

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

فصل دوم - بخش ۳

# نیروی وابسته به سرعت

## ۴.۲ نیروهای وابسته به سرعت: مقاومت شاره و سرعت حدی

نمونه ای از نیروهای وابسته به سرعت:

جسمی در داخل شاره‌ای حرکت می‌کند و مقاومت چسبنده‌ای بر آن وارد می‌آید. اگر بتوان نیرو را فقط به صورت تابعی از  $v$  بیان کرد، معادله دیفرانسیل حرکت را می‌شود به یکی از دو

$$F_0 + F(v) = m \frac{dv}{dt} \quad \text{صورت زیر نوشت:}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \longrightarrow F_0 + F(v) = mv \frac{dv}{dx}$$

در اینجا،  $F_0$  نیروی ثابتی است که به  $v$  بستگی ندارد. بعد از جداسازی متغیرها، از طریق انتگرال‌گیری  $t$  یا  $x$  به صورت تابعی از سرعت به دست می‌آیند، در این صورت، انتگرال‌گیری دوم می‌تواند رابطه‌ای تابعی بین  $x$  و  $t$  به دست دهد.

شاره  $F(v) = -c_1 v - c_2 v|v| = -v(c_1 + c_2|v|)$  : تقریبی از نیروی مقاومت عادی شاره

که در آن  $c_1$  و  $c_2$  ثابتهایی اند که مقادیرشان به ابعاد و شکل جسم بستگی دارد (علامت قدرمطلق روی جمله آخری ضروری است زیرا نیروی مقاومت شاره، همواره در خلاف جهت  $v$  عمل می‌کند).

برای اجسام کروی که در هوا حرکت می‌کنند

$D$  قطرکره به متر  $c_2 = 0.22 D^2$   $c_1 = 1.55 \times 10^{-4} D$  مقادیر تقریبی

$$\frac{c_2 v|v|}{c_1 v} = \frac{0.22 v|v| D^2}{1.55 \times 10^{-4} v D} = 1.4 \times 10^3 |v| D$$

یعنی، مثلاً، در مورد اجسامی با اندازهٔ توپ بیسبال ( $D \sim 0.07 \text{ m}$ )، جملهٔ درجهٔ دوم در سرعت‌های بیشتر از  $1 \text{ m/s}$  ( $1 \text{ cm/s}$ ) غالب است و جملهٔ خطی در سرعت‌های کمتر از این مقدار غلبه خواهد داشت. به‌ازای سرعت‌هایی در اطراف این مقدار، هر دو جمله را باید به حساب آورد (مسئلهٔ

## حرکت افقی با مقاومت خطی

فرض کنید قطعه جسمی با سرعت اولیه  $v_0$  روی یک سطح صاف افقی پرتاب شده است. مقاومت هوا چنان است که جمله خطی غالب باشد

$$F_0 + F(v) = m \frac{dv}{dt}$$

$$F(v) = -c_1 v - c_2 v|v| \quad \longrightarrow \quad -c_1 v = m \frac{dv}{dt}$$

$$F(v) = -c_1 v \text{ و } F_0 = 0$$

$$t = \int_{v_0}^v -\frac{m dv}{c_1 v} = -\frac{m}{c_1} \ln \left( \frac{v}{v_0} \right) \quad \longrightarrow \quad v = v_0 e^{-c_1 t/m}$$

$$v = v_0 e^{-c_1 t/m}$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

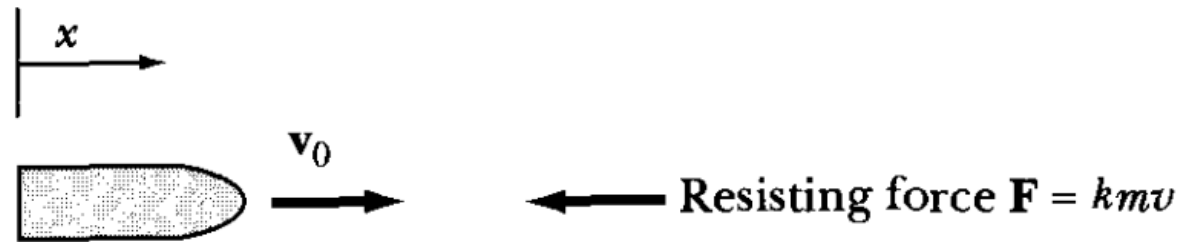


$$\begin{aligned} x &= \int_0^t v_0 e^{-c_1 t/m} dt \\ &= \frac{mv_0}{c_1} (1 - e^{-c_1 t/m}) \end{aligned}$$

$$t \rightarrow \infty \quad x_{\text{lim}} = mv_0/c_1$$

(مثال)

As the simplest example of the resisted motion of a particle, find the displacement and velocity of horizontal motion in a medium in which the retarding force is proportional to the velocity.



$$ma = m \frac{dv}{dt} = -kmv \quad \rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = -k \int dt \quad \rightarrow \quad \ln v = -kt + C_1$$

$$\text{initial condition } v(t = 0) \equiv v_0 \quad \rightarrow \quad C_1 = \ln v_0$$

$$\hookrightarrow \quad v = v_0 e^{-kt}$$

obtain the displacement  $x$  as a function of time:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt} \quad \rightarrow \quad x = v_0 \int e^{-kt} dt = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + C_2$$


$$\text{initial condition } x(t = 0) \equiv 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = v_0/k.$$

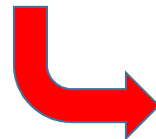
$$\hookrightarrow \quad x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt})$$


$$x = v_0/k \text{ as } t \rightarrow \infty.$$

obtain the velocity as a function of displacement

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{1}{v}$$


$$v \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} = -kv$$


$$\frac{dv}{dx} = -k$$


$$v = v_0 - kx$$

## حرکت افقی با مقاومت درجه دوم

به ازای مقادیر مثبت  $v$

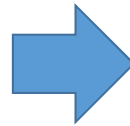
$$F(v) = -c_1 v - c_2 v|v| \longrightarrow F(v) = -c_2 v^2 \longrightarrow -c_2 v^2 = m \frac{dv}{dt}$$
$$F(v) = m \frac{dv}{dt}$$

$$t = \int_{v_n}^v \frac{-m dv}{c_2 v^2} = \frac{m}{c_2} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right)$$

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{c_2 t}{m} \longrightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{c_2 t}{m} = \frac{m + c_2 v_0 t}{m v_0} \longrightarrow v = \frac{m v_0}{m + c_2 v_0 t}$$

$$v = \frac{mv_0}{m + c_2 v_0 t} \rightarrow v = \frac{v_0}{1 + \frac{c_2 v_0}{m} t}$$

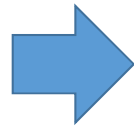
$$k = c_2 v_0 / m$$



$$v = \frac{v_0}{\lambda + kt}$$

$$t \rightarrow \infty \quad v \propto \frac{1}{t}$$

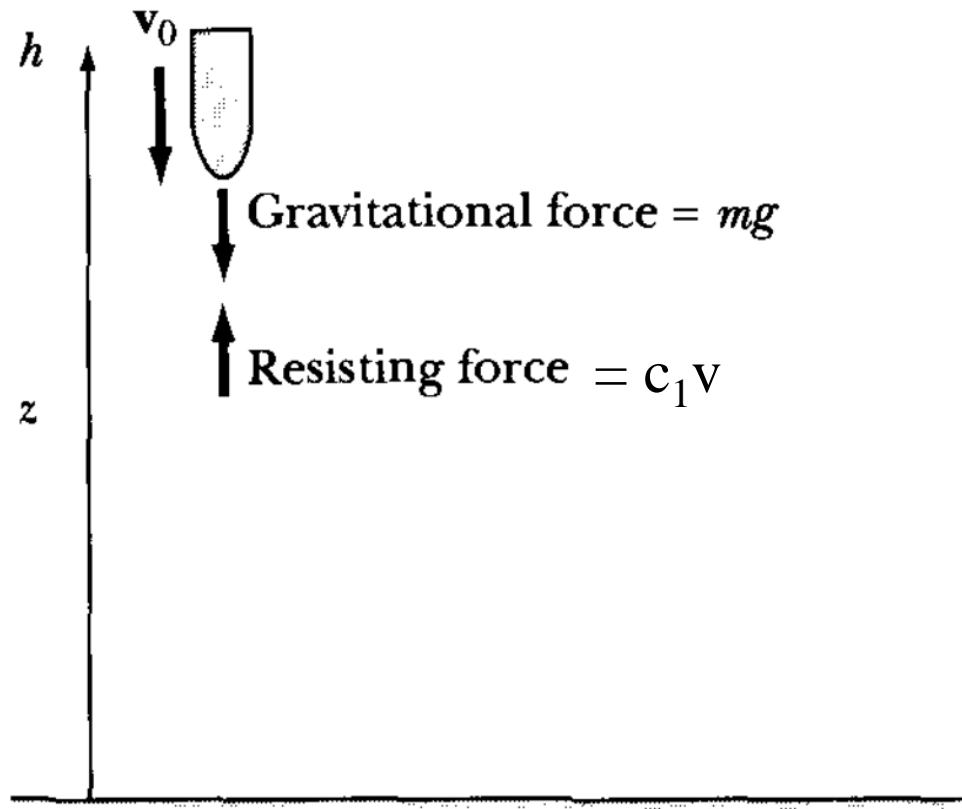
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{\lambda + kt}$$



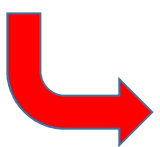
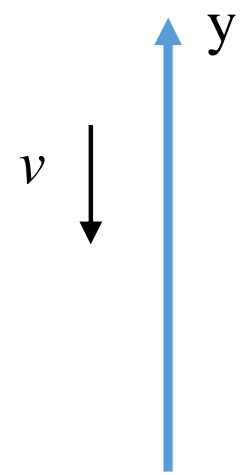
$$x(t) = \int_0^t \frac{v_0 dt}{\lambda + kt} = \frac{v_0}{k} \ln(\lambda + kt)$$

سقوط قائم به داخل شاره: سرعت حدی

(الف) حالت خطی. در مورد شیئی که در یک شاره مقاوم به طور قائم سقوط کند



$$\left. \begin{aligned}
 F_0 + F(v) &= m \frac{dv}{dt} \\
 F(v) &= -c_1 v \\
 F_0 &= -mg
 \end{aligned} \right\} -mg - c_1 v = m \frac{dv}{dt}$$



$$t = \int_{v_0}^v \frac{m dv}{-mg - c_1 v} = -\frac{m}{c_1} \ln \frac{mg + c_1 v}{mg + c_1 v_0}$$



$$v = -\frac{mg}{c_1} + \left( \frac{mg}{c_1} + v_0 \right) e^{-c_1 t/m}$$

$$v = -\frac{mg}{c_1} + \left( \frac{mg}{c_1} + v_0 \right) e^{-c_1 t/m}$$

جمله‌ی نمایی بعد از گذشت زمانی کافی ( $t \gg m/c_1$ ) به مقداری چشم‌پوشیدنی کاهش می‌یابد

$$\text{سرعت حدی} \quad v = -\frac{mg}{c_1} \quad \text{بزرگی سرعت حدی} \quad v_t = \frac{mg}{c_1}$$

سرعت حدی عبارت است از سرعتی که در آن نیروی مقاومت دقیقاً با وزن جسم مساوی و مختلف‌العلامت می‌شود به طوری که نیروی کل صفر است، از این رو شتاب صفر می‌شود.

$$v = -\frac{mg}{c_1} + \frac{mg}{c_1} e^{-c_1 t/m} + v_0 e^{-c_1 t/m} \quad \rightarrow \quad v = -v_t (1 - e^{-t/\tau}) + v_0 e^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{m}{c_1} \quad \text{زمان مشخصه}$$

$$v = -v_t(1 - e^{-t/\tau}) + v_0 e^{-t/\tau}$$

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad v = v_0$$

$$t \rightarrow \infty \quad \rightarrow \quad v = -v_t$$

در حالت خاص، برای جسمی که در زمان  $t = 0$  از حال سکون فرومی افتد، داریم  $v_0 = 0$

و خواهیم رسید به

$$v = -v_t(1 - e^{-t/\tau})$$

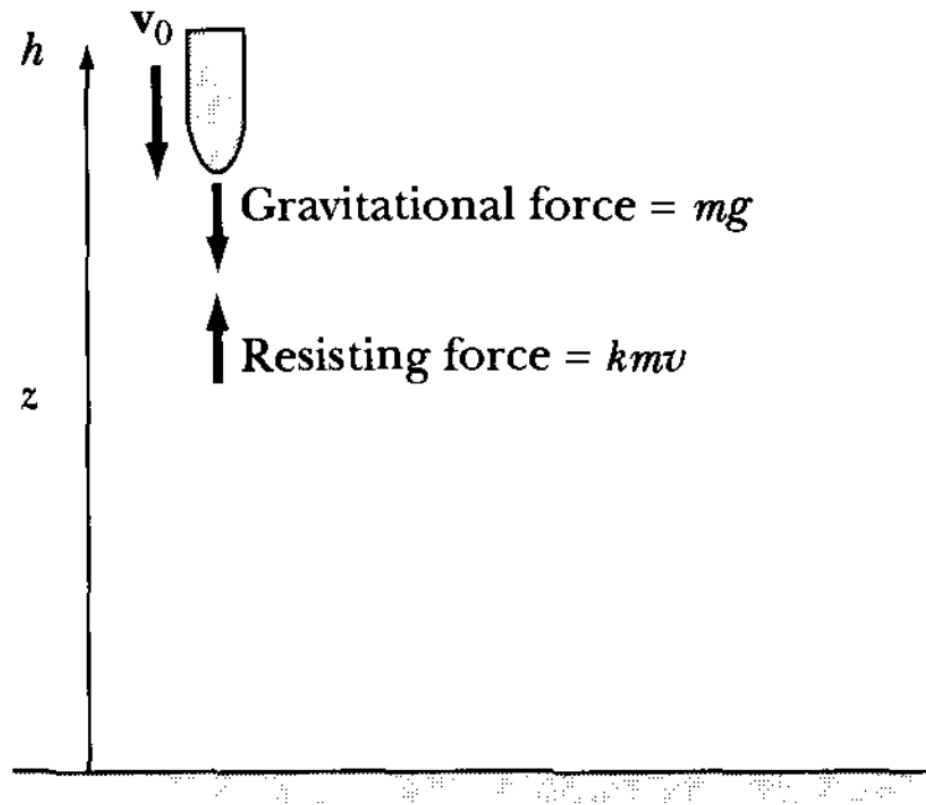
$$t = \tau \quad \rightarrow \quad (1 - e^{-1}) = 0.63$$

$$t = 2\tau \quad \rightarrow \quad (1 - e^{-2}) = 0.86$$

$$t = 5\tau \quad \rightarrow \quad (1 - e^{-5}) = 0.99 \quad \longrightarrow \quad (1 - e^{-5})v_t = 0.993v_t$$

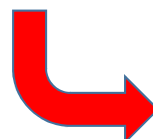
(مثال)

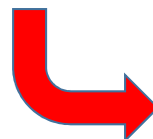
Find the displacement and velocity of a particle undergoing vertical motion in a medium having a retarding force proportional to the velocity.



$$F = m \frac{dv}{dt} = -mg - kmv \quad \frac{dv}{kv + g} = -dt$$

$$\frac{1}{k} \ln(kv + g) = -t + c \quad \xrightarrow{v(t=0) \equiv v_0} kv + g = e^{-kt+kc}$$

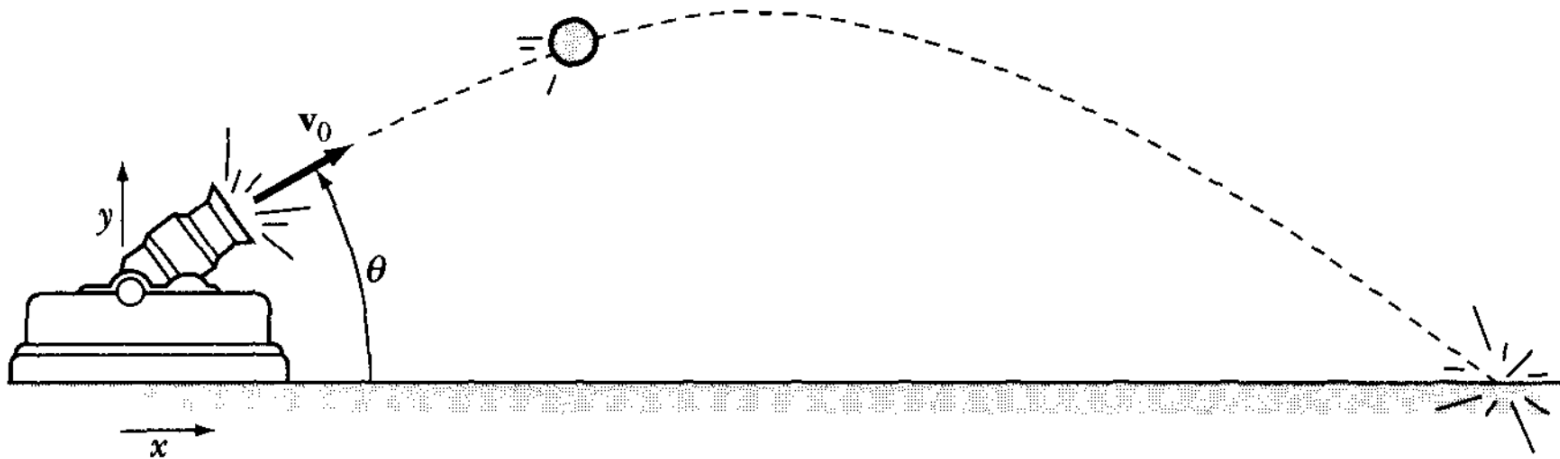

$$v = \frac{dz}{dt} = -\frac{g}{k} + \frac{kv_0 + g}{k} e^{-kt}$$


$$z(t=0) \equiv h \quad z = h - \frac{gt}{k} + \frac{kv_0 + g}{k^2} (1 - e^{-kt})$$

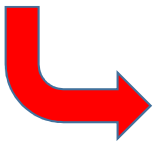
(مثال)

Next, we treat projectile motion in two dimensions, first without considering air resistance. Let the muzzle velocity of the projectile be  $v_0$  and the angle of elevation be  $\theta$  (Figure 2-7). Calculate the projectile's displacement, velocity, and range.

**Solution.** Using  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ , the force components become



$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = 0 \\ \dot{x} = v_0 \cos \theta \\ x = v_0 t \cos \theta \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{y} = -g \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin \theta \\ y = \frac{-gt^2}{2} + v_0 t \sin \theta \end{array} \right.$$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \left( v_0^2 t^2 + \frac{g^2 t^2}{4} - v_0 g t^3 \sin \theta \right)^{1/2}$$

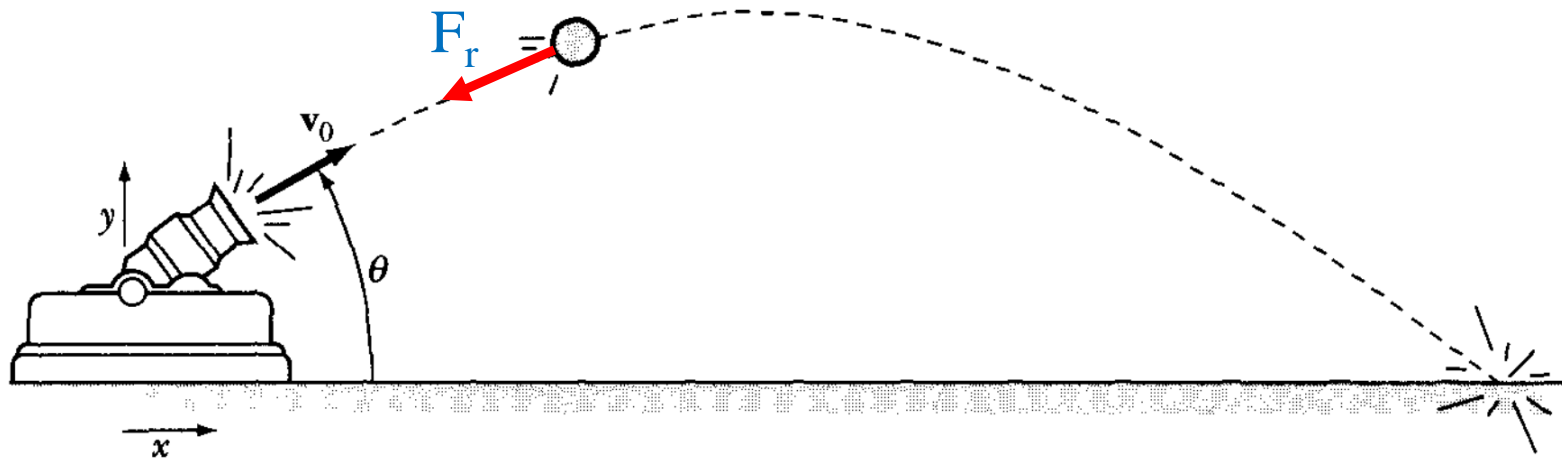
$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = (v_0^2 + g^2 t^2 - 2v_0 g t \sin \theta)^{1/2}$$

$$T = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

$$R = \text{range} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$$

(مثال)

Next, we add the effect of air resistance to the motion of the projectile in the previous example. Calculate the decrease in range under the assumption that the force caused by air resistance is directly proportional to the projectile's velocity.

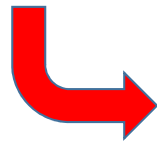


initial conditions

$$\left. \begin{aligned} x(t=0) &= 0 = y(t=0) \\ \dot{x}(t=0) &= v_0 \cos \theta \equiv U \\ \dot{y}(t=0) &= v_0 \sin \theta \equiv V \end{aligned} \right\}$$

$$m\ddot{x} = -k m \dot{x}$$

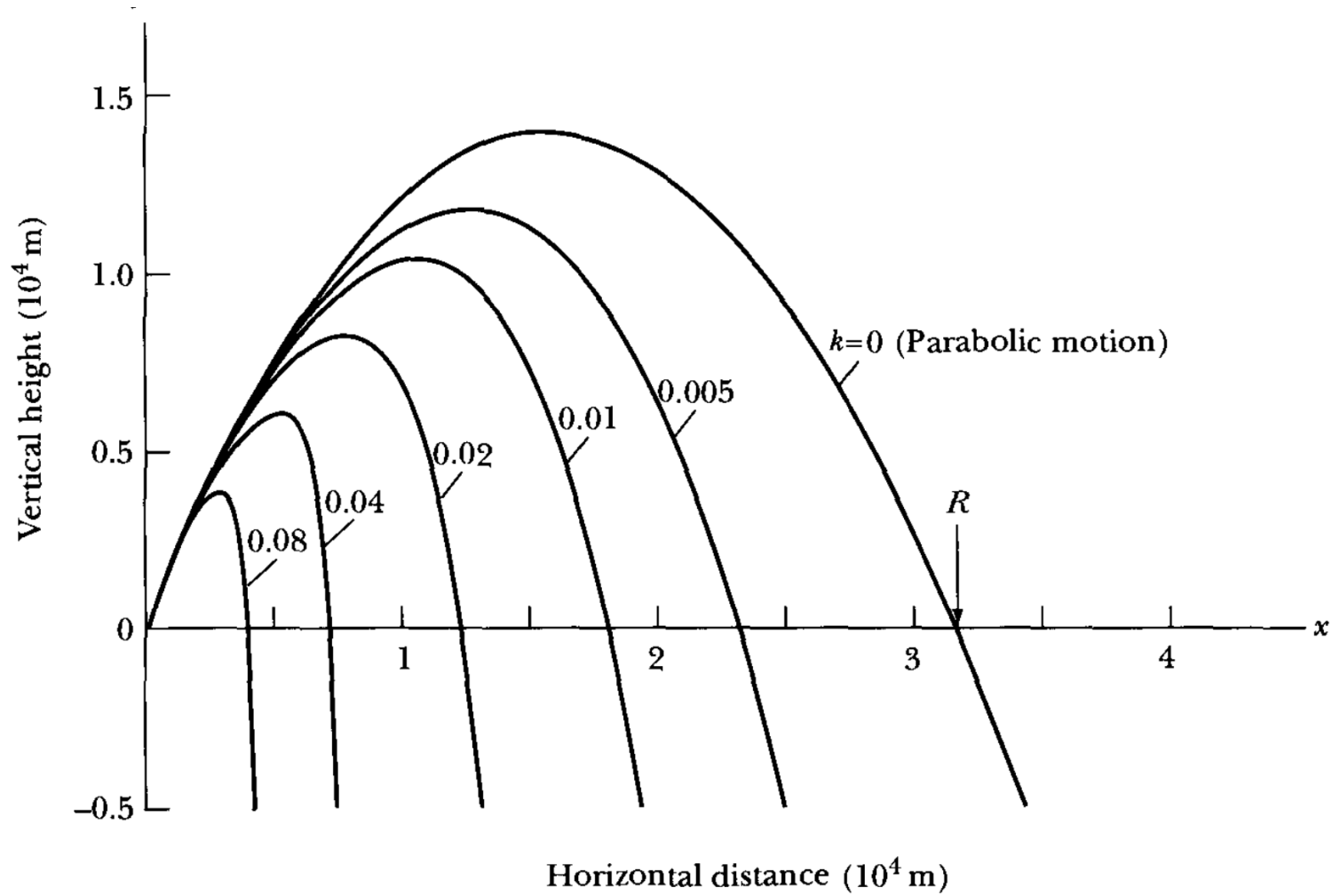
$$m\ddot{y} = -k m \dot{y} - mg$$



$$x = \frac{U}{k}(1 - e^{-kt})$$

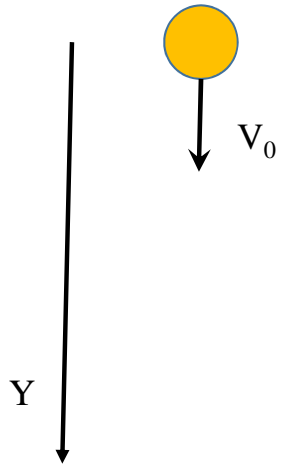
$$y = -\frac{gt}{k} + \frac{kV + g}{k^2}(1 - e^{-kt})$$

$$T = \frac{kV + g}{gk}(1 - e^{-kT})$$



(ب) حالت درجهٔ دوم. در این حالت، بزرگی  $F(v)$  با  $v^2$  متناسب است  
نیروی مقاوم

جسم از حال سکون فرومی‌افتد یا با سرعت اولیهٔ  $v_0$  به پایین پرتاب می‌شود



$$m \frac{dv}{dt} = mg - c_2 v^2 = mg \left( 1 - \frac{c_2}{mg} v^2 \right)$$

$$= mg \left( 1 - \frac{v^2}{v_t^2} \right) \quad v_t = \sqrt{\frac{mg}{c_2}} \text{ (سرعت حدی)}$$


$$\frac{dv}{dt} = g \left( 1 - \frac{v^2}{v_t^2} \right)$$

$$\frac{dv}{dt} = g \left( 1 - \frac{v^2}{v_t^2} \right)$$

$$t - t_0 = \int_{v_0}^v \frac{dv}{g \left( 1 - \frac{v^2}{v_t^2} \right)} = \tau \left( \tanh^{-1} \frac{v}{v_t} - \tanh^{-1} \frac{v_0}{v_t} \right)$$

$$\tau = \frac{v_t}{g} = \sqrt{\frac{m}{c \rho g}} \text{ (زمان مشخصه)}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \tanh^{-1}(x)$$


$$v = v_t \tanh \left( \frac{t - t_0}{\tau} - \tanh^{-1} \frac{v_0}{v_t} \right)$$

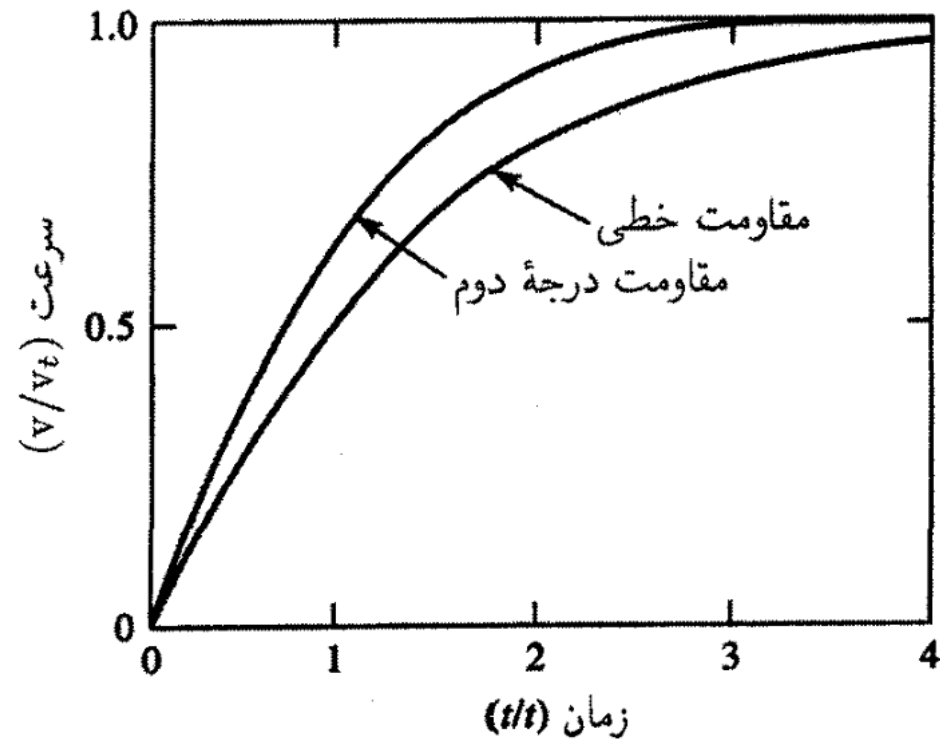
اگر جسم از حال سکون در زمان  $t = 0$  رها شود، ( $v_0 = 0$ )

$$v = v_t \tanh \left( \frac{t - t_0}{\tau} - \tanh^{-1} \frac{v_0}{v_t} \right)$$

$$v = v_t \tanh \frac{t}{\tau} = v_t \left( \frac{e^{2t/\tau} - 1}{e^{2t/\tau} + 1} \right)$$

به ازای  $t = 5\tau$

$$v = 0.99991 v_t$$



شکل ۱.۴.۲ نمودارهای سرعت (یکاهای سرعت حدی) بر حسب زمان (یکاهای زمان مشخصه  $T$ ) برای جسم افتان.

جسم پس از پیمودن مسافت سقوطی معینی، به چه سرعتی می‌رسد

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dy}$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}$   
 $v$

تغییر سرعت در بازه  $dt$  برابر با  $dv$  است که معادل با  
تغییر سرعت در بازه تغییر مکان در نرخ تغییر مکان

$$\frac{dv^2}{dy} = 2 \frac{dv}{dt}$$

در بالاتر  
داشتیم

$$\frac{dv}{dt} = g \left( 1 - \frac{v^2}{v_t^2} \right)$$



$$\frac{dv^2}{dy} = 2g \left( 1 - \frac{v^2}{v_t^2} \right)$$

حل معادله:

تغیر متغیر:  $u = 1 - \frac{v^2}{v_t^2}$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{1}{v_t^2} \frac{dv^2}{dy} = -\left(\frac{2g}{v_t^2}\right) u$$

با توجه به بالا

$$\underbrace{\frac{dv^2}{dy}}_{-v_t^2 \frac{du}{dy}} = 2g \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{v_t^2}\right)}_u$$

معادله تبدیل می شود

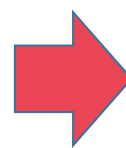
$$\frac{du}{dy} = -\left(\frac{2g}{v_t^2}\right) u$$

$$\frac{du}{dy} = - \left( \frac{2g}{v_t^2} \right) u$$

$$\frac{du}{u} = - \frac{2g}{v_t^2} dy \quad \rightarrow \quad \int_{y=0}^y \frac{du}{u} = \int_{y=0}^y - \frac{2g}{v_t^2} dy \quad \rightarrow \quad \text{Ln} \frac{u(y)}{u(y=0)} = - \frac{2g}{v_t^2} y$$

$$u = u(y=0) e^{-2gy/v_t^2}$$

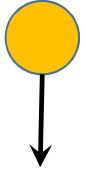
$$u(y=0) = 1 - \frac{v_0^2}{v_t^2}$$



$$u = \left( 1 - \frac{v_0^2}{v_t^2} \right) e^{-2gy/v_t^2} = 1 - \frac{v^2}{v_t^2}$$

$$v^2 = v_t^2 \left( 1 - e^{-2gy/v_t^2} \right) + v_0^2 e^{-2gy/v_t^2}$$

بعد از طی یک طول مشخصه  $v_t^2/2g$



یک طول مشخصه  $v_t^2/2g$

$$\frac{-2gy}{v_t^2} = -1 \rightarrow y = \frac{v_t^2}{2g}$$

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{c_2}} \text{ (سرعت حدی)}$$

$$v^2 = v_t^2(1 - e^{-1}) + v_0^2 e^{-1}$$

## مثال ۳.۴.۲ سقوط قطرات باران و توپ بسکتبال

سرعت حدی در هوا و زمان مشخصه را برای (الف) یک قطره باران کروی خیلی کوچک به قطر  $1 \text{ mm} = 10^{-4} \text{ m}$  و (ب) یک توپ بسکتبال به قطر  $25 \text{ cm}$  و جرم  $6 \text{ kg}$  محاسبه کنید.

بحث پیرامون نوع نیروی مقاوم (خطی یا درجه دو)

برای اجسام کروی که در هوا حرکت می‌کنند

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{0.22 v |v| D^2}{1.55 \times 10^{-4} v D} = 1.4 \times 10^3 |v| D$$

قطره باران  $0.14 v$



$$v = \frac{1}{0.14} = 7.1 \text{ m/s}$$

$$\frac{c_2}{c_1} = 1 \quad (\text{شرط غالب بودن جمله دوم})$$

توپ بسکتبال

$350 v$



$$v = \frac{1}{350} = 0.0029 \text{ m/s}$$

نتیجه می‌گیریم

حالت خطی باید در قطره باران در حال سقوط منظور شود

در مورد توپ بسکتبال حالت درجه دوم صادق است

در حالت‌های حدی مقدار کم و زیاد  $v$ ، به ترتیب، جمله خطی یا جمله درجه دوم در  $F(v)$  غالب است

محاسبه سرعت حدی قطره باران

$$v_t = \frac{mg}{c_1}$$

محاسبه جرم قطره

$$\text{حجم قطره باران } \pi D^3 / 6 = 0.52 \times 10^{-12} \text{ m}^3$$

$$< 10^{-9} \text{ kg}$$

$$v_t = \left( \frac{mg}{c_2} \right)^{1/2} = \left( \frac{0.6 \times 9.8}{0.138} \right)^{1/2} \text{ m/s} = 20.6 \text{ m/s}$$

ضریب پس کذا

$$\text{سرعت حدی } v_t = \frac{mg}{c_1} = \frac{0.52 \times 10^{-9} \times 9.8}{1.55 \times 10^{-8}} \text{ m/s} = 0.33 \text{ m/s}$$

$$\text{زمان مشخصه } \tau = \frac{v_t}{g} = \frac{0.33 \text{ m/s}}{9.8 \text{ m/s}^2} = 0.034 \text{ s}$$

$$v_t = \left( \frac{mg}{c_2} \right)^{1/2} \quad \text{محاسبه سرعت حدی توپ بسکتبال}$$

$$c_2 = 0.22 D^2 = 0.22 \times (0.25)^2 = 0.0138 \text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^2 \quad \text{ضریب پس کشی توپ}$$

$$v_t = \left( \frac{mg}{c_2} \right)^{1/2} = \left( \frac{0.6 \times 9.8}{0.0138} \right)^{1/2} \text{ m/s} = 20.6 \text{ m/s} \quad \text{سرعت حدی}$$

$$\tau = \frac{v_t}{g} = \frac{20.6 \text{ m/s}}{9.8 \text{ m/s}^2} = 2.1 \text{ s} \quad \text{زمان مشخصه}$$

بنابراین، قطره باران در مدتی کمتر از یک ثانیه پس از لحظه شروع به سقوط از حال سکون عملاً به سرعت حدی خود می‌رسد، در صورتی که توپ بسکتبال برای اینکه به یک درصد سرعت حدی خود برسد چند ثانیه طول می‌کشد.