

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

بردارها

تعریف بردار و مفاهیم
نمایش بردار
عملیات های ریاضی در بردارها

کمیت های فیزیکی

کمیت های عددی:

کمیت هایی که ذکر یک مقدار یا اندازه برای بیان آنها کافی است

صحیح یا اعشاری یا کسری

مثبت یا منفی

چهار عمل اصلی برای آنها تعریف می شود

مانند: جرم، زمان، انرژی، کار، توان، چگالی، حجم

کمیت های برداری:

برای بیان آنها هم اندازه و هم راستا و جهت باید بیان شود

مانند: جابه جایی، سرعت، شتاب، نیرو، تکانه خطی، گشتاور نیرو

تعریف بردار

کمیتی با سه ویژگی هم زمان:

بزرگی = اندازه بردار
راستا = امتدادی که بردار روی آن قرار دارد
جهت = سمت و سوی بردار

نمایش بردار

نمایش هندسی

نمایش تحلیلی

نمایش بردار توسط بردار یکه

نمایش توسط مولفه های دستگاه دکارتی

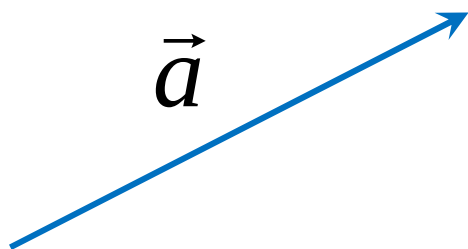
نمایش توسط مولفه های قطبی در دستگاه دکارتی

نمایش توسط مولفه های استوانه ای در دستگاه دکارتی

نمایش توسط مولفه های کروی در دستگاه دکارتی

نمایش هندسی

نمایش بردار توسط یک پیکان



اندازه بردار $|\vec{a}| = a$

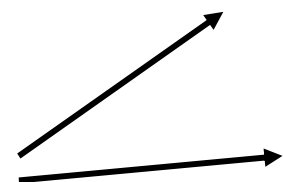
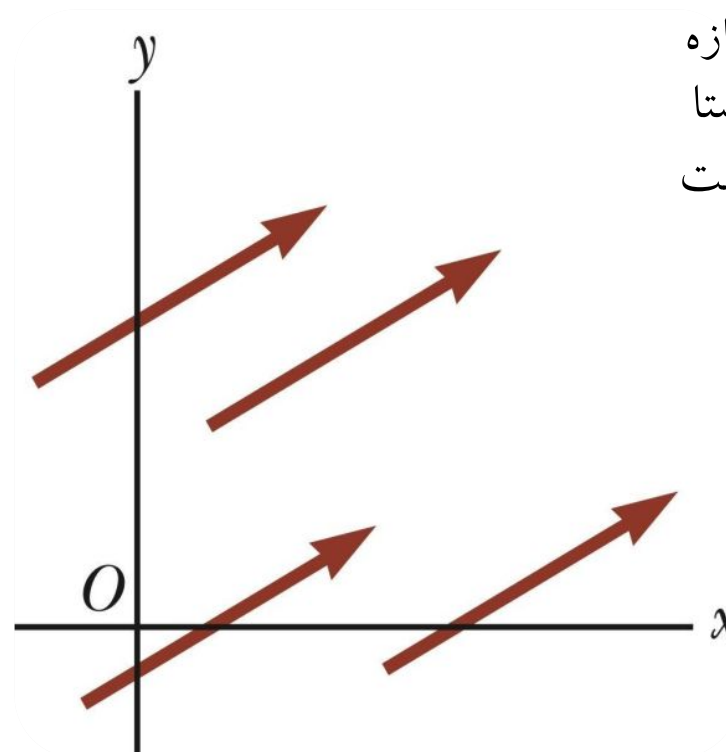
طول بردار = طول پاره خط

راستای بردار = راستای پاره خط

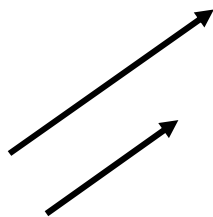
جهت بردار = جهت فلش پیکان روی پاره خط

دو بردار یکسان هستند هر گاه هر سه ویژگی آنها یکسان باشد:

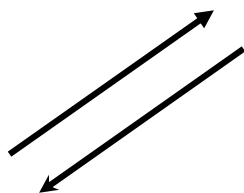
- هم اندازه
- هم راستا
- هم جهت



$$\vec{a} \neq \vec{b}$$



$$\vec{a} \neq \vec{b}$$



$$\vec{a} \neq \vec{b}$$

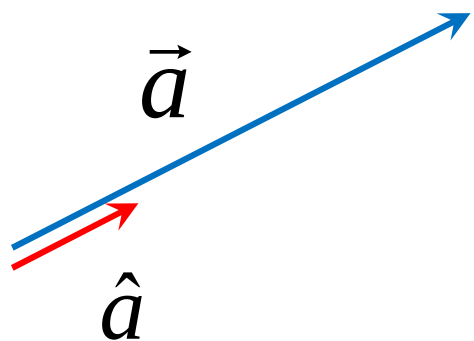
نمایش بردار توسط بردار یکه

تعریف بردار یکه:

❖ طول واحد

❖ هم راستا و هم جهت با بردار اصلی

❖ سنگ بنای بردار: یعنی از کنار هم چیدن تعدادی از بردارهای یکه بردار اصلی را می توان ساخت



$$\vec{a} = |\vec{a}| \hat{a} \rightarrow \hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

دستگاه های مختصات

برای توصیف موقعیت یک نقطه در فضا استفاده می شود

سیستم های مختصات عبارتند از:

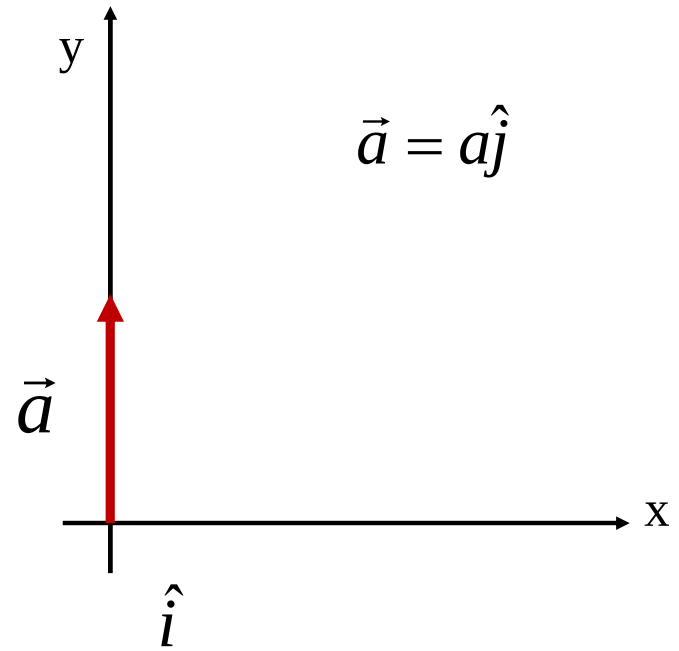
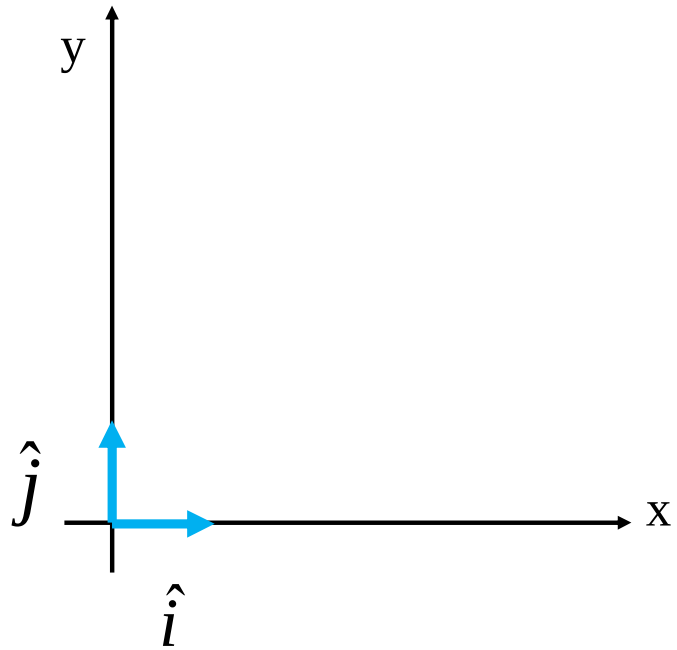
0 دکارتی

0 قطبی

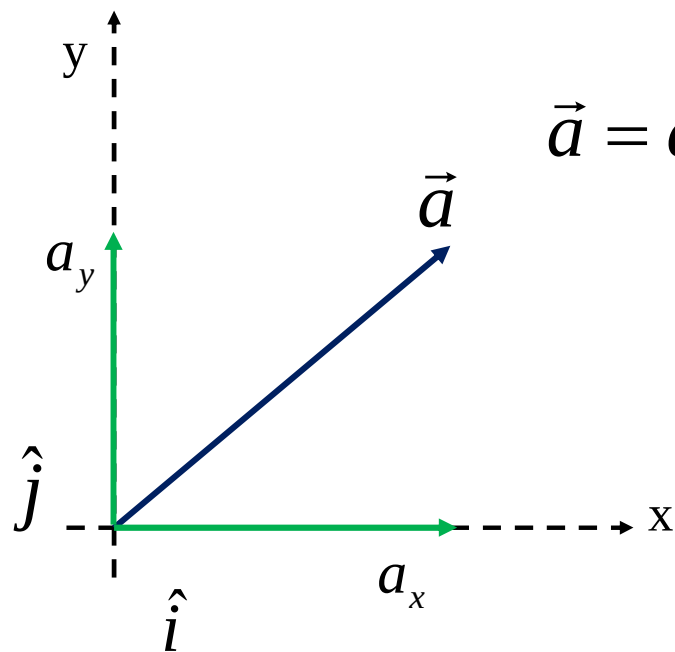
0 کروی

0 استوانه ای

دستگاه مختصات دکارتی



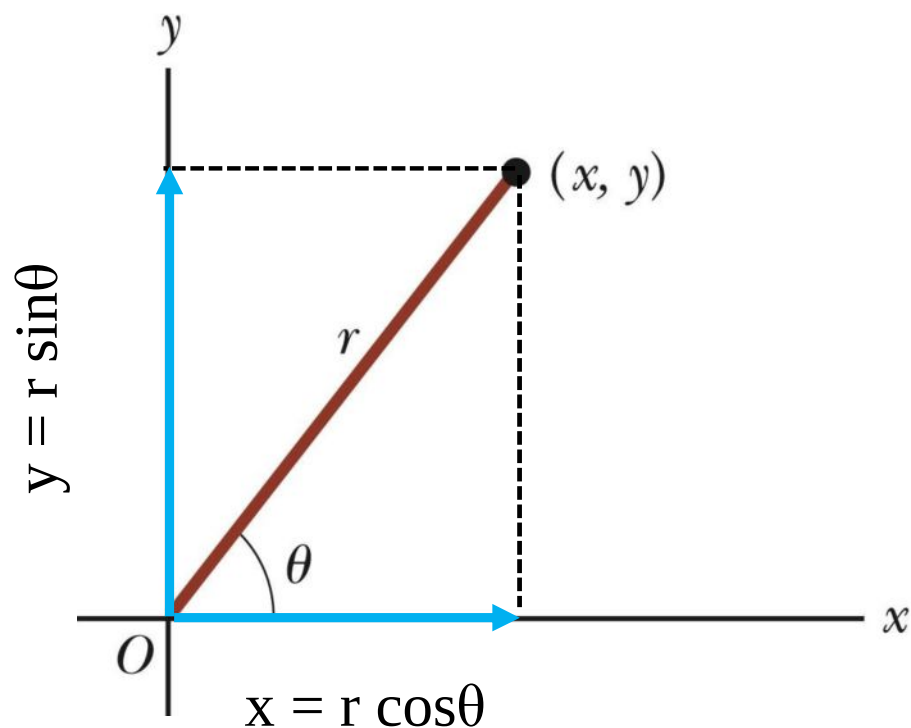
نمایش بردار توسط مولفه های دستگاه دکارتی



$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

نمایش بردار توسط مولفه های قطبی در دستگاه دکارتی



$$\vec{r} = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j}$$

$$(x, y) \leftrightarrow (r, \theta)$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$
$$\begin{cases} r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \\ \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x} \end{cases}$$

عملیاتهای ریاضی (+ - ×)

❖ برای بردارها جمع، تفریق و ضرب (سه نوع) تعریف شده است.

❖ برای بردارها تقسیم تعریف نشده است

❖ ** با استفاده از نمایش مولفه ای برای بردارها در عملیاتهای ریاضی (+ یا -)، این امکان فراهم شده

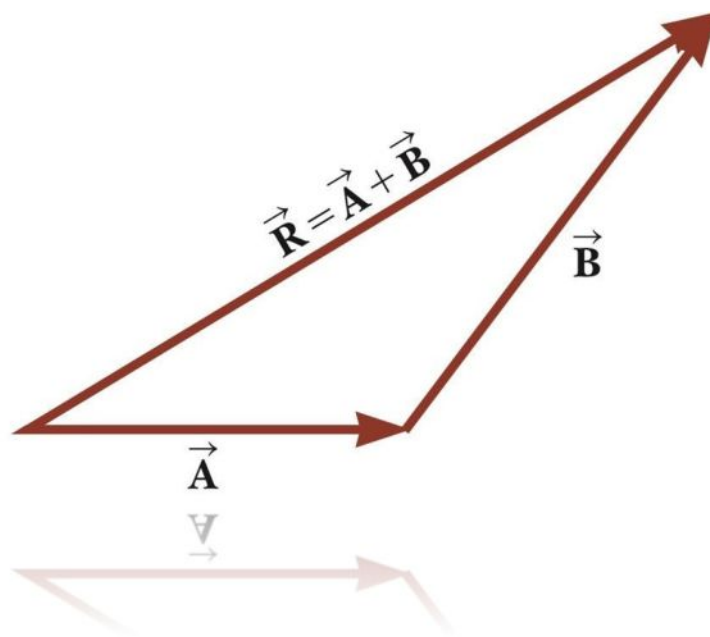
است که به جای انجام عملیات ریاضی در فضای دو یا سه بعدی، عملیات در دو یا سه فضای تک

بعدی انجام شود

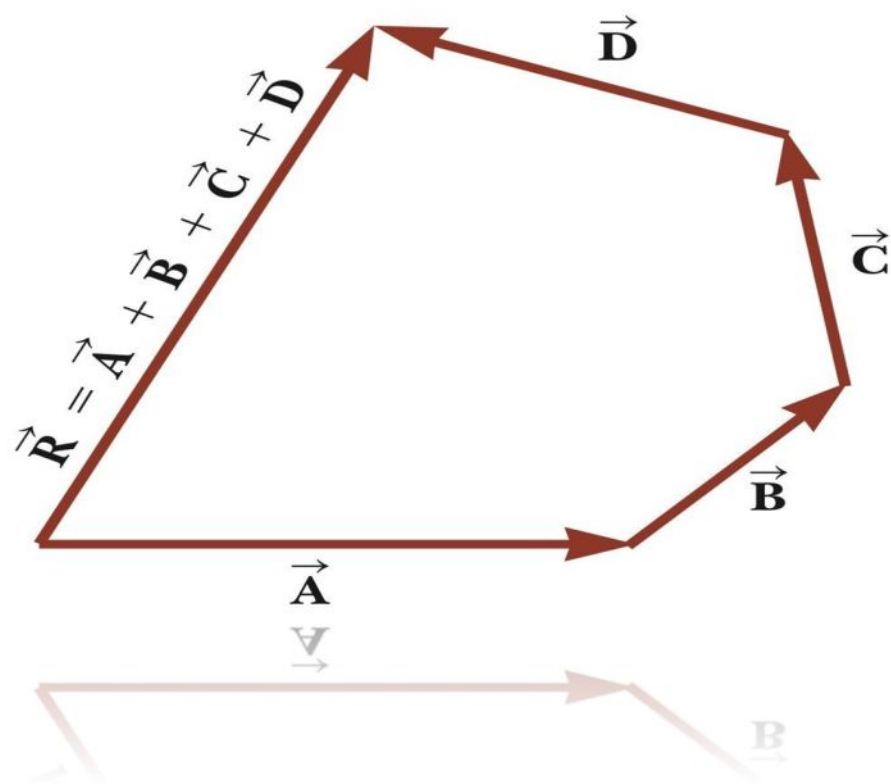
جمع بردارها در نمایش هندسی

الف) دو بردار به صورت متوالی قرار داشته باشند.

برای بدست آوردن بردار حاصل جمع؛ از ابتدای اولی به انتهای دومی کشیده می شود

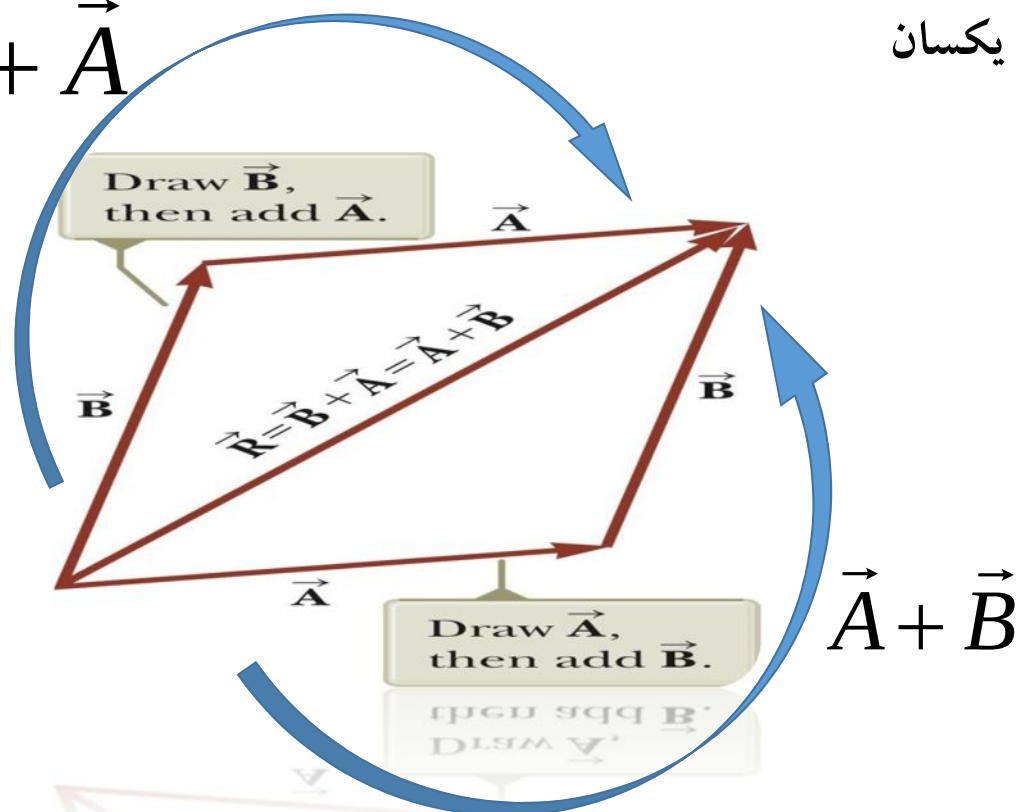


ب) جمع چندین بردار پشت سرهم به صورت هندسی



$$\vec{B} + \vec{A}$$

(ج) جمع دو بردار با نقطه ابتدایی یکسان
(روش متوازی الاضلاع)



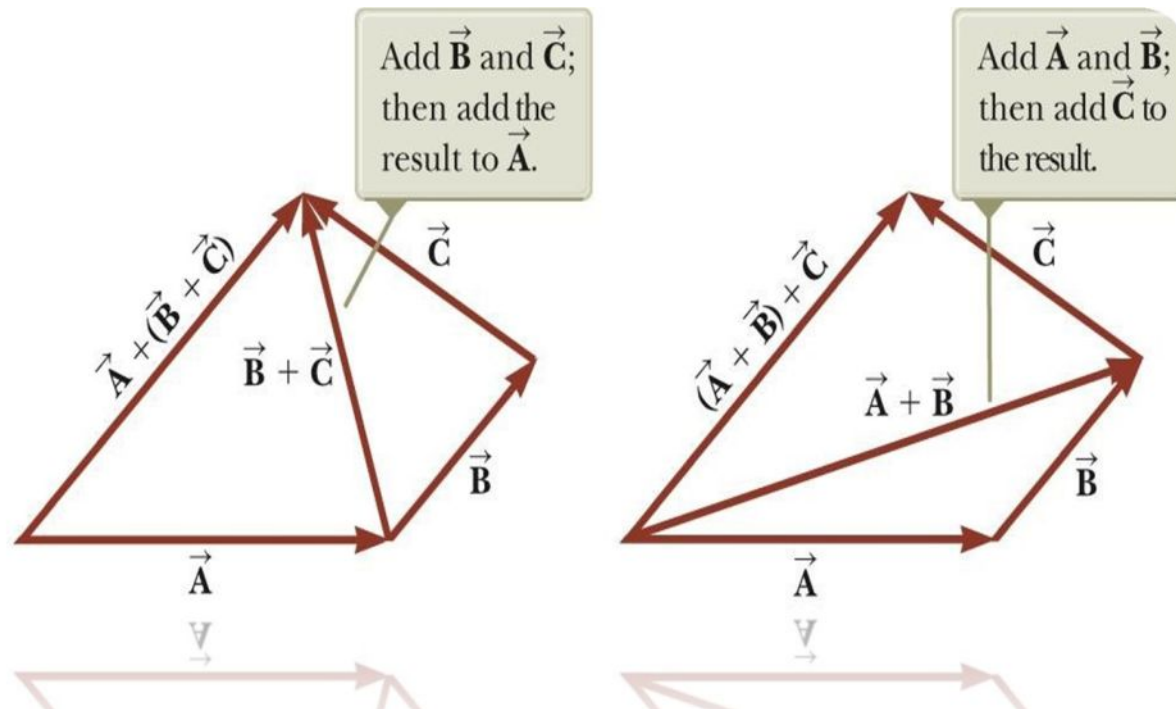
$$\vec{A} + \vec{B}$$

خاصیت جابجایی $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

(د) خاصیت شرکت پذیری

هنگام اضافه کردن سه بردار یا بیشتر، جمع آنها مستقل از شیوه ای است که بردارها گروه بندی می شوند.

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$



نکات باقی مانده در جمع بردارها

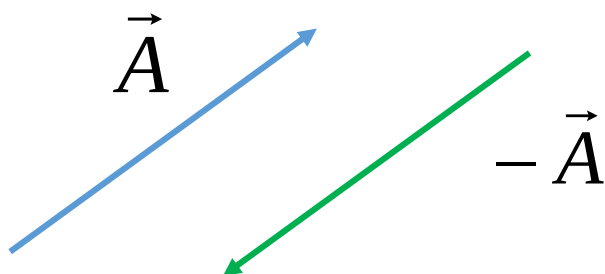
- ✓ تمام بردارها باید از یک نوع کمیت باشند.
- ✓ به عنوان مثال، نمی توان بردار جابجایی را با یک بردار سرعت جمع زد.
- ✓ هنگام جمع بردارها، تمام بردارها باید واحدهای یکسانی داشته باشند.

تفریق بردارها

❖ منفی یک بردار به عنوان برداری تعریف می شود که هنگام جمع آن با بردار اصلی، نتیجه صفر می شود.

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = 0$$

❖ منفی یک بردار بزرگی یکسانی نسبت به بردار اصلی خواهد داشت، اما جهت مخالف است.

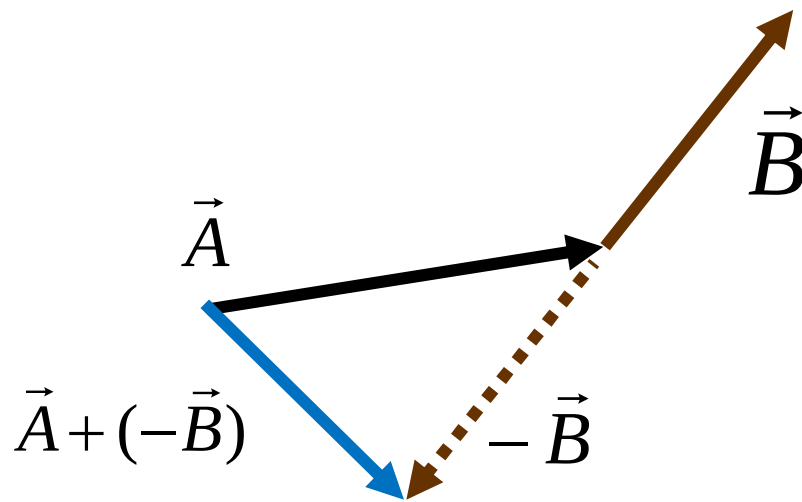


تفریق بردارها (در نمایش هندسی)

الف) دو بردار پشت سرهم باشند

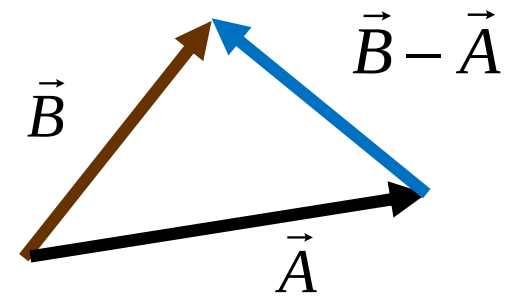
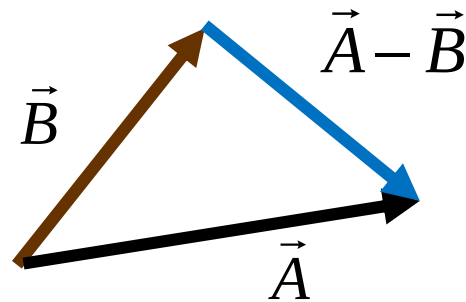
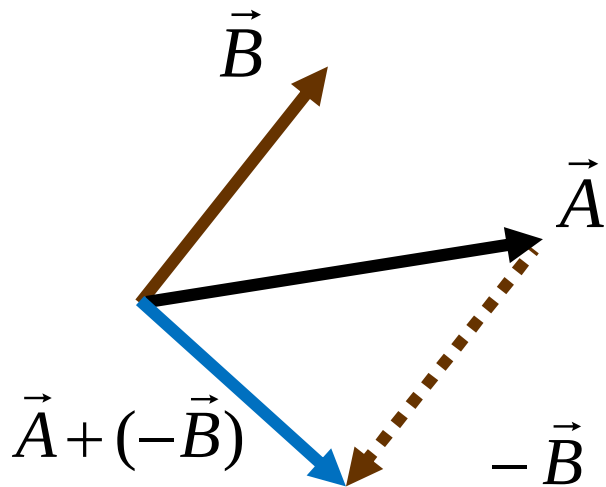
$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

منفی بردار B



ب) دو بردار از یک نقطه شروع شده باشند

بردار حاصل تفریق برداری است که از انتهای بردار دوم به انتهای بردار اول رسم می شود



$$\vec{B} - \vec{A} = -(\vec{A} - \vec{B})$$

جمع و تفریق بردارها (در نمایش تحلیلی)

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \quad , \quad \vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \hat{i} + (a_y + b_y) \hat{j} + (a_z + b_z) \hat{k}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x) \hat{i} + (a_y - b_y) \hat{j} + (a_z - b_z) \hat{k}$$

مثال:

حاصل جمع و تفریق دو بردار مفروض زیر را بدست آورید

$$\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k} \quad , \quad \vec{b} = -3\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (1+0)\hat{i} + (2+(-3))\hat{j} + (5+5)\hat{k} = \hat{i} - \hat{j} + 10\hat{k}$$

$$\vec{b} - \vec{a} = (0-1)\hat{i} + (-3-2)\hat{j} + (5-5)\hat{k} = -\hat{i} - 5\hat{j}$$

ضرب بردارها

➤ ضرب یک عدد در بردار $c\vec{a}$

➤ ضرب نقطه ای یا عددی دو بردار $\vec{a} \cdot \vec{b}$

➤ ضرب خارجی یا برداری دو بردار $\vec{a} \times \vec{b}$

ضرب یک عدد در بردار

$$c, \quad \vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

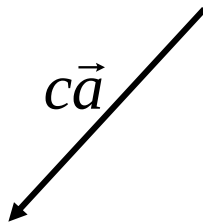
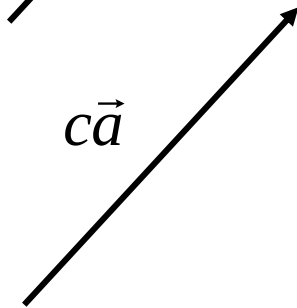
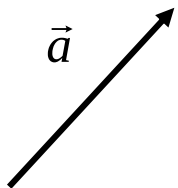
$$c\vec{a} = \vec{d} \quad \text{حاصل این ضرب، یک بردار است}$$

راستای بردار حاصل همان راستای بردار اولیه است

اندازه و جهت وابسته به عدد c است

با ضرب یک عدد در بردار، عدد در همه مولفه های بردار ضرب می شود

$$c\vec{a} = ca_x \hat{i} + ca_y \hat{j} + ca_z \hat{k}$$



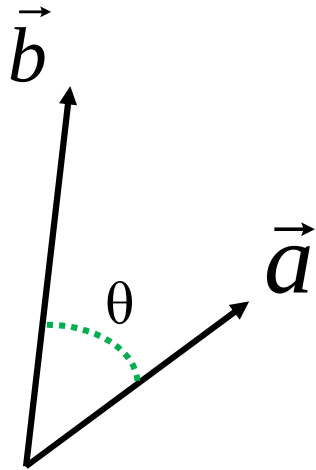
$$c > 1$$

$$0 < c < 1$$

$$c < 0$$

ضرب نقطه ای، عددی، اسکالر یا داخلی دو بردار

تعریف اول) ضرب داخلی دو بردار با اندازه ها و زاویه میانی معلوم



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$$

مثال) نشان دهید:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{i} \cdot \hat{i} = 1 \times 1 \times \cos 0 = 1 \\ \hat{j} \cdot \hat{k} = 1 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right.$$

مثال) به کمک مثال قبل حاصل ضرب داخلی دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را بنویسید (تعریف دوم ضرب داخلی)

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \quad , \quad \vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) =$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} = & a_x b_x (\hat{i} \cdot \hat{i}) + a_x b_y (\hat{i} \cdot \hat{j}) + a_x b_z (\hat{i} \cdot \hat{k}) + \\ & a_y b_x (\hat{j} \cdot \hat{i}) + a_y b_y (\hat{j} \cdot \hat{j}) + a_y b_z (\hat{j} \cdot \hat{k}) + \\ & a_z b_x (\hat{k} \cdot \hat{i}) + a_z b_y (\hat{k} \cdot \hat{j}) + a_z b_z (\hat{k} \cdot \hat{k}) = \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

ویژگیهای ضرب داخلی:

□ حاصل یک عدد است (مثبت/صفر/منفی)

□ خاصیت جابه جایی $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

□ حاصل عبارت رورو یک بردار است $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

□ مثبت یا منفی بودن ضرب داخلی به زاویه میان دو بردار بستگی دارد

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta \rightarrow \begin{cases} 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos \theta > 0 \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos \theta = 0 \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \rightarrow \cos \theta < 0 \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \end{cases}$$

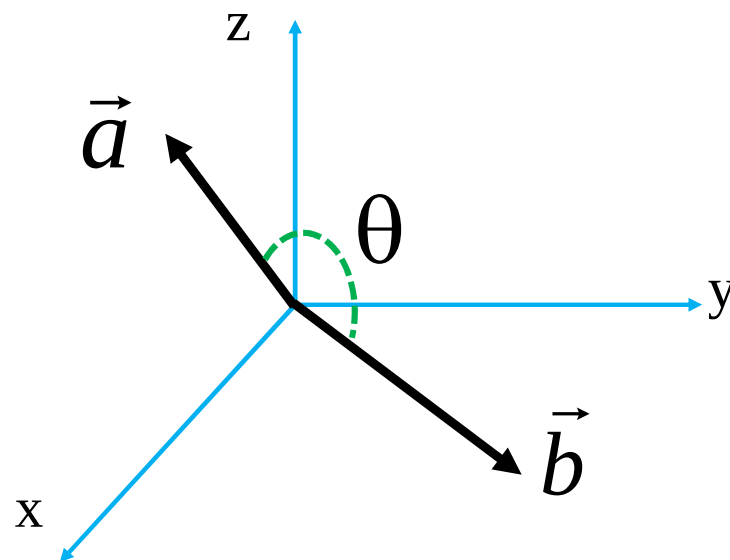
نکته ۱: با داشتن مولفه های دو بردار می توان زاویه میان دو بردار را مشخص نمود

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$$



$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}$$

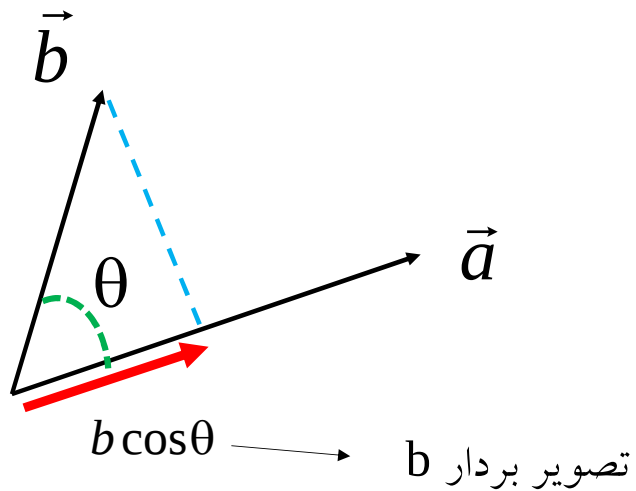


مثال

$$\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{k} \quad , \quad \vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$$

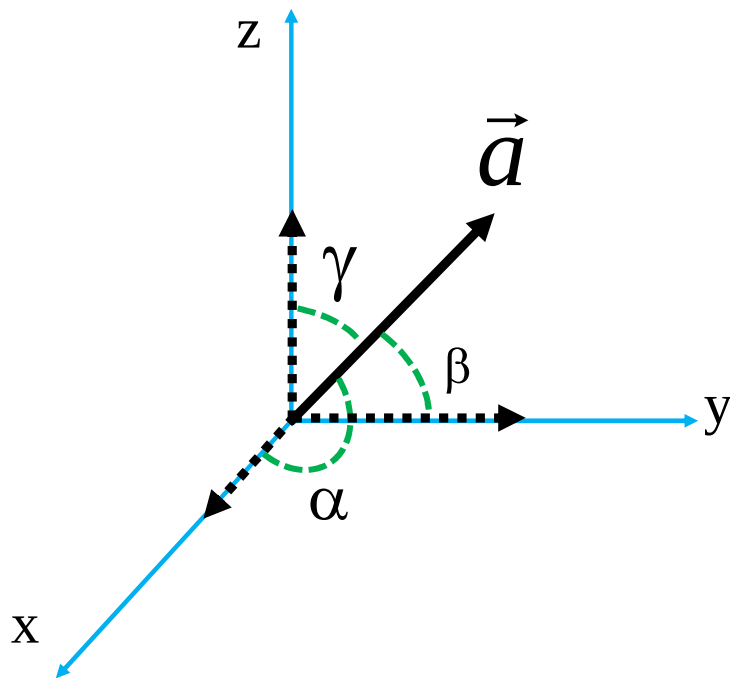
$$\cos \theta = \frac{2 + 0 + 0}{\sqrt{1+9} \times \sqrt{4+9}}$$

نکته ۲: برای یافتن تصویر یک بردار در امتداد بردار دیگر می توان از ضرب داخلی استفاده نمود



$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} \quad \rightarrow \quad b \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a} = \frac{\vec{a}}{a} \cdot \vec{b} = \hat{a} \cdot \vec{b}$$

نکته ۳: مشخص نمودن زوایای یک بردار با محورهای مختصات



$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

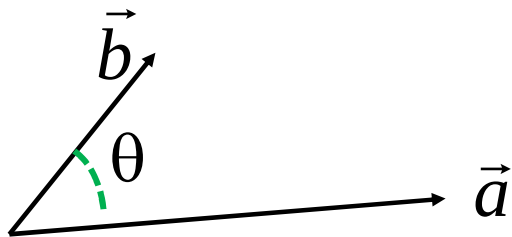
$$\cos \alpha = \frac{\hat{i} \cdot \vec{a}}{a} = \frac{a_x}{a}$$

$$\cos \beta = \frac{\hat{j} \cdot \vec{a}}{a} = \frac{a_y}{a}$$

$$\cos \gamma = \frac{\hat{k} \cdot \vec{a}}{a} = \frac{a_z}{a}$$

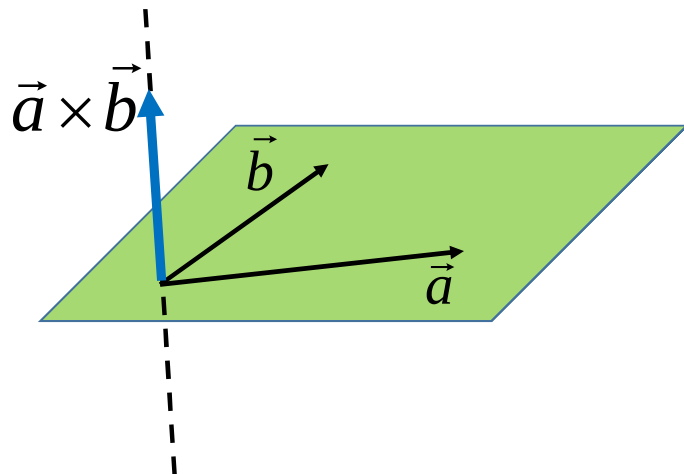
ضرب برداری یا خارجی دو بردار

تعریف اول) اگر بردار $\mathbf{c}$ حاصل ضرب خارجی دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ باشد این بردار دارای ویژگیهای زیر است

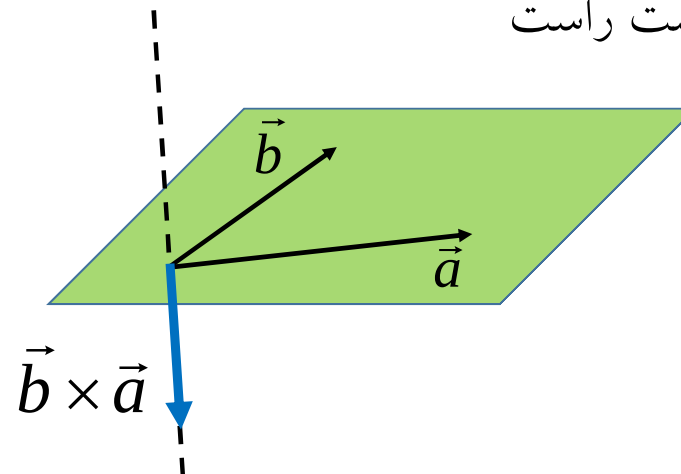


$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta \quad \text{اندازه:}$$

راستا: در امتداد خط عمود بر صفحه گذرنده از دو بردار



جهت: قاعده دست راست



ویژگیهای ضرب خارجی:

□ حاصل یک بردار است

□ خاصیت جابه جایی ندارد $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

□ حاصل عبارت روبه رو یک کمیت اسکالر است $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

مثال) نشان دهید:

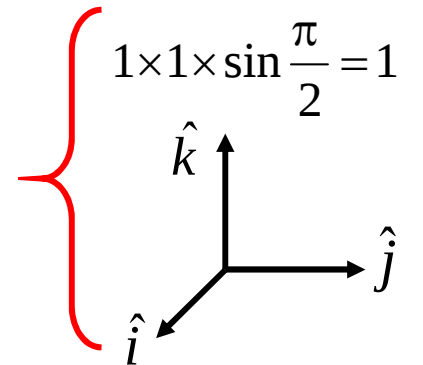
$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = +\hat{k} \quad , \quad \hat{j} \times \hat{k} = +\hat{i} \quad , \quad \hat{k} \times \hat{i} = +\hat{j}$$

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} \quad , \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i} \quad , \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$

a) $|\hat{i} \times \hat{i}| = 1 \times 1 \times \sin 0 = 0$

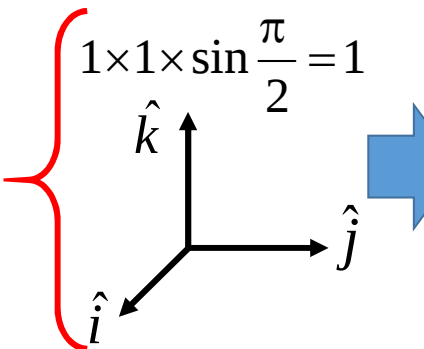
c) $\hat{i} \times \hat{k}$



$$1 \times 1 \times \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

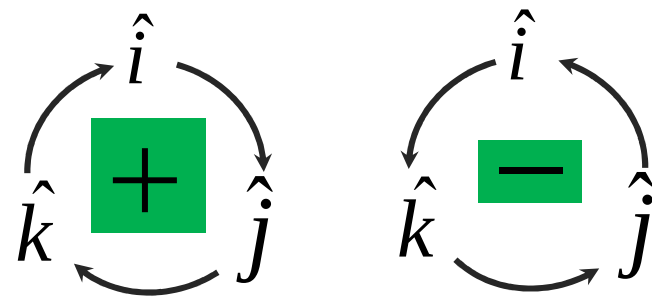
$$\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$

b) $\hat{j} \times \hat{k}$



$$1 \times 1 \times \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = +\hat{i}$$



مثال) به کمک مثال قبل حاصل ضرب خارجی دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را بنویسید (تعریف دوم ضرب خارجی)

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \quad , \quad \vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) =$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_x b_x (\hat{i} \times \hat{i}) + a_x b_y (\hat{i} \times \hat{j}) + a_x b_z (\hat{i} \times \hat{k}) +$$

$$a_y b_x (\hat{j} \times \hat{i}) + a_y b_y (\hat{j} \times \hat{j}) + a_y b_z (\hat{j} \times \hat{k}) +$$

$$a_z b_x (\hat{k} \times \hat{i}) + a_z b_y (\hat{k} \times \hat{j}) + a_z b_z (\hat{k} \times \hat{k}) =$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$