quad (\text{تانسور پادمتقارن}) \quad (۱۱۶-۱۲)$$

چنین چیزی فقط ۶ جزء متمایز از ۱۶ تایی اصلی دارد، شش تا تکراری هستند (همانند حالت قبل با این تفاوت که یک علامت منفی دارند) و چهار تا هم صفرند (t^{00}, t^{11}, t^{22} و t^{33}). از این رو تانسور پادمتقارن عمومی به صورت زیر است

$$t^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & t^{01} & t^{02} & t^{03} \\ -t^{01} & 0 & t^{12} & t^{13} \\ -t^{02} & -t^{12} & 0 & t^{23} \\ -t^{03} & -t^{13} & -t^{23} & 0 \end{pmatrix}$$

بینیم قاعده تبدیل (۱۲-۱۱۴) درباره شش مؤلفه متمایز یک تانسور پادمتقارن چگونه عمل می‌کند. از $\bar{t}^{\alpha\beta}$ شروع می‌کنیم، داریم

$$\bar{t}^{\alpha\beta} = \Lambda_{\lambda}^{\alpha} \Lambda_{\sigma}^{\beta} t^{\lambda\sigma}$$

اما بنابر معادله (۱۲-۱۱۳) بجز وقتی که $\lambda = ۱$ یا $\lambda = ۰$ باشد $\Lambda_{\lambda}^{\alpha} = ۰$ است، و نیز جز در مواردی که $\sigma = ۰$ یا $\sigma = ۱$ باشد $\Lambda_{\sigma}^{\beta} = ۰$. از این رو چهار جمله برای جمع کردن می‌ماند

$$\bar{t}^{\alpha\beta} = \Lambda_{0}^{\alpha} \Lambda_{0}^{\beta} t^{00} + \Lambda_{0}^{\alpha} \Lambda_{1}^{\beta} t^{01} + \Lambda_{1}^{\alpha} \Lambda_{0}^{\beta} t^{10} + \Lambda_{1}^{\alpha} \Lambda_{1}^{\beta} t^{11}$$

از طرف دیگر $t^{00} = t^{11} = ۰$ در حالی که $t^{01} = -t^{10}$ ، بنابراین

$$\bar{t}^{\alpha\beta} = (\Lambda_{0}^{\alpha} \Lambda_{1}^{\beta} - \Lambda_{1}^{\alpha} \Lambda_{0}^{\beta}) t^{01} = (\gamma^{\alpha} - (\gamma\beta)^{\alpha}) t^{01} = t^{\alpha 1}$$

بقیه را به خودتان واگذار می‌کنیم — مجموعه کل قواعد تبدیل عبارت‌اند از

$$\left. \begin{aligned} \bar{t}^{01} &= t^{01}, & \bar{t}^{02} &= \gamma(t^{02} - \beta t^{12}), & \bar{t}^{03} &= \gamma(t^{03} + \beta t^{31}), \\ \bar{t}^{12} &= t^{12}, & \bar{t}^{13} &= \gamma(t^{13} + \beta t^{03}), & \bar{t}^{23} &= \gamma(t^{23} - \beta t^{02}) \end{aligned} \right\} \quad (۱۲-۱۱۷)$$

اینها دقیقاً قواعدی هستند که از دیدگاه فیزیکی برای میدانهای الکترومغناطیسی به دست آوردیم [معادله (۱۲-۱۰۸)]. در واقع ما می‌توانیم تانسور میدان $F^{\mu\nu}$ را با مقایسه مستقیم

$$F^{01} \equiv \frac{E_x}{c}, \quad F^{02} \equiv \frac{E_z}{c}, \quad F^{03} \equiv \frac{E_y}{c}, \quad F^{12} \equiv B_z, \quad F^{13} \equiv B_y, \quad F^{23} \equiv B_x$$

به صورت آرایه زیر بسازیم

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (۱۲-۱۱۸)$$

۱. بعضی مؤلفان قرارداد $F^{01} \equiv E_x$ و $F^{12} \equiv cB_z$ و ... را ترجیح می‌دهند، و برخی هم علامت مخالف را به کار می‌برند. بنابراین بیشتر معادلات از اینجا به بعد، بسته به متن اندکی متفاوت به نظر خواهند رسید.

از این رو نسبیت کاری را که آرستد شروع کرده بود با ترکیب کردن میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در یک موجود واحد $F^{\mu\nu}$ به تمام و کمال رسانید.

اگر بحث بالا را با دقت زیاد دنبال کرده باشید، متوجه شده‌اید که راه متفاوتی برای قرار دادن \mathbf{E} و \mathbf{B} در یک تانسور پادمتقارن وجود داشت؛ به جای مقایسه اولین خط معادله (۱۲-۱۰۸) با اولین خط معادله (۱۲-۱۱۷) و خط دوم با دوم، می‌توانستیم اولین خط معادله (۱۲-۱۰۸) را به دومین خط معادله (۱۲-۱۱۷) و بالعکس مربوط کنیم. این کار به یک تانسور دوگانه $G^{\mu\nu}$ منجر می‌شود

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ -B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ -B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{pmatrix} \quad (12-119)$$

$G^{\mu\nu}$ را می‌توان مستقیماً از روی $F^{\mu\nu}$ با جایگزین کردن $\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}/c$ و $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ به دست آورد. توجه کنید که این عمل در معادله (۱۲-۱۰۸) تغییری ایجاد نمی‌کند — به این علت است که هر دو تانسور، قواعد تبدیل درستی برای \mathbf{E} و \mathbf{B} می‌سازند.

مسئله ۱۲-۴۸ بقیه پنج قسمت معادله (۱۲-۱۱۷) را پیدا کنید.

مسئله ۱۲-۴۹ ثابت کنید که تقارن (یا پادتقارن) تانسور با تبدیل لورنتس محفوظ می‌ماند (یعنی: اگر $t^{\mu\nu}$ متقارن باشد، نشان دهید که $\bar{t}^{\mu\nu}$ نیز متقارن است، و همچنین برای پادمتقارن).

مسئله ۱۲-۵۰ یادآوری می‌کنیم که یک چار-بردار هموردا از یک بردار پادوردا و با تغییر علامت در مؤلفهٔ صفرم به دست می‌آید. همین قاعده برای تانسورها هم صادق است: وقتی شما برای هموردا کردن "شاخصی را پایین می‌آورید"، اگر شاخص صفر باشد علامت را تغییر می‌دهید. ناوردهای تانسوری زیر را برحسب \mathbf{E} و \mathbf{B} حساب کنید. با مسئله ۱۲-۴۶ مقایسه کنید

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \quad \text{و} \quad F^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$$

مسئله ۱۲-۵۱ سیم مستقیمی در امتداد محور z حامل چگالی بار λ است که با سرعت v در راستای z حرکت می‌کند. تانسور میدان و تانسور دوتایی را در نقطه $(x, 0, 0)$ بسازید. □

۴-۳-۱۲ الکترودینامیک در نمادگذاری تانسوری

حال که از چگونگی نمایش میدانها در نمادگذاری نسبیتی آگاهیم، زمان آن فرا رسیده است که قوانین الکترودینامیک (معادلات ماکسول و قانون نیروی لورنتس) را به آن زبان فرمولبندی جدید کنیم. برای شروع کار باید تعیین کنیم که چگونه چشمه‌های میدانها، یعنی ρ و \mathbf{J} تبدیل می‌شوند. توده‌ای از بارهای متحرک را در نظر می‌گیریم، توجه خود را به حجم بسیار کوچک V که دارای بار Q ، در حرکت یا سرعت \mathbf{u} است، معطوف می‌داریم (شکل ۴۳-۱۲). چگالی بار برابر است با

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

و چگالی جریان^۱ عبارت است از

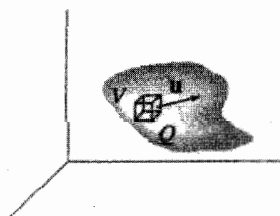
$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{u}$$

دوست داریم که این مقادیر را برحسب چگالی بار ویژه ρ_0 ، یعنی چگالی سکون دستگاه بار تعیین کنیم

$$\rho_0 = \frac{Q}{V_0}$$

که در آن V_0 حجم سکون قطعه است. از آنجایی که یک بعد (یعنی بعدی که در راستای حرکت است) انقباض لورنتس یافته

$$V = \sqrt{1 - u^2/c^2} V_0 \quad (۱۲-۱۲)$$



شکل ۴۳-۱۲

۱. فرض می‌کنیم تمام بارها در حجم V همنام بوده و دارای سرعت‌های برابر باشند. در غیر این صورت باید آنها را جداگانه در نظر بگیریم: $\mathbf{J} = \rho_+ \mathbf{u}_+ + \rho_- \mathbf{u}_-$. اما بحثها مشابه‌اند.

و از این رو

$$\rho = \rho_0 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \mathbf{J} = \rho_0 \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (۱۲۱-۱۲)$$

در مقایسه این معادله با معادلات (۱۲-۴۰) و (۱۲-۴۲)، ملاحظه می‌شود که اینها مؤلفه‌های سرعت ویژه، ضربدر ρ_0 ناورد هستند. به نظر می‌رسد، چگالی بار و چگالی جریان با هم یک چار-بردار می‌سازند

$$J^\mu = \rho_0 \eta^\mu \quad (۱۲۲-۱۲)$$

که مؤلفه‌های آن عبارت‌اند از

$$J^\mu = (c\rho, J_x, J_y, J_z) \quad (۱۲۳-۱۲)$$

این معادله را چار-بردار چگالی جریان می‌نامیم.
معادله پیوستگی [معادله (۲۹-۵)]

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

که نشان‌دهنده پایستگی موضعی بار است، وقتی برحسب J^μ نوشته شود صورت فشرده و زیبایی پیدا می‌کند. زیرا

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial J^i}{\partial x^i}$$

در حالی‌که

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial J^0}{\partial t} = \frac{\partial J^0}{\partial x^0} \quad (۱۲۴-۱۲)$$

بنابراین با انتقال $\partial \rho / \partial t$ به سمت چپ داریم

$$\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (۱۲۵-۱۲)$$

که جمع بندی روی μ را ایجاب می کند. برحسب اتفاق، $\partial J^\mu / \partial x^\mu$ دیورژانس چهار-بعدی J^μ است، از این رو معادله پیوستگی نشان می دهد که چار-بردار چگالی جریان بدون دیورژانس است. همانند معادلات ماکسول آنها را می توان به صورت زیر نوشت (با جمع بندی روی ν)

$$\boxed{\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 J^\mu, \quad \frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0} \quad (۱۲-۱۲۶)$$

هر یک از این دو معادله حاوی چهار معادله است — برای هر مقدار μ ، یک معادله. اگر $\mu = 0$ باشد اولین معادله به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{0\nu}}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial F^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} \\ &= \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{c} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \\ &= \mu_0 J^0 = \mu_0 c \rho \end{aligned}$$

یا

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

بدیهی است که این قانون گاوس است. اگر $\mu = 1$ باشد داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{1\nu}}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} \right)_x \\ &= \mu_0 J^1 = \mu_0 J_x \end{aligned}$$

ترکیب معادله اخیر با نتایج متناظر به $\mu = 2$ و $\mu = 3$ می دهد

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

که قانون آمپر با تصحیح ماکسول است.

در این حال دومین معادله (۱۲-۱۲۶)، به‌ازای $\mu = 0$ می‌شود

$$\begin{aligned}\frac{\partial G^{0\nu}}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial G^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial G^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial G^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial G^{03}}{\partial x^3} \\ &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0\end{aligned}$$

(معادله سوم ماکسول)، در حالی که $\mu = 1$ منجر به نتیجه زیر می‌شود

$$\begin{aligned}\frac{\partial G^{1\nu}}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial G^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial G^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial G^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial G^{13}}{\partial x^3} \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} \right)_x = 0\end{aligned}$$

بنابراین، از ترکیب معادله اخیر با نتایج متناظر با $\mu = 2$ و $\mu = 3$ نتیجه می‌شود

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

که همان قانون فاراده است. پس در نمادگذاری نسبیتی، چهار معادله نسبتاً پیر در دسر ماکسول به دو معادله ساده‌تر زیبا تبدیل می‌شوند.

نیروی مینکوفسکی وارد بر بار q برحسب $F^{\mu\nu}$ و سرعت ویژه η^μ برابر است با

$$\boxed{K^\mu = q\eta_\nu F^{\mu\nu}} \quad (12-127)$$

به‌ازای $\mu = 1$ داریم

$$\begin{aligned}K^1 &= q\eta_\nu F^{1\nu} = q(-\eta^0 F^{10} + \eta^1 F^{11} + \eta^2 F^{12} + \eta^3 F^{13}) \\ &= q \left[\frac{-c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \left(\frac{-E_x}{c} \right) + \frac{u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}} (B_z) + \frac{u_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}} (-B_y) \right] \\ &= \frac{q}{\sqrt{1-u^2/c^2}} [\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})]_x\end{aligned}$$

و به ازای $\mu = 2$ و $\mu = 3$ هم به فرمولهای مشابهی می‌رسیم. از این رو

$$\mathbf{K} = \frac{q}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} [\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] \quad (12-128)$$

و بنابراین با توجه به معادله (۱۲-۷۰) داریم

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})]$$

که همان قانون نیروی لورنتس است. پس معادله (۱۲-۱۲۷) نمایانگر قانون نیروی لورنتس در نمادگذاری نسبیتی است. تفسیر مؤلفه صفرم را به خواننده واگذار می‌کنیم (مسئله ۱۲-۵۴).

مسئله ۱۲-۵۲ معادله پیوستگی (۱۲-۱۲۵) را مستقیماً از معادلات ماکسول (۱۲-۱۲۶) به دست آورید.

مسئله ۱۲-۵۳ نشان دهید که دومین معادله در (۱۲-۱۲۶) را می‌توان برحسب تانسور میدان $F^{\mu\nu}$ به صورت زیر بیان کرد

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (12-129)$$

مسئله ۱۲-۵۴ مؤلفه $\mu = 0$ را در قانون نیروی الکترومغناطیسی، معادله (۱۲-۱۲۷)، به دست آورید و تفسیر فیزیکی کنید. □

۱۲-۳-۵ پتانسیلهای نسبیتی

در فصل ۱۰ دیدیم که میدانهای مغناطیسی و الکتریکی را می‌توان برحسب یک پتانسیل نرده‌ای V و یک پتانسیل برداری \mathbf{A} بیان کرد

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (12-130)$$

همان‌گونه که قابل پیش‌بینی است، V و \mathbf{A} با هم یک چار-بردار می‌سازند:

$$\boxed{A^\mu = (V/c, A_x, A_y, A_z)} \quad (12-131)$$

تانسور میدان را می‌توان برحسب این چار-بردار پتانسیل نوشت

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} \quad (۱۳۲-۱۲)$$

(می‌بینید که مشتق‌گیری نسبت به بردارهای هم‌وردای x_ν و x_μ صورت گرفته است؛ تغییر علامت مؤلفه صفرم را در نظر داشته باشید: $x_0 = -x^0$. مسئله ۱۲-۵۵ را ببینید).

برای نشان دادن هم‌ارزی معادلات (۱۳۲-۱۲) و (۱۳۰-۱۲) چند جمله را به‌طور صریح مقدار یابی می‌کنیم. به‌ازای $\mu = 0$ و $\nu = 1$ داریم

$$\begin{aligned} F^{01} &= \frac{\partial A^1}{\partial x_0} - \frac{\partial A^0}{\partial x_1} = \frac{\partial A_x}{\partial(ct)} - \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla V \right)_x = \frac{E_x}{c} \end{aligned}$$

این (و همراهانش به‌ازای $\nu = 2$ و $\nu = 3$) اولین معادله در (۱۳۰-۱۲) است. به‌ازای $\mu = 1$ و $\nu = 2$ به‌دست می‌آوریم

$$F^{12} = \frac{\partial A^2}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_2} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = (\nabla \times \mathbf{A})_z = B_z$$

که (به انضمام نتایج متناظر برای F^{13} و F^{23}) دومین معادله در (۱۳۰-۱۲) است. فرمول‌بندی پتانسیل، به‌طور خودکار به معادله همگن ماکسول ($\partial G^{\mu\nu} / \partial x^\nu = 0$) توجه دارد. همانند مورد معادله ناهمگن ($\partial F^{\mu\nu} / \partial x^\nu = \mu_0 J^\mu$)، آن هم می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu} \right) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \mu_0 J^\mu \quad (۱۳۳-۱۲)$$

این معادله به‌صورت فعلی دشوار است. با وجود این ممکن است به یادتان بیفتد که پتانسیلها به‌صورت یکتا توسط میدانها تعیین نمی‌شوند. در واقع، از معادله (۱۳۲-۱۲) روشن است که می‌توانید به A^μ ، گرادیان هر تابع زده‌ای λ را، بدون تغییر $F^{\mu\nu}$ بیفزایید

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} \quad (۱۳۴-۱۲)$$

این دقیقاً ناوردایی پیمانه‌ای است که در فصل ۱۱ بحث کردیم؛ از آن برای ساده کردن معادله (۱۲-۱۳۳) استفاده می‌کنیم. به‌خصوص، شرط پیمانه‌ای لورنتس [معادله (۱۰-۱۲)]

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}$$

در نمادگذاری نسبیتی می‌شود

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = 0 \quad (12-135)$$

بنابراین معادله (۱۲-۱۳۳) در پیمانه لورنتس به صورت زیر می‌شود

$$\boxed{\square^\nu A^\mu = -\mu_0 J^\mu} \quad (12-136)$$

که در آن \square^ν دالامبری است.

$$\square^\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (12-137)$$

معادله (۱۲-۱۳۶)، نتایج قبلی ما را در یک تک معادله چار-بردار خلاصه می‌کند که زیباترین و ساده‌ترین معادله ماکسول را به نمایش می‌گذارد.^۱

مسئله ۱۲-۵۵ ممکن است این نکته را دریافته باشید که عملگر گرادیان چهار-بعدي $\partial/\partial x^\mu$ مانند یک چار-بردار هموردا عمل می‌کند - در واقع، برای ایجاد، معمولاً به صورت ∂_μ نوشته می‌شود. به عنوان مثال، معادله پیوستگی $\partial_\mu J^\mu = 0$ شکل حاصلضرب ناوردای دو بردار را دارد. گرادیان پادوردای متناظر هم $\partial^\mu \equiv \partial x_\mu$ خواهد بود. با کار روی قانون تبدیل و استفاده از قاعده زنجیری ثابت کنید هرگاه ϕ یک تابع نرده‌ای باشد، آن‌گاه $\partial^\mu \phi$ یک چار-بردار (پادوردای) است.

مسئله ۱۲-۵۶ نشان دهید که نمایش پتانسیلی [معادله (۱۲-۱۳۲)] خودبه‌خود شرط $\square G^{\mu\nu}/\partial x^\nu = 0$ را برقرار می‌کند [راهنمایی: از مسئله ۱۲-۵۳ استفاده کنید]. □

مسائل تکمیلی فصل ۱۲

مسئله ۱۲-۵۷ دستگاه لخت \bar{S} با سرعت ثابت $\mathbf{v} = \beta c(\cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}})$ نسبت به S

۱. اتفاقاً پیمانه کولن از دیدگاه نسبیتی بد است. زیرا شرط معرف $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ با تبدیل لورنتس از بین می‌رود. برای برقراری مجدد این شرط، لازم است علاوه بر خود تبدیل لورنتس یک تبدیل پیمانه‌ای مناسب وقتی به یک دستگاه لخت جدید می‌رود داشته باشید، در این حالت A^μ چار-بردار واقعی در پیمانه کولن نیست.

حرکت می‌کند محورهای آن دو با هم موازی‌اند و طبق معمول مبدأ آنها نیز $t = \bar{t} = 0$ بر هم منطبق‌اند. ماتریس تبدیل لورنتس Λ [معادله (۱۲-۲۵)] را بیابید.

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \cos \phi & -\gamma\beta \sin \phi & 0 \\ -\gamma\beta \cos \phi & (\gamma \cos^2 \phi + \sin^2 \phi) & (\gamma - 1) \sin \phi \cos \phi & 0 \\ -\gamma\beta \sin \phi & (\gamma - 1) \sin \phi \cos \phi & (\gamma \sin^2 \phi + \cos^2 \phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{پاسخ:}$$

مسئله ۱۲-۵۸ تکانهٔ آستانه (حداقل) لازم یک پیون برای دادن فرایند $\pi + p \rightarrow K + \Sigma$ را محاسبه کنید. پروتون p ، در آغاز ساکن است. $m_p c^2 = 900$ ، $m_K c^2 = 500$ ، $m_\pi c^2 = 150$ و $m_\Sigma c^2 = 1200$ (همه برحسب MeV) بگیرید. [راهنمایی: برای فرمولبندی شرط آستانه، برخورد در چارچوب مرکز تکانه را بیازمایید (مسئله ۱۲-۳۰)]. پاسخ: $1133 \text{ MeV}/c$.

مسئله ۱۲-۵۹ ذره‌ای به جرم m با ذرهٔ هم‌جرم خود که ساکن است برخورد کنشان می‌کند. از دیدگاه کلاسیک، مسیرهای بعد از برخورد زاویهٔ 90° درجه می‌سازند. این زاویه را از منظر نسبیتی برحسب زاویهٔ پراکندگی ϕ و تندی v در چارچوب مرکز تکانه محاسبه کنید. پاسخ: $\tan^{-1}(2c^2/v^2 \gamma \sin \phi)$.

مسئله ۱۲-۶۰ x را به صورت تابعی از t برای حرکتی که از حال سکون در مبدأ تحت تأثیر یک نیروی مینکوفسکی ثابت در راستای x انجام می‌گیرد، بیابید. جواب خود را به صورت غیرصریح (t تابع x) بدهید.

پاسخ: $z \equiv \sqrt{2Kx/mc^2}$ ، که در آن $(2Kt/mc = z\sqrt{1+z^2} + \ln(z + \sqrt{1+z^2}))$.

مسئله ۱۲-۶۱ دو بار نقطه‌ای ($\pm q$) هریک به جرم m که در دو انتهای میلهٔ (بی‌وزنی) به طول d ثابت هستند، تشکیل یک دوقطبی الکتریکی داده‌اند. d را کوچک در نظر بگیرید.

(الف) خود-نیروی کل وارد بر دوقطبی را وقتی حرکت بر مسیر هذلولوی [معادله (۱۲-۶۲)] در طول خطی عمود بر محورش صورت می‌گیرد، بیابید. [راهنمایی: کار را با تعدیل مناسب معادله (۱۱-۹۰) آغاز کنید].

(ب) توجه کنید که این خود-نیرو ثابت (t حذف می‌شود) و در جهت حرکت است — باعث حرکت هذلولوی می‌شود. از این رو امکان دارد دوقطبی در معرض حرکت شتابدار خودنگهدار باشد، بدون آنکه نیرویی خارجی بر آن اثر کند! [فکر کنید انرژی از کجا می‌آید؟] نیروی خودنگهدار

F را برحسب m ، q و d بیابید.

پاسخ: $(2mc^2/d)\sqrt{(\mu_0 q^2/\lambda\pi md)^{2/3} - 1}$

مسئله ۶۲-۱۲ یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی ایده‌آل \mathbf{m} در مبدأ یک دستگاه لخت \bar{S} که با سرعت v در راستای محور x نسبت به دستگاه لخت S حرکت می‌کند قرار دارد. پتانسیل برداری در \bar{S} برابر است با

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\bar{\mathbf{m}} \times \bar{\mathbf{r}}}{\bar{r}^2}$$

[معادله (۸۳-۵)]، و پتانسیل الکتریکی \bar{V} صفر است.

(الف) پتانسیل نرده‌ای V را در S بیابید.

پاسخ: $(1/4\pi\epsilon_0)(\hat{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{m})/c^2 R^2)(1 - v^2/c^2)/(1 - (v^2/c^2)\sin^2\theta)^{3/2}$

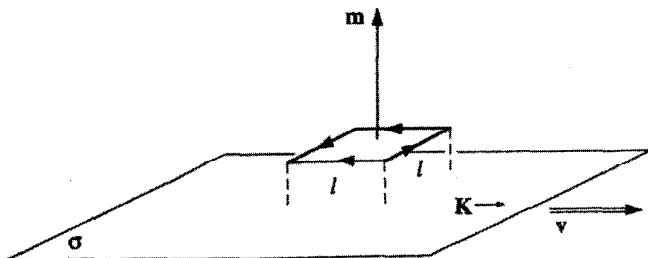
(ب) نشان دهید که، در حد غیر نسبیتی، پتانسیل نرده‌ای در S برابر است با پتانسیل یک دوقطبی الکتریکی ایده‌آل که در \bar{Q} واقع و بزرگی آن عبارت است از

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{m}}{c^2}$$

! مسئله ۶۳-۱۲ یک دوقطبی مغناطیسی ساکن $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{z}}$ در بالای یک جریان سطحی یکنواخت نامتناهی $\mathbf{K} = K\hat{\mathbf{x}}$ (شکل ۴۴-۱۲) قرار دارد.

(الف) گشتاور نیروی وارد بر دوقطبی را با استفاده از معادله (۱-۶) بیابید.

(ب) فرض کنید جریان سطحی متشکل از یک بار سطحی یکنواخت σ باشد، که با سرعت $v\hat{\mathbf{x}} = v\hat{\mathbf{x}}$ ، به‌گونه‌ای که $\mathbf{K} = \sigma\mathbf{v}$ است حرکت می‌کند، و دوقطبی مغناطیسی ناشی از یک بار خطی یکنواخت λ است که با سرعت v (همان سرعت قبلی) حول یک حلقه مربعی به ضلع l



شکل ۴۴-۱۲

مطابق شکل، به طوری که $m = \lambda v l^2$ باشد، می چرخد. همین ترتیبها را از دیدگاه دستگاه \bar{S} که با سرعت v در راستای x حرکت می کند بیازمایید. بار سطحی در \bar{S} به حال سکون است، بنابراین میدان مغناطیسی نمی آفریند. نشان دهید که در این چارچوب، حلقه جریان دارای یک گشتاور دوقطبی الکتریکی است، و گشتاور حاصل را با استفاده از معادله (۴-۴) محاسبه کنید.

مسئله ۱۲-۶۴ در یک چارچوب لخت معین S ، میدان الکتریکی \mathbf{E} و مغناطیسی \mathbf{B} در یک نقطه از فضا زمان خاص، نه موازی اند و نه بر یکدیگر عمود. نشان دهید که در یک دستگاه لخت متفاوت \bar{S} که نسبت به S با سرعت v حرکت می کند، به گونه ای که

$$\frac{\mathbf{v}}{1 + v^2/c^2} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2 + E^2/c^2}$$

است، میدانهای $\bar{\mathbf{E}}$ و $\bar{\mathbf{B}}$ در آن نقطه موازی هستند. آیا چارچوبی که در آن این دو میدان برهم عمود باشند وجود دارد؟

مسئله ۱۲-۶۵ دو بار $\pm q$ با سرعت ثابت از دو جهت مخالف محور x به مبدأ نزدیک می شوند. این دو با هم برخورد کرده و به هم می چسبند و ذره ای خنثی و به حال سکون را به وجود می آورند. میدان الکتریکی را قبل و زمان کوتاهی بعد از برخورد رسم کنید (یادتان باشد که "اخبار" الکترومغناطیسی با سرعت نور حرکت می کنند). از نظر فیزیکی میدان بعد از برخورد چگونه قابل تفسیر است؟^۱

مسئله ۱۲-۶۶ قانون نیروی لورنتس را به صورت زیر "به دست آورید": بار q را به حال سکون در \bar{S} در نظر بگیرید، بنابراین $\bar{\mathbf{F}} = q\bar{\mathbf{E}}$ و فرض کنید \bar{S} با سرعت $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$ نسبت به S حرکت می کند. از قواعد تبدیل [معادلات (۱۲-۶۸) و (۱۲-۱۰۸)] استفاده کرده $\bar{\mathbf{F}}$ را برحسب \mathbf{F} و $\bar{\mathbf{E}}$ را برحسب \mathbf{E} و \mathbf{B} بازنویسی کنید. از روی اینها فرمول \mathbf{F} را برحسب \mathbf{E} و \mathbf{B} نتیجه بگیرید.

مسئله ۱۲-۶۷ بار q از حال سکون تحت تأثیر میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{z}}$ و میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{x}}$ حرکت می کند. مسیر حرکت ذره را با تبدیل به دستگاهی که

۱. به کتاب

E. M. Purcell, *Electricity and Magnetism*, 2d ed. (New York: McGraw-Hill, 1985).

(که در آن پورسل فرمول لارمور را با تحلیل کامل از یک ساختار هندسی مشابه به دست می آورد)، و

R. Y. Tsien, *Am. J. Phys.* **40**, 46 (1972).

رجوع کنید.

در آن $E = 0$ است، تعیین کنید، مسیر را در آن دستگاه یافته و دوباره به دستگاه اصلی تبدیل کنید. فرض کنید $E_0 < cB_0$. نتیجه حاصل را با تمرین ۵-۲ مقایسه کنید.

مسئله ۱۲-۶۸ (الف) یک تانسور $D^{\mu\nu}$ (قابل قیاس با $F^{\mu\nu}$) که خارج از D و H باشد تشکیل دهید. با استفاده از آن، معادلات ماکسول را در داخل ماده برحسب چگالی جریانی آزاد J_f^μ بیان کنید.

پاسخ: $D^{0i} \equiv cD_x, D^{12} \equiv H_z, \dots; \partial D^{\mu\nu} / \partial x^\nu = J_f^\mu$

(ب) تانسور دوتایی $H^{\mu\nu}$ (قابل قیاس با $G^{\mu\nu}$) را بسازید.

پاسخ: $H^{0i} \equiv H_x, H^{12} \equiv -cD_z, \dots$

(ج) مینکوفسکی معادلات اساسی نسبیتی را برای محیطهای خطی چنین پیشنهاد کرد:

$$D^{\mu\nu} \eta_\nu = c^\nu \epsilon F^{\mu\nu} \eta_\nu \quad \text{و} \quad H^{\mu\nu} \eta_\nu = \frac{1}{\mu} G^{\mu\nu} \eta_\nu$$

که در آن ϵ گذردهی ویژه، μ تراوایی ویژه و η^μ عبارت است از چار-سرعت ماده. نشان دهید که از فرمولهای مینکوفسکی، وقتی ماده به حال سکون است، معادلات (۴-۳۲) و (۶-۳۱) مجدداً حاصل می‌شوند.

(د) فرمولهایی که D و H را به E و B مرتبط می‌کنند، برای محیط متحرکی با سرعت (معمولی) u پیدا کنید.

! مسئله ۱۲-۶۹ با استفاده از فرمول لارمور [معادله (۱۱-۷۰)] و نسبیت خاص، فرمول لاردر [معادله (۱۱-۷۳)] را به دست آورید.

مسئله ۱۲-۷۰ تعمیم نسبیتی طبیعی فرمول آبراهام-لورنتس [معادله (۱۱-۸۰)] به نظر چنین است

$$K_{\text{تابشی}}^\mu = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \frac{d\alpha^\mu}{d\tau}$$

قطعاً، این یک چار-بردار است و در حالت حدی غیرنسبیتی که $v \ll c$ است به فرمول آبراهام-لورنتس تبدیل می‌شود.

(الف) با وجود این نشان دهید که این یک نیروی مینکوفسکی محتمل نیست. [راهنمایی: به مسئله ۱۲-۳۸ رجوع کنید.]

۱. چون همیشه، "ویژه" به معنی "در چارچوب سکون ماده" است.

(ب) جمله‌ای تصحیحی بیابید که با افزودن آن به سمت راست، ایراد مذکور در قسمت (الف) را، بدون تأثیرگذاری بر مشخصه چار-برداری فرمول یا حد غیرنسبیتی آن، از بین ببرد.^۱

مسئله ۷۱-۱۲ قوانین الکترودینامیک نسبیتی [معادلات (۱۲-۱۲۶) و (۱۲-۱۲۷)] را طوری تعمیم دهید که در برگرفته بار مغناطیسی هم باشد [به بخش ۷-۳-۴ رجوع کنید].
□

۱. برای اظهارنظرهای جالب درباره واکنش تابش نسبیتی، مرجع زیر را ببینید:

پیوست الف

حسابان برداری در مختصات خمیده خط

الف-۱ مقدمه

در این پیوست سه قضیه بنیادی حسابان برداری را اثبات می‌کنیم. هدف ما انتقال جوهر بحث است، نه پیگیری هر اِپسیلن و دلتا.^۱

به خاطر عمومیت دادن به بحث، مختصات خمیده خط (متعامد) دلخواه (u, v, w) را که در هر یک از آنها فرمولهای گرادیان، دیورژانس، تاو و لاپلاسی بسط و بیان می‌شوند، به کار خواهیم برد. در این صورت شما می‌توانید آنها را به مختصات دکارتی، کروی و استوانه‌ای یا هر مختصاتی که مایل باشید، تخصیص بدهید. اگر در اولین برخورد، این عمومیت باعث زحمت شما می‌شود و بیشتر مختصات دکارتی را ترجیح می‌دهید، هر جا که به (u, v, w) رسیدید به جای آنها بگذارید یا بخوانید (x, y, z) و با پیشرفت در مسئله ساده‌سازیها لازم و وابسته را انجام دهید.

الف-۲ نمادگذاری

یک نقطه را در فضا با سه مختصه (u, v, w) آن مشخص می‌کنیم. معادل اینها، برای دستگاه دکارتی، (x, y, z) ، برای دستگاه کروی، (r, ϕ, z) ، و برای دستگاه استوانه‌ای، (s, ϕ, z) هستند.

۱. بحث جالبتر، جامعتر و با وسعت بیشتر، ولی الزاماً خیلی طولانیتر این مطلب را می‌توان در مرجع زیر یافت:

فرض ما آن خواهد بود که دستگاه متعامد است، به گونه‌ای که سه بردار \hat{u} ، \hat{v} و \hat{w} که در جهت افزایش مختصات متناظرشان هستند و دو به دو بر یکدیگر عمودند. توجه کنید که بردارهای یکه توابعی از مکان هستند، زیرا جهت‌های آنها (جز در مورد دکارتی) از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می‌کنند. هر برداری را می‌توان برحسب \hat{u} ، \hat{v} و \hat{w} نوشت — به ویژه یک بردار جابه‌جایی بینهایت کوچک از (u, v, w) به $(u + du, v + dv, w + dw)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$dl = f du \hat{u} + g dv \hat{v} + h dw \hat{w} \quad (\text{الف-۱})$$

که در آن f ، g و h توابعی از مشخصه مکانی دستگاه مختصات مورد نظر است (برای دستگاه مختصات دکارتی، $f = g = h = 1$ ؛ برای مختصات کروی، $f = 1$ ، $g = r$ ، $h = r \sin \theta$ ؛ و در مختصات استوانه‌ای، $f = h = 1$ ، $g = s$). چنانکه به زودی خواهید دید این سه تابع هر اطلاعاتی را که درباره دستگاه مختصات لازم دارید، به شما می‌دهد.

الف-۳ گرادیان

اگر از نقطه (u, v, w) به نقطه دیگر $(u + du, v + dv, w + dw)$ حرکت کنید، یک تابع نرده‌ای $t(u, v, w)$ تغییراتی می‌کند که برابر است با

$$dt = \frac{\partial t}{\partial u} du + \frac{\partial t}{\partial v} dv + \frac{\partial t}{\partial w} dw \quad (\text{الف-۲})$$

این، یک قضیه استاندارد در مشتق‌گیری جزئی است.^۱ (الف-۲) را می‌توان به صورت یک حاصلضرب نقطه‌ای نوشت

$$dt = \nabla t \cdot dl = (\nabla t)_u f du + (\nabla t)_v g dv + (\nabla t)_w h dw \quad (\text{الف-۳})$$

به شرط آنکه از تعریف زیر استفاده شود

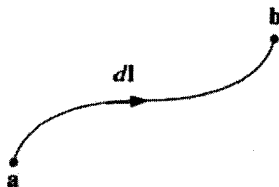
$$(\nabla t)_u \equiv \frac{1}{f} \frac{\partial t}{\partial u}, \quad (\nabla t)_v \equiv \frac{1}{g} \frac{\partial t}{\partial v}, \quad (\nabla t)_w \equiv \frac{1}{h} \frac{\partial t}{\partial w}$$

بنابراین، گرادیان t عبارت است از

$$\nabla t \equiv \frac{1}{f} \frac{\partial t}{\partial u} \hat{u} + \frac{1}{g} \frac{\partial t}{\partial v} \hat{v} + \frac{1}{h} \frac{\partial t}{\partial w} \hat{w} \quad (\text{الف-۴})$$

جدول الف-۱

h	g	f	w	v	u	سیستم
\backslash	\backslash	\backslash	z	y	x	دکارتی
$r \sin \theta$	r	\backslash	ϕ	θ	r	کروی
\backslash	s	\backslash	z	ϕ	s	استوانه‌ای



شکل الف-۱

حال شما می‌توانید با انتخاب f, g و h مناسب از جدول الف-۱ فرمول ∇t را برای مختصات دکارتی، کروی و استوانه‌ای، آن‌گونه که در صفحات بعد از نمایه آورده‌ایم، تعمیم دهید. از معادله (الف-۳) نتیجه می‌شود که تغییر کل در t ، وقتی از نقطه a به نقطه b (شکل الف-۱) می‌روید، برابر است با

$$t(b) - t(a) = \int_a^b dt = \int_a^b (\nabla t) \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{الف-۵})$$

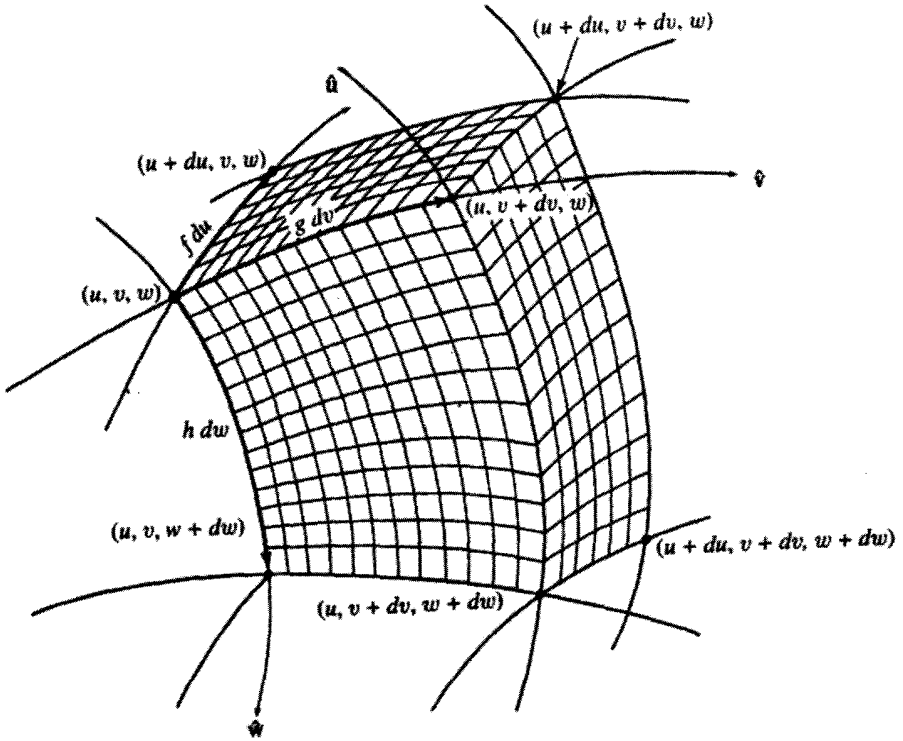
که قضیه بنیادی برای گرادینها است (در این مورد واقعاً چیزی برای اثبات وجود ندارد). توجه کنید که انتگرال مستقل از مسیری است که a را به b وصل می‌کند.

الف-۴ دیورژانس

فرض کنید یک تابع برداری به صورت زیر داشته باشیم

$$\mathbf{A}(u, v, w) = A_u \hat{u} + A_v \hat{v} + A_w \hat{w}$$

و بخواهیم انتگرال $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$ را روی سطح یک حجم بینهایت کوچک حساب کنیم که با شروع از نقطه (u, v, w) و افزایش هر یک از مختصه‌ها به مقدار بینهایت کوچک تولید می‌شود (شکل الف-۲).



شکل الف-۲

چون مختصات متعامدند حجم حاصل (حداقل در حد بسیار کوچک) یک مکعب مستطیل است که طول ابعاد آن عبارت‌اند از $dl_u = f du$ و $dl_v = g dv$ و $dl_w = h dw$ و بنابراین حجم آن برابر است با

$$d\tau = dl_u dl_v dl_w = (fgh) du dv dw \quad (\text{الف-۶})$$

اضلاع در نهایت دقیقاً du, dv, dw نیستند، مثلاً v ممکن است یک زاویه باشد که در این مورد dv حتی دارای بعد طول هم نیست. عبارت درست از معادله (الف-۱) به دست می‌آید.
برای سطح جلوبی

$$d\mathbf{a} = -(gh) dv dw \hat{u}$$

به طوری که

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = -(ghA_u) du dv dw$$

سطح عقبی هم همانند سطح جلویی است (فقط با علامت مخالف)، فقط این دفعه کمیت ghA_u را باید به جای نقطه u در نقطه $(u + du)$ محاسبه کرد. از این رو برای هر تابع (دیفرانسیل پذیر) $F(u)$ در حالت حد داریم

$$F(u + du) - F(u) = \frac{dF}{du} du$$

و مجموع تأثیر قسمت جلو و عقب با هم عبارت است از

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} (ghA_u) \right] du dv dw = \frac{1}{fgh} \frac{\partial}{\partial u} (ghA_u) d\tau$$

به همین شیوه، برای سمت راست و چپ داریم

$$\frac{1}{fgh} \frac{\partial}{\partial v} (fhA_v) d\tau$$

و نتیجه قسمت بالا و پایین عبارت است از

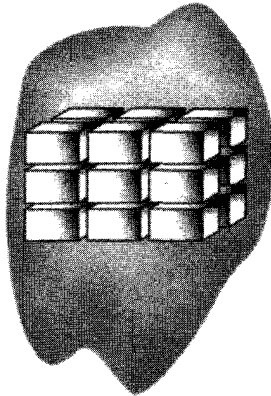
$$\frac{1}{fgh} \frac{\partial}{\partial w} (fgA_w) d\tau$$

مجموع کل هم می شود

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{fgh} \left[\frac{\partial}{\partial u} (ghA_u) + \frac{\partial}{\partial v} (fhA_v) + \frac{\partial}{\partial w} (fgA_w) \right] d\tau \quad (\text{الف-۷})$$

از ضریب $d\tau$ می توان برای تعریف دیورژانس بردار \mathbf{A} در مختصات خمیده خط استفاده کرد

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \frac{1}{fgh} \left[\frac{\partial}{\partial u} (ghA_u) + \frac{\partial}{\partial v} (fhA_v) + \frac{\partial}{\partial w} (fgA_w) \right]} \quad (\text{الف-۸})$$



شکل الف-۳

و معادله (الف-۷) می‌شود

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau \quad (\text{الف-۹})$$

حال شما می‌توانید با استفاده از جدول الف-۱، فرمول دیورژانس را در مختصات دکارتی، کروی و استوانه‌ای آن‌گونه که در صفحات بعد از نمایه آمده است به دست آورید.

معادله (الف-۹) به صورت بالا قضیه دیورژانس را ثابت نمی‌کند، زیرا فقط برای حجم بسیار کوچک صادق است. البته یک حجم متناهی را می‌توان به تکه‌های بسیار کوچک تقسیم کرد، و برای هر تکه از معادله (الف-۹) استفاده کرد. مشکل در اینجا است که وقتی شما همه این اجزاء را جمع می‌کنید، سمت چپ صرفاً انتگرال روی سطح خارجی نیست، بلکه روی همه سطوح داخلی کوچک هم هست. با وجود این، خوشبختانه این سطوح داخلی دو به دو اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند؛ زیرا هر سطح داخلی مرز بین دو حجم بسیار کوچک مجاور است، و چون da همواره به سمت بیرون است، $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$ برای دو عضو هر زوج دارای علامتهای مخالف هم است (شکل الف-۳). فقط سطحهایی که یک جسم را محدود می‌کنند و یا به عبارتی آنهایی که در مرز خارجی قرار دارند، همه با هم جمع می‌شوند. پس برای نواحی متناهی داریم

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau \quad (\text{الف-۱۰})$$

و کار شما آن است که صرفاً روی سطح خارجی انتگرال بگیرید.^۱ به این ترتیب قضیه دیورژانس ثابت می‌شود.

۱. درباره مناطق که هر قدر هم کوچک باشند، کاملاً در جامدات مکعب مستطیل نمی‌برازند مثلاً درباره صفحاتی

الف-۵ تاو

برای به دست آوردن تاو در مختصات خمیده خط انتگرال

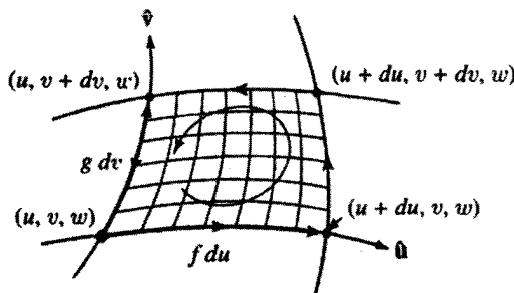
$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

را حول حلقه بسیار کوچکی که از نقطه (u, v, w) شروع می‌شود و با ثابت نگاه داشتن w مقادیر u و v به مقادیر بسیار کوچک افزایش می‌یابند، حساب می‌کنیم (شکل الف-۴). سطح (حداقل در حالت حد بسیار کوچک) یک مستطیل است به طول $dl_u = f du$ و به عرض $dl_v = g dv$ و به مساحت

$$da = (fg) du dv \hat{\mathbf{w}} \quad (\text{الف-۱۱})$$

با قبول اینکه مختصات راستگرد، $\hat{\mathbf{w}}$ به سمت خارج صفحه کتاب در شکل الف-۴ است و انتخاب آن به عنوان جهت مثبت برای سطح da ، بنابه قاعده دست راست مجبوریم مطابق شکل انتگرال خطی را در جهت پادساعتگرد بگیریم. در طول پاره خط پایینی داریم

$$d\mathbf{l} = f du \hat{\mathbf{u}}$$



شکل الف-۴

که خطوط مختصات را با زاویه قطع می‌کنند چه می‌گویید؟ پاسخ این پرسش مشکل نیست، سعی کنید درباره آن فکر کنید و یا به کتاب زیر مراجعه کنید:

و بنابراین

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = (f A_u) du$$

در طول پایه بالایی، علامت عوض می‌شود و $f A_u$ را باید به جای v در $(v + dv)$ ارزیابی کنیم و جمع این دو لبه می‌شود

$$\left[-(f A_u) \Big|_{v+dv} + (f A_u) \Big|_v \right] du = - \left[\frac{\partial}{\partial v} (f A_u) \right] du dv$$

به‌گونه‌ای مشابه برای اضلاع سمت راست و چپ

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} (g A_v) \right] du dv$$

و نتیجه کلی این است

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \left[\frac{\partial}{\partial u} (g A_v) - \frac{\partial}{\partial v} (f A_u) \right] du dv \\ &= \frac{1}{fg} \left[\frac{\partial}{\partial u} (g A_v) - \frac{\partial}{\partial v} (f A_u) \right] \hat{\mathbf{w}} \cdot d\mathbf{a} \end{aligned} \quad (\text{الف-۱۲})$$

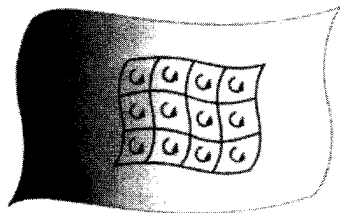
با توجه به ضریب $d\mathbf{a}$ در سمت راست، مؤلفه w تاو حساب می‌شود. به همین شیوه مؤلفه‌های u و v حساب می‌شود و داریم

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &\equiv \frac{1}{gh} \left[\frac{\partial}{\partial v} (h A_w) - \frac{\partial}{\partial w} (g A_v) \right] \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{fh} \left[\frac{\partial}{\partial w} (f A_u) - \frac{\partial}{\partial u} (h A_w) \right] \hat{\mathbf{v}} \\ &\quad + \frac{1}{fg} \left[\frac{\partial}{\partial u} (g A_u) - \frac{\partial}{\partial v} (f A_v) \right] \hat{\mathbf{w}} \end{aligned}$$

(الف-۱۳)

و معادله (الف-۱۱) به صورت زیر تعمیم می‌یابد

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} \quad (\text{الف-۱۴})$$



شکل الف۵

با استفاده از جدول الف۱، حالا می‌توانید فرمول تاو را در مختصات دکارتی، کروی و استوانه‌ای پیدا کنید.

ولی معادله (الف۱۴) به تنهایی قانون استوکس را اثبات نمی‌کند، زیرا، به این نقطه فقط یک سطح بسیار کوچک خاص مربوط است. باز هم، می‌توانیم هر سطح متناهی را به صورت مجموعه‌ای از قطعات بسیار کوچک بریده و معادله (الف۱۴) را برای هر قطعه‌ای اعمال کنیم (شکل الف۵). وقتی اینها را با هم جمع می‌کنیم، (سمت چپ) نه تنها یک انتگرال خطی حول مرز خارجی را به دست می‌آوریم، بلکه تعداد زیادی انتگرالهای خطی حول حلقه‌های داخلی هم حاصل می‌شوند. خوشبختانه همانند قبل این انتگرالهای داخلی به صورت زوج یکدیگر را خنثی می‌کنند، زیرا هر خط داخلی کناره دو حلقه مجاور است که در دو جهت مخالف قرار دارند. پیامد این بحث آن است که معادله (الف۱۴) را می‌توان برای سطوح متناهی تعمیم داد

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} \quad (\text{الف۱۵})$$

و انتگرال خطی را فقط باید روی مرز خارجی حساب کرد.^۱ این بحث قضیه استوکس را ثابت می‌کند.

۱. درباره سطوحی که به طور کامل در مستطیل جا نمی‌گیرند، صرف نظر از اینکه چقدر کوچک باشند، نظیر مثلث، یا سطوحی که متناظر به یک مختصه ثابت نیستند چه می‌گویید؟ اگر چنین پرسشهایی ذهن شما را مشغول می‌کند و خودتان هم نمی‌توانید مشکل را حل کنید. به کتاب زیر مراجعه کنید:

H. M. Schey's *Div, Grad, Curl, and All That*, Prob. III-2 (New York: W.W. Norton, 1973).

الف-۶ لاپلاسی

چون، بنا به تعریف، لاپلاسی یک کمیت زده‌ای، دیورژانس گرادیان است، می‌توانیم از معادلات (الف-۴) و (الف-۸) فرمول کلی زیر را نتیجه بگیریم

$$\nabla^2 t \equiv \frac{1}{fgh} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{gh}{f} \frac{\partial t}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{fh}{g} \frac{\partial t}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{fg}{h} \frac{\partial t}{\partial w} \right) \right] \quad (\text{الف-۱۶})$$

باز هم تأکید می‌کنیم که برای محاسبه لاپلاسی در مختصات دکارتی، کروی و استوانه‌ای از جدول الف-۱ استفاده کرده و فرمولهای صفحات بعد از نمایه را ثابت کنید.

پیوست ب

قضیه هلمهولتز

فرض کنید به ما گفته‌اند که دیورژانس یک تابع برداری $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ برابر است با یک تابع نرده‌ای مشخص $D(\mathbf{r})$:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = D \quad (\text{ب-۱})$$

و نیز تاو $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ، یک تابع برداری مشخص $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ است

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{C} \quad (\text{ب-۲})$$

شرط سازگاری آن است که دیورژانس \mathbf{C} صفر باشد

$$\nabla \cdot \mathbf{C} = 0 \quad (\text{ب-۳})$$

زیرا دیورژانس یک تاو همواره صفر است. پرسش: با توجه به این اطلاعات آیا می‌توانیم تابع \mathbf{F} را معین کنیم؟ اگر $D(\mathbf{r})$ و $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ نسبتاً سریع در بینهایت صفر شوند، جواب مثبت است. این را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

ادعا می‌کنیم که

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \nabla \times \mathbf{W} \quad (۴-ب)$$

که در آن

$$U(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \frac{D(\mathbf{r}')}{\pi} d\tau' \quad (۵-ب)$$

و

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{\pi} d\tau'; \quad (۶-ب)$$

انتگرالها روی تمام فضا گرفته می‌شوند، و چون همیشه $\pi = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ زیرا اگر \mathbf{F} از معادله (۴-ب) معلوم باشد، دیورژانس آن [با استفاده از معادله (۱-۲۰)] عبارت است از

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\nabla^2 U = -\frac{1}{4\pi} \int D \nabla^2 \left(\frac{1}{\pi} \right) d\tau' = \int D(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau' = D(\mathbf{r})$$

یادتان باشد که دیورژانس یک تاو، صفر است، بنابراین جمله \mathbf{W} حذف می‌شود و توجه کنید که دیفرانسیل‌گیری هم نسبت به \mathbf{r} صورت می‌گیرد که خود در π وجود دارد. بنابراین دیورژانس درست است؛ درباره تاو چطور؟

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{W}) = -\nabla^2 \mathbf{W} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{W}) \quad (۷-ب)$$

(چون تاو گرادیان، صفر است، جمله‌های مربوط به U حذف می‌شوند.) حال

$$-\nabla^2 \mathbf{W} = -\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{C} \nabla^2 \left(\frac{1}{\pi} \right) d\tau' = \int \mathbf{C}(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau' = \mathbf{C}(\mathbf{r})$$

هم در صورتی که متقاعد شوید که جمله دوم سمت راست معادله (۷-ب) صفر می‌شود، کامل است. با استفاده از انتگرال جزء به جزء [معادله (۱-۵۹)] و با توجه به اینکه مشتقهای π نسبت به مختصات پریم‌دار، با مقایسه با مشتقها نسبت به مختصات بدون پریم فقط یک تفاوت علامت دارند، داریم

$$\begin{aligned} 4\pi \nabla \cdot \mathbf{W} &= \int \mathbf{C} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\pi} \right) d\tau' = - \int \mathbf{C} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\pi} \right) d\tau' \\ &= \int \frac{1}{\pi} \nabla' \cdot \mathbf{C} d\tau' - \oint \frac{1}{\pi} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{a} \end{aligned} \quad (۸-ب)$$

اما دیورژانس C صفر است، زیرا بنابه معادله (ب-۳) و اینکه انتگرال سطحی (صفر در بینهایت) نیز صفر می‌شود، وقتی که C به اندازه کافی سریع به صفر میل کند.

البته، در این اثبات به‌طور ضمنی انتگرالهای معادلات (ب-۵) و (ب-۶)، همگرا در نظر گرفته می‌شوند، چه در غیر این صورت U و W اصلاً وجود نمی‌داشتند. در حد $r' \rightarrow \infty$ بزرگ، که در آن $\pi \approx r'$ است، انتگرالها به‌صورت زیر در می‌آیند

$$\int_0^\infty \frac{X(r')}{r'} r'^2 = \int_0^\infty r' X(r') dr' \quad (\text{ب-۹})$$

در اینجا X بسته به مورد، جانشین D یا C است). بدیهی است که $X(r')$ باید به‌ازای مقادیر بزرگ r' به صفر میل کند — اما تنها این کافی نیست: هرگاه $X \sim 1/r'$ باشد، انتگرالده ثابت و بنابراین انتگرال بسیار بزرگ می‌شود، و حتی اگر $X \sim 1/r'^2$ باشد، انتگرال یک لگاریتم است که باز هم وقتی $r' \rightarrow \infty$ ، خوب نیست. بدیهی است که دیورژانس و تاو F باید خیلی سریعتر از $1/r^2$ به صفر میل کند تا اثبات برقرار باشد. [و این خود بیش از آن است که برای اطمینان از اینکه انتگرال سطحی در معادله (ب-۸) صفر می‌شود لازم است].

حال، با فرض آنکه شرایط روی $D(r)$ و $C(r)$ برقرار باشند، آیا جواب معادله (ب-۴) یکتاست؟ بدیهی است که جواب منفی است. زیرا ما می‌توانیم هر تابع برداری را که دیورژانس و تاو آن هر دو صفر هستند به F بیفزاییم و نتیجه حاصل، همچنان دیورژانس D و تاو C وجود داشته باشند. با وجود این، تابعی وجود ندارد که در همه جا دیورژانس و تاو صفر داشته و در بینهایت به صفر برسد (بخشهای ۳-۱-۵). بنابراین اگر این شرط را اضافه کنیم که $F(r)$ وقتی $r \rightarrow \infty$ به صفر میل کند، آن‌گاه جواب (ب-۴) یکتاست.^۱

حال که همه چیز گفته شده می‌توانیم قضیهٔ هلمهولتز را به‌صورت دقیقتر زیر بیان کنیم:

اگر دیورژانس $D(r)$ و تاو $C(r)$ یک تابع برداری $F(r)$ معلوم باشند، و هر گاه هر دو آنها وقتی $r \rightarrow \infty$ سریعتر از $1/r^2$ به صفر برسد، و اگر $F(r)$ وقتی $r \rightarrow \infty$ به صفر برسد، آن‌گاه F به‌طور یکتا از معادله (ب-۴) نتیجه می‌شود.

قضیهٔ هلمهولتز یک نتیجهٔ فرعی جالب هم دارد:

هر تابع برداری (دیفرانسیل‌پذیر) $F(r)$ را که به‌ازای $r \rightarrow \infty$ سریعتر از $1/r$ به صفر میل

۱. نوعاً انتظار داریم که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در فواصل دور از بارها و جریانهای مولد آنها به صفر میل کنند، بنابراین، این فرض ناموجهی نیست. اما ممکن است گاهی با مسائلی روبه‌رو شویم که در آنها بارها و جریانها به‌طور مصنوعی تا بینهایت توزیع شده باشد، مثلاً سیمهای نامتناهی یا صفحات نامتناهی. در چنین مواردی باید ابزار دیگری یافت تا وجود یکتایی جوابهای مطالعات ماکسول را ممکن سازند.

می‌کند می‌توان به صورت گرادیان یک کمیت زده‌ای به علاوهٔ تاو یک بردار بیان کرد.^۱

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \left(\frac{-1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{\pi} d\tau' \right) + \nabla \times \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{\pi} d\tau' \right) \quad (\text{ب-۱۰})$$

به عنوان مثال، در الکتروستاتیک $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ و $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ، بنابراین

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\pi} d\tau' \right) = -\nabla V \quad (\text{ب-۱۱})$$

که در آن V پتانسیل زده‌ای است، در حالی که در مغناطوستاتیک $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ و $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ ، بنابراین

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\pi} d\tau' \right) = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{ب-۱۲})$$

که در آن \mathbf{A} پتانسیل برداری است.

۱. یک واقعیت این است که هر تابع برداری دیفرانسیل‌پذیری (صرف نظر از رفتار آن در بینهایت) را می‌توان به صورت یک گرادیان به علاوه یک تاو نوشت، اما این نتیجهٔ عمومیتر، نه مستقیماً از قضیهٔ هلمهولتز نتیجه‌گیری می‌شود و نه از معادلهٔ (ب-۱۰)، زیرا که انتگرالها در حالت کلی واگرا هستند.

پیوست ج

یکایا

در SI قانون کولن به صورت زیر است

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{SI}) \quad (\text{ج-۱})$$

کمیت‌های مکانیکی بر حسب متر، کیلوگرم، ثانیه و بار الکتریکی بر حسب کولن است (جدول ج-۱). در دستگاه گاوسی ثابت $(1/4)\pi\epsilon_0$ در یکای بار الکتریکی مستقر است، به طوری که داریم

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{گاوسی}) \quad (\text{ج-۲})$$

کمیت‌های مکانیکی بر حسب سانتیمتر، گرم، ثانیه و بار الکتریکی بر حسب یکاهای الکتروستاتیکی (یا esu) سنجیده می‌شوند. بنابراین یک esu برابر است با $(\text{دین})^{1/2} \times \text{سانتیمتر}$. تبدیل معادلات الکتروستاتیک از SI به یکاهای گاوسی دشوار نیست: مثلاً

$$\epsilon_0 \rightarrow \frac{1}{4\pi}$$

جدول ج-۱ ضرایب تبدیل. [توجه: همه ۳ها؛ بجز آنها که در نما نوشته شده‌اند مقدار تقریبی $\alpha \equiv 2,99792458 \times 10^8$ (مقدار عددی سرعت نور) است و نیز ۹ همان α^2 و ۱۲ همان 4α است.]

کمیت	SI	ضریب	گاوسی
طول	متر (m)	10^2	سانتیمتر
جرم	کیلوگرم (kg)	10^3	گرم
زمان	ثانیه (s)	۱	ثانیه
نیرو	نیوتون (N)	10^5	دین
انرژی	ژول (J)	10^7	ارگ
توان	وات (W)	10^7	ثانیه/ارگ
بار	کولن (C)	3×10^9	esu (استات کولن)
جریان	آمپر (A)	3×10^9	esu/s (استات آمپر)
میدان الکتریکی	متر/ولت	$(1/3) \times 10^{-2}$	سانتیمتر/استات ولت
پتانسیل	ولت (V)	$1/300$	استات ولت
جابه‌جایی	متر ^۲ /کولن	$12\pi \times 10^5$	سانتیمتر ^۲ /استات کولن
مقاومت	اهم (Ω)	$(1/9) \times 10^{-11}$	سانتیمتر/ثانیه
ظرفیت	فاراد (F)	9×10^{11}	سانتیمتر
میدان مغناطیسی	تسلا (T)	10^4	گاوس
شار مغناطیسی	وبر (Wb)	10^8	ماکسول
H	متر/آمپر	$4\pi \times 10^{-3}$	آرستد
القایدگی	هنری (H)	$(1/9) \times 10^{-11}$	سانتیمتر ^۲ /ثانیه

به‌عنوان مثال، انرژی ذخیره‌شده در یک میدان الکتریکی [معادله (۲-۴۵)] که عبارت است از

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau \quad (\text{SI})$$

می‌شود

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 d\tau \quad (\text{گاوسی})$$

(فرمولهای مربوط به میدانهای داخل دی الکتریک به سادگی قابل تبدیل نیستند، زیرا تعاریف جابه جایی، گذردهی الکتریکی و غیره متفاوت اند، به جدول ج-۲ توجه کنید).
قانون بیوساوار هم که معمولاً به صورت زیر است

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (\text{SI}) \quad (\text{ج-۳})$$

در دستگاه گاوسی می شود

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \int \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (\text{گاوسی}) \quad (\text{ج-۴})$$

که در آن c سرعت نور است و جریان هم برحسب esu/s اندازه گیری می شود. یکای گاوسی میدان مغناطیسی گاوس است؛ این کمیت از این دستگاه را در کاربردهای روزمره زیاد استفاده می کنیم؛ معمولاً از ولت، آمپر، هنری و ... (که همه در SI هستند) صحبت می شود، اما به دلایلی ترجیح می دهیم میدان را برحسب گاوس (یکای گاوسی) بنویسیم؛ یکای SI میدان، تسلا (معادل 10^4 گاوس) است.

یک خصوصیت مهم دستگاه گاوسی آن است که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی از نظر ابعادی مشابه هستند (از نظر اصولی، می توان میدان الکتریکی را نیز برحسب گاوس نوشت، گرچه در این متن چنین کاری نمی کنیم). بنابراین قانون نیروی لورنتس را که معمولاً به صورت

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{SI}) \quad (\text{ج-۵})$$

(که نشان می دهد E/B دارای بعد سرعت است) می نویسیم، در دستگاه گاوسی می شود

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (\text{گاوسی}) \quad (\text{ج-۶})$$

در نتیجه، مقیاس میدان مغناطیسی به اندازه ضریب c تغییر می کند. این خود، ساختار موازی الکتریسته و مغناطیس را نمایش می دهد. به عنوان مثال، انرژی کل ذخیره شده در میدانهای الکترومغناطیسی برابر است با

$$U = \frac{1}{4\pi} \int (E^2 + B^2) d\tau \quad (\text{گاوسی}) \quad (\text{ج-۷})$$

جدول ج-۲ معادلات بنیادی در یکاهای SI و گاوسی

گاوسی	SI	
معادلات ماکسول		
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \varphi \pi \rho$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$	به طور کلی:
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	
$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\varphi \pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	
در ماده:		
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varphi \pi \rho_f$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$	در ماده:
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	
$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\varphi \pi}{c} \mathbf{J}_f + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	
D و H		
$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \varphi \pi \mathbf{P}$	$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$	تعاریف:
$\mathbf{H} = \mathbf{B} - \varphi \pi \mathbf{M}$	$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$	
$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}, \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$	$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$	محیط خطی:
$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$	$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$	
$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$	قانون نیروی لورنتس
انرژی و توان		
$U = \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d\tau$	$U = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2) d\tau$	انرژی:
$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$	$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$	بردار پوینتینگ:
$P = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3}$	$P = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3}$	فرمول لارمور:

که با حذف ϵ_0 و μ_0 که تقارن در فرمول SI را از بین می‌برد، حاصل شده است

$$U = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau \quad (\text{SI}) \quad (\text{ج-۸})$$

جدول ج-۲ بعضی فرمولهای اساسی الکترودینامیک را در هر دو دستگاه نشان می‌دهد.^۱ که در آن فهرست کاملتری را می‌توانید پیدا کنید.^۲

۱. برای معادلاتی که در اینجا نیستند و برای یکاهای هوساید-لورنتس رجوع کنید به:

J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. (New York: John Wiley, 1999).

۲. همچنین برای ملاحظه یک مرجع "پایه‌ای" جالب درباره یکاهای SI رجوع کنید به:

N. M. Zimmerman, *Am. J. Phys.* **66**, 324 (1998).

نمایه

- آزمایش تابلور و ویلر ۶۲۸
 ~ مایکلسون-مورلی ۶۱۴
 ~ حال ۳۱۶
 ~ امیر ۲۶۷
 آنالیز برداری ۹
 اثر ۶۱۲
 ~ باد ۶۱۴
 ~ کشش ۶۱۳
 اتساع زمان ۶۱۹، ۶۲۰
 اثر میدان مغناطیسی روی مدارهای اتمی ۳۳۳
 اثر حال ۳۱۶
 اصل برهم‌نهی ۸۰
 الفا ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷
 ~ی الکترومغناطیسی ۳۸۴، ۴۰۹
 ~ی متقابل ۳۹۷
 الکترودینامیک نسبی ۶۶۷، ۶۹۳
 الکتروستاتیک ۸۲، ۲۷۵، ۲۸۸، ۲۹۷
 امواج پاشنده ۵۰۸
 ~ آب ۵۱۶
 ~ الکترومغناطیسی ۴۴۴، ۵۲۸
 ~ تخت ۴۸۰، ۴۸۵
 ~ تکفام ۴۸۰
 ~ در رساناها ۵۰۱، ۵۰۸
 ~ در فضای آزاد ۴۷۹، ۴۸۷
 ~ در محیطهای خطی ۴۸۷، ۵۰۱
 ~ ساکن ۵۲۳
 ~ سینوسی ۴۶۸، ۴۷۲
 ~ طولی ۴۷۶
 ~ عرضی ۴۷۶، ۴۸۰، ۴۸۲
 ~ کروی ۵۲۶
 ~ محوشده ۵۲۸
 ~ TEM, TM, TE ۵۱۹
 انتگرالگیری جزء به جزء ۵۴
 انتگرالهای خطی ۳۹
 ~ حجمی ۴۳
 ~ سطحی ۴۱
 انرژی
 ~ بار نقطه‌ای نزدیک صفحه رسانا ۱۶۱
 ~ پایستاری ۴۴۰، ۴۹۲، ۶۵۲
 ~ پتانسیل ۱۰۷

- ~ پایه ۱۴
 ~ پوئین تینگ ۴۴۲
 ~ جمع ۱۴، ۱۰
 ~ چهار- ۶۳۸، ۶۳۹
 ~ ضرب
 ~ برداری دو بردار ۱۲
 ~ در عدد ۱۱
 ~ سه گانه برداری ۱۸
 ~ سه گانه عددی ۱۷
 ~ نقطه‌ای دو بردار ۱۱، ۱۵
 ~ مساحت ۷۸، ۳۱۲
 ~ مکان ۱۰، ۱۹
 ~ مؤلفه‌ها ۱۴، ۵۶
 ~ موج ۲۸۳
 ~ وردا ۶۳۹
 ~ یکه ۱۲، ۵۶، ۵۷، ۶۳
 بردارهای یکه
 ~ استوانه‌ای ۶۳
 ~ دکارتی ۱۴
 ~ عمود ۱۱۹
 ~ کروی ۵۶، ۶۲
 ~ منحنی الخط ۵۷
 بسامد سیکلوترونی ۲۶۵
 ~ قطع ۵۲۲
 بسط چندقطبی ۱۹۰، ۱۹۳
 ~ پتانسیل برداری ۳۱۰
 یازادوکس
 ~ ارنفست ۶۲۹
 ~ دوقلوها ۶۲۲، ۶۳۶
 ~ نزدبان و انبار ۶۲۶
 پارامغناطیسی ۳۲۷، ۳۲۸
 پاشندگی ۵۰۸
 ~ پوسته کروی ۱۲۵
 ~ شار ۴۴۲
 ~ توزیع بار نقطه‌ای ۱۲۲
 ~ توزیع بیوسته بارها ۱۲۴
 ~ خازن ۱۳۹
 ~ در میدان الکتریکی ۴۴۰، ۴۴۴
 ~ در میدان مغناطیسی ۴۰۴، ۴۰۷، ۴۴۰
 ~ دوقطبی الکتریکی در میدان الکتریکی
 ۲۱۵
 ~ دوقطبی مغناطیسی در میدان
 مغناطیسی ۳۵۹
 ~ دی‌الکتریک خطی ۲۴۶، ۲۴۷
 ~ موج الکترومغناطیسی ۴۸۴، ۴۸۶
 ~ نسیتی ۶۵۰، ۶۵۳
 انقباض لورنتس ۶۲۵، ۶۳۴
 بار
 ~ آزاد ۲۰۸، ۲۲۶، ۵۰۱
 ~ القایی ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۲
 ~ سطحی القایی ۱۵۹
 ~ مغناطیسی ۲۹۷
 ~ مقید ۲۱۶، ۲۲۴، ۲۳۹، ۴۱۸
 بازتاب ۴۹۰، ۵۰۰
 ~ از سطح رسانا ۵۰۶، ۵۰۸
 بازه ناوردایی ۶۴۱
 برخورد
 ~ کشسان ۶۵۶
 ~ کلاسیک ۶۱۷
 ~ نسیتی ۶۵۶، ۶۵۸
 بردار
 ~ انتشار ۴۸۳
 ~ اندازه (مقدار) ۹
 ~ یادوردا ۶۳۹

- تأبش سنکروترونی ۵۹۲
تابع دلنا
- تانبستگى
~ الکتروڊینامیک ۴۴۱
~ انرژى ۶۵۲، ۴۹۲، ۴۴۶، ۴۴۰
~ تکانه زاویه‌ای ۴۶۱، ۴۶۰، ۴۵۷
- پتانسیل
~ اسکالر (نرڊه‌ای) ۷۴
~ الکتريکى ۱۰۵
~ بردارى ۲۹۸
~ تأخیری ۵۳۹
~ تعجیلی ۵۴۱
~ لنارڊویشترت ۵۵۱، ۵۴۷
~ نرڊه‌ای مغناطوساتیک ۳۰۶، ۳۰۲
~ نرڊه‌ای و بردارى ۵۳۰
~ نسبیتی ۶۹۳-۶۹۱
- بذیرفتارى
~ الکتريکى ۲۵۴، ۲۳۲
~ مختلط ۵۱۲
~ مغناطیسی ۳۵۴، ۳۵۰
~ نسبى ۳۵۲
~ پراکنڊگى کامیتون ۶۵۶
~ پیچه هلمهولتز ۳۱۹
~ پیمانہ کولن ۵۳۶
~ لورنتس ۵۳۷
- تأبش الکترومغناطیسی ۵۶۴
تأبش توسط
~ بار نقطه‌ای ۵۹۳، ۵۸۵
~ جریان سطحی ۶۰۵
~ چشمه دلخواه ۵۷۹
~ چهارقطبی الکتريکى ۵۸۴
~ دوقطبی الکتريکى ۵۷۳، ۵۶۶
~ دوقطبی مغناطیسی ۶۰۴، ۵۷۸، ۵۷۴
- تبدیل
~ بار و چگالی جریان ۶۸۸
~ پیمانہ‌ای ۵۳۵، ۵۳۴
~ انرژى تکانه ۶۵۱
~ دوگانه ۴۳۶
~ زاویه ۶۲۹
~ سرعت ۶۴۹
~ طولها ۶۳۴، ۶۳۱، ۶۲۴
~ گاليله ۶۴۰، ۶۳۰
- دینامیک نسبیتی ۶۶۷، ۶۵۹
- چگالی انرژى

- ~ لورتس ۶۳۸، ۶۳۲، ۶۲۹
 ~ میدانهای الکترومغناطیسی ۶۸۰، ۶۷۱، ۶۸۰
 ~ نیروها ۶۶۲
 تراوایی فضای آزاد ۲۷۷، ۳۵۲
 ~ مغناطیسی ۳۵۲
 تعبیر فیزیکی جریانهای مقید ۳۴۱
 ~ بارهای مقید ۲۲۰
 تعبیر هندسی
 ~ تاو ۳۲
 ~ دیورژانس ۳۰
 ~ گرادیان ۲۶
 تقارن
 ~ در قانون آمپر ۲۹۲
 ~ در قانون گاوس ۹۷
 ~ دوگانه ۴۳۵
 ~ سمتی ۱۷۸
 ~ معادلات ماکسول ۴۱۵، ۴۱۶
 ~ (H, D, B, E) ۳۶۱
 تکانه زاویه‌ای ۴۵۷
 تکانه نسبی ۶۵۰، ۶۵۳
 ثابت دی‌الکتریک ۲۳۳
 جابه‌جایی الکتریکی ۲۲۶
 جریان ۲۶۷، ۲۷۳
 ~ آزاد ۳۴۴، ۳۵۳
 ~ القایی ۳۸۷
 ~ پایا ۲۷۵
 ~ جابه‌جایی ۴۱۳
 ~ قطبش ۴۱۸
 ~ مقید ۳۳۷، ۳۴۲، ۳۵۳
 جهانخط ۶۴۳
 چارچوب لخت ۶۰۹
 چگالی انرژی
- ~ الکتروستاتیکی ۱۲۴
 ~ الکترومغناطیسی ۴۴۳، ۴۸۴
 ~ محیط خطی ۴۴۳
 ~ مغناطوستاتیک ۴۰۷
 ~ موج الکترومغناطیسی ۴۸۶، ۴۸۹
 چگالی بار
 ~ جریان سطحی ۲۷۱
 ~ حجمی ۸۵
 ~ خطی ۸۵
 ~ سطحی ۸۵، ۱۳۴
 چگونگی تبدیل بردارها ۲۱
 چار-سرعت ۶۴۷، ۶۵۰
 حرکت چرخزاد ۲۶۳
 ~ سیکلوترونی ۲۶۲
 حفره
 ~ در دی‌الکتریک ۲۲۹
 ~ در رسانا ۱۳۱، ۱۵۳
 ~ در ماده مغناطیسی ۳۵۰
 ~ در مشدّد ۵۲۹
 حلقه جهنده ۳۸۸
 ~ پسماند ۳۵۸
 خازنها ۱۳۶
 خواص رساناها ۱۲۸
 خودالقایی ۴۰۰
 دوقطبی
 ~ القایی ۲۰۹
 ~ الکتریکی ۱۹۰
 ~ مغناطیسی ۳۱۲، ۳۱۳
 دی‌الکتریکها ۲۰۸
 ~ خطی ۲۳۲، ۲۵۳
 دیامغناطیسی ۳۲۷، ۳۳۵، ۳۳۶، ۴۲۷، ۴۳۰
 دینامیک نسبی ۶۵۹، ۶۶۷

~ دی الکتریکها ۲۳۱، ۲۳۹، ۲۵۴، ۴۲۱.

۴۲۳

~ معادله لاپلاس ۱۵۱، ۱۵۸

~ معادله ماکسول ۴۱۱

~ مغناطوستاتیک ۳۰۷

ضرب

~ بردار در عدد ۱۱

~ برداری دو بردار ۱۲

~ سه گانه برداری ۱۸

~ سه گانه عددی ۱۷

~ نقطه ای دو بردار ۱۱

ضریب شکست ۴۸۹، ۵۰۸، ۵۱۶

~ بازتاب ۴۹۲

~ پاشندگی ۵۱۶

~ تراگسیل ۴۹۲

~ گذردهی خلا ۸۲

طول موج ۴۶۹

~ کامپتون ۶۵۷

طیف الکترومغناطیسی ۴۸۱

عدد موج ۴۶۹

عمق پوستی ۵۰۳

عملگر ∇ ۲۸

فازاد ۱۳۷

فرمول سیکلوترون ۲۶۲

~ آبراهام-لورنتس ۵۴۹

~ اویلر ۴۷۰

~ کلاوسیس-موسوتی ۲۵۷

~ لارمور ۵۸۳، ۵۸۸

~ لاتزون ۲۵۷

~ لنارد ۵۸۹

~ نویمان ۳۹۷

فشار الکتروستاتیکی ۱۳۶

رساناها ۱۲۸

رسانای کامل ۳۶۴

روش تصویرها ۱۵۸

زاویه

~ بازتاب ۴۹۵

~ بروستر ۴۹۸

~ تراگسیل ۴۹۵

~ سمتی ۵۶

~ شکست ۴۹۵

~ فرود ۴۹۵

~ قطبش ۴۷۸

~ قطبی ۵۶

~ همگذری ۵۰۰

زمان تعجیلی ۵۴۱

زمان گونه ۶۴۱

زمان ویژه ۶۴۷

سرعت

~ امواج ریسمان ۴۶۶

~ سره ۶۴۸

~ فاز ۵۰۹

~ گروه ۵۰۹

~ موج ۴۶۶، ۴۸۰، ۵۰۹

~ میدان ۵۵۹، ۵۸۶

~ ویژه ۶۴۸

~ نور در خلا ۴۸۰، ۶۱۴

سینماتیک نسیتی ۶۵۳

شار انرژی ۴۴۲

شرایط مرزی در

~ الکترودینامیک ۴۲۲، ۷۴، ۴۲۴

~ الکتروستاتیک ۱۱۷، ۱۲۰، ۲۳۱

~ الکترومغناطیس ۴۹۱، ۴۹۴، ۵۰۷

~ بازتاب تراگسیل ۴۷۲

- فضاگونه ۶۴۲
قانون ۳۸۴
- ~ آمپر ۲۸۷، ۲۹۷، ۴۱۰، ۴۱۵، ۶۹۰
~ آمپر در مواد مغناطیده ۳۴۴
~ اسنل ۴۹۵
~ اول نیوتون ۶۰۹
~ اهم ۳۶۴
~ بازتاب ۴۹۵
~ بیوساوار ۲۷۵
~ چایلد-لانگمیر ۱۴۲
~ دست راست ۱۲
~ دوم نیوتون ۶۵۹، ۶۰۱
~ سوم نیوتون ۴۴۵، ۵۶۳، ۵۹۸، ۶۶۱
~ شکست ۴۹۶
~ فاراده ۳۸۴
~ کسینوسها ۱۲
~ کولن ۸۱، ۸۵
~ گاوس ۸۸، ۹۱، ۹۳، ۲۹۷، ۴۱۰
~ در دی الکتریک ۲۲۷
~ لنز ۳۸۸
~ نیروی لورنتس ۲۵۹
- قضیه
- ~ آلفن ۴۳۵
~ ارنشاو ۱۵۱
~ اول یکتایی ۱۵۲
~ بنیادی تاو ۵۱
~ بنیادی حسابان ۴۴
~ بنیادی گرادیان ۷۰۱
~ یوئین تینگ ۴۴۲
~ تامسون لامبر ۲۰۷، ۲۸۵
~ تاو (استوکس) ۷۰۷، ۵۱
~ تقابل گرهن ۲۰۵
- ~ دوم یکتایی ۱۵۴
~ دیورژانس ۷۰۴، ۴۸
~ کار-انرژی ۶۶۰
~ گرادیان ۷۰۱، ۴۵
~ گرین ۷۸
~ وارونی ۵۲۶
~ هلمهولتز ۷۱۱، ۷۳
~ قطبش ۴۷۶، ۲۱۵
~ پذیری اتمی ۲۰۹
~ قطبیده ۲۱۵، ۲۰۹
~ قواعد جمع سرعت ۶۱۵، ۶۳۴، ۶۳۵
~ حلقه سیم ۳۷۷-۳۷۵
~ دی الکتریک ۲۵۰، ۲۵۲
~ در پر کردن (شارژ) خازن ۱۳۹
~ قطبش دی الکتریک ۲۴۶، ۲۴۹
~ در مقابله با emf معکوس ۴۰۴
~ نسبی ۶۵۹
~ نیروی میدان مغناطیسی ۲۶۵، ۲۶۹، ۲۷۰
~ و emf ۳۷۶، ۴۰۴
~ و پتانسیل ۱۲۱
~ کاربردهای قانون آمپر ۲۸۷
~ گاوس ۹۵
~ کشف الکترون ۲۶۷
~ گاوس ۲۷۷
~ گذردهی نسبی ۲۳۳
~ گرادیان ۲۵، ۲۶، ۷۰۰
~ چهاربعدی ۶۹۳
~ در مختصات استوانه‌ای ۶۳
~ در مختصات کروی ۶۰
~ در مختصات منحنی الخط ۷۰۰
~ قضیه ۴۵، ۲۱۷، ۲۱۸

- گشتاور دوقطبی مغناطیسی ۳۱۲
 لاپلاسی ۳۷
 ~ پتانسیل ۱۱۲، ۱۱۶، ۱۴۶
 ~ در مختصات استوانه‌ای ۶۳
 ~ در مختصات دکارتی ۳۸، ۱۴۶
 ~ در مختصات کروی ۶۰
 ~ در مختصات منحنی‌الخط ۳۰۱، ۷۰۸
 ~ یک نرده‌ای ۳۷
 ~ ۳۰۰ A
 ماتریس تبدیل لورنتس ۶۳۸
 ماکسول ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۷۹
 محیطهای خطی ۳۵۰
 مختصات
 ~ استوانه‌ای ۶۲، ۶۳، ۷۰۰
 ~ تبدیل ۲۳
 ~ دکارتی ۱۴، ۱۶۵، ۷۰۰
 ~ دورانی ۲۳، ۲۴
 ~ کروی ۵۶، ۶۲، ۷۰۰
 ~ منحنی‌الخط ۵۶
 معادلات
 ~ به صورت تانسوری ۶۹۱
 ~ جفیمینکو ۵۴۴-۵۴۶
 ~ در داخل ماده ۴۱۷
 ~ در یکاهای گاوسی ۷۱۶
 ~ ساختمندی ۲۳۳
 ~ فرنل برای قطبش ۴۹۸
 ~ ماکسول ۲۹۷، ۴۱۰، ۶۸۹، ۶۹۲
 معادله بواسن ۱۱۱
 معادله بیوستگی ۲۷۴
 ~ کلاوسئوس-موسوتی ۲۵۷
 ~ کوشی ۵۱۶
 ~ لاپلاس ۱۱۲
 ~ در دو بعد ۱۴۸
 ~ در سه بعد ۱۴۹
 ~ در یک بعد ۱۴۶
 معادله موج ۴۶۴، ۴۶۸، ۴۷۹، ۴۸۰
 ~ ۵۳۸ A
 ~ ۴۸۱، ۴۷۹ B
 ~ ۴۸۱، ۴۷۹ E
 ~ ۵۳۸ V
 مقاومت ویژه ۳۶۴
 مقایسه مغناطوستاتیک و الکتروستاتیک ۲۹۷
 مکان تأخیری بار ۵۴۷
 مکانیک نسبیتی ۶۴۷، ۶۶۷
 مگنتون بور ۳۲۳
 منطقه تابش ۵۶۸
 موج
 ~ سه بعدی ۴۷۹
 ~ مختلط ۴۷۱
 ~ یک بعدی ۴۶۷
 موجبر ۵۱۷، ۵۲۰، ۵۲۹
 مؤلفه ۱۴، ۵۷
 میدان
 ~ الکتریکی ۸۰، ۸۲، ۸۳
 ~ القایی ۳۸۹
 ~ دوقطبی ۱۹۹
 ~ دی‌الکتریک ۲۲۴
 ~ میانگین روی کره ۲۰۳، ۲۰۴
 ~ مغناطیسی ۲۵۹، ۲۶۱، ۳۴۶، ۶۷۰
 ~ جریان یکنواخت ۲۷۵
 ~ جسم قطبیده ۲۱۶
 میدان سرعت ۵۸۶
 ~ شتاب ۵۸۶
 ~ کولنی تعیین یافته ۵۵۹

نیروی محرکه الکتریکی ۳۷۳
 ~ حرکتی ۳۷۵
 ~ معکوس ۴۰۰
 نیروی وارد بر رساناها ۱۳۵
 نیروی واکنش تابشی ۵۹۳
 هم‌پتانسیل ۱۰۷، ۱۲۹
 هانری ۴۰۰
 یگاها ۷۱۴
 ~ آمپر ۲۶۷، ۲۷۶
 ~ اهم ۳۶۴
 ~ تسلا ۲۷۷، ۷۱۵
 ~ فاراد ۱۳۷
 ~ کولن ۸۲، ۷۱۴
 ~ گاوس ۲۷۷، ۷۱۵
 ~ ولت ۱۰۹
 ~ هانری ۳۹۹

میدان کمکی
 ~ D ۲۲۷، ۲۳۶، ۳۴۷، ۴۲۰، ۶۹۷
 ~ H ۳۴۴، ۳۵۱، ۴۲۰، ۴۲۳، ۶۹۷
 میرایی تابشی ۵۹۵
 ناپوستگی
 ~ B ۳۰۷، ۳۴۹
 ~ E ۱۱۸، ۱۱۹
 ناوردایی بار ۶۷۱
 نسبت زیرومغناطیسی ۳۲۳
 نسبیّت همزمانی ۶۱۷
 نظریه میدانهای برداری ۷۳
 نظریه نسبیّت خاص ۶۰۹
 نقطه کوری ۳۵۹
 نماد لوی-سیوتیا ۳۶۰
 نورگونه ۶۴۲
 نیروهای وارد بر دی‌الکتریکها ۲۵۰
 نیروی پایستار ۳۹

$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$	(گذردهی فضای آزاد)
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$	(پذیرفتاری مغناطیسی)
$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$	(سرعت نور)
$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$	(بار الکترون)
$m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$	(جرم الکترون)

مختصات کروی و استوانه‌ای

کروی	
$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{x} = \sin \theta \cos \phi \hat{r} + \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \sin \phi \hat{\phi} \\ \hat{y} = \sin \theta \sin \phi \hat{r} + \cos \theta \sin \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi} \\ \hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \end{cases}$

$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \tan^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}/z) \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ \hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \\ \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \end{cases}$
---	--

استوانه‌ای	
$\begin{cases} x = s \cos \phi \\ y = s \sin \phi \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{x} = \cos \phi \hat{s} - \sin \phi \hat{\phi} \\ \hat{y} = \sin \phi \hat{s} + \cos \phi \hat{\phi} \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases}$

$\begin{cases} s = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{s} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} \\ \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases}$
--	---

معادلات ماکسول

در حالت کلی:

در ماده:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

میدانهای کسکی

تعریفها:

محیطهای خطی:

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \end{cases}$$

پتانسیلها

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

قانون نیروی لورنتس

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

انرژی، تکانه، توان

انرژی:
$$U = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) d\tau$$

تکانه:
$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \int (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d\tau$$

بردار پوینتینگ:
$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

فرمول لازموور:
$$P = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 a^2$$

دکارتی: $dl = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}; \quad d\tau = dx dy dz$

گرادیان: $\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial t}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{z}$

دیورژانس: $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

تور: $\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{z}$

لاپلاسی: $\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$

کروی: $dl = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin\theta d\phi \hat{\phi}; \quad d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$

گرادیان: $\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\phi}$

دیورژانس: $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$

تور: $\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r}$
 $+ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$

لاپلاسی: $\nabla^2 t = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$

استوانه‌ای: $dl = ds \hat{s} + s d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}; \quad d\tau = s ds d\phi dz$

گرادیان: $\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s} \hat{s} + \frac{1}{s} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{z}$

دیورژانس: $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s v_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

تور: $\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] \hat{s} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s} \right] \hat{\phi} + \frac{1}{s} \left[\frac{\partial}{\partial s} (s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi} \right] \hat{z}$

لاپلاسی: $\nabla^2 t = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial t}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$

حاصلضرب سه‌گانه

$$(1) \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$(2) \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

قواعد حاصلضرب

$$(3) \quad \nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$$

$$(4) \quad \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

$$(5) \quad \nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$$

$$(6) \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$(7) \quad \nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$$

$$(8) \quad \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

مشتق‌های دوم

$$(9) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$(10) \quad \nabla \times (\nabla f) = 0$$

$$(11) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

قضیه‌های بنیادی

قضیهٔ گرادیان : $\int_a^b (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$

قضیهٔ دیورژانس : $\int (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$

قضیهٔ تاو : $\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$