جلسه هفتم

سوالات آخر فصل دوم

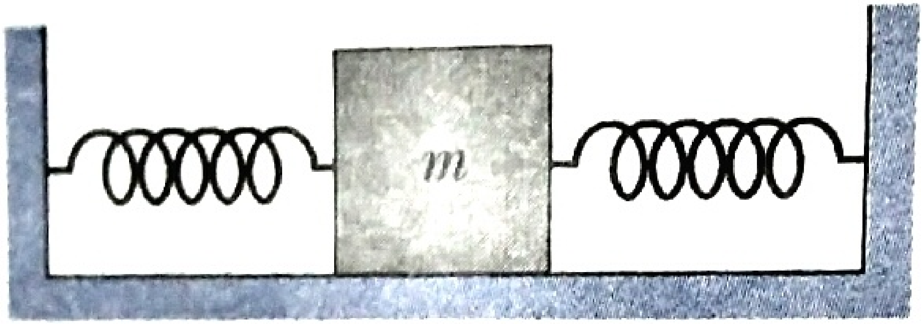
• ۷ بلندگویی بر اثر نوسان پرده‌ای که دامنه‌ی نوسان ان محدود به $1{,}00\,\mu m$ است، صدای موزیکی را ایجاد می‌کند. (الف) در چه بسامدی بزرگی a ی شتاب پرده برابر با g می‌شود؟ (ب) برای بسامدهای بزرگتر، آیا a بزرگتر از g یا کوچکتر از آن می‌شود؟

۲-۷ :

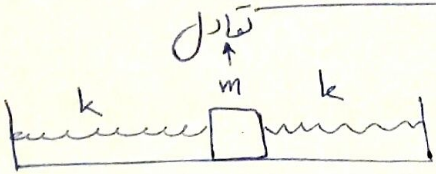
$$x_m = 1\,\mu m = 10^{-6}\,m$$

$$a_m = \omega^2 x_m = g \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{x_m}} = \sqrt{\frac{10}{10^{-6}}} = \sqrt{10} \times 1000$$

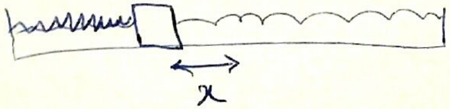
۱۱. در شکل ۱۵–۳۱، دو فنر یکسان با ثابت فنری $7580\,N/m$ به قطعه‌ای به جرم $0{,}245\,kg$ بسته شده‌اند. بسامد نوسان بر روی یک سطح بدون اصطکاک چقدر است؟



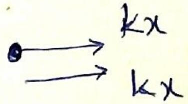
شکل ۱۵–۳۱ مسئله‌ی ۱۱



در یک جابه‌جایی



تحلیل نیروهای وارد بر m



$$F_{کل} = 2kx$$

هر دو فنر جسم را به سمت راست هل می‌دهند

قانون دوم نیوتن

$$F_{کل} = ma$$

$$\underbrace{2kx}_{\text{نیروی بازگرداننده}} = -m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + 2kx = 0$$

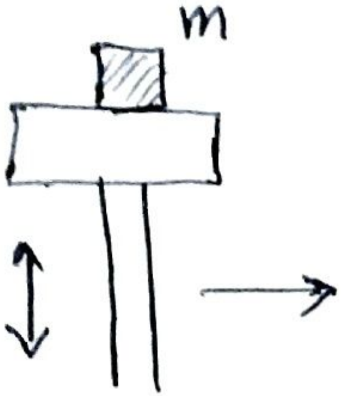
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k}{m}x = 0}$$

معادله نوسانگر

$$x \text{ ضریب} = \omega^2 = \frac{2k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

●● ۱۹۰۰ قطعه‌ای روی پیستونی قرار دارد که در حرکت هماهنگ ساده‌ای به طور قائم حرکت می‌کند. (الف) اگر دوره‌ی تناوب این حرکت هماهنگ ساده $1/0\,s$ باشد، در چه دامنه‌ای از حرکت، قطعه و پیستون از هم جدا می‌شوند؟ (ب) اگر دامنه‌ی حرکت پیستون $5/0\,cm$ باشد، بسامد بیشینه‌ای که به‌ازای آن قطعه و پیستون دائماً در تماس خواهند بود، چقدر است؟

۲-۱۹ :



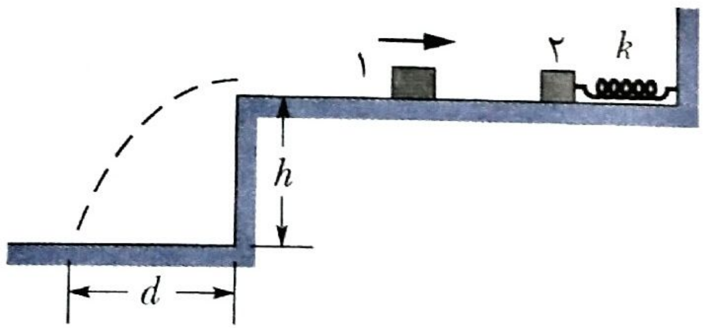
پیستون در حال نوسان $\xrightarrow{\text{شرط جدا شدن جسم از پیستون}}$ اگر شتاب بیشینه حرکت پیستون بیش از g باشد m از پیستون جدا می‌شود

$T = 1s$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \ (rad)$$

$$a_m = \omega^2 x_m > g \Rightarrow x_m > \frac{g}{\omega^2} = \frac{10}{(4\pi)^2}$$

••۲۲ **GO** شکل ۱۵-۳۴ قطعه‌ای به جرم $۰/۲۰۰\,\mathrm{kg}$ را نشان می‌دهد که روی یک سطح مرتفع بدون اصطکاک با تندی $۸/۰۰\,\mathrm{m/s}$ به سمت راست می‌لغزد. این قطعه با قطعه‌ی ساکن ۲، که به فنری با ثابت فنر $۱۲۰۸/۵\ \mathrm{N/m}$ بسته شده است، برخوردی کشسان انجام می‌دهد. (فرض کنید که فنر تأثیری در این برخورد ندارد.) پس از برخورد، قطعه‌ی ۲ حرکت هماهنگ ساده‌ای با دوره‌ی تناوب $۰/۱۴۰\,\mathrm{s}$ انجام می‌دهد، و قطعه‌ی ۱ به سمت انتهای مقابل می‌لغزد و پس از سقوطی به ارتفاع $h = ۴/۹۰\,\mathrm{m}$ در فاصله d از کف سطح بلند فرود می‌آید. مقدار d چقدر است؟



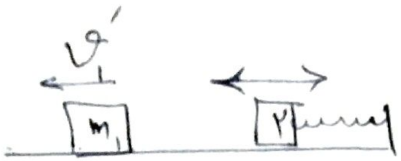
(۳)

۲۲_۲ :

m_2 ساکن و فنر در تعادل

قبل از برخورد

بعد از برخورد



محاسبه سرعت m_2 بعد از برخورد

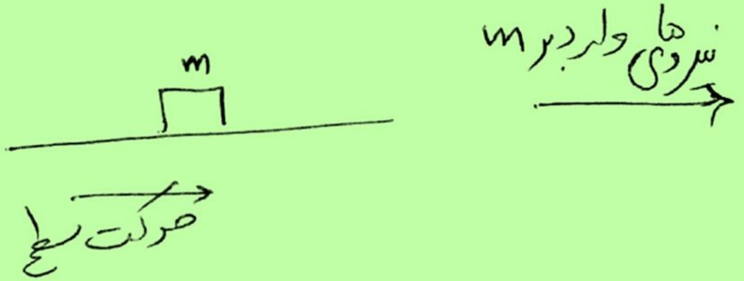
$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_1 \\[2ex] v_2' = \dfrac{2 m_1}{m_1 + m_2}\, v_1 \end{cases}$$

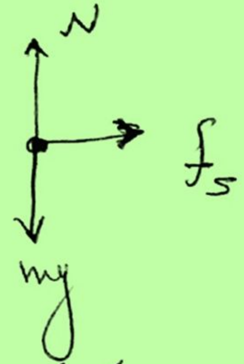
محاسبه حداکثر فشردگی فنر / دامنه نوسان

$$\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} k x^2$$

۲۳●● www قطعه‌ای که روی یک سطح افقی (یک میز لـرزان) قرار دارد، به طـور افقـی در حرکـت هماهنـگ سـاده‌ای بـا بسـامد ۲٫۰Hz به جلو و عقب حرکت می‌کند. ضریب اصـطکاک ایسـتایی بین قطعه و سطح ۰٫۵۰ است. اگر قطعه روی سطح نلغـزد، دامنـه‌ی این حرکت هماهنگ ساده چقدر است؟

$f = 2\ Hz$





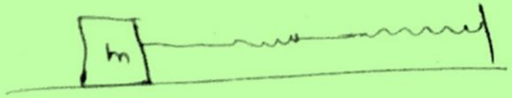
نیروی اصطکاک در جهت حرکت نوسانی سطح خواهد بود تا از لغزش جسم روی سطح جلوگیری شود

$f_s = ma$ و $f_s^{max} = m a_{max} = \mu_s mg$ (1)

در نوسان ساده $\rightarrow a_{max} = \omega^2 x_m$ (2)

$(2),(1) \Rightarrow m\omega^2 x_m = \mu_s m g \Rightarrow x_m = \dfrac{\mu_s g}{\omega^2}$

۲_۲٤ :



هر دو فنر به یک اندازه کشیده می‌شوند ← در اثر کشیدگی یا جابجایی جسم m به اندازه x

نیروی ظاهر شده در هر فنر یکسان

$$F_{\text{کل}} = F_1 + F_2 = kx + kx$$

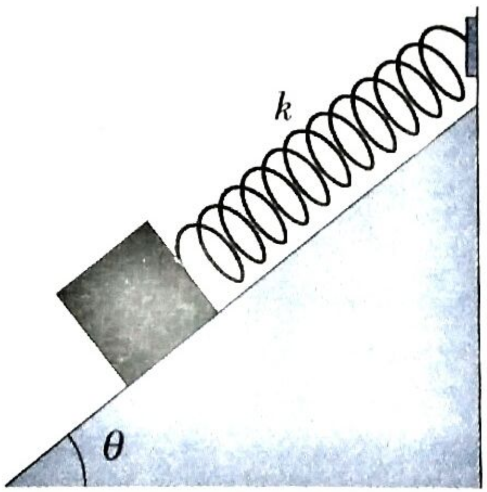
$$F = ma$$

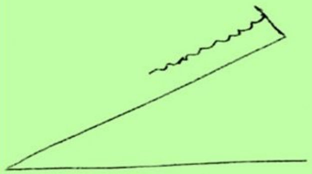
$$\Rightarrow 2kx = -m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{2k}{m}}_{\omega^2} x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

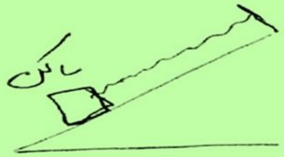
$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

●●● ۲۵ GO در شکل ۱۵-۳۶، قطعه‌ای به وزن $۱۴{,}۰ \mathrm{N}$، که می‌تواند بدون اصطکاک بر روی شیبی با زاویه‌ی $\theta = ۴۰{,}۰^\circ$ بلغزد، توسط فنر بدون جرمی با طول واهلیده‌ی $۰{,}۴۵۰ \mathrm{m}$ و ثابت فنر $۱۲۰ \mathrm{N/m}$ به بالای شیب متصل شده است. (الف) نقطه‌ی تعادل قطعه در چه فاصله‌ای نسبت به بالای شیب قرار دارد؟ (ب) اگر قطعه اندکی به پایین کشیده شده و سپس رها گردد، دوره‌ی تناوب نوسان‌های حاصل چقدر می‌شود؟

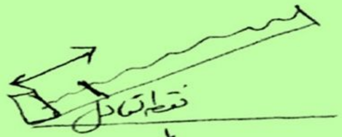




فنر در طول اولیه



با اتصال جسم و آرام
آوردن به پائین در ساکن
به نقطه تعادل



نوسان
حول نقطه تعادل

الف)

$$\begin{cases} kx_0 = mg\sin\theta \\ N = mg\cos\theta \end{cases} \quad \text{تعادل}$$

$$x_0 = \frac{mg\sin\theta}{k}$$

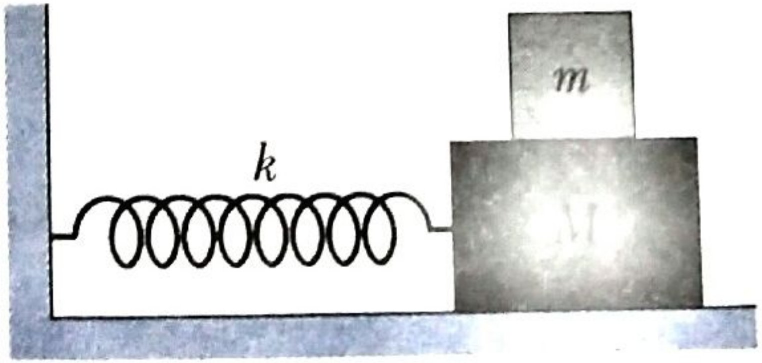
ب) اگر به اندازه x از حالت تعادل خارج شده باشد
(مثلاً کشیده‌تر شده باشد)

$$k(x+x_0) - mg\sin\theta = -m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$kx + \underbrace{kx_0 - mg\sin\theta}_{0} = -m\frac{d^2x}{dt^2}$$

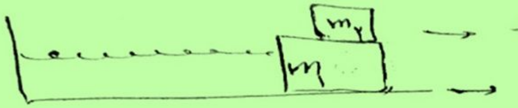
$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{m}{k}x = 0 \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

۲۶●●● GO در شکل ۱۵-۳۷، دو قطعه (به جرم‌های $m = ۱/۸\text{kg}$ و $M = ۱۰\text{kg}$) و فنری (با ثابت $k = ۲۰۰\text{N/m}$) روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارند. ضریب اصطکاک ایستایی بین دو قطعه ۰/۴۰ است. به‌ازای چه دامنه‌ای از حرکت هماهنگ ساده‌ی دستگاه قطعه - فنر، قطعه‌ی کوچکتر در شرف لغزش بر روی قطعه بزرگتر قرار می‌گیرد؟



شکل ۱۵-۳۷ مسئله‌ی ۲۶

۲-۲۶ :



μ_s دارای ضریب اصطکاک

بدون اصطکاک

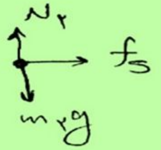
$$m_1 = 10\ kg \quad و \quad m_2 = 1.8\ kg$$

حداکثر $x_m = ?$ (تا m_2 روی m_1 ساکن باشد)

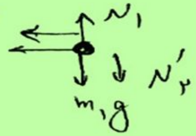
اگر دامنه نوسان از حدی بیشتر باشد شتاب حداقل در نقاط انتهای نوسانگر آنقدر زیاد خواهد بود که بیشتر از نیروی اصطکاک (نیرویی که m_2 را روی m_1 ساکن نگه داشته) می‌شود

مثلاً هنگامی که جسم به سمت راست در حال حرکت

m_2 :



m_1 :



f_s نیرویی است که m_2 را به همراه m_1 جلو و عقب می‌برد

در آستانه حرکت m_2 روی m_1 (در نقاط انتهای مسیر)

$$f_s^{max} = \mu_s N_2 = \mu_s m_2 g \quad (1)$$

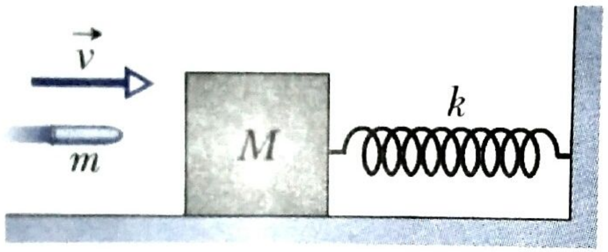
$$f_s^{max} = m_2 a_{max} = m_2 \omega^2 x_m \quad (2)$$

$$(1), (2) \quad x_m = \frac{\mu_s g}{\omega^2}$$

دو جسم با هم حرکت می‌کنند پس می‌توان یک جسم در نظر گرفت

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Bigg\} \quad x_m = \frac{(m_1 + m_2)\mu_s g}{k}$$

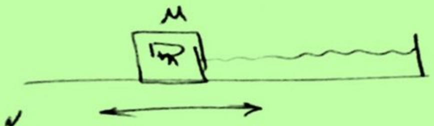
۳۳۰۰ GO قطعه‌ای به جرم $M = 5{,}4\,\mathrm{kg}$ به حالت سکون روی میز افقی بدون اصطکاکی، توسط فنری با ثابت $k = 6000\,\mathrm{N/m}$ به تکیه‌گاه صلبی بسته شده است. گلوله‌ای به جرم $m = 9{,}5\,g$ و سرعت $\vec{v}$ به بزرگی $630\,\mathrm{m/s}$ به قطعه برخورد می‌کند و در آن فرو می‌رود (شکل ۱۵–۴۰). با فرض آنکه در حین فرو رفتن گلوله، فشردگی فنر ناچیز باشد، (الف) تندی قطعه را بلافاصله پس از برخورد و (ب) دامنه‌ی حرکت هماهنگ ساده‌ی حاصل چقدر است؟



قبل از برخورد

ساکن　　در طول اولیه

بعد از برخورد



در برخورد کاملاً ناکشسان دو جسم بعد از برخورد با هم دیگر حرکت می‌کنند

نوسان دو قطعه با هم دیگر

الف) سرعت جسم ها بعد از برخورد

$$mv = (m+M)v' \Rightarrow v' = \frac{mv}{m+M}$$

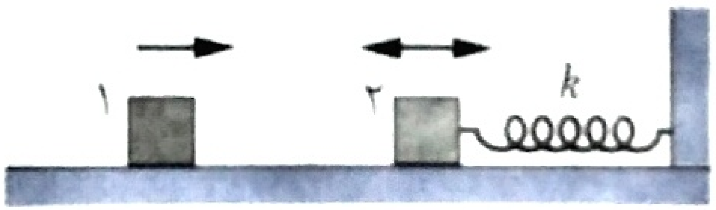
ب) $$\frac{1}{2}(m+M)v'^2 = \frac{1}{2}kx_m^2$$

انرژی جنبشی دو جسم در نقطه تعادل　　انرژی پتانسیل در حداکثر فشردگی

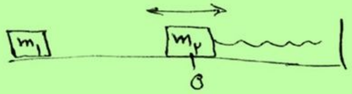
$$x_m = v'\sqrt{\frac{m+M}{k}} = v\sqrt{\frac{m^2}{(m+M)k}}$$

بسامد نوسانی $$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$$

●● ۳٤ GO در شکل ۱۵–۴۱، قطعه‌ی ۲ به جرم $۲/۰\,\mathrm{kg}$ در انتهای یک فنر، حرکت هماهنگ ساده‌ای با دوره‌ی تناوب $۲۰\,\mathrm{ms}$ انجام می‌دهد. مکان قطعه با $x = (۱/۰\,\mathrm{cm})\cos(\omega t + \pi/۲)$ داده شده است. قطعه‌ی ۱ به جرم $۴/۰\,\mathrm{kg}$ با سرعتی به بزرگی $۶/۰\,\mathrm{m/s}$ در امتداد طول فنر، به سمت قطعه‌ی ۲ می‌لغزد. در زمان $t = ۵/۰\,\mathrm{ms}$ دو قطعه به‌طور کاملاً ناکشسان برخورد می‌کنند (مدت برخورد بسیار کمتر از دوره‌ی تناوب حرکت است.) دامنه‌ی این حرکت هماهنگ ساده پس از برخورد چقدر است؟



۳۴-۲



$T = 20\,ms = 0/02\,s$

میلی ثانیه

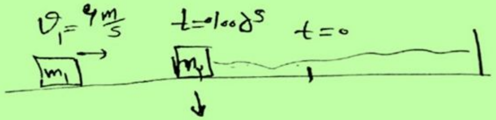
$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0/02} = 100\pi$

برخورد در کجای مسیر نوسان برخورد رخ می دهد

$x = \underbrace{0/01}_{x_m} \cos(100\pi t + \frac{\pi}{2})$ در لحظه $t=0$ در نقطه تعادل و به سمت منفی می رود

با توجه به دوره تناوب بعد از 5ms $\Leftarrow$ بعد از $t=5ms$ کجاست

$\frac{1}{4}$ مسیر نوسانی را طی کرده



m_1 با سرعت $v_1 = 6\frac{m}{s}$ به جسم ۲ m_2 با سرعت $v_2 = 0$ برخورد می کند

در این لحظه فنر کاملاً کشیده شده است $x_m = 0/01m$

برخورد کاملاً ناکشسان $m_1 v_1 = (m_1+m_2) v_f$

$$v_f = \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2} = \frac{4\times6}{6} = 4\frac{m}{s}$$

ادامه ۳۴-۲ :

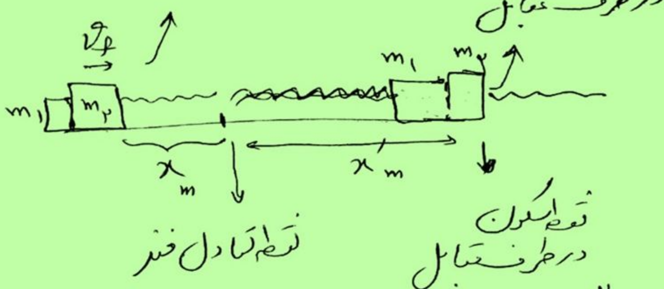
قبل از برخورد m_2 با فرکانس ω_0 در نوسان بوده

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

$$100\pi = \sqrt{\frac{k}{2}} \Rightarrow k = 2\times10^4\pi^2 (\frac{N}{m})$$

برای پیدا کردن دامنه نوسان بعد از برخورد کاملاً ناکشسان (در هم چسبیدن دو جسم به هم) از پایستگی انرژی استفاده می شود

انرژی مکانیکی بعد از برخورد = انرژی مکانیکی در کشیدگی در طرف مقابل



$$\frac12 (m_1+m_2) v_f^2 + \frac12 k x_m^2 = \frac12 k x'^2_m$$

$$\frac12\times6\times4^2 + \frac12\times2\times10^4\times\pi^2\times10^{-4} = \frac12\times2\times10^4\pi^2\times x'^2_m$$

$\pi^2 \simeq 10 \Rightarrow 58 = 10^5 x'^2 \Rightarrow x' = \sqrt{5/8}\times10^{-2}\,m$

۳۶●● اگر زاویه‌ی فاز برای یک دستگاه قطعه- فنر که در حال حرکت هماهنگ ساده است برابر با $\pi/6$ رادیان باشد و مکان قطعه با $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$ داده شود، در زمان $t = 0$ نسبت انرژی جنبشی به انرژی پتانسیل چقدر است؟

۲_۳۶ :

$$k = \frac{1}{۲} m v^{۲} = \frac{1}{۲} m x_m^{۲} \omega^{۲} \sin^{۲}(\omega t + \frac{\pi}{۶})$$

$$x = x_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{۶}) \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = x_m \omega [-\sin(\omega t + \frac{\pi}{۶})]$$

$$U = \frac{1}{۲} k x^{۲} = \frac{1}{۲} k x_m^{۲} \cos^{۲}(\omega t + \frac{\pi}{۶})$$

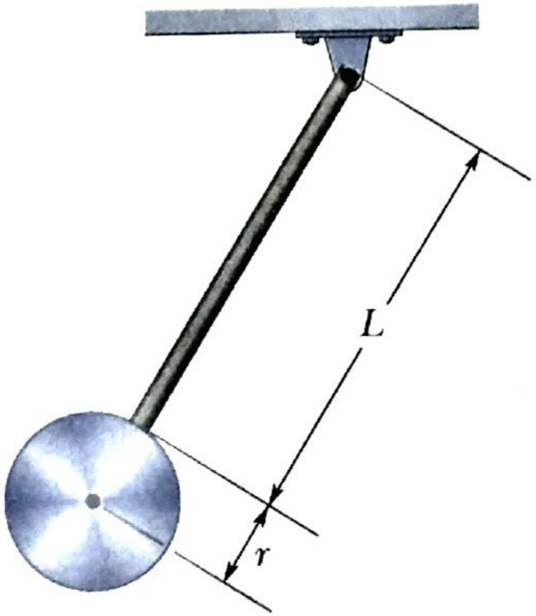
$$\omega^{۲} = \frac{k}{m} \Rightarrow k = m\omega^{۲}$$

$$U = \frac{1}{۲} m \omega^{۲} x_m^{۲} \cos^{۲}(\omega t + \frac{\pi}{۶})$$

$$\frac{k}{U} = \frac{\frac{1}{۲} m \omega^{۲} x_m^{۲} \sin^{۲}(\omega t + \frac{\pi}{۶})}{\frac{1}{۲} m \omega^{۲} x_m^{۲} \cos^{۲}(\omega t + \frac{\pi}{۶})} = \tan^{۲}(\omega t + \frac{\pi}{۶})$$

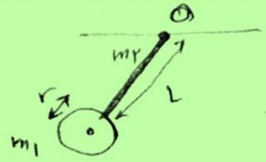
$$t = ۰ \qquad \frac{k}{U} = \tan^{۲} \frac{\pi}{۶}$$

•۴۱ در شکل ۱۵-۴۲، آونگ شامل قرص یکنواختی به شعاع $r =$ ۱۰٫۰cm و جرم ۵۰۰g است که به میله‌ی یکنواختی به طول $L =$ ۵۰۰mm و جرم ۲۷۰g متصل شده است. (الف) لختی چرخشی آونگ را حول نقطه‌ی آویز محاسبه کنید. (ب) فاصله‌ی بین نقطه‌ی آویز و مرکز جرم آونگ چقدر است؟ (پ) دوره‌ی نوسان را به‌دست آورید.



شکل ۱۵-۴۲ مسئله‌ی ۴۱

41-2:



$m_1 = 0.5\ kg$, $r = 10\ cm = 0.1\ m$

$m_2 = 0.270\ kg$, $L = 0.5\ m$

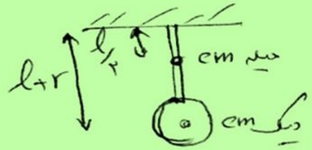
الف) $I_O = ?$ ب) $y_{cm} = ?$ ج) $T = ?$

الف)

$$I_O = I_{\text{میله}} + I_{\text{دیسک}} = \underbrace{\left[I_{cm\,\text{میله}} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]}_{\text{میله (قضیه محورهای موازی)}} + \underbrace{\left[I_{cm\,\text{دیسک}} + m_1 (l+r)^2\right]}_{\text{دیسک}}$$

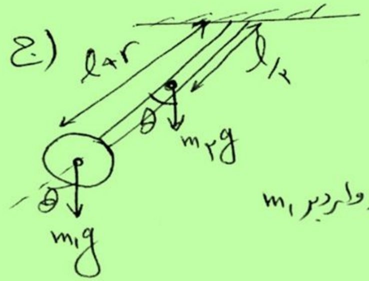
$$= \underbrace{\left(\frac{1}{12} m_2 l^2 + m_2 \frac{l^2}{4}\right)}_{\frac{1}{3} m_2 l^2} + \left[\frac{1}{2} m_1 r^2 + m_1 (l+r)^2\right]$$

ب) نقطه آویز مبداء



$$y_{cm} = \frac{\frac{l}{2} \times m_2 + (l+r) \times m_1}{m_1 + m_2}$$

ج)



گشتاور وارد بر m_1

$$\tau_1 = m_1 g (l+r) \sin\theta$$

$$\tau_2 = m_2 g \frac{l}{2} \sin\theta$$

$$\Sigma \tau = I_O \alpha \Rightarrow \left[m_1 g (l+r) + \frac{1}{2} m_2 g l\right] \sin\theta = -I_O \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ادامه سوال 41-2:

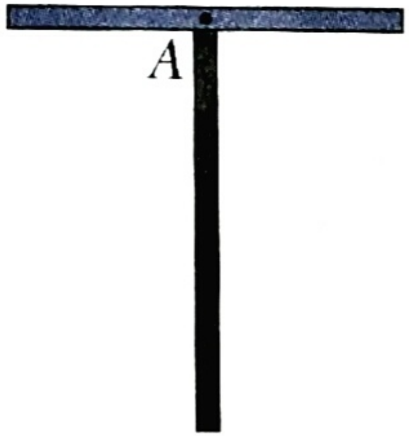
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{m_1 g (l+r) + \frac{1}{2} m_2 g l}{I_O} \sin\theta = 0$$

$$\theta \leq 6^\circ \Rightarrow \theta \approx \sin\theta$$

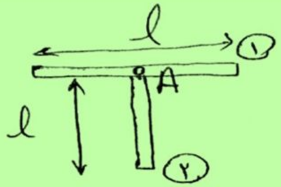
ضریب زاویه انحراف (θ) $= \omega^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 g (l+r) + \frac{1}{2} m_2 g l}{\frac{1}{3} m_2 l^2 + \frac{1}{2} m_1 r^2 + m_1 (l+r)^2}} = \frac{2\pi}{T}$$

• ٤٤ یک آونگ فیزیکی از دو خط‌کش بلند تشکیل شده است که مانند شکل ۱۵–۴۳ به یکدیگر متصل شده‌اند. دوره‌ی نوسان آونگ حول نقطه‌ی آویز A واقع در مرکز خط‌کش افقی چقدر است؟



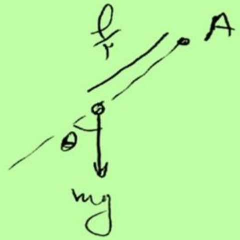
۴۴_۲



میله ① حول نقطه مرکز جرم خود می‌چرخد

بازوی گشتاور نیروی وزن $= 0 \rightarrow \tau_1 = 0$

گشتاور نیروی وزن وارد بر میله ②



$$\tau_2 = mg\frac{l}{2}\sin\theta \quad (1)$$

$$\sum \tau = I\alpha \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{2}mgl\sin\theta = -I\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2)$$

$$I = I_{\text{میله ①}} + I_{\text{میله ②}} = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{3}ml^2 = \frac{5}{12}ml^2 \quad (3)$$

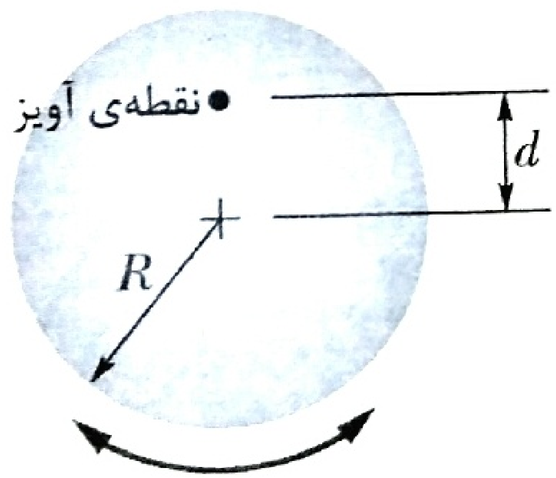
(۲) و (۳)

$\theta < 6^\circ$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\frac{\frac{1}{2}mgl}{\frac{5}{12}ml^2}}_{\omega^2}\theta = 0$$

$$\omega^2 = \frac{6g}{5l} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{6g}{5l}}}$$

•۴۷ در شکل ۱۵-۴۴، یک آونگ فیزیکی شامل یک قرص توپر یکنواخت (به شعاع $R = ۲/۳۵\,\text{cm}$) در صفحه‌ای قائم از نقطه‌ای به فاصله‌ی $d = ۱/۷۵\,\text{cm}$ از مرکز قرص آویزان است. قرص تا زاویه‌ی کوچکی جابه‌جا شده و سپس رها می‌شود. دوره‌ی تناوب حرکت هماهنگ ساده‌ی حاصل چقدر است؟



(۸)

۴۷-۲ :

نقطه آویز

دیسک با قابلیت دوران حول نقطه O → $T = ?$

فرض به اندازه زاویه کوچک θ از وضع تعادل منحرف گردد

نیروهای وارد بر دیسک → نیروی وزن (mg) + نیروی تکیه گاه اعمالی به نقطه O (N)

$\tau_N = 0$ بدون بازو

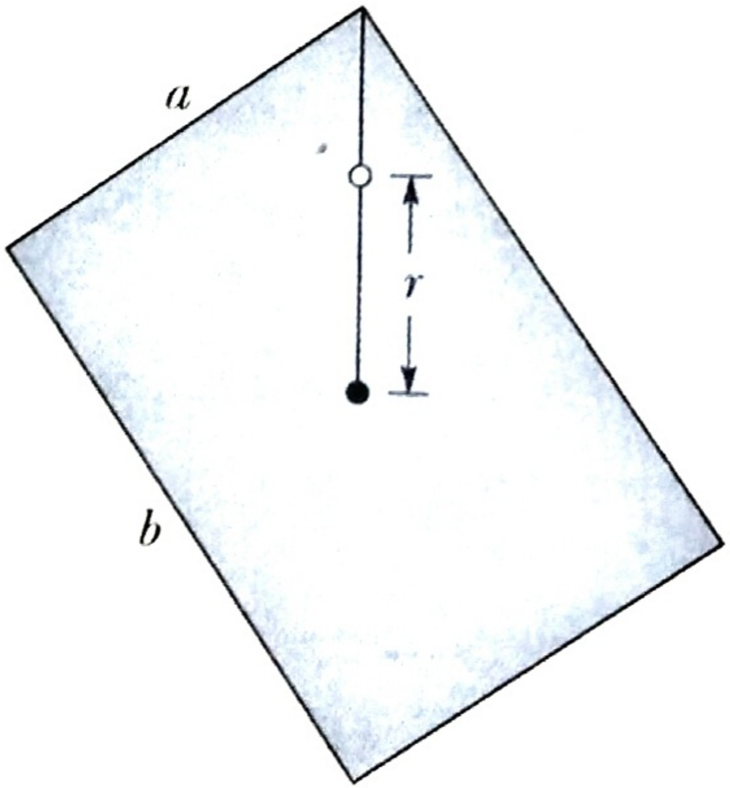
$\tau_{mg} = mgd\sin\theta$

$\Sigma\tau = I\alpha \Rightarrow mgd\sin\theta = -I_O \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

قضیه محورهای موازی $I_O = I_{cm} + md^2 = \frac{1}{2}mR^2 + md^2$

$\Rightarrow \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\dfrac{mgd}{\frac{1}{2}mR^2 + md^2}}_{\omega^2} \underbrace{\sin\theta}_{\theta\ \text{تقریبا}} = 0 \Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \left(\dfrac{mgd}{\frac{mR^2}{2} + md^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

۴۸●● GO یک قالب مستطیلی، به ضلع‌های وجه‌ای $a = ۳۵\,\text{cm}$ و $b = ۴۵\,\text{cm}$ باید از میله‌ی افقی نازکی که از حفره‌ی باریکی از قالب می‌گذرد، آویخته شود. سپس قطعه باید تحت زاویه‌ی کوچکی حول میله همچون یک آونگ به نوسان درآید، طوری که حرکت هماهنگ ساده‌ای انجام دهد. شکل ۱۵-۴۵ یک وضعیت ممکن از حفره را نشان می‌دهد که در فاصله‌ی r از مرکز قالب و در امتداد خطی است که این مرکز را به گوشه‌ی قالب وصل می‌کند. (الف) دوره‌ی تناوب آونگ برحسب فاصله‌ی r در امتداد این خط را به گونه‌ای رسم کنید که کمینه‌ی منحنی در آن مشخص باشد. (ب) این کمینه به‌ازای چه مقداری از r رخ می‌دهد؟ درواقع خطی از نقطه‌ها به دور مرکز قالب وجود دارد که برای آن دوره‌ی تناوب نوسان قالب دارای مقدار کمینه‌ی یکسانی است. (پ) این خط چه شکلی را می‌سازد؟



ادامه سوال ۴۸-۲ :

$$\frac{dT}{dr} = 0 \qquad T = \sqrt{u} \Rightarrow T' = \frac{u'}{2u}$$

$$\frac{dT}{dr} = 2\pi \frac{\frac{2r \times gr - g\left(r^2 + \frac{a^2+b^2}{12}\right)}{(gr)^2}}{2\left(\qquad\right)} = 0$$

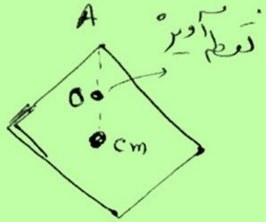
$$2gr^2 - gr^2 - \frac{a^2+b^2}{12} g = 0$$

$$r^2 = \frac{a^2+b^2}{12} \Rightarrow$$

مکان هندسی دایره‌ای به شعاع

$$r = \left(\frac{a^2+b^2}{12}\right)^{1/2}$$

۴۸-۲ :



حالت تعادل

انحراف از وضعیت تعادل به اندازه θ

نیروها → نیروی تکیه‌گاه در نقطه آویز → بدون بازو → $\tau = 0$

نیروها → نیروی وزن در مرکز جرم $\qquad \tau_{mg} = mgr\sin\theta$

$$\Sigma \tau = I\alpha$$

$$mgr\sin\theta = -I_o \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

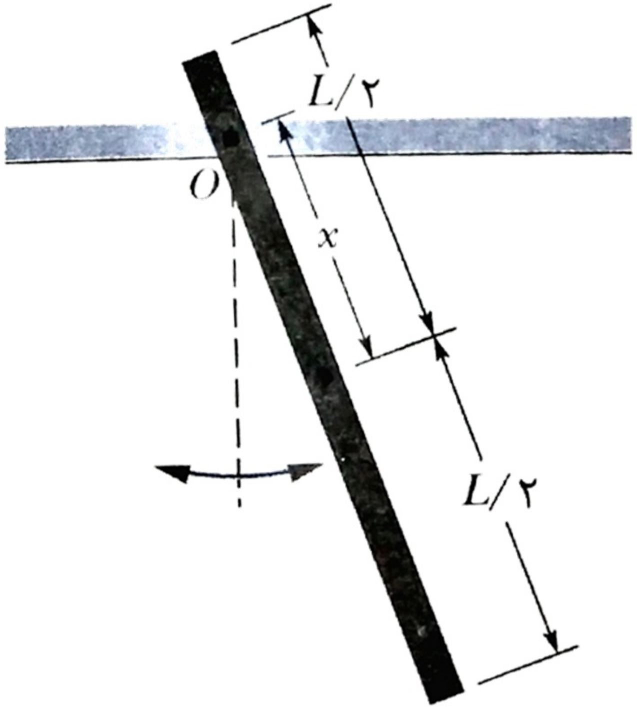
$$I_o = I_{cm} + mr^2$$ (قضیه محورهای موازی)

$$= \frac{m}{12}(a^2+b^2) + mr^2$$

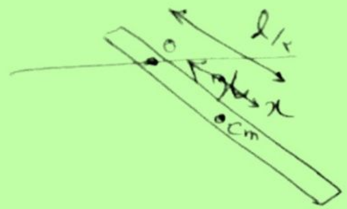
$$\theta < 26^\circ \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\frac{mgr}{I_o}}_{\omega^2}\theta = 0$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\left(\frac{I_o}{mgr}\right)^{1/2} = 2\pi\left(\frac{\frac{a^2+b^2}{12} + r^2}{gr}\right)^{1/2}$$

۵۱ ●● GO در شکل ۱۵-۴۶، خـط‌کشـی بـه طـول $L = ۱٫۸۵\,\text{m}$ همچون یک آونگ فیزیکی نوسان می‌کند. (الف) به‌ازای چه مقداری از فاصله‌ی x، بین مرکز جـرم خـط‌کـش و نقطـه‌ی آویـز O ی آن، کمترین دوره‌ی تناوب بـه‌دسـت مـی‌آیـد؟ (ب) ایـن کمتـرین دوره چقدر است؟



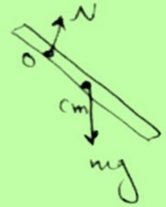
۲-۵۱ :



$x = ?$ تا T_{min}

به ازاء انحراف کوچک

نیروها



$\tau_N = 0$ بدون بازو

$\tau_{cm} = mgx\sin\theta$

$$I_O = I_{cm} + mx^2 = \frac{1}{12} m l^2 + mx^2$$

$$\Sigma \tau = I\alpha \Rightarrow mgx\sin\theta = -\left(\frac{1}{12} m l^2 + mx^2\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgx}{\frac{1}{12} m l^2 + mx^2}\sin\theta = 0 \xrightarrow{\theta < 6^\circ} \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgx}{\frac{1}{12} m l^2 + mx^2}\theta = 0}$$

$$\omega = \left(\frac{mgx}{\frac{1}{12} m l^2 + mx^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad T = 2\pi\left(\frac{\frac{1}{12} m l^2 + mx^2}{mgx}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (*)$$

$$\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{\dfrac{2mx \times mgx - mg\left(\frac{1}{12} m l^2 + mx^2\right)}{mgx}}{2\left(\dfrac{\frac{1}{12} m l^2 + mx^2}{mgx}\right)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$\Rightarrow 2m^2 g x^2 - \frac{1}{12} m^2 g l^2 - m^2 g x^2 = 0$$

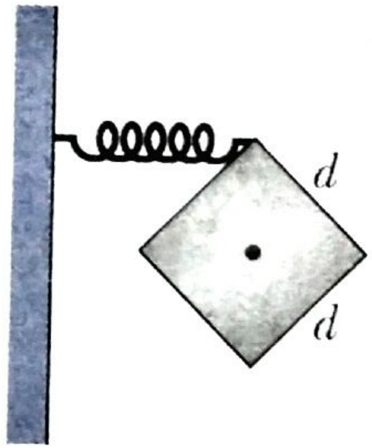
ادامه ۲-۵۱ :

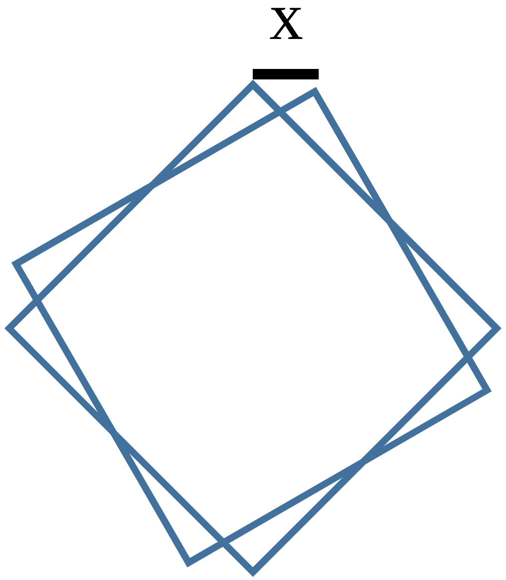
$$\Rightarrow m^2 g x^2 = \frac{1}{12} m^2 g l^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{12}}\, l$$

اگر میله در این فاصله از مرکز جرم میله آویز شود کمترین دوره تناوب را خواهد داشت

با جایگذاری x بدست آمده در رابطه $(*)$ T_{min} بدست می‌آید

۵۲●●  مکعب شکل ۱۵-۴۷ جرمی برابر $3/00\,\mathrm{kg}$ و اضلاعی به طول $d = 6/00\,\mathrm{cm}$ دارد و روی محوری که از مرکز آن می‌گذرد، سوار شده است. فنری (با ثابت $k = 1200\,\mathrm{N/m}$) گوشه‌ی بالایی این مکعب را به دیوار صلبی متصل کرده است. اگر این مکعب به‌اندازه‌ی 3° چرخانده و سپس رها شود، دوره‌ی نوسان حرکت هماهنگ ساده‌ی حاصل چقدر می‌شود؟





۱۰

۵۲- در این مسئله نیروی بازگرداننده برای نوسان زاویه ای، نیروی فنری باشد

با چرخش مکعب

به اندازه θ حول نقطه مرکزی

فنر به اندازه x کشیده می شود

نیروی بازگرداننده فنر $F = kx$

به ازای زاویه چرخش θ خیلی کوچک (3°) $\Rightarrow x = r\theta$

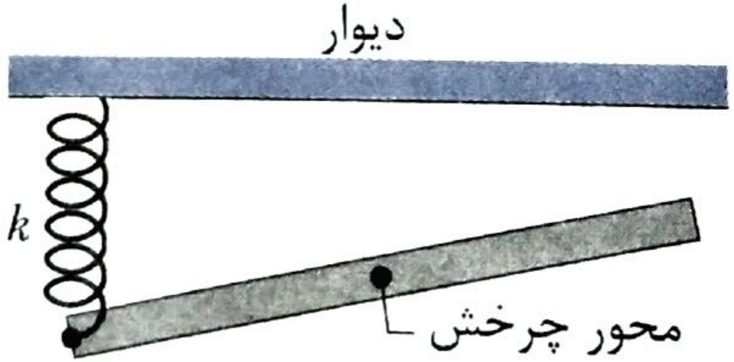
گشتاور نیروی فنر حول مرکز مکعب $Fr = kxr = kr^2\theta$

$$\tau = I\alpha \Rightarrow kr^2\theta = -I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

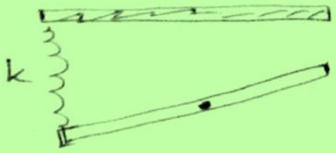
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\frac{kr^2}{I}}_{\omega^2}\theta = 0$$

$$\omega = r\sqrt{\frac{k}{I}}$$

••۵۳ **ILW** در نمای دید از بالای شکل ۱۵–۴۸، میله‌ی یکنواخت بلندی به جرم $0/600\,\mathrm{kg}$ می‌تواند آزادانه در صفحه‌ای افقی حول یک محور قائم عبوری از مرکزش، بچرخد. فنری با ثابت $k = 1850\,\mathrm{N/m}$ به طور افقی بین یک انتهای این میله و دیواری ثابت متصل شده است. وقتی میله در تعادل است، موازی با دیوار قرار دارد. دوره‌ی تناوب نوسان‌های کوچک، وقتی میله کمی چرخانده و سپس رها شود، چقدر است؟

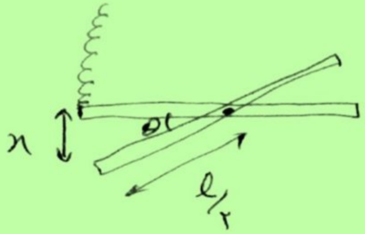


۵۳ -۲



برای نوسانهای کوچک

$T = ?$

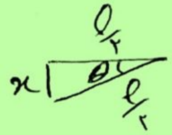


باکشیده شدن فنر به اندازه x

میله زاویه θ منحرف می‌شود

نیروی بازگرداننده $F = kx$

گشتاور نیرو حول مرکز $\tau = F\frac{l}{2}$



θ خیلی کوچک

$$x = \frac{l}{2}\theta$$

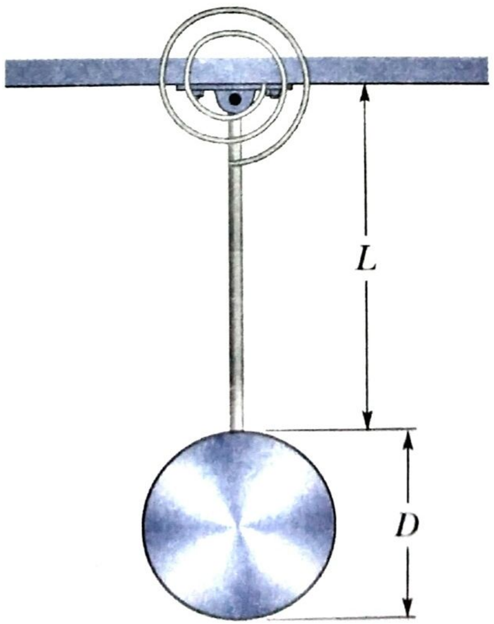
$$\tau = k\frac{l}{2}\theta \times \frac{l}{2} = k\left(\frac{l^2}{4}\right)\theta$$

$$\Sigma\tau = I\alpha \Rightarrow k\frac{l^2}{4}\theta = -I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\frac{kl^2}{4I}}_{\omega^2}\theta = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{kl^2}{4I_{cm}}} = \frac{2\pi}{T}$$

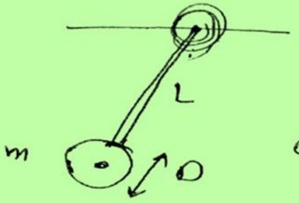
مرکز دوران = مرکز جرم

●●● ۵۶ GO در شکل ۱۵-۵۰، قرصی به جـرم $2/50\,\mathrm{kg}$ و قطـر $D = 42/0\,\mathrm{cm}$ از میلـه‌ای بـه طـول $L = 76/0\,\mathrm{cm}$ و جـرم نـاچیز آویخته شده است و می‌تواند حول انتهـای آن نوسـان کنـد. (الـف) بدون اتصال فنر پیچشی بدون جـرم، دوره‌ی تنـاوب نوسـان چقـدر است؟ (ب) با اتصال فنر پیچشی، میله به طور قائم در تعادل اسـت. اگر دوره‌ی نوسان به اندازه‌ی $0/500\,\mathrm{s}$ کاهش یابـد، ثابـت پیچشـی فنر چقدر است؟



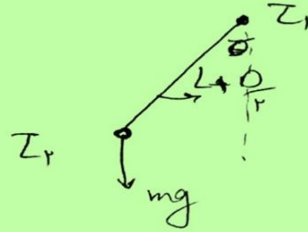
(۱۲)

۲-۵۶:



$\xrightarrow[\text{حول نقطه دوران}]{\text{گشتاورها}}$ فنر پیچشی / وزن جسم

ب)



$\longrightarrow$ دو گشتاور در خلاف جهت همدیگر

$$\tau_1 - \tau_2 = k\theta - mg\left(L+\frac{D}{2}\right)\sin\theta$$

برای θ خیلی کوچک $\quad \theta = \sin\theta$

$$\Sigma\tau = \left[k - mg\left(l+\frac{D}{2}\right)\right]\theta$$

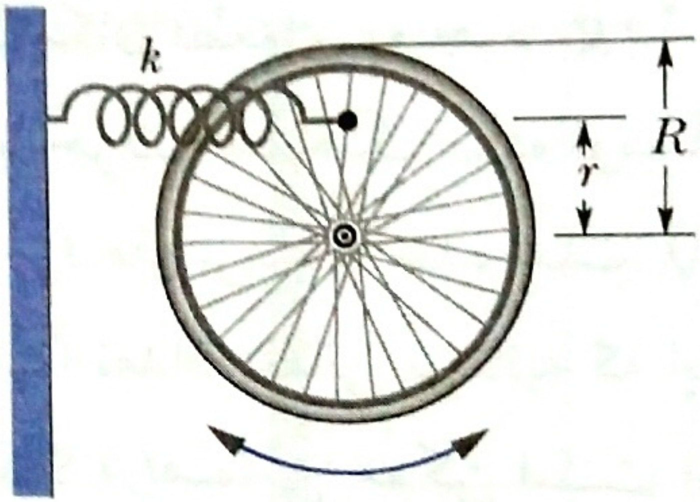
$$\Sigma\tau = I\alpha \Rightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left[k - mg\left(l+\frac{D}{2}\right)\right]\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k - mg\left(l+\frac{D}{2}\right)}{I}\theta = 0$$

میله بدون جرم $\quad I_{\text{کل}} = I_{\text{دیسک حول محور دوران}} = \overbrace{I_{cm\,\text{دیسک}}}^{\frac{1}{2}m\frac{D^2}{4}} + m\left(l+\frac{D}{2}\right)$

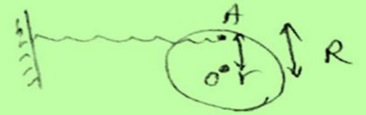
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{k - mg\left(l+\frac{D}{2}\right)}{\frac{1}{8}mD^2 + m\left(l+\frac{D}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{T} \quad - - - -$$

۷۰ GO چرخی می‌تواند آزادانه حول محور ثابت خود بچرخد. مانند شکل ۱۵–۵۲، فنری به یکی از پره‌های چرخ به فاصله‌ی r از محور متصل شده است. (الف) با فرض آنکه چرخ طوقه‌ای به جرم m و شعاع R داشته باشد، بسامد زاویه‌ای ωی نوسان‌های کوچک این مجموعه را برحسب m، R، r، و ثابت فنر k به‌دست آورید. اگر (ب) $r = R$ و (پ) $r = ۰$ باشد، ω چقدر اسـ

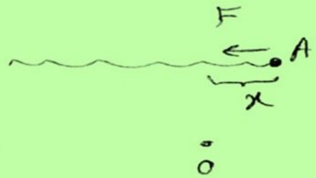


شکل ۱۵–۵۲ مسئله‌ی ۷۰

۲ـ ۷۵ :



تعادل



فنر کشیده شده است

در یک چرخش بسیار کوچک

$F_{\text{فنر}} = kx$

⟵ تقریباً $x = r\theta$

$\tau = rF$

$\tau = rF = rkx = rkr\theta = kr^2\theta$

$\sum \tau = I_0 \alpha \Rightarrow kr^2\theta = -I_0 \frac{d^2\theta}{dt^2}$

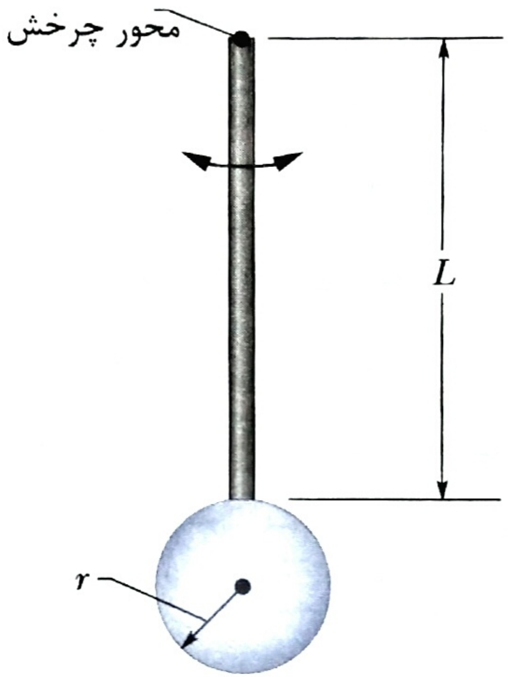
حلقه حول مرکز جرم $I = mR^2$

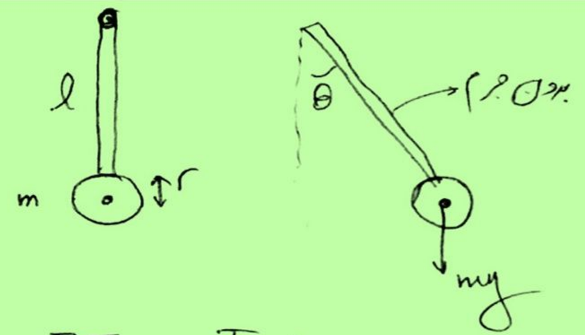
$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \overbrace{\frac{kr^2}{mR^2}}^{\omega^2}\theta = 0$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2}{kr^2}}$

۹۲ یک ساعت پاندولی قدیمی دارای آونگی است شامل یک قرص برنجی به شعاع $r = ۱۵٫۰۰ \text{cm}$ و جرم $۱٫۰۰۰ \text{kg}$ است که به یک میله‌ی باریک و بلند با جرم ناچیز متصل شده است. این آونگ آزادانه حول محوری نوسان می‌کند که مانند شکل ۱۵-۵۶ از محوری عمود بر میله واقع در انتهای آن می‌گذرد. اگر آونگ در محلی که $g = ۹٫۸۰۰ \text{m/s}^۲$ است، برای نوسان‌های کوچک دارای دوره‌ی تناوبی برابر با $۲٫۰۰۰ \text{s}$ باشد، طول L میله تا نزدیکترین دهم میلی‌متر باید چقدر باشد؟





$$\Sigma \tau = I\alpha \quad , \quad \tau = mg\,(l+r)\sin\theta$$

$$I = \underbrace{I_{cm}}_{\text{دیسک}} + m(l+r)^{\text{۲}}$$

$$= m\left[\frac{r^{\text{۲}}}{\text{۲}} + (l+r)^{\text{۲}}\right]$$

$$\theta < \text{۵}^{\circ} \rightarrow \sin\theta \approx \theta$$

$$\Rightarrow mg(l+r)\,\theta = -I\,\frac{d^{\text{۲}}\theta}{dt^{\text{۲}}}$$

$$\frac{d^{\text{۲}}\theta}{dt^{\text{۲}}} + \underbrace{\frac{mg(l+r)}{m\left[\frac{r^{\text{۲}}}{\text{۲}}+(l+r)^{\text{۲}}\right]}}_{\omega^{\text{۲}}}\,\theta = \text{۰}$$

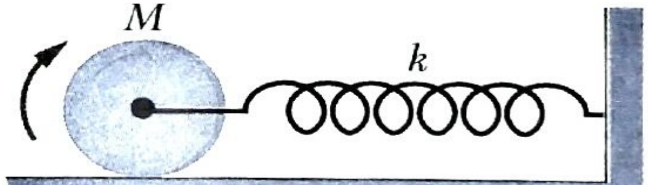
$$\omega = \frac{\text{۲}\pi}{T} = \frac{\text{۲}\pi}{\text{۲}} = \pi = \left(\frac{g(l+r)}{\frac{r^{\text{۲}}}{\text{۲}} + (l+r)^{\text{۲}}}\right)^{\text{۱/۲}}$$

$$r = \text{۴ ۱۸} \quad \Rightarrow \quad l = \bigcirc$$

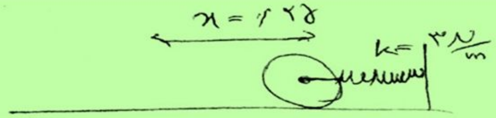
۱۰۰ در شکل ۱۵-۵۹، یک استوانه‌ی توپر که به فنری افقی (با $k = ۳/۰۰ \mathrm{N/m}$) متصل است، روی سطحی افقی بدون لغزش می‌غلتد. اگر این مجموعه از حالت سکون و به هنگامی که فنر به اندازه‌ی $۰/۲۵۰ \mathrm{m}$ کشیده است رها گردد، مطلوب است (الف) انرژی جنبشی انتقالی و (ب) انرژی جنبشی چرخشی استوانه به هنگامی که از مکان تعادل می‌گذرد. (پ) نشان دهید که تحت این شرایط، مرکز جرم استوانه حرکت هماهنگ ساده‌ای با دوره‌ی تناوب

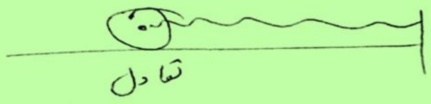
$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{۳M}{۲k}}$$

انجام می‌دهد که در آن M جرم استوانه است. (*راهنمایی:* مشتق زمانی انرژی مکانیکی کل را بیابید.)



۱۰۰)





$$E_1 = \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\omega = \frac{v}{R} \quad , \quad I_{\text{استوانه توپر}} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} m R^2 \times \frac{v^2}{R^2}$$

$$= \frac{3}{4} m v^2$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2} k x^2 = \frac{3}{4} m v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{2}{3} \frac{k}{m} x^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2k}{3m}}\, x$$

الف) $E_{\text{جنبشی انتقالی}} = \frac{1}{2} m v^2$

ب) $E_{\text{جنبشی دورانی}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} m R^2 \times \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{4} m v^2$

ج) $v_{\text{تعادل}} = \sqrt{\frac{2k}{3m}}\, x \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}} = \frac{2\pi}{T}$

$$v_{max\ \text{نوسانی}} = \omega\, x$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3m}{2k}}$$