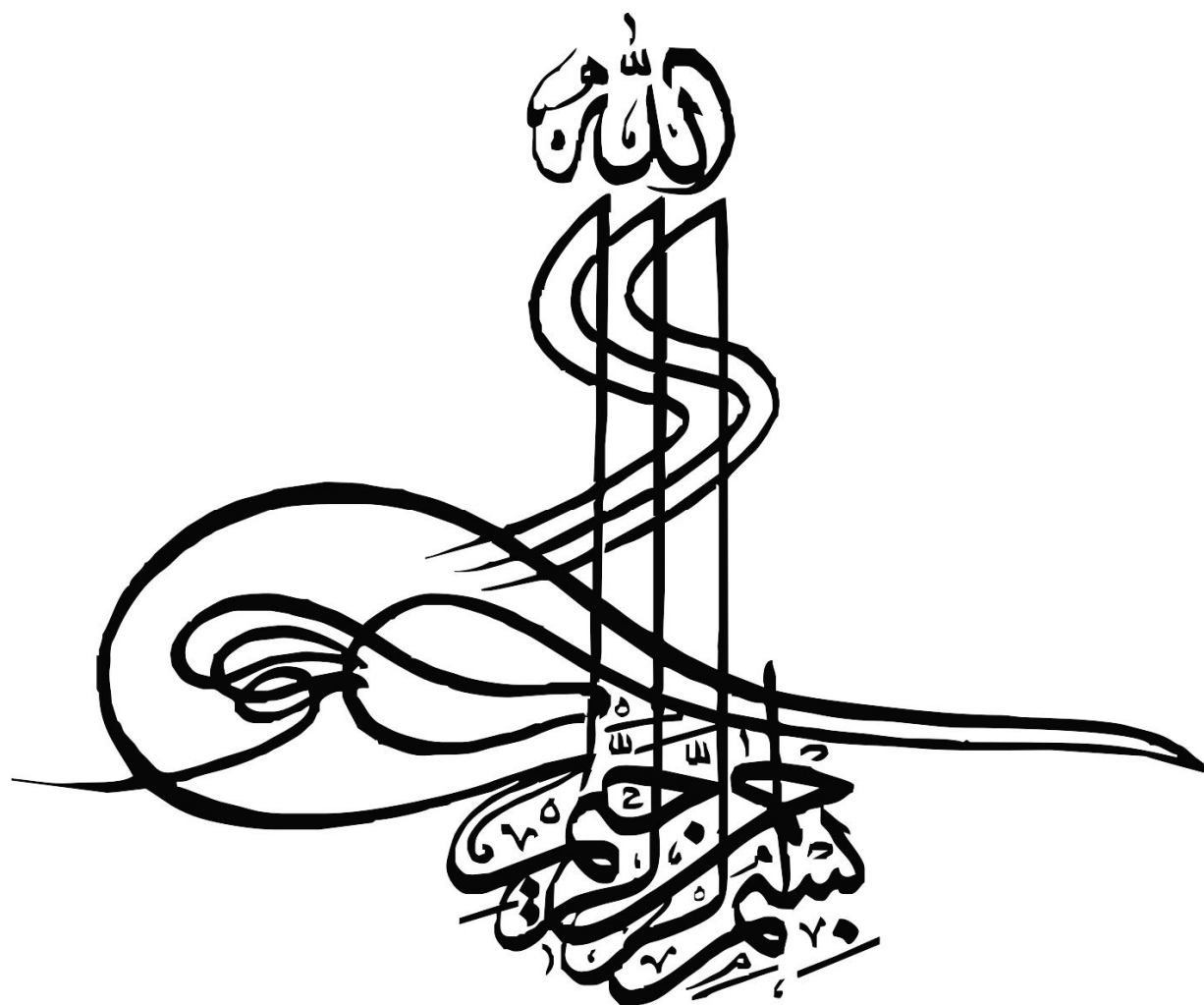




**فصل چهارم**

**حرکت دو بعدی**

## حرکت در دو بعد

الف) حالت اول: شتاب و سرعت اولیه در هر دو راستای  $x$  و  $y$

$$\vec{a} \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \vec{V}_0 \begin{vmatrix} V_{0x} \\ V_{0y} \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \vec{r}_0 \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{با گذشت زمان؛ حرکت به صفحه } xy \text{ محدود می ماند}$$

و در راستای  $z$  حرکتی نخواهد داشت

$$\vec{V} \begin{cases} V_x = V_{0x} + a_x t \\ V_y = V_{0y} + a_y t \\ V_z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{r} \begin{cases} x = \frac{1}{2} a_x t^2 + V_{0x} t + x_0 \\ y = \frac{1}{2} a_y t^2 + V_{0y} t + y_0 \\ z = 0 \end{cases}$$

(مثال)

وسیله نقلیه ای با سرعت  $\vec{v}_0 = 5\hat{i} + 3\hat{j}$  در لحظه  $t = 0$  از مبدا می گذرد. اگر شتاب ثابت و به صورت  $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$  با  $a_x = -2$  باشد.  
الف) کی دوباره وسیله نقلیه دوباره از مبدا می گذرد  
ب) سرعت در لحظه بازگشت چگونه خواهد بود

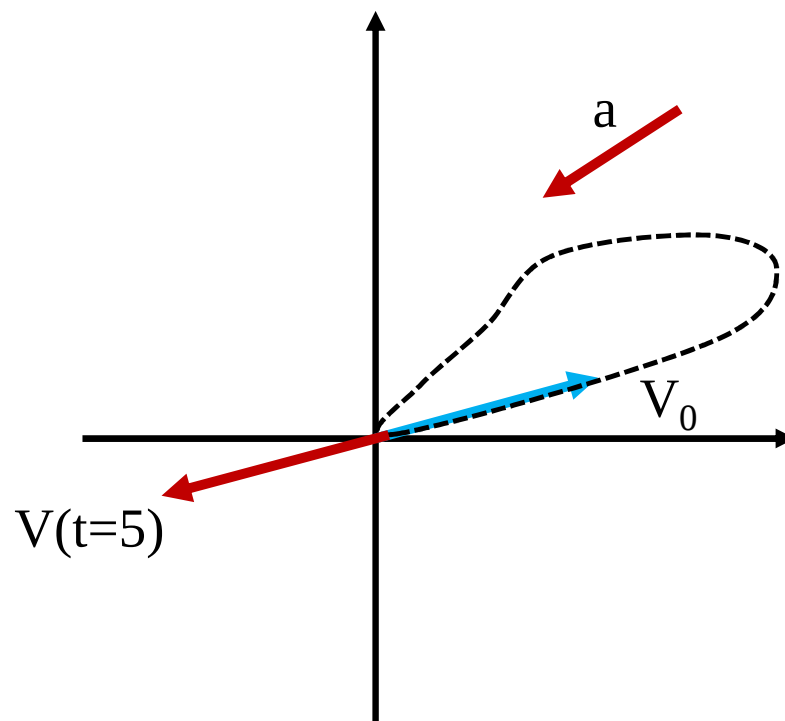
$$\vec{r} \begin{cases} x = \frac{1}{2}a_x t^2 + V_{0x}t + x_0 = \frac{1}{2} \times -2 \times t^2 + 5t + 0 \\ y = \frac{1}{2}a_y t^2 + V_{0y}t + y_0 = \frac{1}{2}a_y t^2 + 3t + 0 \end{cases}$$

$$x = 0 = -t^2 + 5t \quad \Rightarrow t = 0 \quad , \quad 5s$$

در بازگشت مجدد به مبدا

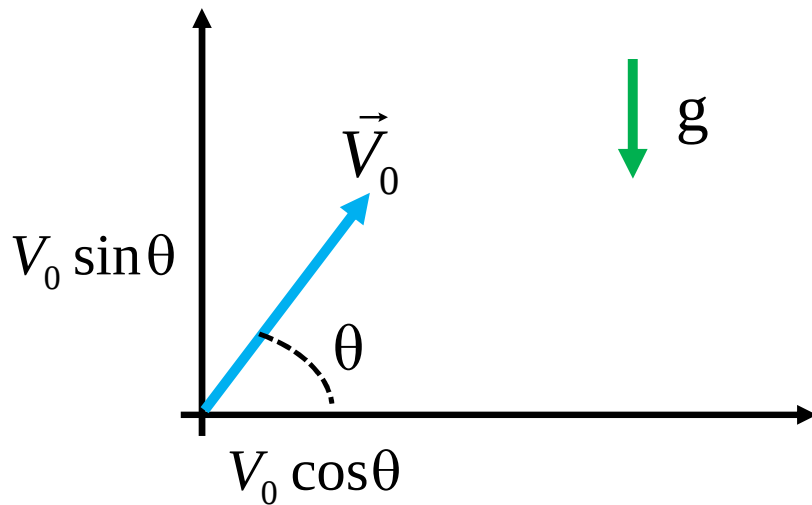
$$y = 0 = \frac{1}{2}a_y t^2 + 3t \quad \Rightarrow a_y = -1.2 \frac{m}{s^2}$$

$$\vec{V} \begin{cases} V_x = V_{0x} + a_x t = 5 - 2t \\ V_y = V_{0y} + a_y t = 3 - 1.2t \end{cases} \xrightarrow{t=5} \vec{V} \begin{cases} 5 - 10 = -5 \\ 3 - 6 = -3 \end{cases}$$



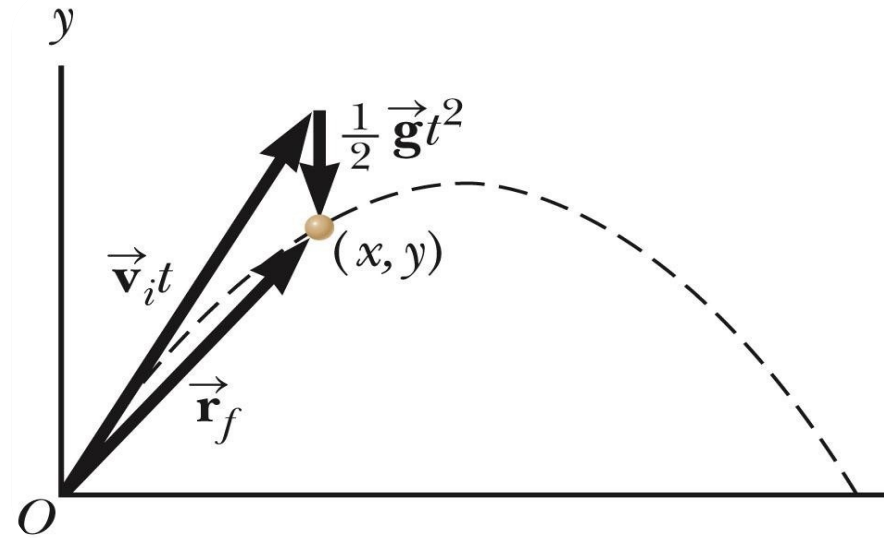
الف) حالت دوم: حرکت پرتابی  
(شتاب در یک راستا - سرعت اولیه در دو راستا)

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array} \right. , \quad \vec{V}_0 \left| \begin{array}{l} V_{0x} = V_0 \cos \theta \\ V_{0y} = V_0 \sin \theta \end{array} \right. , \quad \vec{r}_0 \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$$



$$\vec{V} \left| \begin{array}{l} V_x = V_{0x} + a_x t = V_0 \cos \theta \\ V_y = V_{0y} + a_y t = V_0 \sin \theta - gt \end{array} \right.$$

$$\vec{r} \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} a_x t^2 + V_{0x} t = V_0 \cos \theta \, t \\ y = \frac{1}{2} a_y t^2 + V_{0y} t = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin \theta \, t \end{array} \right.$$

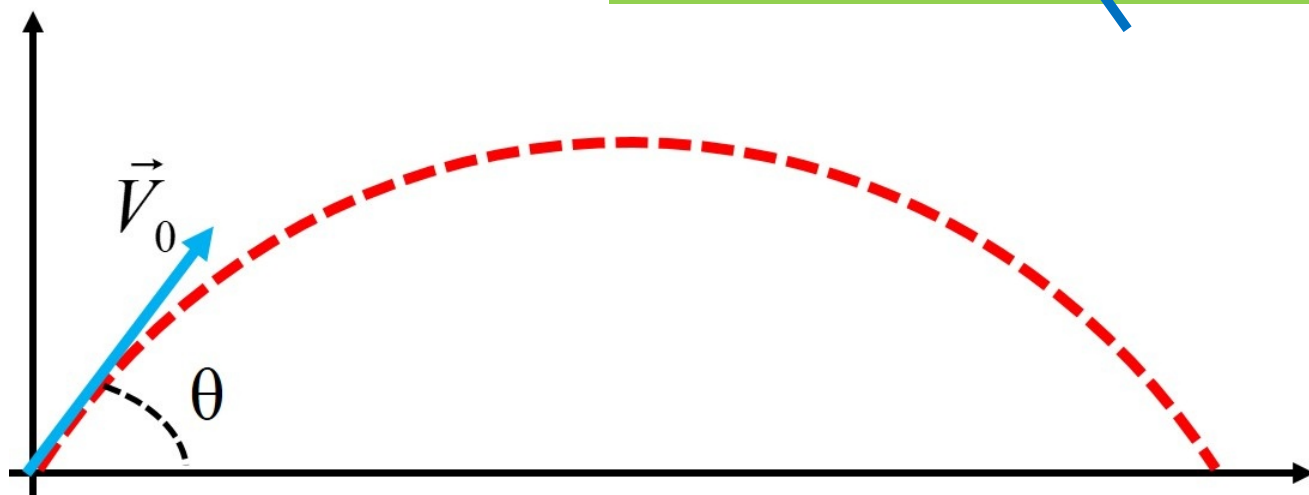


$$\begin{cases} V_{2x}^2 - V_{1x}^2 = 2a_x \Delta x \\ V_{2y}^2 - V_{1y}^2 = 2a_y \Delta y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_{2x}^2 - V_{1x}^2 = 0 \rightarrow V_{2x} = V_{1x} \\ V_{2y}^2 - V_{1y}^2 = -2g \Delta y \end{cases}$$

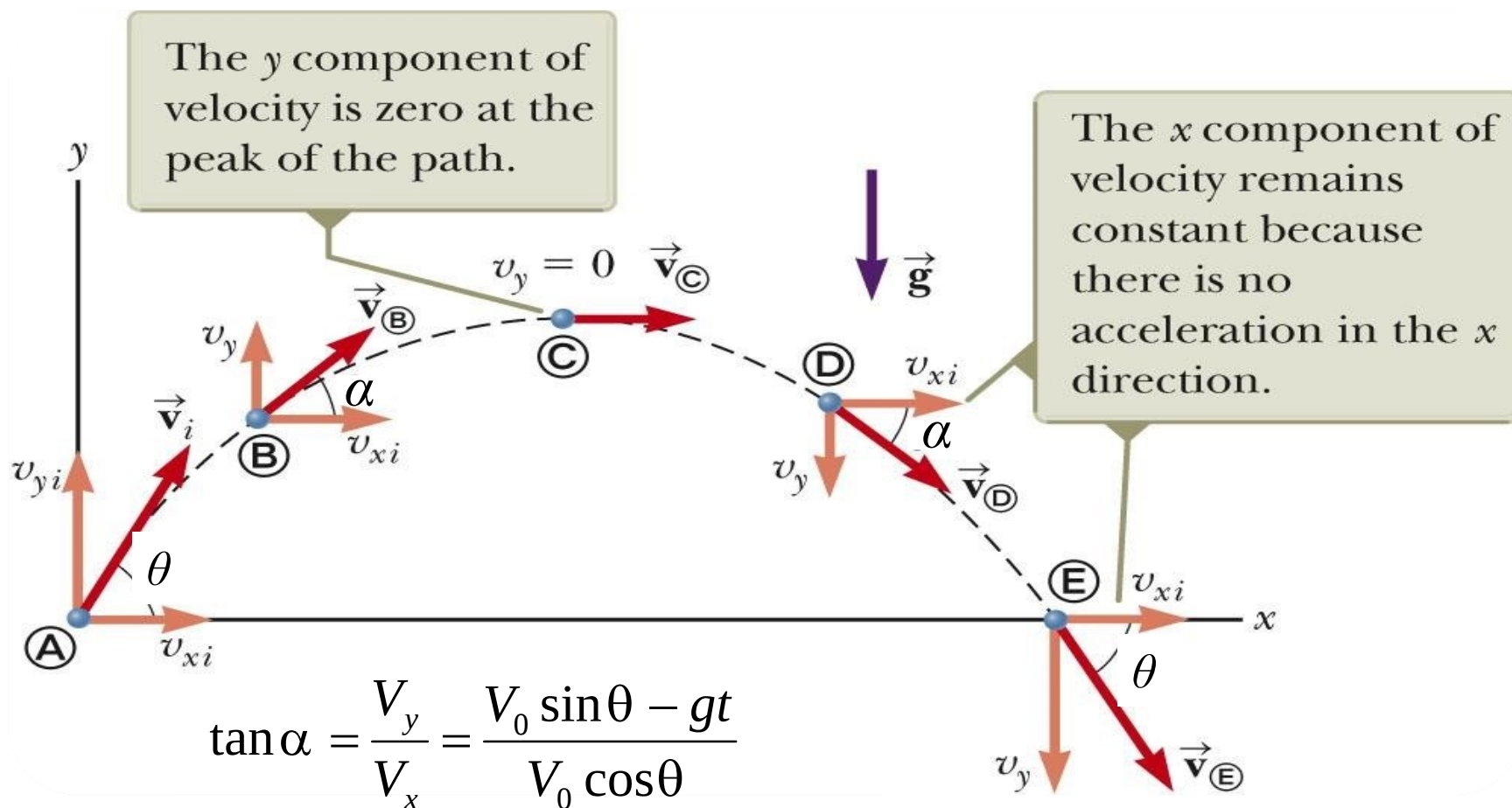
معادله مسیر (معادله مستقل از زمان)

$$\vec{r} \left\{ \begin{array}{l} x = V_0 \cos \theta \, t \rightarrow t = \frac{x}{V_0 \cos \theta} \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin \theta \, t \end{array} \right\} y = -\frac{1}{2} g \left( \frac{x}{V_0 \cos \theta} \right)^2 + \frac{V_0 \sin \theta}{V_0 \cos \theta} x \rightarrow$$

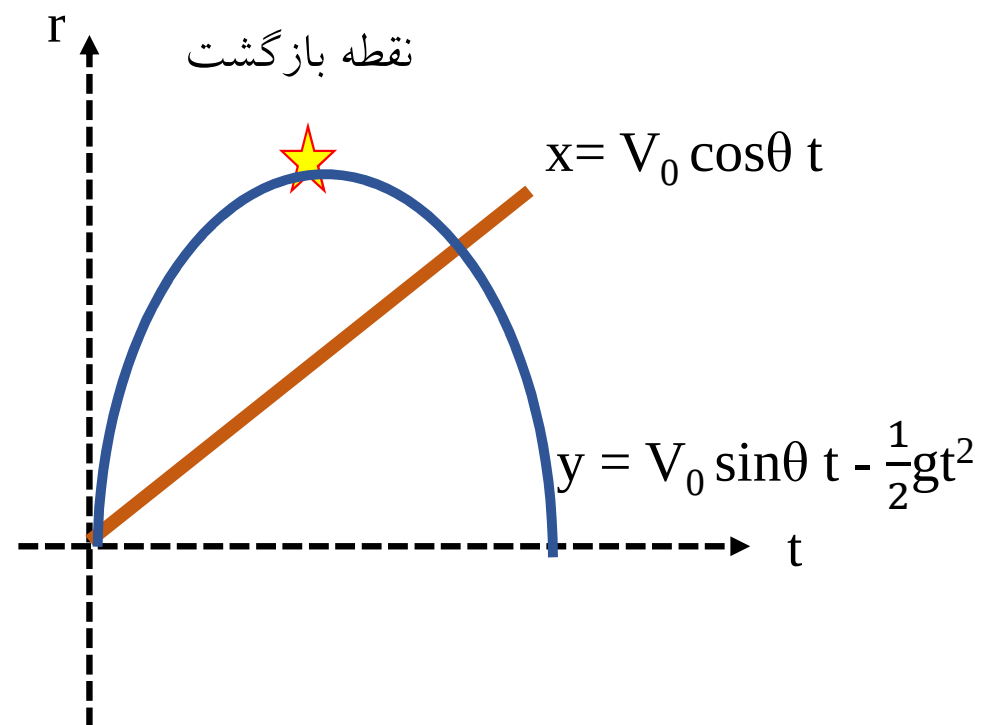
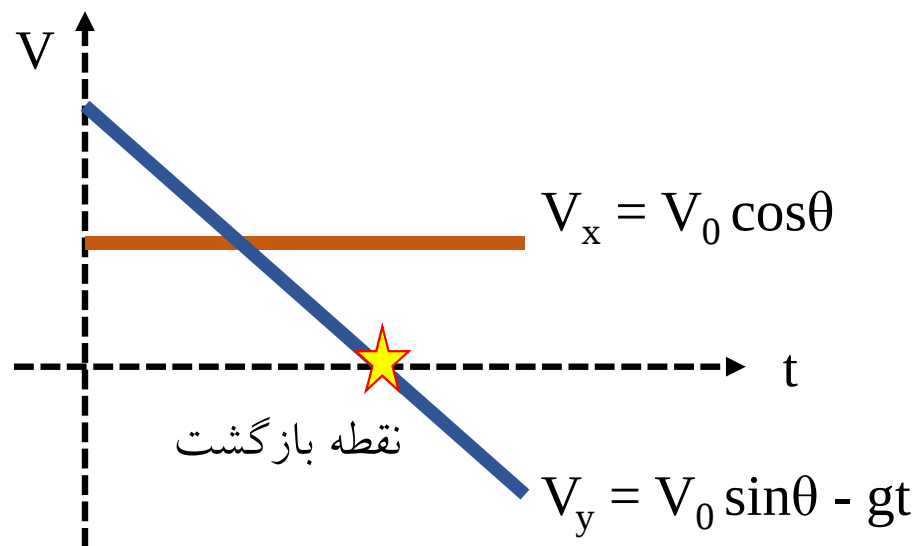
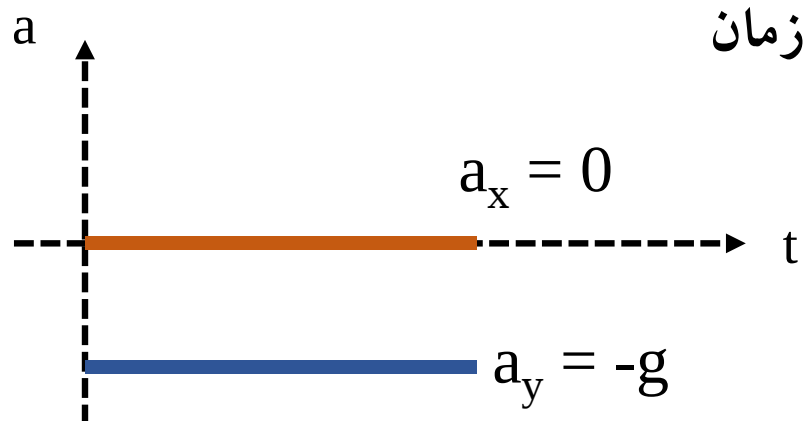
$$y = \frac{-g}{2V_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta \, x$$



نمودار تغییر سرعت و زاویه سرعت با محور افقی



# نمودارهای تغییر کمیت های حرکت پرتابی بر حسب زمان



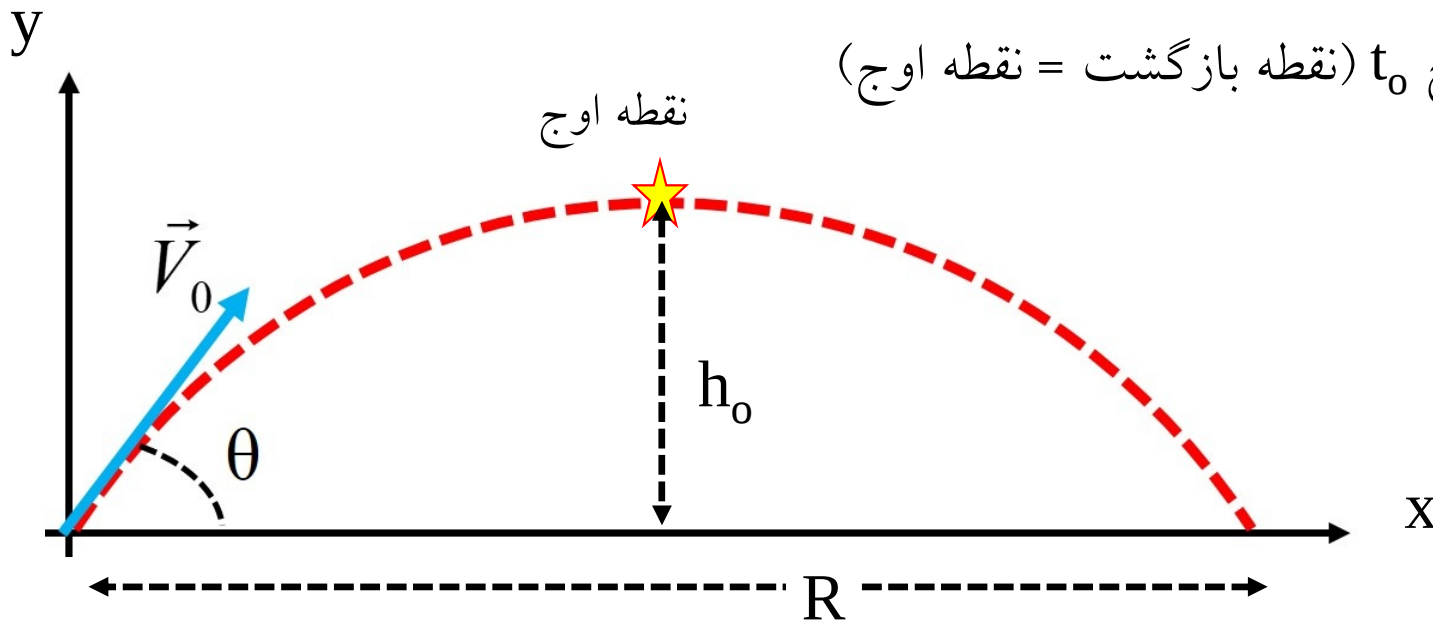
## پارامترهای حرکت پرتابی

۱- زمان کل پرواز ( $t_{\text{total}}$ ): مدت زمان از لحظه پرتاب تا لحظه بازگشت به زمین

۲- برد ( $R$ ): بیشینه فاصله طی شده در راستای افق

۳- زمان رسیدن به نقطه اوج  $t_0$  (نقطه بازگشت = نقطه اوج)

۴- ارتفاع نقطه اوج



## پارامترهای حرکت پرتابی

۱- زمان کل پرواز ( $t_{total}$ ): مدت زمان از لحظه پرتاب تا لحظه بازگشت به زمین

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\theta \quad t = 0 \rightarrow t_{total} = \frac{2V_0 \sin\theta}{g}$$

۲- برد ( $R$ ): بیشینه فاصله طی شده در راستای افق

$$x(t = t_{total}) = V_0 \cos\theta \quad t_{total} = V_0 \cos\theta \frac{2V_0 \sin\theta}{g} = \frac{V_0^2 2 \sin\theta \cos\theta}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

## پارامترهای حرکت پرتابی

۳- زمان رسیدن به نقطه اوج  $t_o$  (نقطه بازگشت = نقطه اوج)

$$V_x = V_0 \cos \theta$$

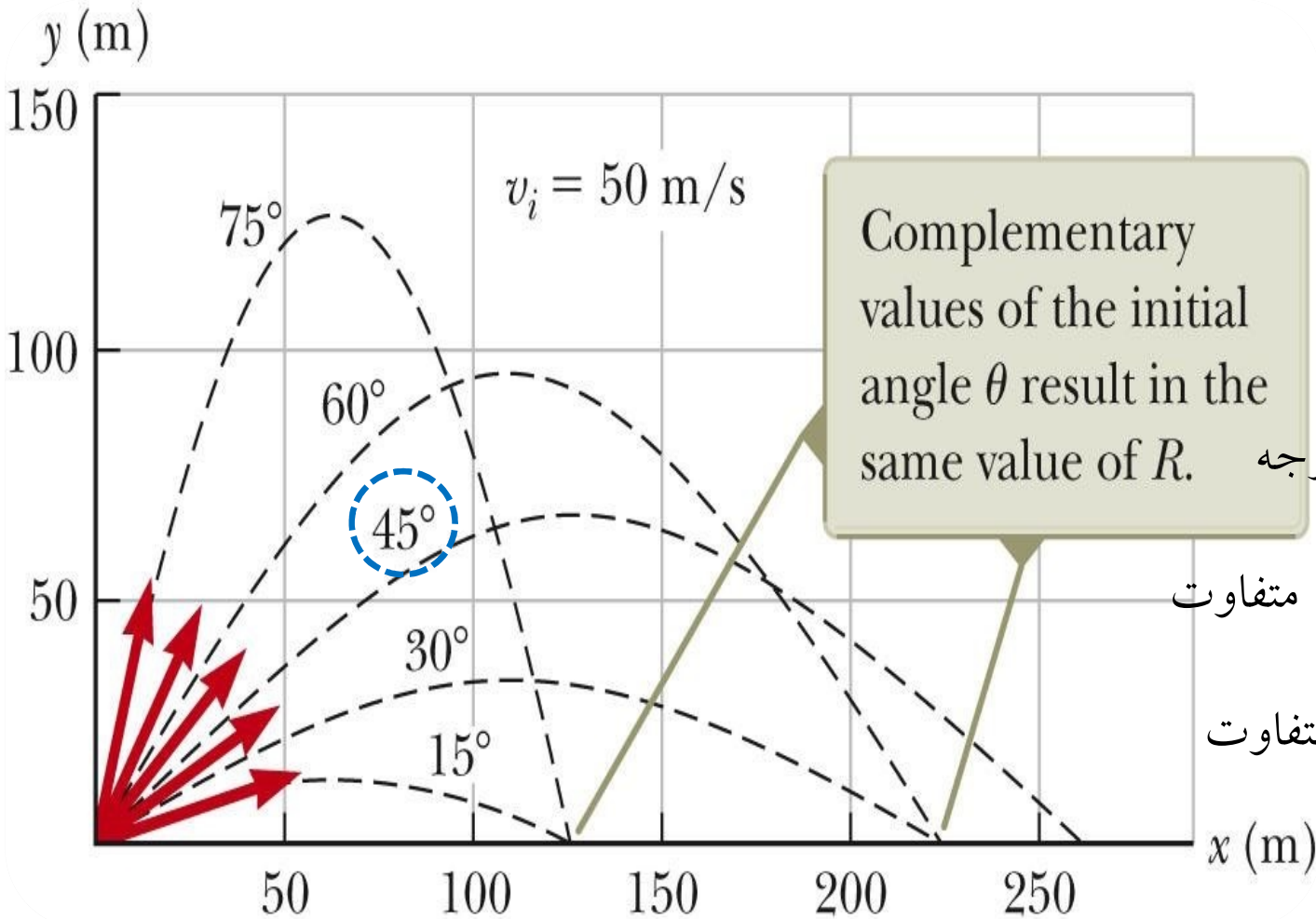
$$V_y = V_0 \sin \theta - gt = 0 \quad \rightarrow \quad t_o = \frac{V_0 \sin \theta}{g}$$

$$t_o = \frac{1}{2} t_{total}$$

۴- ارتفاع نقطه اوج

$$y(t = t_o) = -\frac{1}{2} g t_o^2 + V_0 \sin \theta t_o = 0 \quad \rightarrow \quad y_o = \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

## تغییرات برد و ارتفاع اوج با تغییر زاویه اولیه در پرتابه



- بیشینه برد پرتابه در زاویه  $45^\circ$  درجه

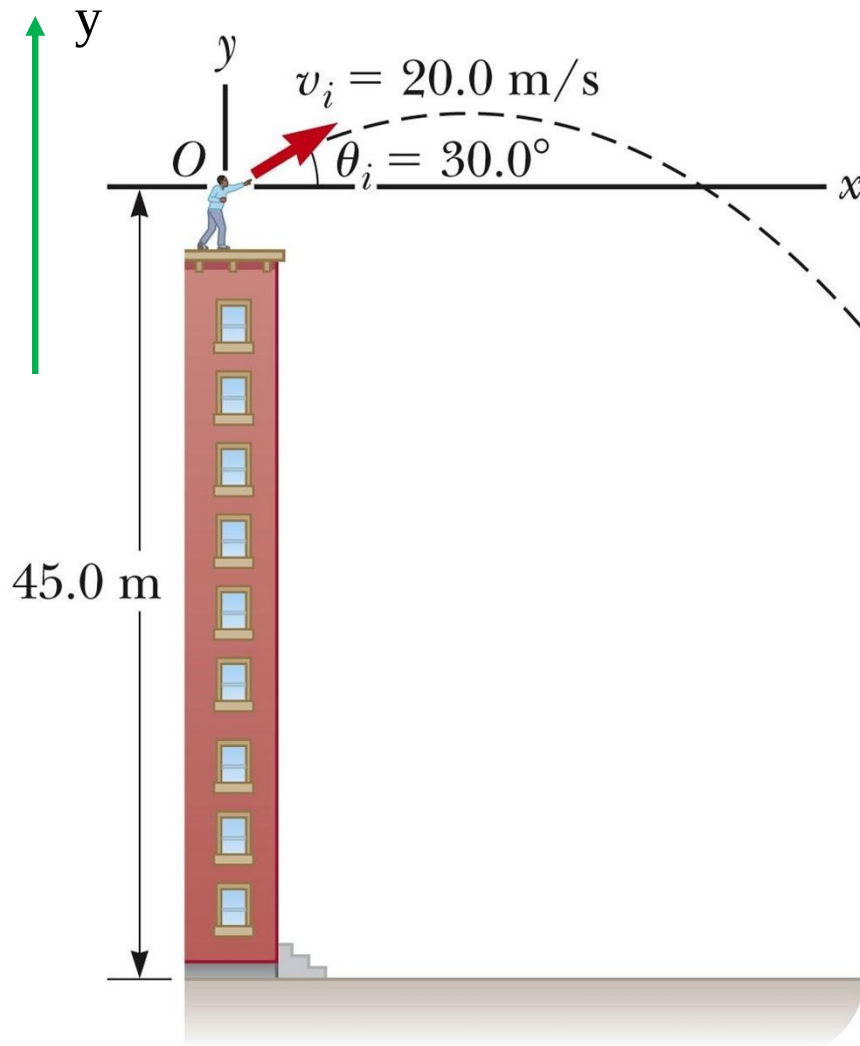
- ارتفاع اوج برای زوایای مختلف متفاوت

- زمان کل برای زوایای مختلف متفاوت

## نکاتی که باید برای حل مسئله حرکت پرتابی بدانیم:

- ❖ ایجاد تصویر ذهنی از حرکت پرتابه در امتداد مسیر حرکتش
- ❖ از مقاومت هوا چشم پوشی میکنیم
- ❖ ترسیم محورهای مختصات افقی  $X$  و عمودی  $Y$
- ❖ انتخاب جهت  $Y$  معمولاً در جهت مولفه سرعت اولیه در این راستا
- ❖ تجزیه سرعت اولیه مولفه ها در امتداد هر دو محور
- ❖ حرکت در مسیر افقی = حرکت با سرعت ثابت
- ❖ حرکت در مسیر عمودی = حرکت شتابدار یا شتاب ثابت و روبه پایین

## حرکت غیر متقارن پرتابه



مدت زمان رسیدن به زمین و برد پرتابه؟

در لحظه پرتاب  
از بالای بام  $O \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

در لحظه برخورد  
با زمین  $E \begin{vmatrix} +R \\ -h \end{vmatrix}$

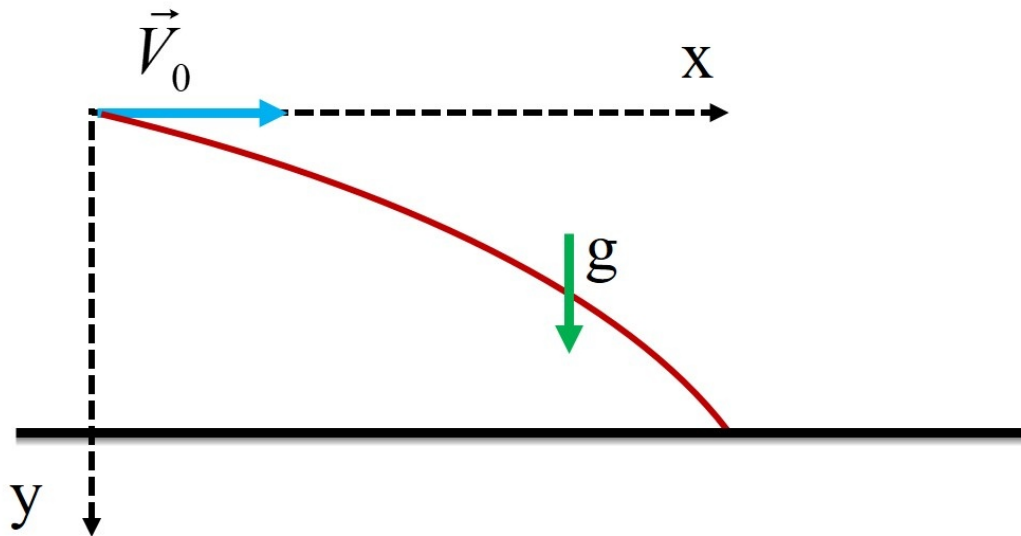
$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 + V_{0y}t = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin 30 t$$

$$-\frac{1}{2}10t^2 + 20 \sin 30 t = -45$$

(الف) حالت سوم: حرکت پرتابی با سرعت اولیه افقی  
(شتاب در یک راستا - سرعت اولیه در یک راستای دیگر)

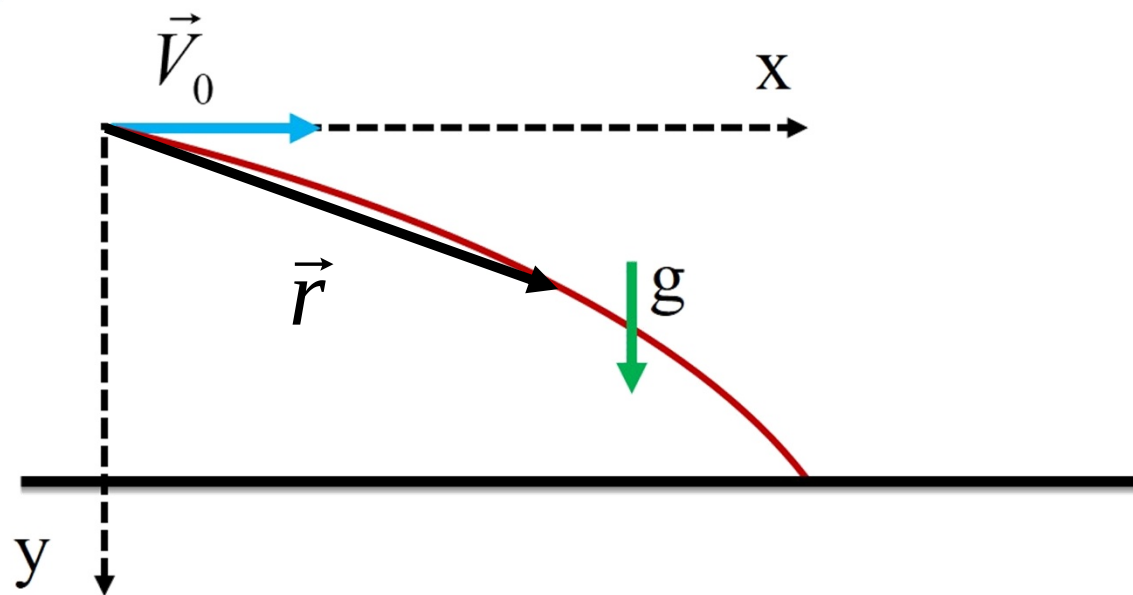
$$\theta = 0$$

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = +g \end{array} \right. , \quad \vec{V}_0 \left| \begin{array}{l} V_{0x} = V_0 \\ V_{0y} = 0 \end{array} \right. , \quad \vec{r}_0 \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$$



$$\vec{V} \left| \begin{array}{l} V_x = V_{0x} + a_x t = V_0 \\ V_y = V_{0y} + a_y t = gt \end{array} \right.$$

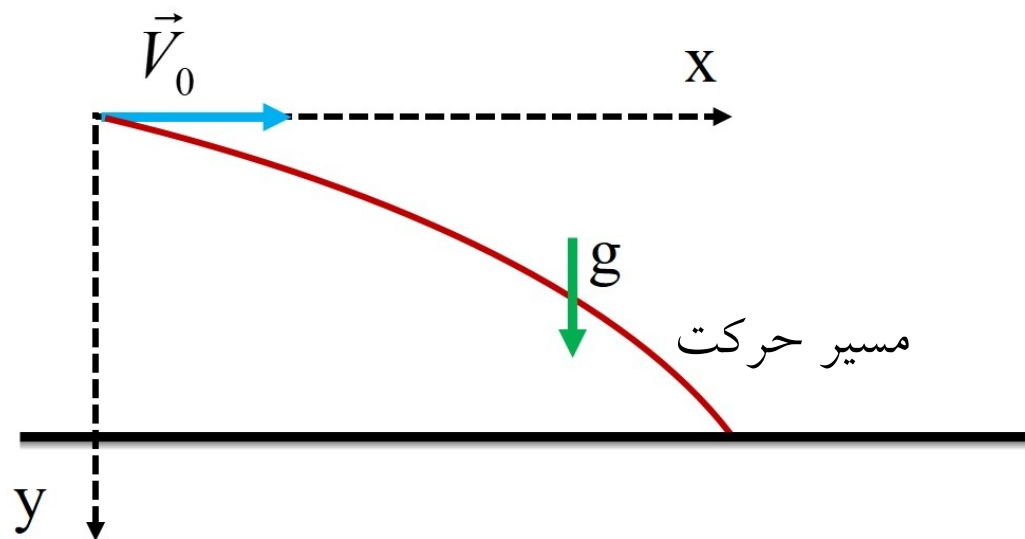
$$\vec{r} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} a_x t^2 + V_{0x} t = V_0 t \\ y = \frac{1}{2} a_y t^2 + V_{0y} t = \frac{1}{2} g t^2 \end{array} \right.$$



معادله مسیر (معادله مستقل از زمان)

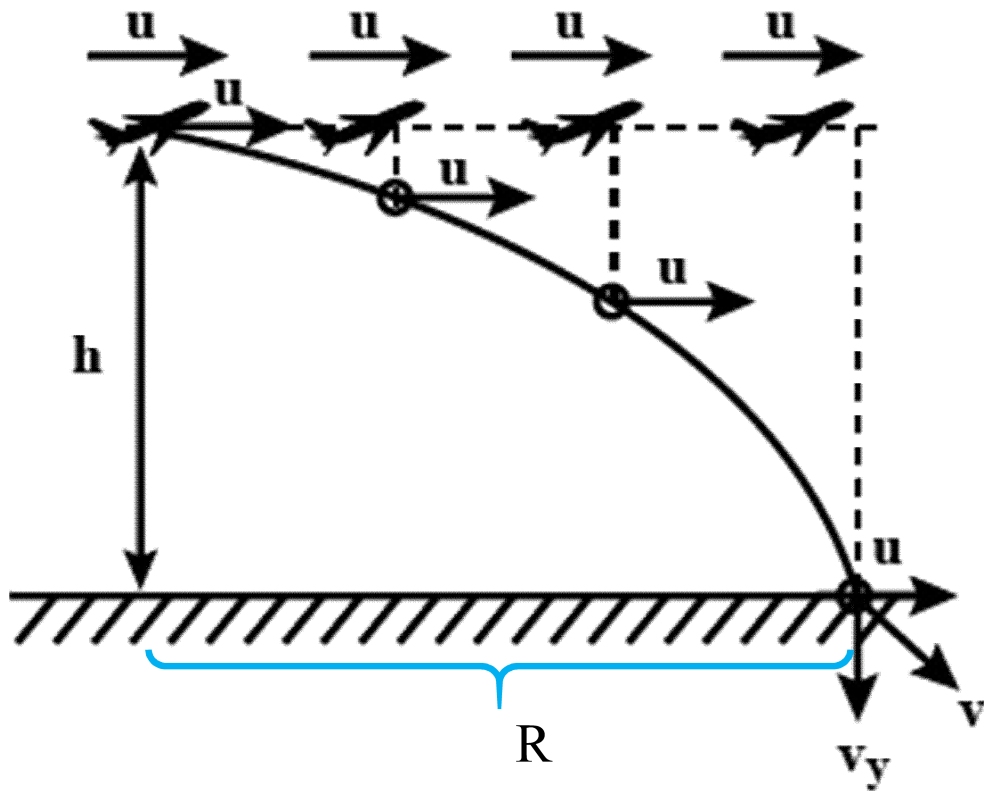
$$\vec{r} \left\{ \begin{array}{l} x = V_0 t \rightarrow t = \frac{x}{V_0} \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{array} \right\} y = \frac{1}{2} g \left( \frac{x}{V_0} \right)^2 \rightarrow$$

$$y = \frac{g}{2V_0^2} x^2$$



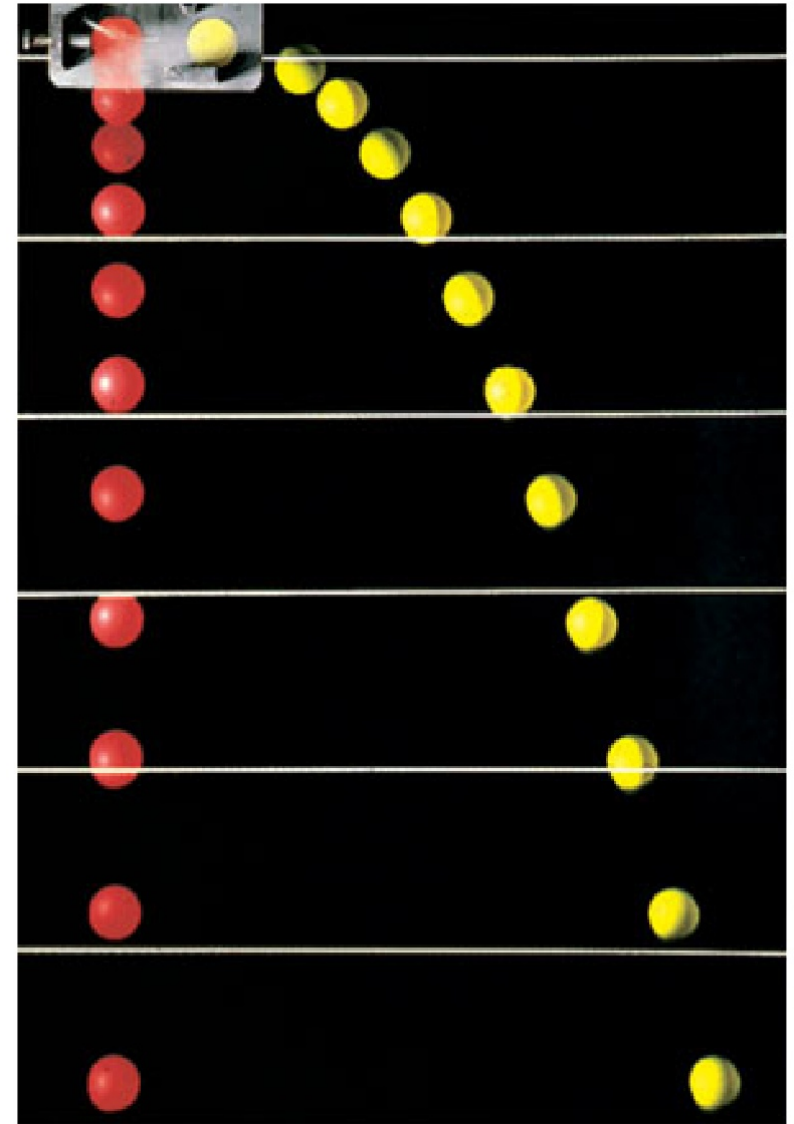
(مثال)

از هواپیمایی که در ارتفاع  $h$  و با سرعت افقی  $V_0$  در حال حرکت می باشد بسته از رها می شود. بسته در چه نقطه ای از محل رها شدن به زمین برخورد می نماید



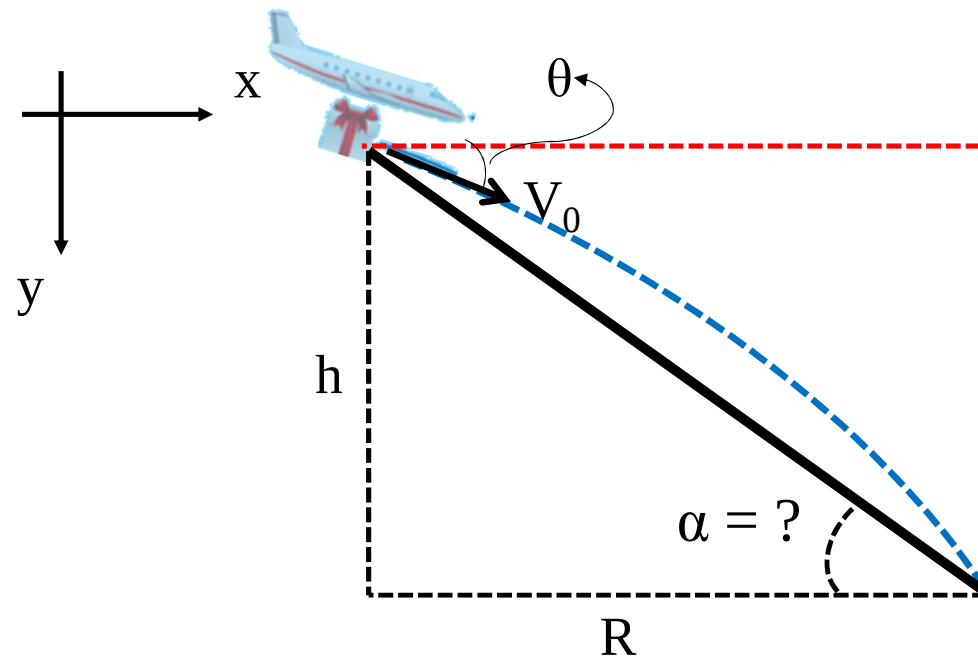
$$y = \frac{g}{2V_0^2} x^2 \quad \rightarrow \quad R = V_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Figure is a stroboscopic photograph of two golf balls, one simply released and the other shot horizontally by a spring. The golf balls have the same vertical motion, both falling through the same vertical distance in the same interval of time. *The fact that one ball is moving horizontally while it is falling has no effect on its vertical motion;* that is, the horizontal and vertical motions are independent of each other.



(مثال)

یک هواپیمایی جنگی با سرعت  $V_0 = 240 \text{ m/s}$  تحت زاویه  $\theta = 30^\circ$  نسبت به افق و به سمت پایین حرکت می کند. هنگامی که ارتفاع آن از زمین  $2.4 \text{ km}$  می باشد یک بسته از آن رها می شود و بسته به هدف از پیش مشخص شده ای برخورد می نماید. زاویه میان نقطه شلیک و اصابت با خط افق را بدست آورید.



$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = +g \end{array} \right. , \quad \vec{V}_0 \left| \begin{array}{l} V_{0x} = V_0 \cos \theta \\ V_{0y} = V_0 \sin \theta \end{array} \right. , \quad \vec{r}_0 \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

$$x = V_0 \cos \theta \, t \quad \rightarrow \quad t = \frac{x}{\cos \theta \, V_0}$$

$$y = V_0 \sin \theta \, t + \frac{1}{2} g t^2$$



$$y = \frac{+g}{2V_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta \, x$$

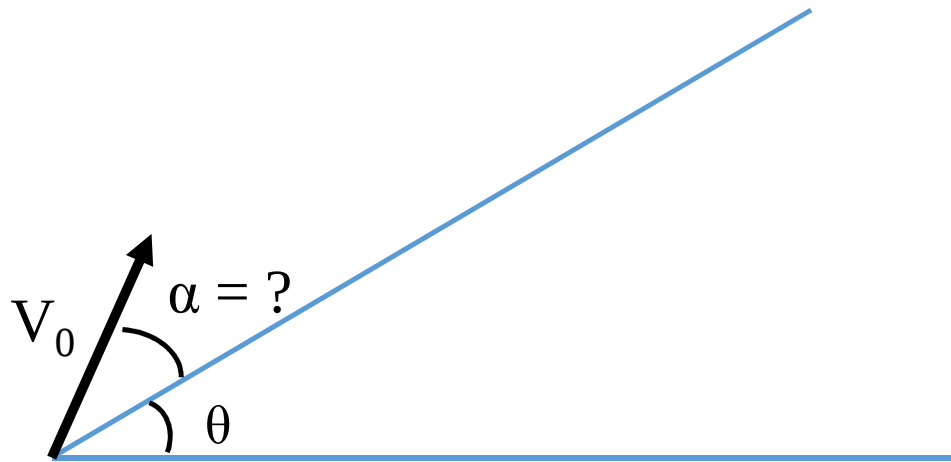
در لحظه برخورد بسته با زمین

$$\left| \begin{array}{l} x = R = ? \\ y = h = 2400 \end{array} \right.$$

$$\tan \alpha = \frac{h}{R}$$

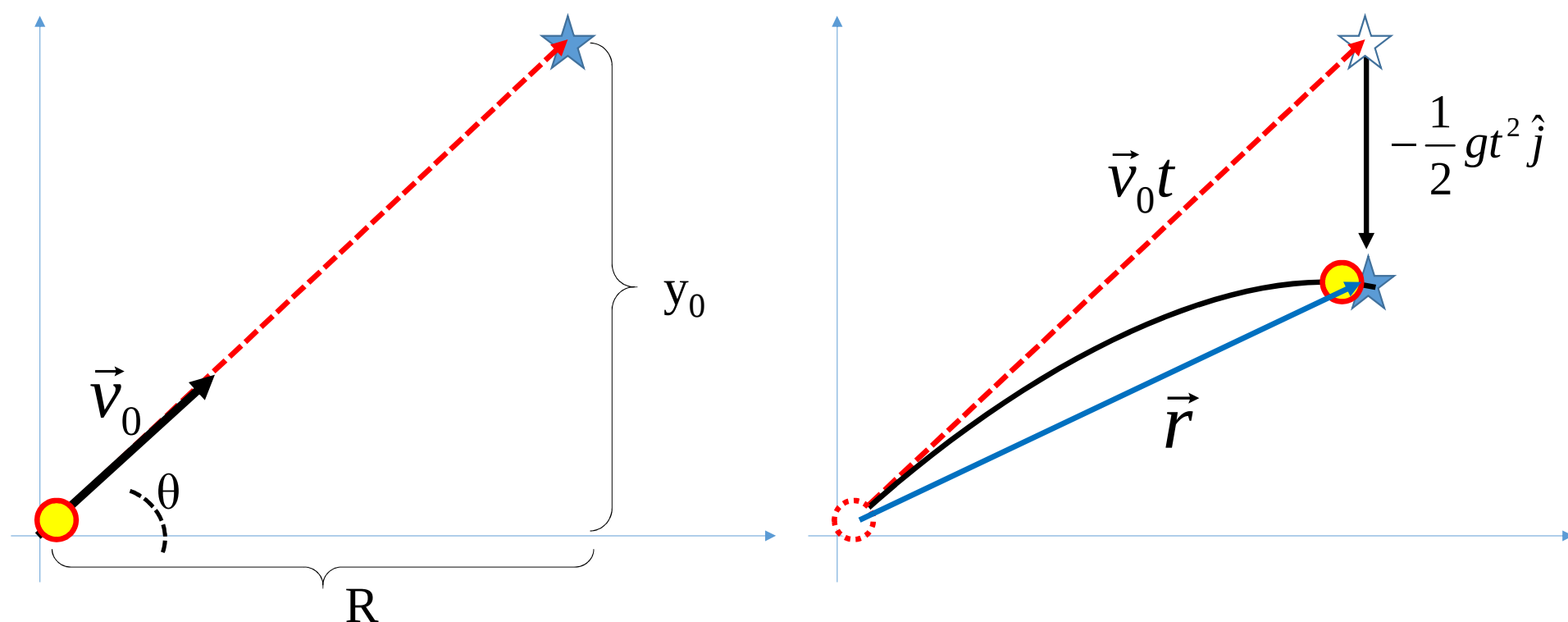
کوییز:

تویی گلوله هایش را با سرعت  $V_0$  پرتاب می کند. این توپ در پایین تپه ای با شیب  $\alpha$  قرار دارد. زاویه توپ نسبت به افق چقدر باشد تا برد گلوله روی تپه بیشینه گردد.



مثال:

ثابت کنید: «برای مورد هدف قرار دادن جسم در حال سقوط، باید محل هدف پیش از رها شدن را به صورت مستقیم نشانه گیری کرد.»



معادله تغییر مکان پرتابه  
در امتداد دو محور  $\vec{r}$

$$\left| \begin{array}{l} x_b = V_{0x} t = V_0 \cos \theta \ t \\ y_b = -\frac{1}{2} g t^2 + V_{0y} t = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin \theta \ t \end{array} \right.$$

معادله تغییر مکان توپ

$$y_T = -\frac{1}{2} g t^2 + y_0$$

در لحظه برخورد هدف و گلوله

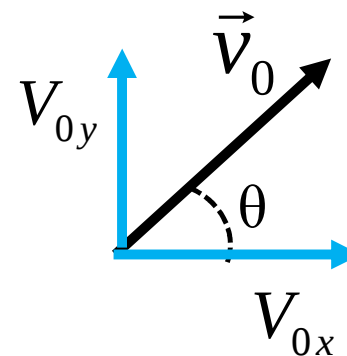
$$y_T = y_b$$

$$-\frac{1}{2} g t^2 + V_{0y} \ t = -\frac{1}{2} g t^2 + y_0$$

$$V_{0y} \ t = y_0 \quad \star$$

رابطه به شرطی برقرار است که در لحظه اولیه ( $t = 0$ ) گلوله هدف را نشانه رفته باشد

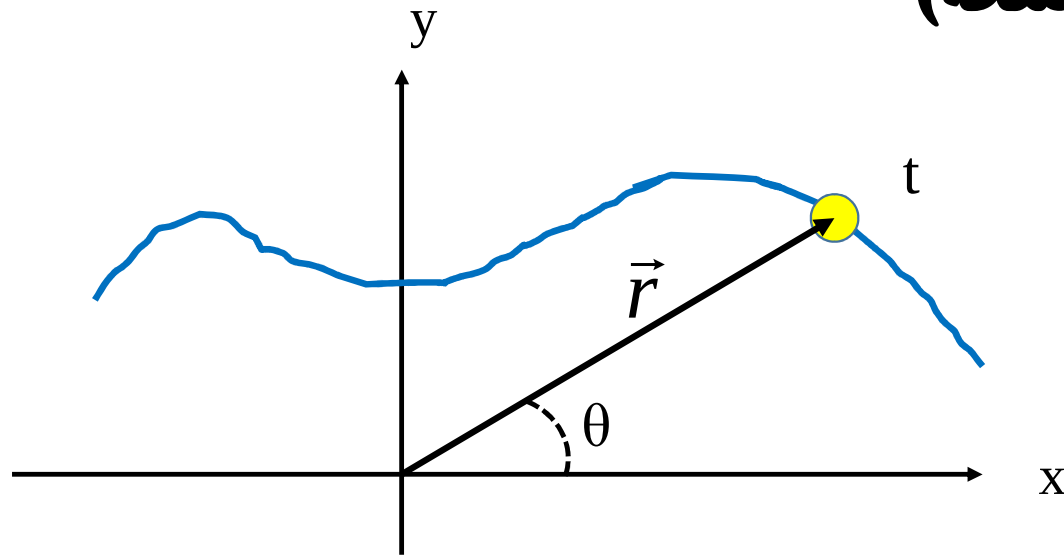
$$\tan \theta = \frac{y_0}{R} = \frac{y_0}{V_{0x}t}, \quad \tan \theta = \frac{V_{0y}}{V_{0x}}$$



$$\frac{y_0}{V_{0x}t} = \frac{V_{0y}}{V_{0x}} \Rightarrow y_0 = V_{0y}t \quad \star$$

## حرکت دایره ای (حرکت در صفحه)

الف) حرکت کلی در صفحه



$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

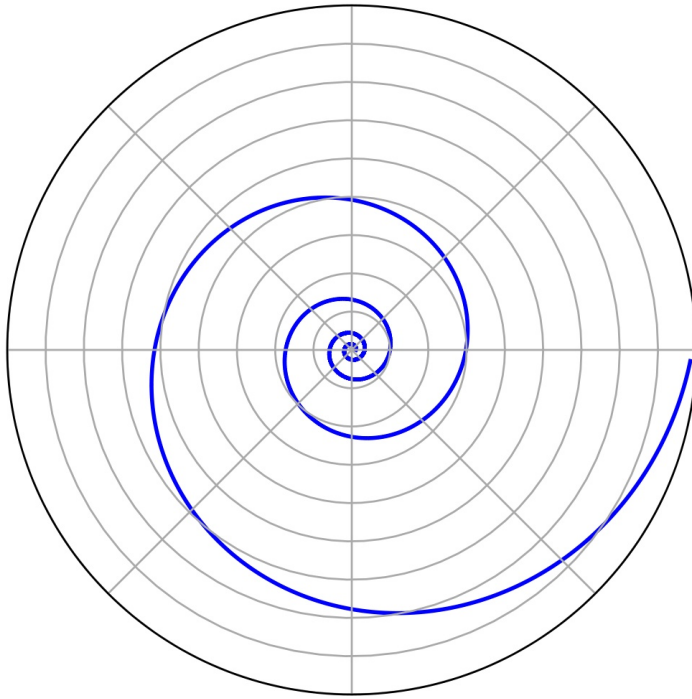
$$\vec{r}(t) = r \cos\theta \hat{i} + r \sin\theta \hat{j}$$

$r$  و  $\theta$  متغیر با زمان

$$r = r(t)$$

$$\theta = \theta(t)$$

ب) حرکت مارپیچی (Spiral motion)



$$\vec{r} = \vec{r}(r, \theta)$$

متغیر با زمان

ج) حرکت دایره ای (circular motion)

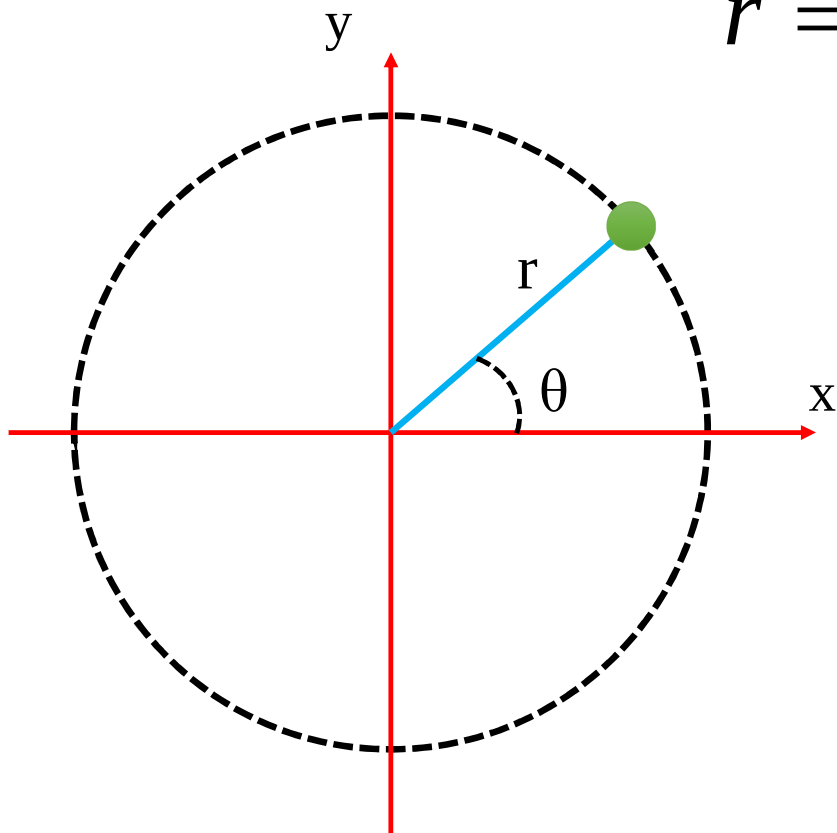
$$\vec{r} = \vec{r}(\theta)$$

$r$  ثابت

$r = \text{constant}$

$\theta$  متغیر با زمان

$$\theta = \theta(t)$$

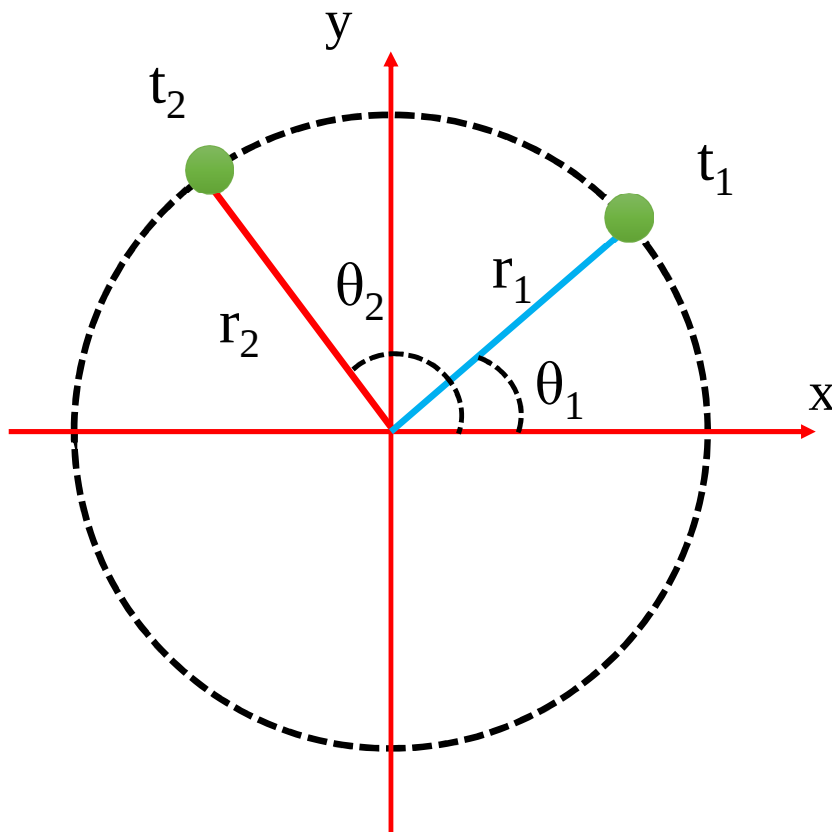


## سینماتیک حرکت دایره ای

الف) مکان = زاویه

بیان موقعیت برحسب زاویه ای که بردار

مکان با جهت مثبت محور X ها می سازد



$$\vec{r} = \vec{r}(\theta)$$

$$t_1 \rightarrow \theta_1$$

$$t_2 \rightarrow \theta_2$$

# سینماتیک حرکت دایره ای

الف) جابه جایی

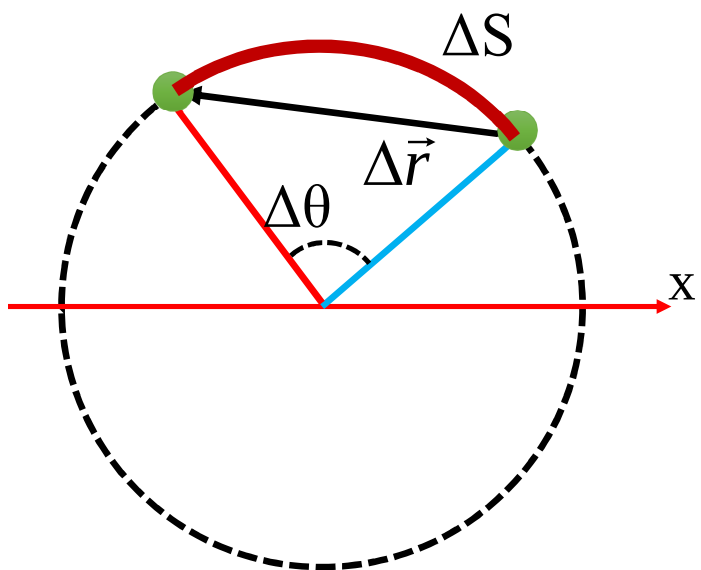
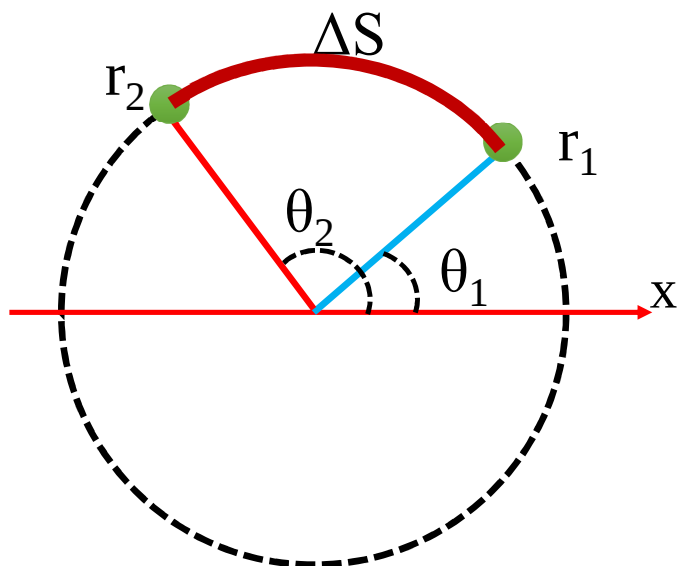
در مدت  $\Delta t$  جسم کمان  $\Delta S$  مقابل به زاویه  $\Delta\theta$  طی می نماید

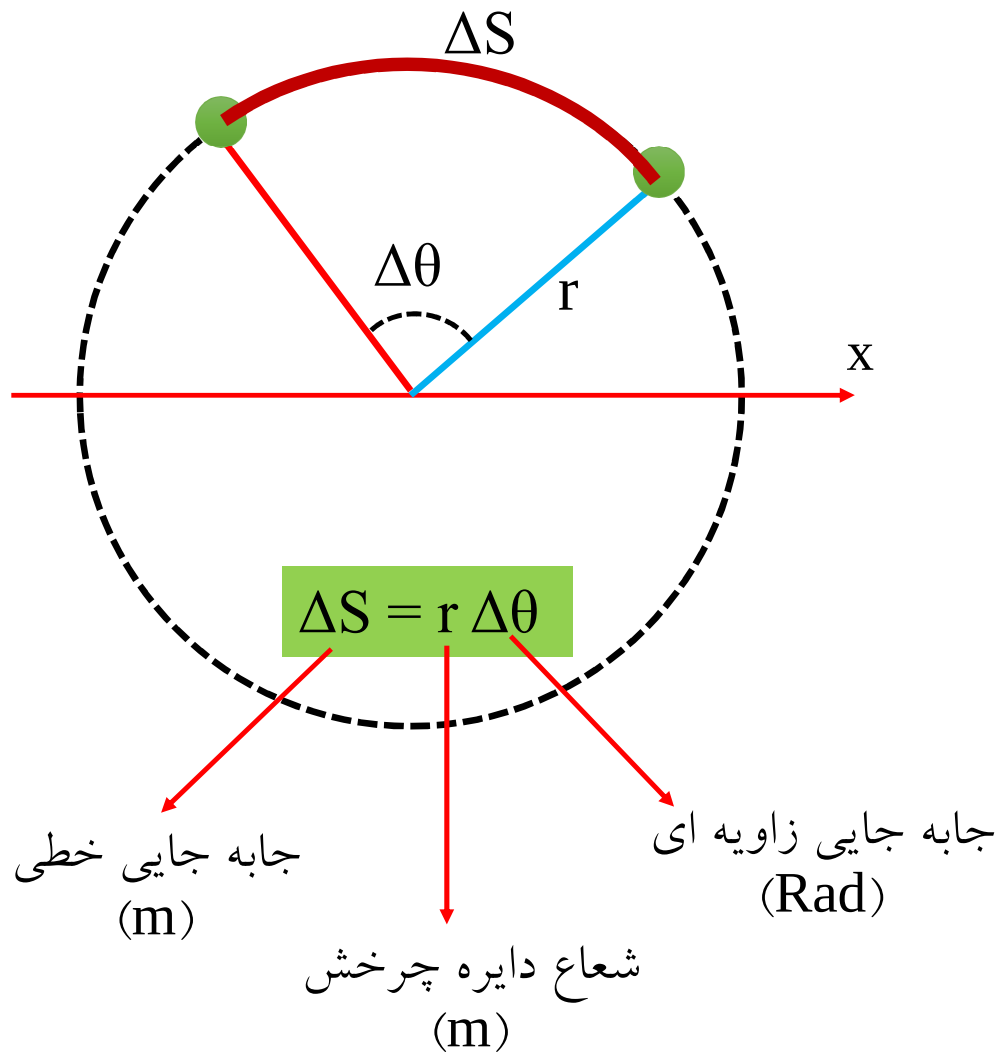
$$t_1 \rightarrow t_2 \quad \therefore \Delta t = t_2 - t_1$$

$$\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2 \quad \therefore \Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\theta_1 \rightarrow \theta_2 \quad \therefore \Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

$$\therefore \Delta s$$





جابه جایی زاویه ای

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

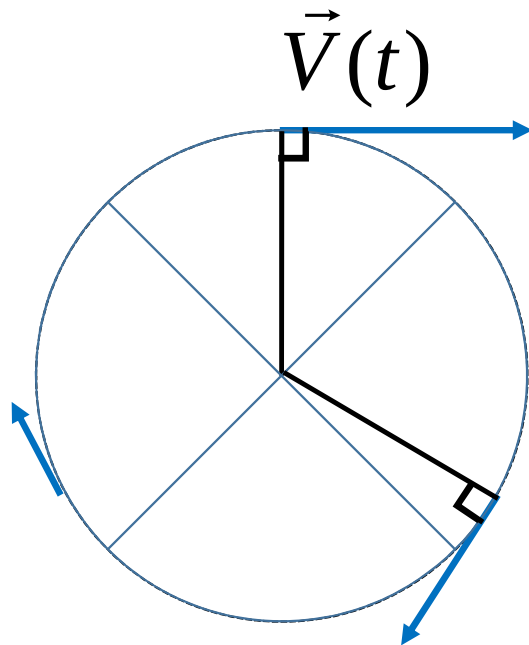
Diagram showing a curved arrow with a '+' sign at the top and a '-' sign at the bottom, indicating the direction of angular displacement.

یک دور = ۳۶۰ درجه =  $2\pi$  رادیان

# سینماتیک حرکت دایره ای

(ج) سرعت

سرعت خطی



{ اندازه = ثابت یا متغیر  
 راستا = در امتداد خط مماس بر مسیر = عمود بر شعاع  
 جهت = در جهت چرخش

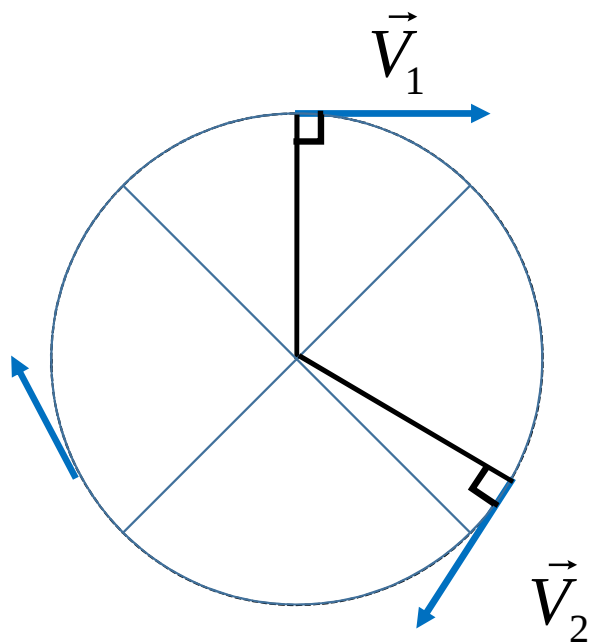
سرعت زاویه ای = نرخ تغییر زاویه = تغییر زاویه در واحد زمان  $\frac{rad}{s}$

سرعت زاویه ای متوسط  $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

سرعت زاویه ای لحظه ای  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

## حرکت دایره ای یکنواخت

حرکت با اندازه سرعت ثابت



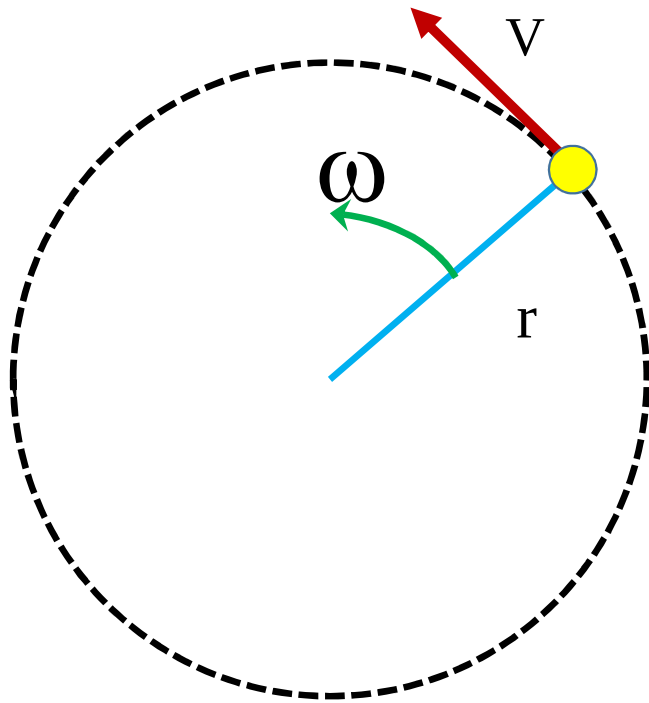
$$\vec{V}(t) \begin{cases} \text{ثابت} = \text{اندازه} \\ \text{متغیر} = \text{راستا} \end{cases}$$

$$\vec{V}_1 \neq \vec{V}_2$$

$$V_1 = V_2$$

## حرکت دایره ای (ارتباط سرعت خطی با سرعت زاویه ای)

سرعت خطی ثابت معادل با سرعت زاویه ثابت



$$\Delta S = r\Delta\theta \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta S}{\Delta t} = r \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$v = r\omega$$

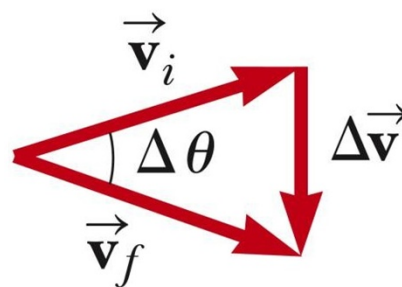
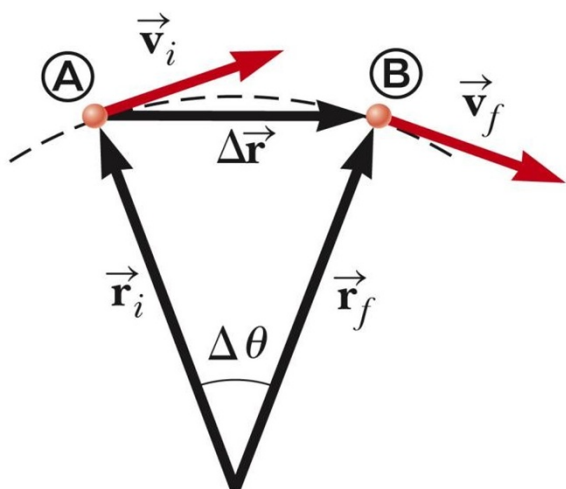
دوره تناوب: مدت زمان یک دور چرخش جسم روی محیط دایره

$$vT = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{r\omega} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

## سینماتیک حرکت دایره ای

(د) شتاب

در حرکت دایره ای یکنواخت با آنکه اندازه سرعت ثابت است اما راستای سرعت متغیر است (بردار سرعت متغیر). بنابراین حرکت شتابدار است



$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

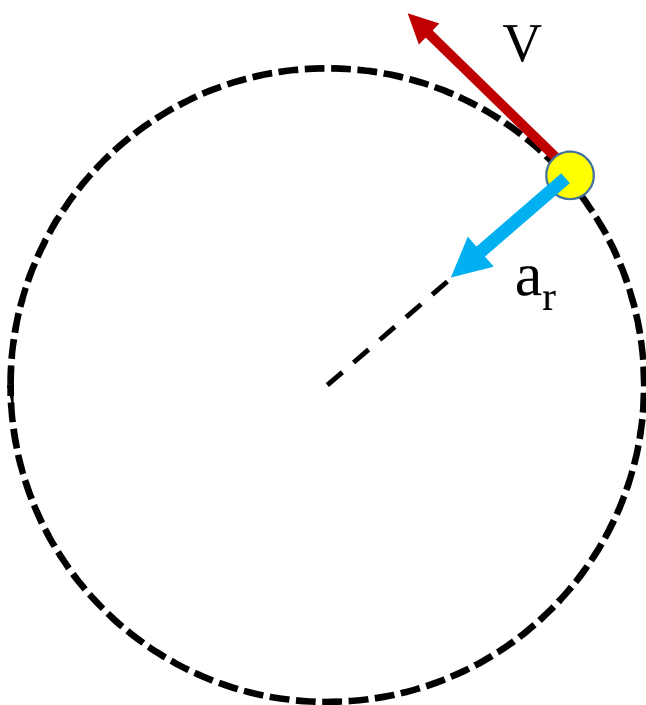
b

p

c

c

شتاب در حرکت دایره ای یکنواخت (شتاب مرکز گرا)



$$a_r = \frac{V^2}{r} = r\omega^2$$

اندازه = ثابت

راستا = در امتداد خط شعاع

جهت = به سمت مرکز دایره

## حرکت دایره ای کلی

حرکت روی مسیر دایره ای با سرعت با اندازه متغیر

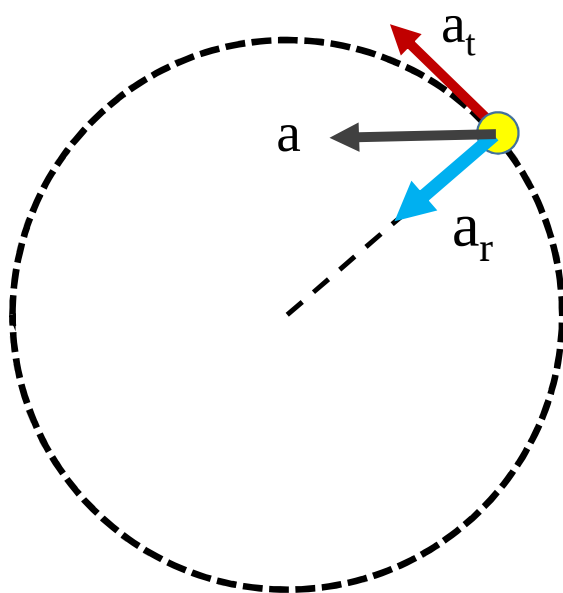
اندازه = متغیر در امتداد محیط دایره که می تواند ناشی از شتاب مماسی در امتداد مسیر حرکت (محیط دایره) باشد  
راستا = متغیر که ناشی از یک شتاب مرکزگرا است

$\vec{V}(t)$

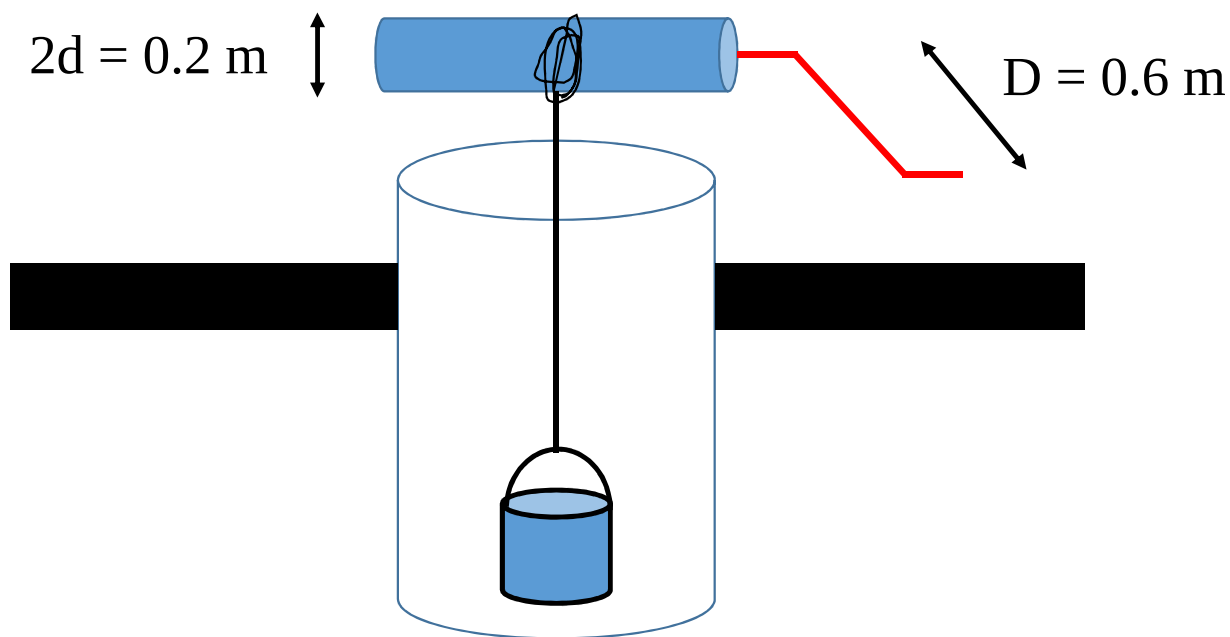
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$$

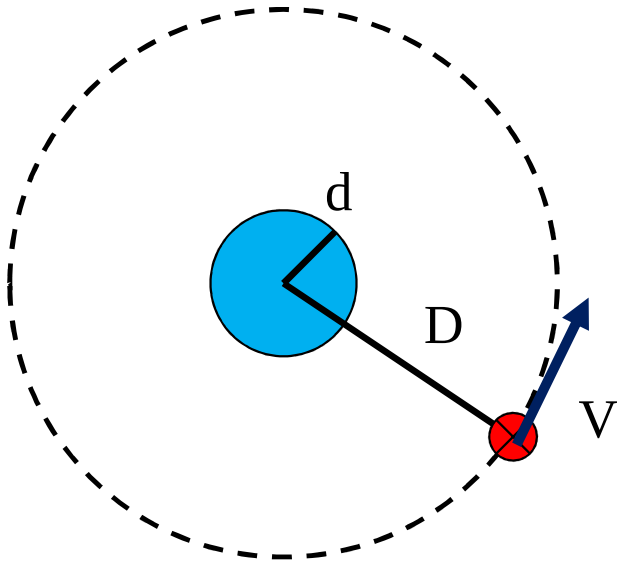
شتاب مماسی  $a_t = \frac{dV}{dt}$

شتاب مرکزگرا  $a_r = \frac{V^2}{r} = r\omega^2$



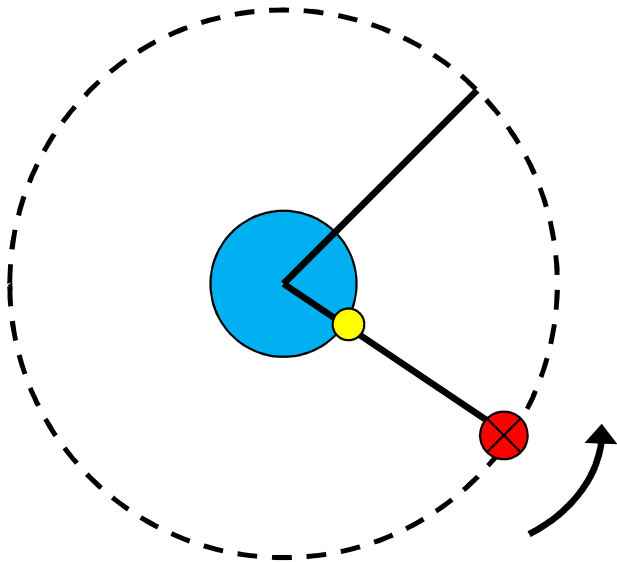
مثال) چرخ چاهی با چرخاندن دسته آن و پیچیده شدن طناب دور یک استوانه قطور، سطل آب را بالا می کشد. با توجه به اطلاعات داده شده در شکل، مدت زمان بالا آمدن سطل از درون چاه به ارتفاع 25 m را حساب کنید. سرعت حرکت خطی انتهای دسته 1.2 m/s است.





$$\omega_d = \omega_D \rightarrow \frac{v_d}{d} = \frac{v_D}{D} \rightarrow$$

$$v_d = d \times \frac{v_D}{D} = 0.1 \times \frac{1.2}{0.6} = 0.2 \text{ m/s}$$



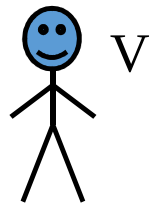
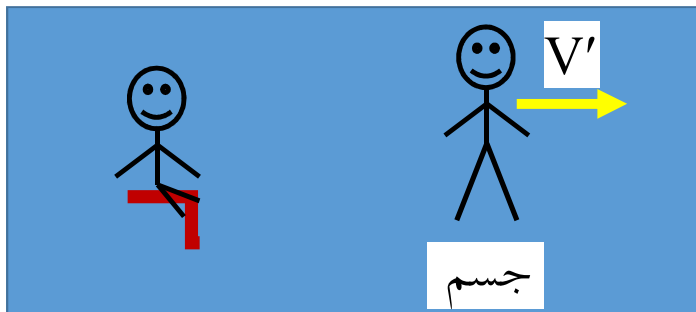
$$v_d t = l \rightarrow t = \frac{25}{0.2} = 125 \text{ s}$$

## حرکت نسبی «حرکت اجسام برای ناظرهای مختلف متفاوت است»

الف) بررسی حرکت یک شخص در حال حرکت در قطار در دید ناظرهای ساکن و متحرک

قطار ساکن

$$U = 0$$



$V$

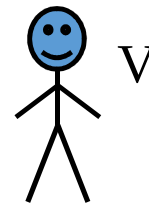
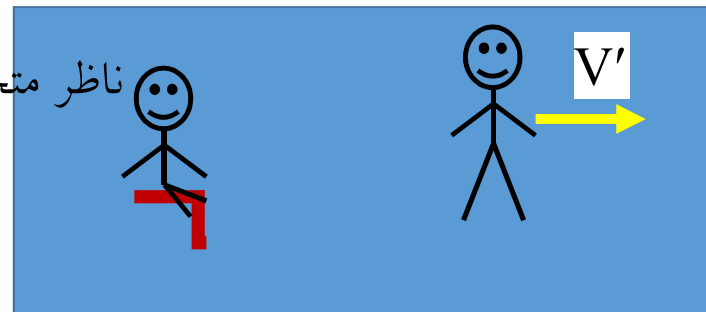
$$V = V'$$

(1)

$U$

قطار متحرک

ناظر متحرک  $S'$



$V$

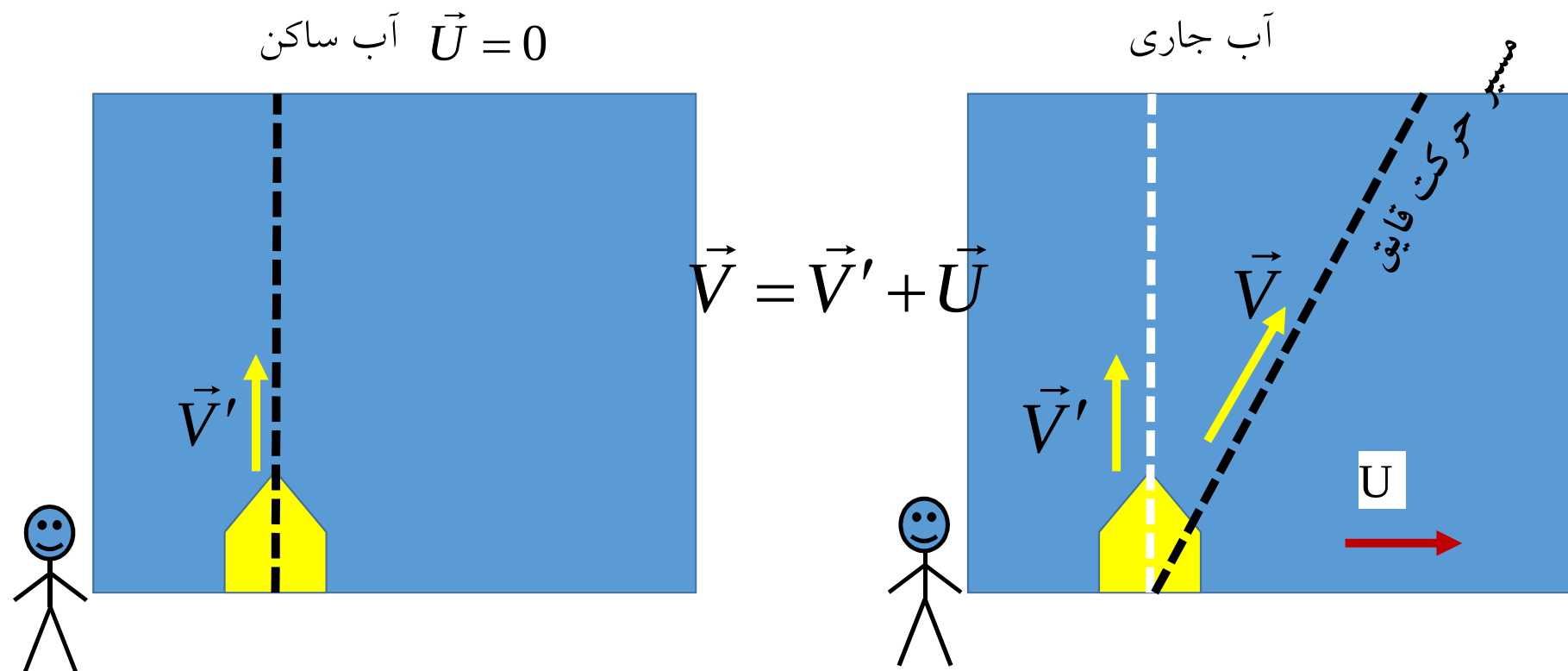
ناظر ساکن  $S$

$$V = U + V'$$

(2)

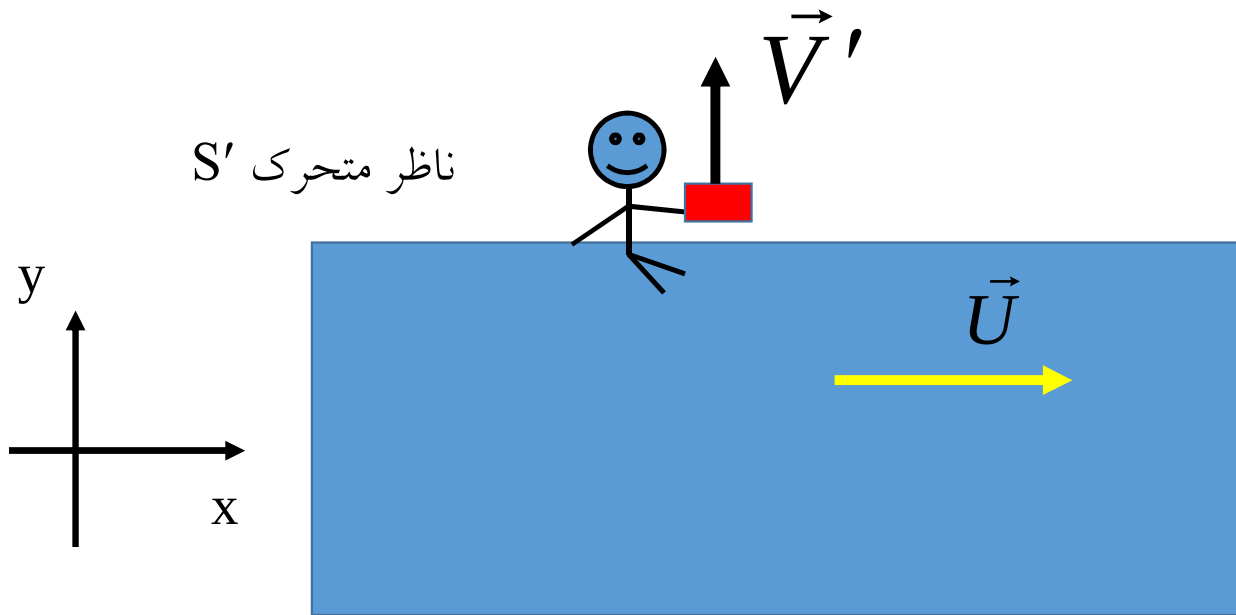
سرعت جسم نسبت به قطار ( $V'$ ) - سرعت جسم نسبت به ناظر ساکن ( $V$ ) - سرعت قطار ( $U$ )

(ب) بررسی حرکت قایق درون رودخانه



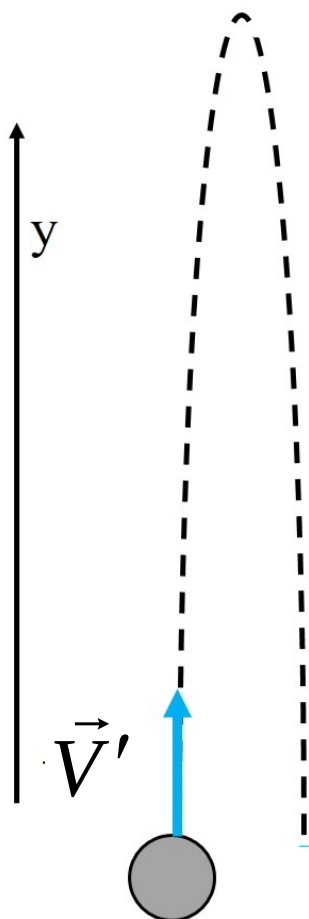
سرعت قایق نسبت به آب ( $\vec{V}'$ ) - سرعت قایق نسبت به ناظر ساکن ( $\vec{V}$ ) - سرعت آب ( $\vec{U}$ )

ج) بررسی حرکت جسم پرتاب شده به سمت بالا بر روی کامیون

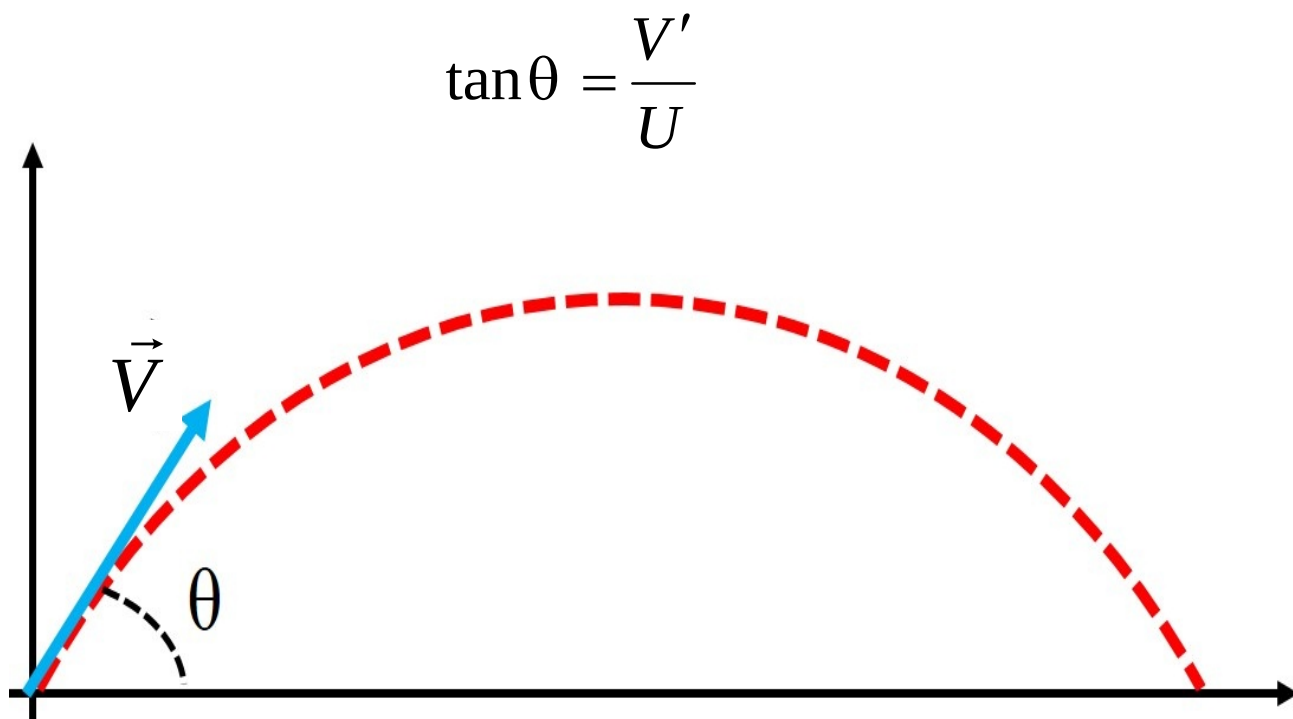


ناظر ساکن  $S$

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{U} = U \hat{i} + V' \hat{j}$$



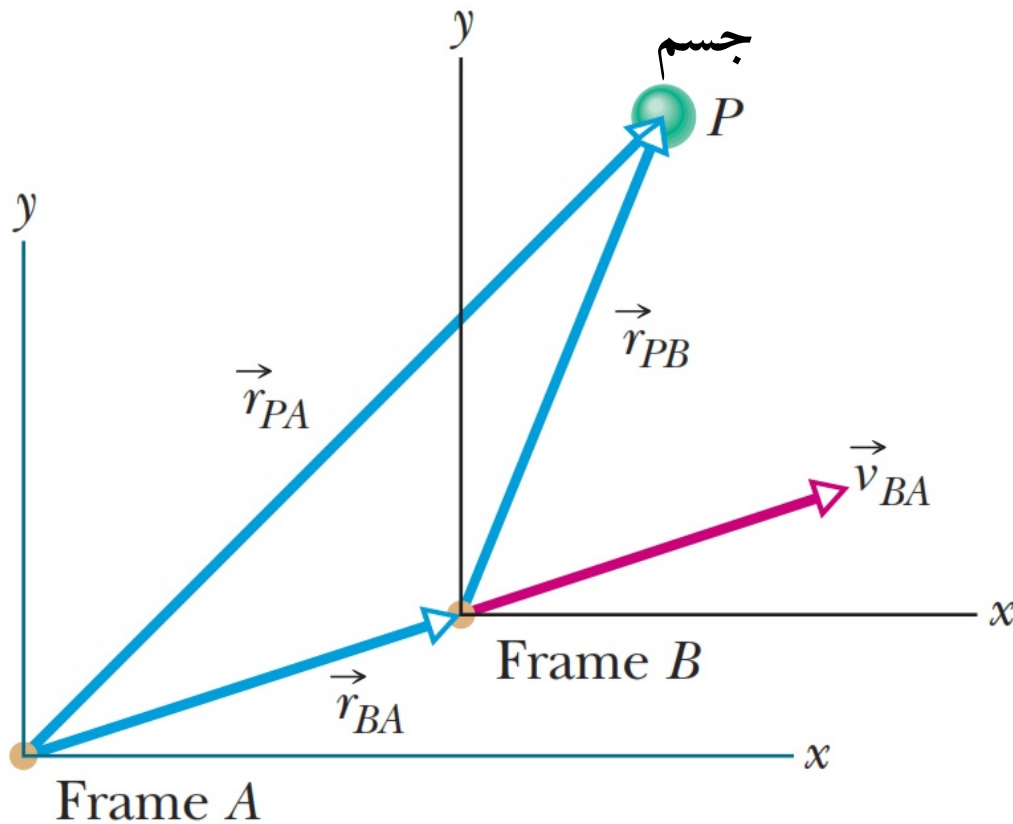
حرکت جسم از دید ناظر متحرک



حرکت جسم از دید ناظر ساکن

## اثبات روابط حرکت نسبی

### ارتباط بردار مکان



$\vec{r}_{PB}$  بردار مکان جسم در دستگاه مختصات متحرک

$\vec{r}_{PA}$  بردار مکان جسم در دستگاه مختصات ثابت

بردار مکان دستگاه مختصات متحرک نسبت به  
دستگاه مختصات ثابت

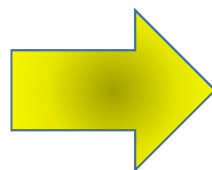
$\vec{r}_{BA}$

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$

## ارتباط بردار سرعت

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$

$$\frac{d\vec{r}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}$$



$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{U}$$

$\vec{V}'$  بردار سرعت جسم در دستگاه مختصات متحرک

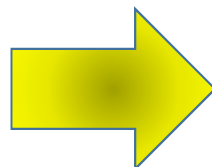
$\vec{V}$  بردار سرعت جسم در دستگاه مختصات ثابت

بردار سرعت دستگاه مختصات متحرک نسبت به دستگاه  
مختصات ثابت  
 $\vec{U}$

## ارتباط بردار شتاب

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{U}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}'}{dt} + \frac{d\vec{U}}{dt}$$



$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}$$

$\vec{a}'$  بردار شتاب جسم در دستگاه مختصات متحرک

$\vec{a}$  بردار سرعت جسم در دستگاه مختصات ثابت

$\vec{A}$  بردار سرعت دستگاه مختصات متحرک نسبت به دستگاه مختصات ثابت

اگر سرعت دستگاه متحرک نسبت به ساکن ثابت باشد آنگاه شتاب نسبی دستگاهها مختصات نسبت به همدیگر صفر است. بنابراین هر دو ناظر برای جسم یک شتاب را مشاهده می نمایند

$$\vec{A} = 0 \rightarrow \vec{a} = \vec{a}'$$