جلسه ششم

حرکت نوسانی (۲)

نوسانگر هماهنگ ساده زاویه ای

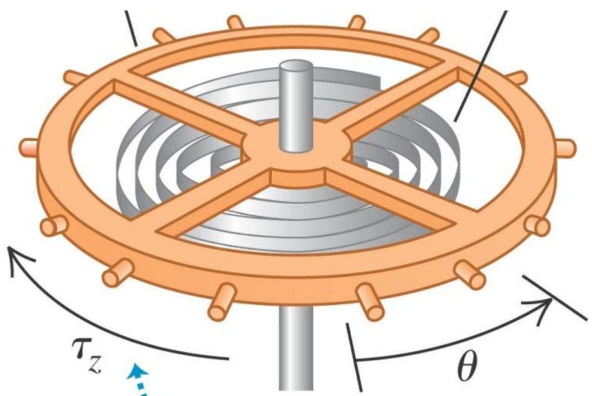
نوسانگر حول یک وضعیت تعادلی می چرخد

گشتاور (عامل دوران
یا حرکت نوسانی)

ثابت پیچش

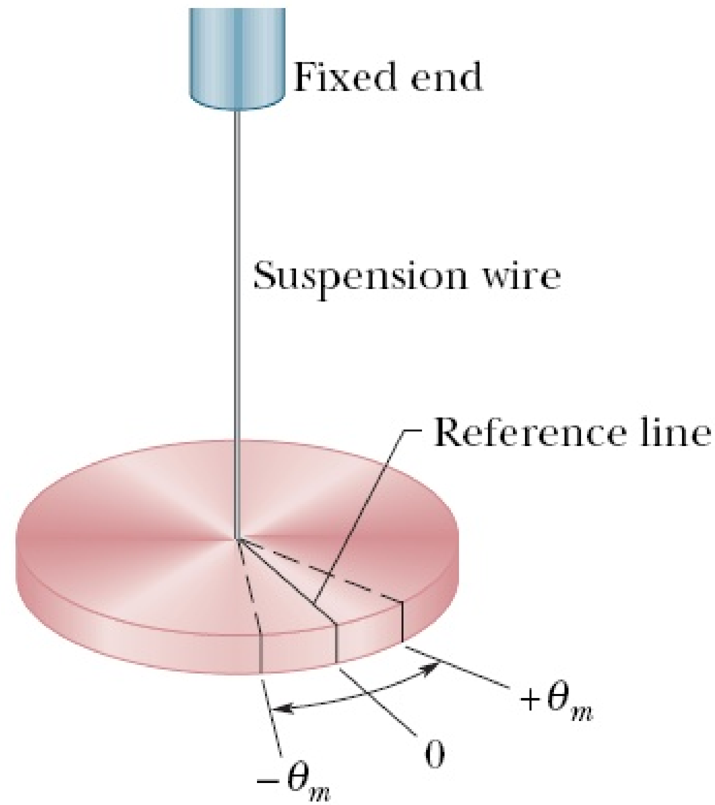
$$\tau = -k\theta$$

زاویه انحراف



The spring torque τ_z opposes the angular displacement θ.

Film 1



$$\left.\begin{aligned}\tau &= -k\theta \\ \tau &= I\alpha \\ \alpha &= \frac{d^2\theta}{dt^2}\end{aligned}\right\} \quad I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta \quad \rightarrow \quad I\frac{d^2\theta}{dt^2} + k\theta = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I}\theta = 0}$$

معادله دیفرانسیلی حاکم بر حرکت نوسانی جسم در حال دوران

جواب پیشنهادی برای معادله: $\theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi)$

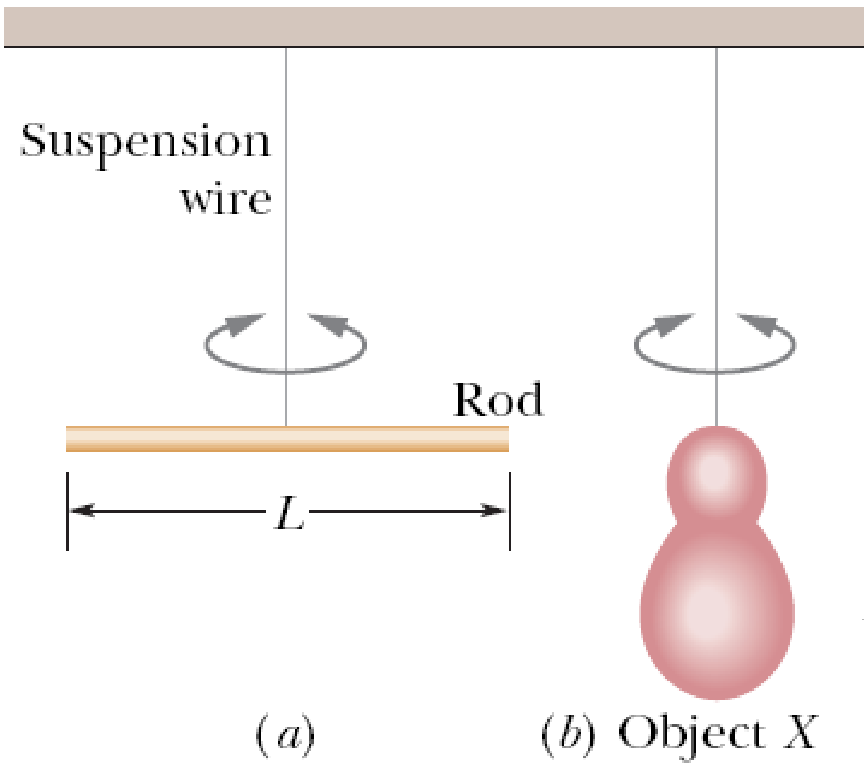
جواب در صورتی در معادله صدق می کند که

$$\omega^2 = \frac{k}{I} \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$$

مثال: میله نازکی به طول $L = 12.4$ cm و جرم $m = 135$ g از نقطه وسطش توسط ریسمانی آویزان شده است.
دوره تناوب آن $T_a = 2.53$ s است. سپس جسمی با شکل نامنظم به همان ریسمان وصل می شود و دوره تناوب
آن $T_b = 4.76$ s است. لختی دورانی جسم با شکل نامشخص را حساب کنید



$$I_a = \tfrac{1}{12}mL^2 = (\tfrac{1}{12})(0.135\ \text{kg})(0.124\ \text{m})^2$$
$$= 1.73 \times 10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

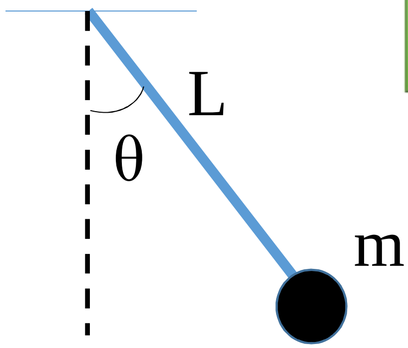
$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{I_a}{\kappa}} \quad \text{and} \quad T_b = 2\pi\sqrt{\frac{I_b}{\kappa}}.$$

ثابت پیچش ریسمان برای هر دو حالت یکسان و نامعلوم است

$$I_b = I_a\frac{T_b^2}{T_a^2} = (1.73 \times 10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\,\frac{(4.76\ \text{s})^2}{(2.53\ \text{s})^2}$$
$$= 6.12 \times 10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2. \qquad \text{(Answer)}$$

آونگ ها

نیروی بازگرداننده ناشی از نیروی گرانش

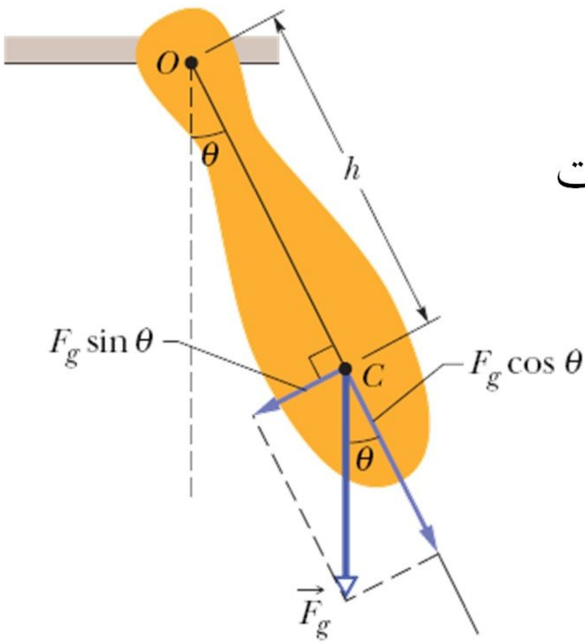


❖ آونگ ساده

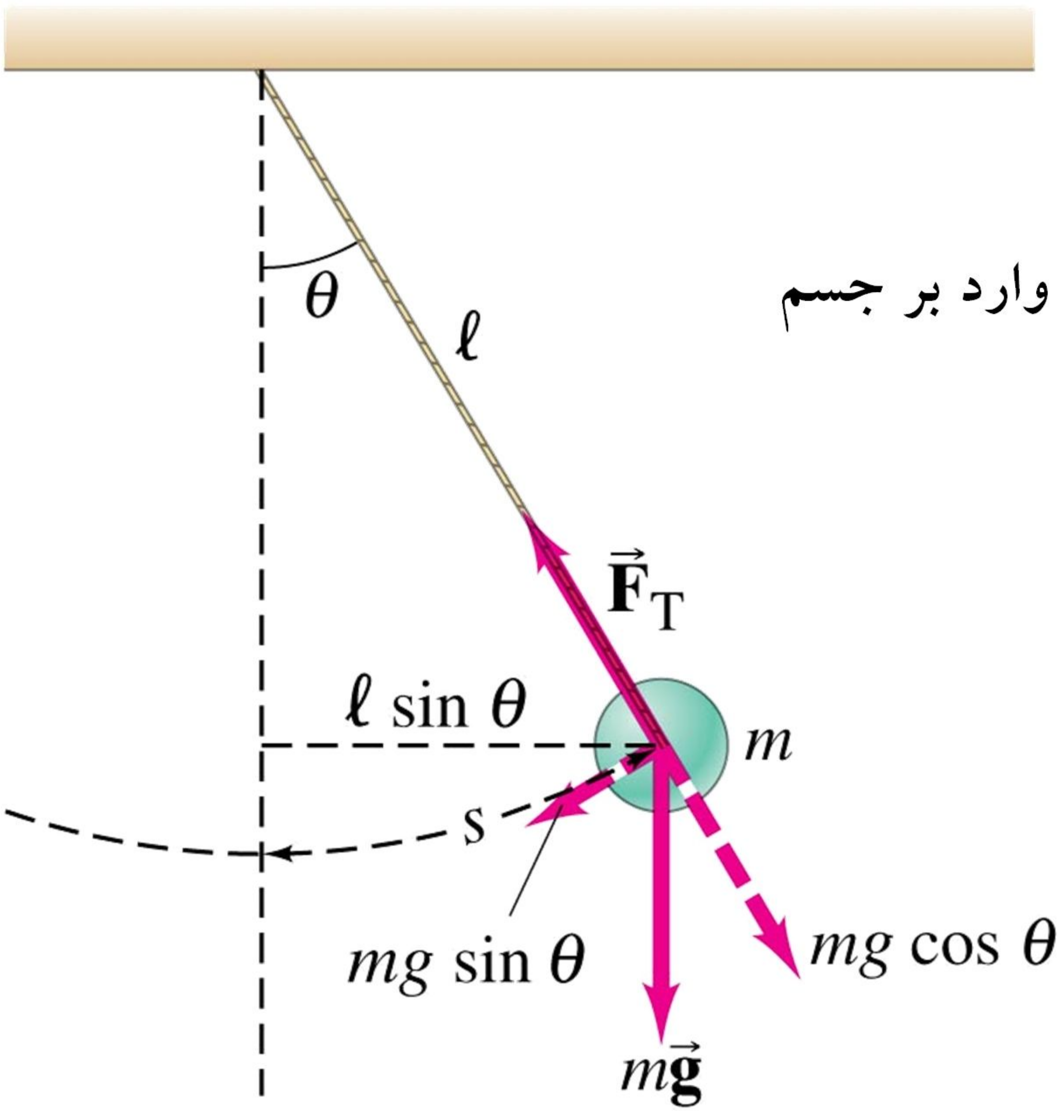
جسمی به جرم m که به ریسمان بدون جرمی متصل می باشد

❖ آونگ فیزیک

جسمی که از یک نقطه درون آن خارج از مرکز جرم آویزان شده است



آونگ ساده (Simple Pendulum)



الف) بررسی حرکت براساس تحلیلی نیروهای وارد بر جسم

$$\begin{cases} T - mg\cos\theta = m\dfrac{v^2}{L} \\ mg\sin\theta = ma_t \quad \rightarrow \quad mg\sin\theta = -m\dfrac{d^2 s}{dt^2} \end{cases}$$

$$a_t = r\alpha \quad \rightarrow \quad a_t = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$mg\sin\theta = -mL\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\sin\theta=0$$ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم بیانگر حرکت آونگ ساده

$$\theta \le 6^\circ \quad \Rightarrow \quad \sin\theta \approx \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\theta=0$$

$$\theta=\theta_m\cos(\omega t+\phi)$$ جواب پیشنهادی برای معادله دیفرانسیل

جواب در صورتی در معادله صدق می کند که

$$\omega^2=\frac{g}{L} \quad \rightarrow \quad \omega=\sqrt{\frac{g}{L}}$$

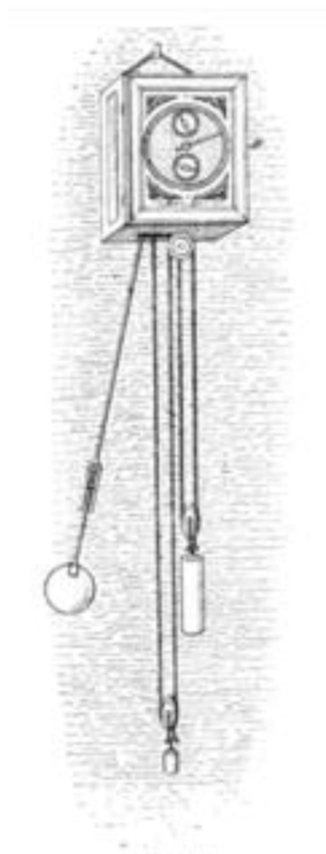
$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

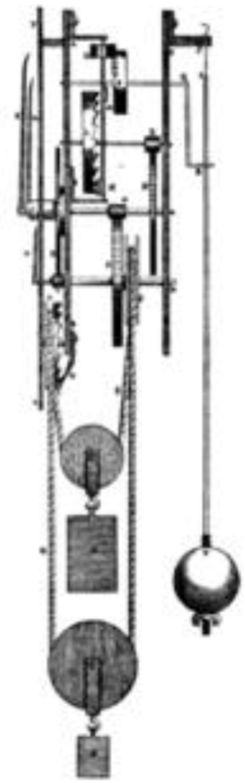
$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

TABLE 11–1
Sin θ at Small Angles

θ (degrees)	θ (radians)	$\sin\theta$	% Difference
0	0	0	0
1°	0.01745	0.01745	0.005%
5°	0.08727	0.08716	0.1%
10°	0.17453	0.17365	0.5%
15°	0.26180	0.25882	1.1%
20°	0.34907	0.34202	2.0%
30°	0.52360	0.50000	4.5%

Christian Huygens First Pendulum
1656





Pendulum is in low pressure vessel

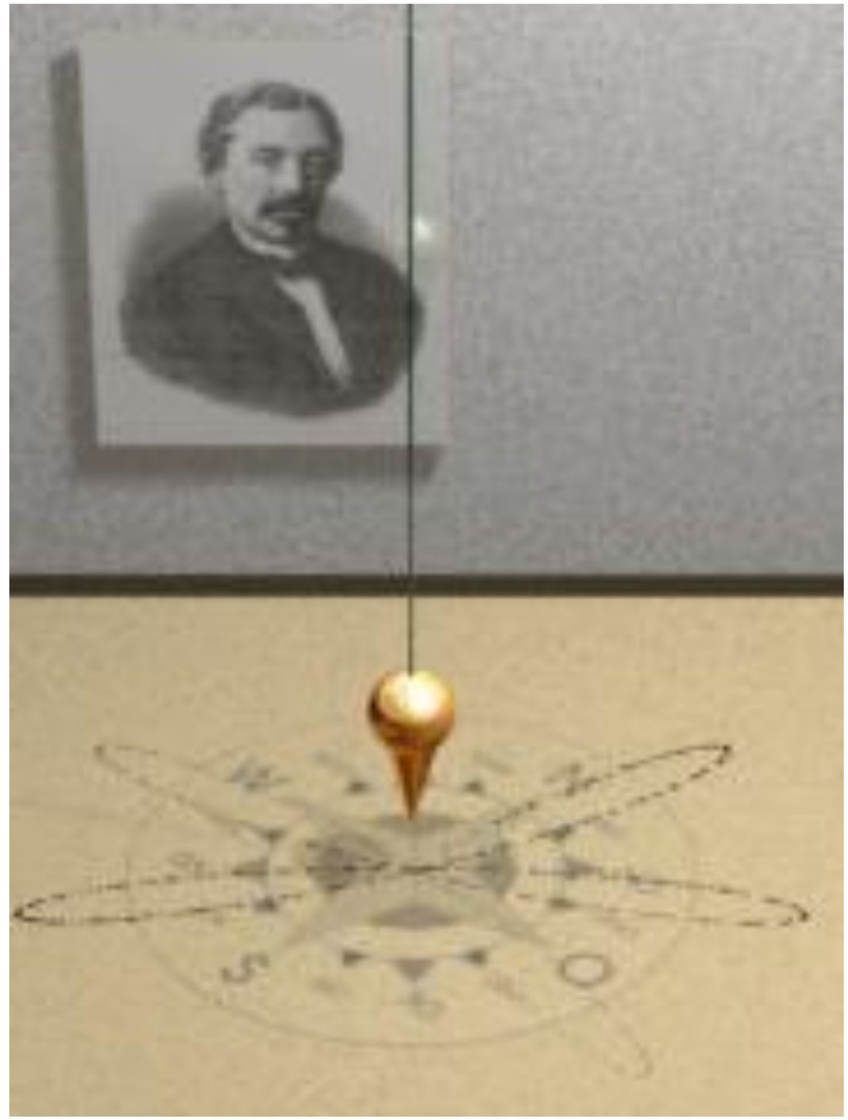
NBS – National Bureau of Standards – now NIST (Natl Inst Sci and Tech)

Riefler regulator

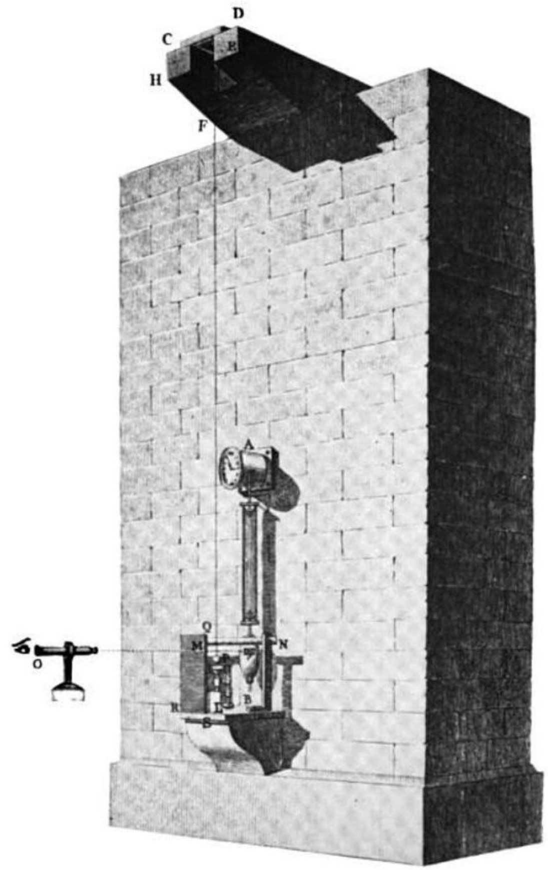
Foucault Pendulum 1851

Precession of Pendulum

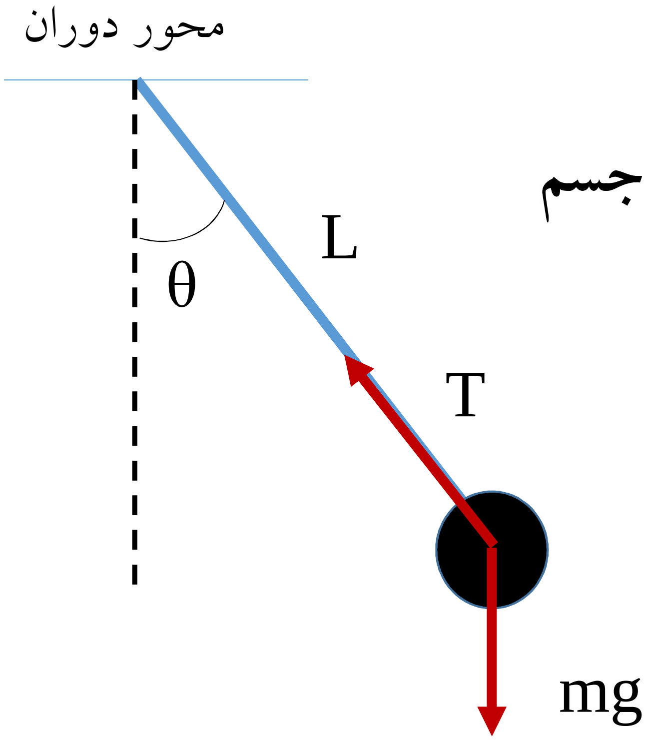
Showed Earth Rotates



Seconds Pendulum – 2 sec period
Used to Measure Gravity



آونگ ساده (Simple Pendulum)



ب) بررسی حرکت براساس تحلیلی گشتاور نیروهای وارد بر جسم

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau = rF\sin\theta$$

$$\begin{cases} \tau_T = 0 & \text{بدون بازوی گشتاور} \\ \tau_{mg} = Lmg\sin\theta & \text{گشتاور بازگرداننده} \end{cases}$$

$$\sum \tau = I\alpha \quad \rightarrow \quad mgL\sin\theta = -I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgL}{I}\sin\theta = 0}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{mgL}{I}\sin\theta=0$$

ω^2

$$\theta\le 6^\circ \quad\Rightarrow\quad \sin\theta\approx\theta \qquad\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{mgL}{I}\theta=0$$

$$\theta=\theta_m\cos(\omega t+\phi)$$ جواب پیشنهادی برای معادله دیفرانسیل

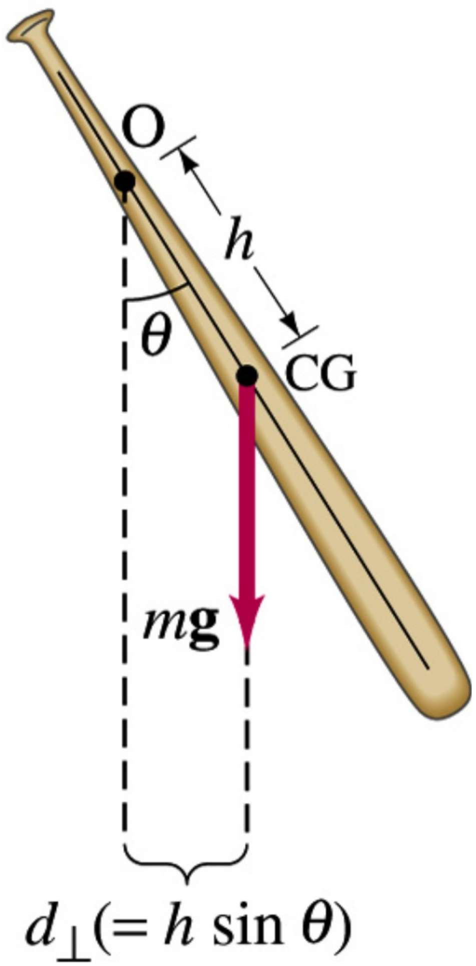
$$\omega^2=\frac{mgL}{I}\quad\rightarrow\quad\omega=\sqrt{\frac{mgL}{I}}=\frac{2\pi}{T}\quad\rightarrow\quad T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

حالت خاص: برای آونگ ساده با $I = mL^2$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}\longrightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{mgL}}=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Film 2 & 3

آونگ فیزیکی (Physical Pendulum)



- جسم می تواند حول محور گذرنده از نقطه آویز (نقطه O) نوسان می کند.
- محور بدون اصطکاک می باشد.
- در حالت تعادل سکون؛ خط واصل بین نقطه آویز و مرکز جرم در راستای قائم قرار می گیرد.
- با خروج از نقطه تعادل؛ خط واصل بین نقطه آویز و مرکز جرم با خط قائم زاویه θ می سازد.
- نیروها: نیروی وزن جسم و نیروی تکیه گاه.

Film 4

$$\begin{cases} \tau_O = 0 \\ \tau_{mg} = mgh\sin\theta \end{cases}$$

$$\sum \tau = I\alpha \quad \rightarrow \quad mgh\sin\theta = -I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I}\sin\theta = 0$$

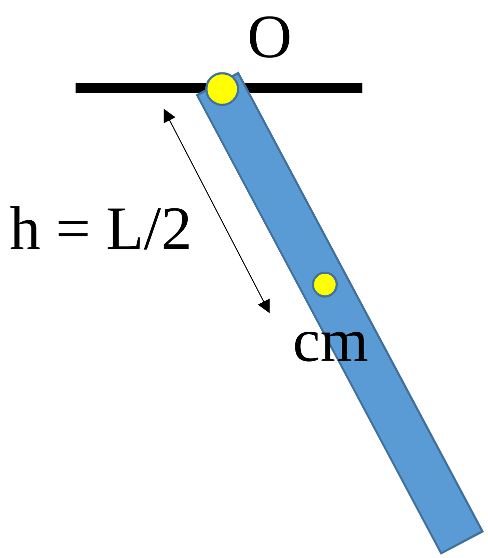
$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\frac{mgh}{I}}_{\omega^2}\theta = 0}$$

$$\omega^2 = \frac{mgh}{I_O} \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_O}} = \frac{2\pi}{T} \quad \rightarrow \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgh}}}$$

h = فاصله بین نقطه آویز و مرکز جرم

I_O = لختی دورانی حول نقطه دوران

مثال) میله ای به جرم m و طول L از یک انتها آویزان شده است. اگر با نوسان درآوردن میله حول نقطه آویز، دوره تناوب آن اندازه گیری شده باشد شتاب گرانش زمین را بدست آورید.



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgh}}$$

$$I_{cm} = \frac{1}{12}mL^2 \quad \Rightarrow \quad I_O = \frac{1}{12}mL^2 + m(\frac{L}{2})^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

$$I_O = I_{cm} + mh^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg\frac{L}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}$$

آونگ ساده معادل:

اگر یک نوسانگر فیزیکی داشته باشیم با مشخصات m (جرم آونگ)، I_O (لختی دورانی حول نقطه آویز) و h (فاصله نقطه آویز تا مرکز جرم آن)

$$T_{physical} = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgh}}$$

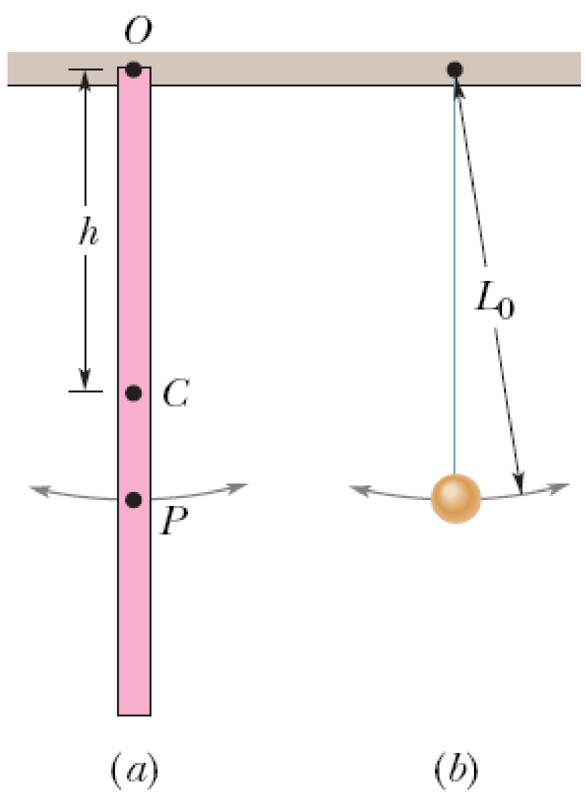
آونگ ساده معادل: با یک آونگ فیزیکی دارای جرمی برابر با جرم کل آونگ فیزیکی، طول L_0 می باشد. طول L_0 به عنوان طول آونگ ساده بگونه ای انتخاب می شود که دوره تناوب آونگ ساده معادل با دوره تناوب آونگ فیزیکی برابر باشد.

Physical	Simple pendulum
m	m
h	L_0
T	T

$$T_{physical} = T_{Simple}$$

$$2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}} \rightarrow L_0 = \frac{I_0}{mh}$$

مثال) خط کش به طول L از یک انتها آویزان شده است بگونه ای که به آسانی می تواند حول نقطه آویز نوسان نماید. طول آونگ ساده معادل با آن را بدست آورید

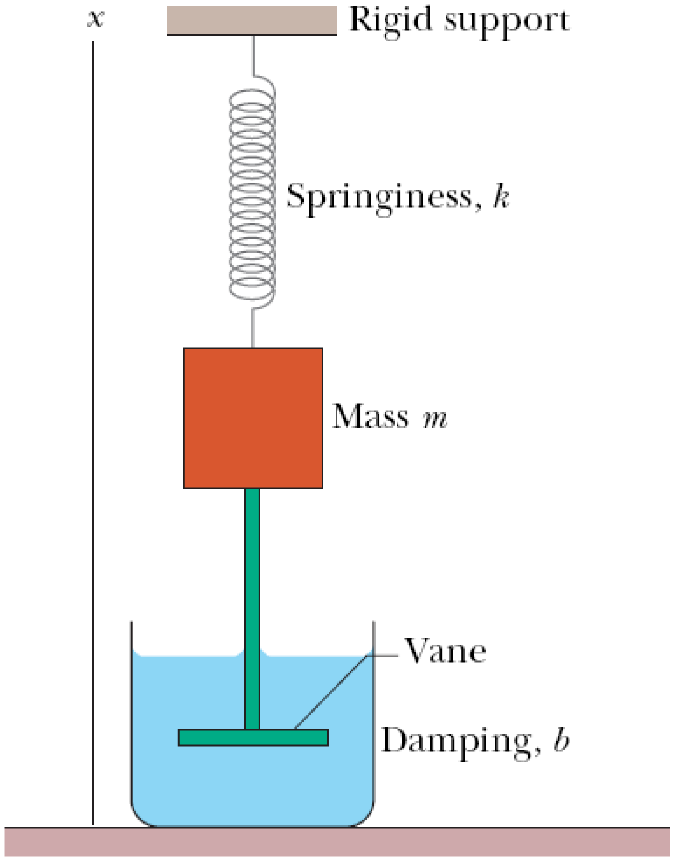


$$L_0 = \frac{I_O}{mh} = \frac{\frac{1}{3}mL^2}{m(\frac{L}{2})} \quad \rightarrow \quad L_0 = \frac{2}{3}L$$

Film 5

نوسانگر هماهنگ ساده میرا (Damped Oscillations)

در یک حرکت نوسانی میرا شونده، حرکت توسط یک عامل خارجی کاهش می یابد.



مایع یک نیروی میرایی خارجی با ضریب میرایی b بر جسم وارد می سازد

$$\begin{cases} F_d = -bv \\ F_s = -kx \end{cases}$$

$$-kx - bv = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-kx-bv=m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2}+kx+bv=0$$

معادله دیفرانسیل نوسانگر میرا

جواب معادله دیفرانسیل نوسانگر میرا

$$x(t)=x_m e^{\frac{-bt}{2m}}\cos(\omega' t+\phi)$$

با قرار دادن جواب پیشنهادی در معادله دیفرانسیل حرکت نوسانگر میرا به رابطه زیر می رسیم:

$$\{m[\frac{b^2}{4m^2}-\omega'^2]-\frac{b^2}{2m}+k\}x_m e^{\frac{-bt}{2m}}\cos(\omega' t+\phi)=0$$

شرط برقرار برابطه بالا صفر شدن عبارت داخل {} است.

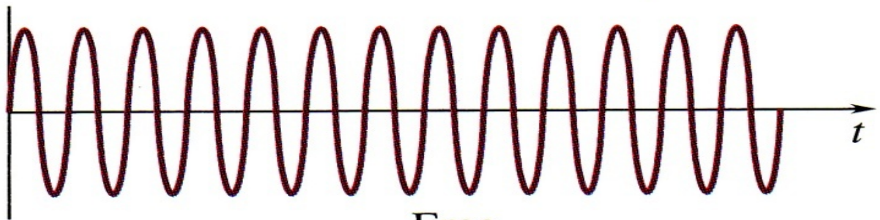
$$m[\frac{b^2}{4m^2}-\omega'^2]-\frac{b^2}{2m}+k=0 \quad \rightarrow \quad [\frac{b^2}{4m^2}-\omega'^2]-\frac{b^2}{2m^2}+\frac{k}{m}=0$$

$$-\frac{b^2}{4m^2}-\omega'^2+\frac{k}{m}=0 \quad \rightarrow \quad \omega'^2=-\frac{b^2}{4m^2}+\frac{k}{m}$$

$$\omega'=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}}$$ بسامد زاویه ای نوسانگر میرا

نوسانگر ساده		نوسانگر میرا	
دامنه ثابت	x_m	دامنه متغیر	$x_m e^{-(\frac{b}{2m})t}$
بسامد زاویه ای ثابت	$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$	بسامد زاویه ای ثابت	$\omega'=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}}$
انرژی مکانیکی ثابت	$E=\frac{1}{2}kx_m^2$	انرژی مکانیکی متغیر	$E=\frac{1}{2}kx_m^2 e^{-\frac{b}{m}t}$

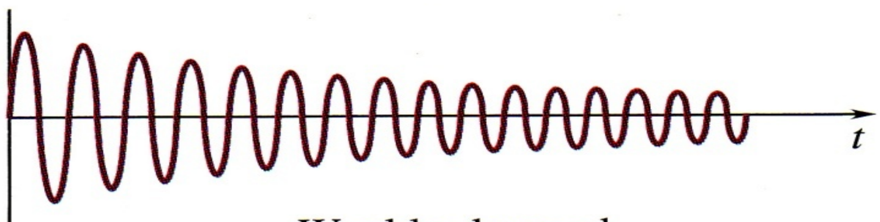
نمودار جابه جایی برحسب زمان



Free

(a)

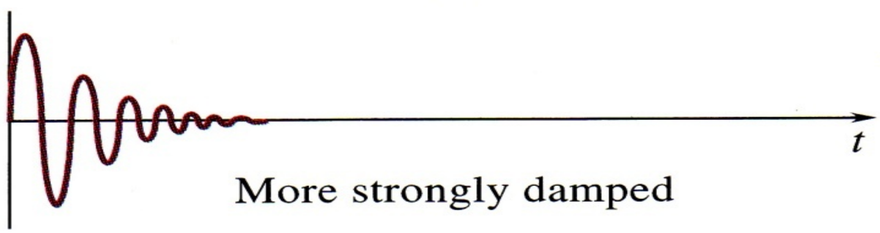
نوسانگر ساده بدون میرایی



Weakly damped

(b)

نوسانگر میرای با نیروی میرایی
ضعیف مثلا اصطکاک هوا

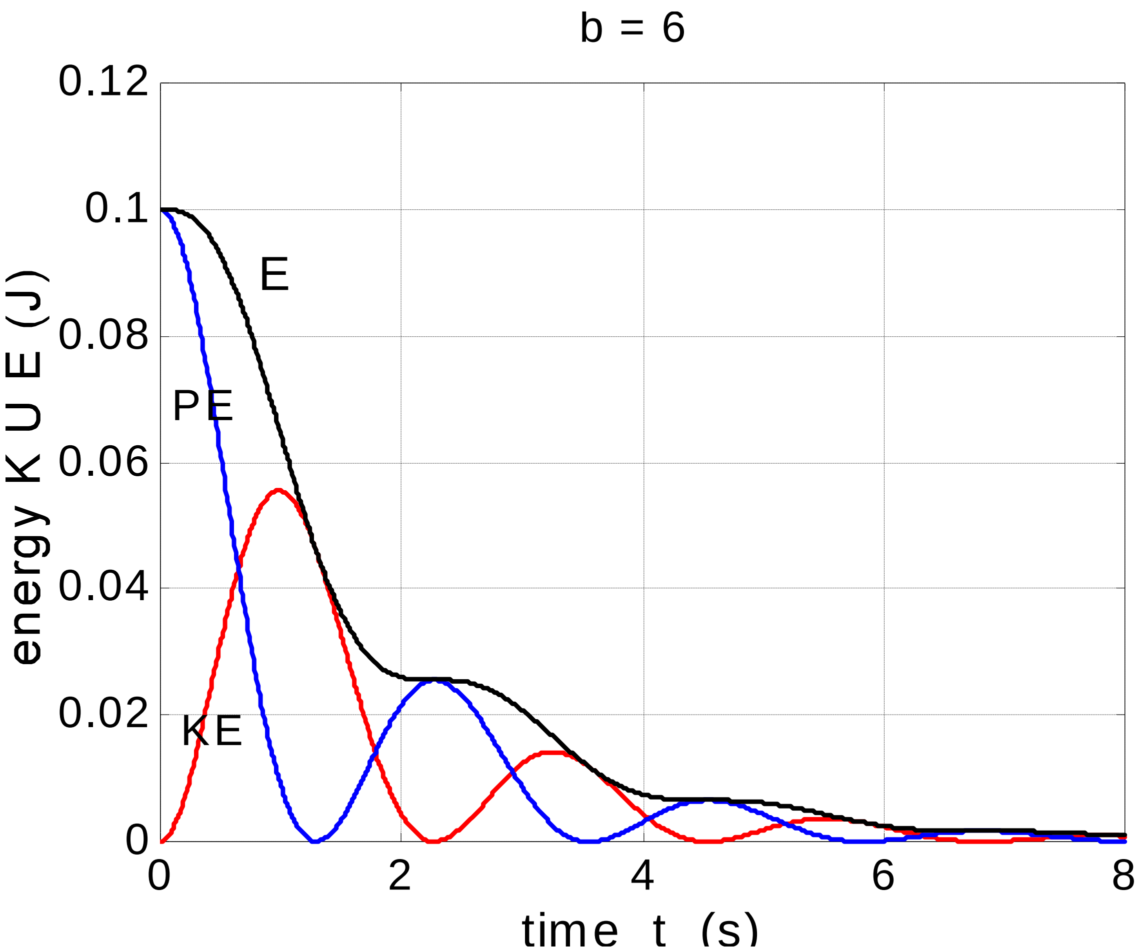


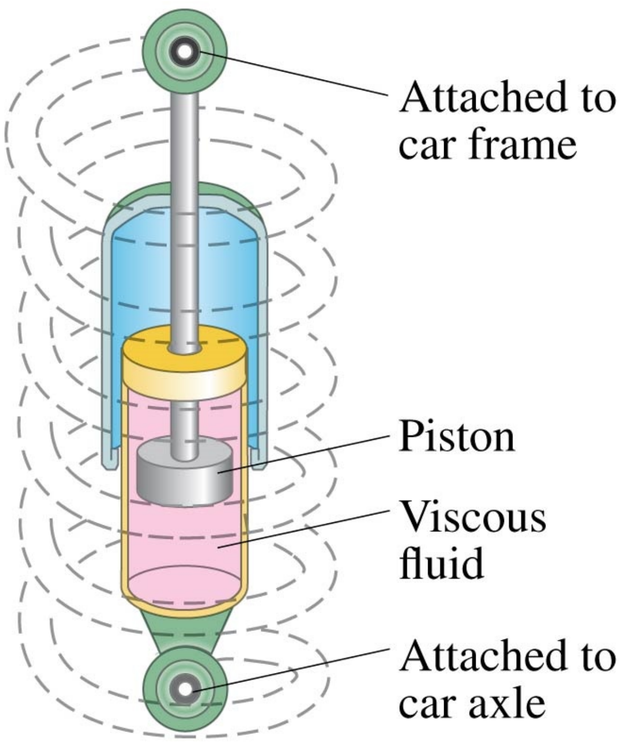
More strongly damped

(c)

نوسانگر میرای با نیروی میرایی
قوی مثلا حرکت نوسانی در آب

نمودار تغییرات انرژی برحسب زمان برای نوسانگر میرا




Attached to car frame
Piston
Viscous fluid
Attached to car axle

Film 6 & 7 & 8

نوسانگر هماهنگ ساده واداشته (Driving harmonic Oscillation)

در یک حرکت نوسانی واداشته، حرکت توسط یک عامل خارجی تناوبی افزایش می یابد.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=F_0\cos(\omega_d t)$$

جواب معادله دیفرانسیل نوسانگر میرا $x(t)=A\cos(\omega_d t+\delta)$

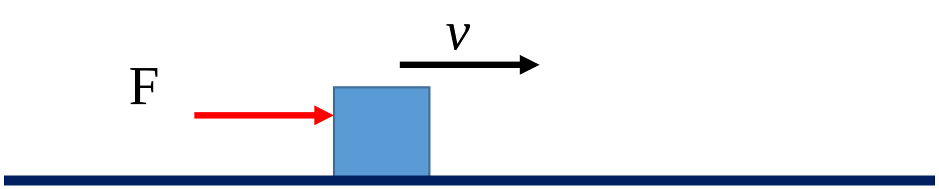
$$A=\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_d^2)^2+\left(\frac{b}{m}\omega_d\right)^2}}$$

تحت تاثیر نیروی محرک:

- ✓ دامنه افزایش می یابد
- ✓ انرژی مکانیکی افزایش می یابد

چرایی افزایش دامنه در نوسانگر واداشته

شرط افزایش دامنه و انرژی در نوسانگر واداشته، اعمال نیروی خارجی در جهت سرعت نوسانگر می باشد



نیرو در جهت سرعت

↓

نیرو در جهت جابه جایی

↓

$W>0$

↓

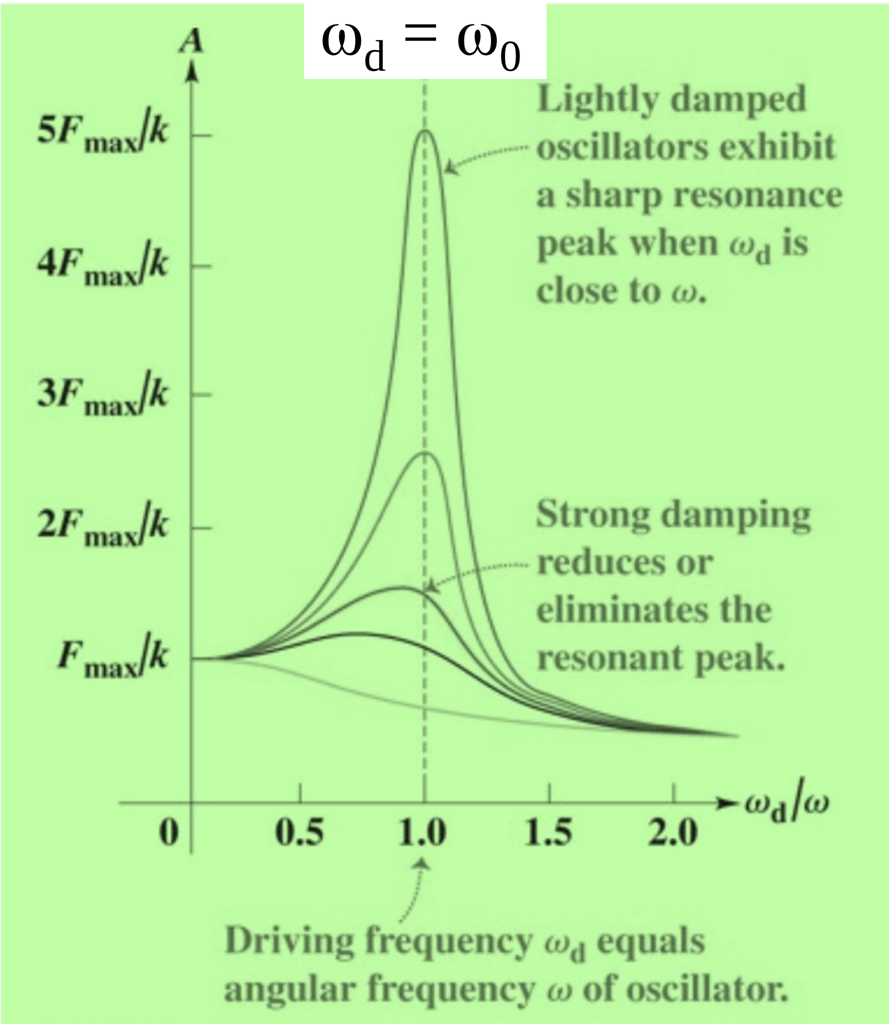
افزایش انرژی سیستم

↓

افزایش دامنه نوسانگر

Film 9 & 10

تشدید (Resonance)



اگر بسامد زاویه ای نیروی خارجی نزدیک به بسامد طبیعی نوسانگر باشد آنگاه پدیده تشدید رخ می دهد که در آن نوسانگر با بیشینه دامنه خود نوسان خواهد نمود

Film 11 & 12

Resonance phenomena occur widely in natural and in technological applications:

Emission & absorption of light
Lasers
Tuning of radio and television sets
Mobile phones
Microwave communications
Machine, building and bridge design
Musical instruments
Medicine
– nuclear magnetic resonance
magnetic resonance imaging
– x-rays
– hearing

Nuclear magnetic resonance scan

Why do some tall building collapse during an earthquake ?