بسم الله الرحمن الرحيم

فصل چهارم – بخش اول

حرکت کلی ذره در سه بعد

اصول کلی

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$ شکل برداری معادلهٔ حرکت

$$F_x = m\ddot{x}$$

$$F_y = m\ddot{y}$$

$$F_z = m\ddot{z}$$

سه مؤلفهٔ نیرو ممکن است توابع صریح یا ضمنی مختصات، مشتقات زمانی و مکانی آنها، و شاید خود زمان باشند

هیچ روشی کلی برای به‌دست‌آوردن جوابهای تحلیلی معادلات حرکت بالا وجود ندارد

انواع نیروهای مورد بررسی

$\mathbf{F}$ تابعی فقط از مختصات فضایی

$\mathbf{F}$ تابع معلومی از مشتقات مختصاتی

حرکت پرتابی با مقاومت هوا

حرکت ذرات باردار در میدان الکترومغناطیسی ساکن

$\mathbf{F}$ ممکن است تابعی ضمنی از زمان باشد مانند وضعیتهایی که مختصه و وابستگی مشتق مختصه غیراستاتیکی باشد

حرکت ذرهٔ باردار در میدانی الکترومغناطیسی که با زمان تغییر می‌کند

کار

کاری که روی ذره انجام می‌شود به کسب‌کردن یا از دست‌دادن انرژی آن ذره می‌انجامد

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \xrightarrow{\text{ضرب داخلی در سرعت}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}\cdot\mathbf{v} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}\cdot\mathbf{v} = m\dot{\vec{v}}.\vec{v}$$

$$\xrightarrow{d(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/dt = 2\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) = \frac{d\mathbf{T}}{dt}$$

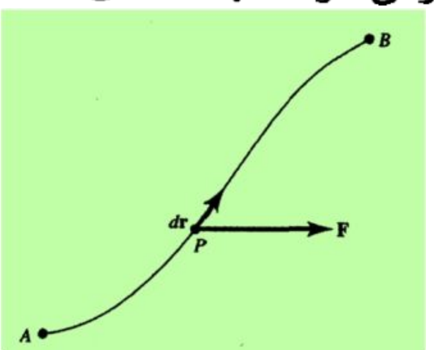
$$\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{dt}$$

$$\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d\mathbf{T}}{dt} \qquad \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int dT=T_f-T_i=\Delta T$$

$F_r dr$، یعنی مؤلفهٔ $\mathbf{F}$ موازی با بردار جابه‌جایی ذره، dr

این انتگرال در طول مسیر ذره از نقطه‌ای ابتدایی در فضا، A، تا نقطه‌ای انتهایی، B، انجام می‌شود.

نمایانگر کاری است که نیروی $\mathbf{F}$ وقتی روی ذره انجام می‌دهد که در طول مسیرش از A به B می‌رود



سمت راست این معادله تغییر خالص انرژی جنبشی ذره

$\mathbf{F}$ جمع خالص تمام نیروهای برداری وارد بر ذره است.

قضیه کار – انرژی:

معادله کار انجام‌شده روی ذره توسط نیروی خالص وارد بر آن، در حرکت از یک مکان در فضا به مکان دیگر، با اختلاف انرژی جنبشی ذره در آن دو مکان برابر است

نیروهای پایستار و میدانهای نیرو

اگر نیروی وارد بر ذره پایستار باشد،

$$F_x = -dV(x)/dx$$

کار انجام‌شده توسط چنین نیرویی در حین حرکت ذره از نقطهٔ A به نقطهٔ B درامتداد محور x

$$\int F_x dx = -\Delta V = V(A) - V(B)$$

محاسبه به اطلاعات نیرو در کل مسیر از A تا B نیاز دارد

محاسبه به پتانسیل فقط در نقاط A و B نیاز دارد

اصل کلی پایستگی انرژی کل

$$\left.\begin{aligned}\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \Delta T = T(B) - T(A)\\ \int F_x dx &= -\Delta V = V(A) - V(B)\end{aligned}\right\} \Delta T = -\Delta V$$

$$E_{tot} = V(A) + T(A) = V(B) + T(B) =$$ مقدار ثابت در سراسر حرکت ذره

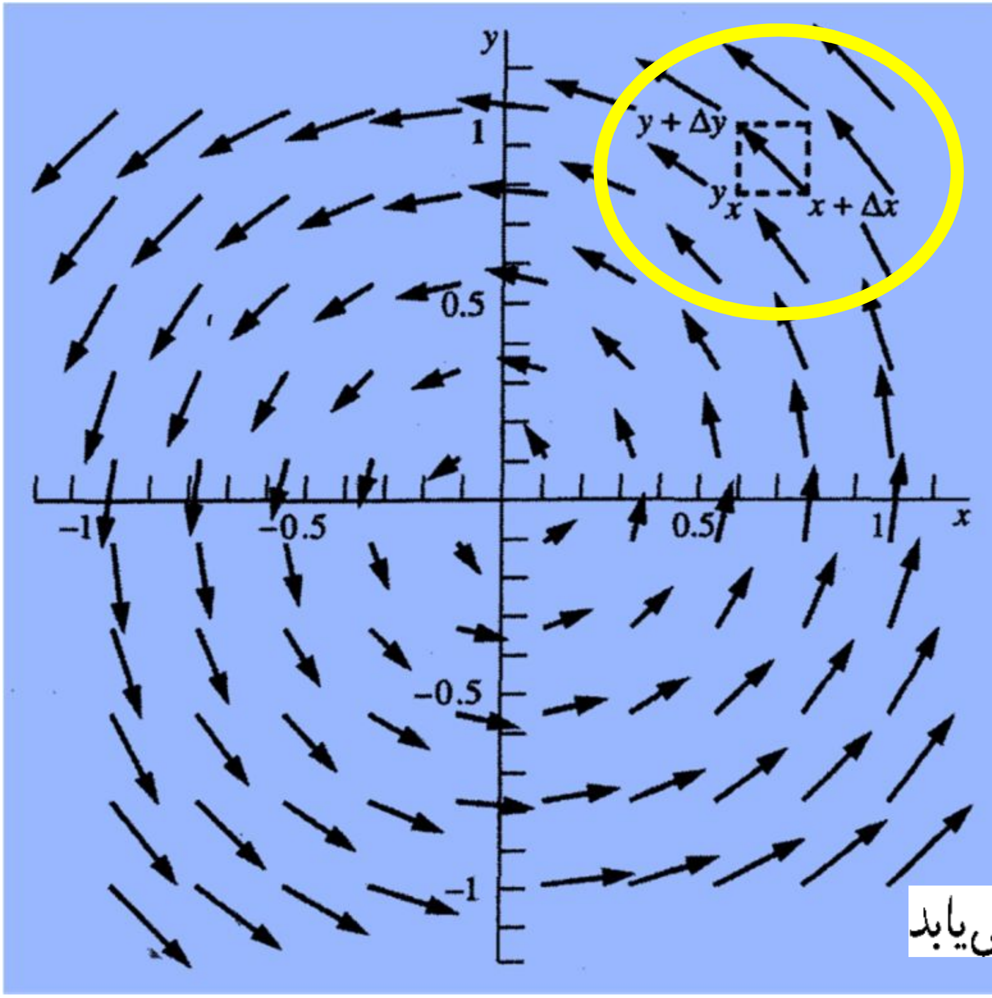
تعریف نیروی پایستار

- ❖ کار نیروی پایستار در یک چرخه صفر است
- ❖ کار نیروی پایستار مستقل از مسیر جابه جایی است و فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر بستگی دارد
- ❖ انرژی مکانیکی کل در حضور فقط نیروهای پایستار ثابت و مستقل از مکانش است

مثال

منظور از واژهٔ پایستار چیست

میدان نیروی دوبعدی شکل ۲.۱.۴



مثالی از نیروی ناپایستار

$$\mathbf{F} = -\mathbf{i}by + \mathbf{j}bx$$

$$\begin{cases} F_x = -by \\ F_y = +bx \end{cases}$$

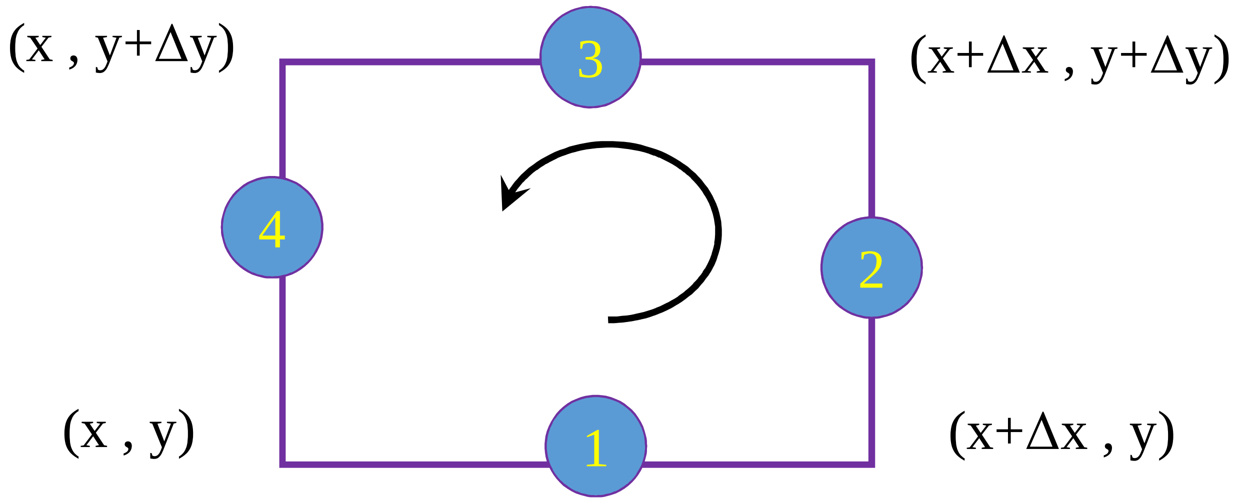
«گردش» عمومی پادساعتگرد بردارهای نیرو حول مبدأ است

بزرگی این بردارها با افزایش فاصله‌شان از مبدأ افزایش می‌یابد

«کار نیروی پایستار در یک چرخه صفر است»

الف) محاسبه کار در یک مسیر کامل مستطیلی از نقطه (x,y) به طول Δx و Δy :

$$\begin{cases} F_x = -by \\ F_y = +bx \end{cases}$$



اگر می‌توانستیم به ذره انرژی پتانسیلی نسبت دهیم که فقط به مکانش (x, y) بستگی می‌داشت، در این صورت تغییر در انرژی پتانسیلش هنگام پیمودن حلقه‌ای بسته می‌بایست صفر باشد. واضح است که هیچ راهی وجود ندارد که بتوانیم مقداری منحصربه‌فرد به انرژی پتانسیل این ذره در هر نقطهٔ خاص روی صفحهٔ xy نسبت دهیم. هر مقدار

کار انجام‌شده را در حرکت‌دادن ذرهٔ آزمون در جهت پادساعتگرد، در اطراف حلقه مستطیلی به مساحت $\Delta x \Delta y$ از نقطهٔ (x, y) و برگشت دوبارهٔ آن به همین نقطه،

$$W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} F_x(y)dx + \int_y^{y+\Delta y} F_y(x+\Delta x)dy$$

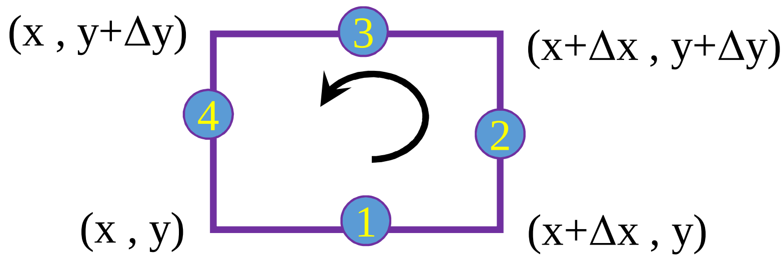
$$+ \int_{x+\Delta x}^{x} F_x(y+\Delta y)dx + \int_{y+\Delta y}^{y} F_y(x)dy$$

$$= \int_y^{y+\Delta y} (F_y(x+\Delta x) - F_y(x))dy$$

$$+ \int_x^{x+\Delta x} (F_x(y) - F_x(y+\Delta y))dx$$

$$= (b(x+\Delta x) - bx)\Delta y + (b(y+\Delta y) - by)\Delta x$$

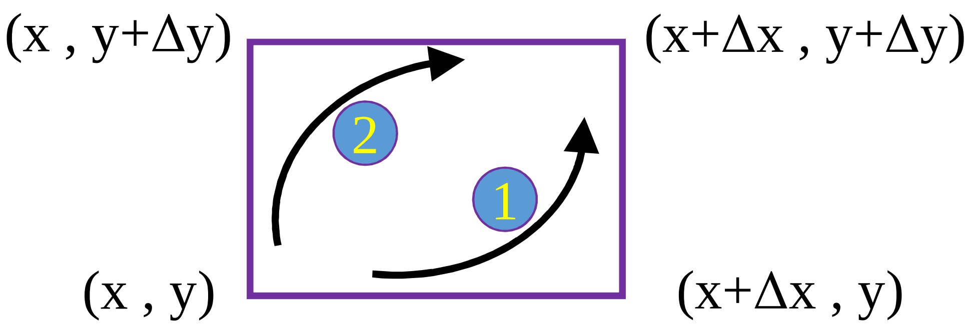
$$= ۲b\Delta x \Delta y$$



کار انجام شده در چرخه مخالف صفر شد بنابراین F نیروی ناپایستار است

«کار نیروی پایستار مستقل از مسیر جابه جایی است و فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر بستگی دارد»

ب) محاسبه کار در دو مسیر ۱و ۲ .



$$W_a = F_x(y)\,\Delta x + F_y(x+\Delta x)\,\Delta y = -b\,y\,\Delta x + b\,(x+\Delta x)\,\Delta y$$

$$W_b = F_y(x)\,\Delta y + F_x(y+\Delta y)\,\Delta x = b\,x\,\Delta y - b\,(y+\Delta y)\,\Delta x$$

مقدار کار انجام‌شده، بسته به اینکه ذره کدام مسیر را می‌پیماید، فرق می‌کند

$$W_a - W_b = 2b\,\Delta x\,\Delta y$$

کار انجام‌شده در رفتن از یک نقطه به نقطهٔ دیگر در این میدان نیرو به مسیر وابسته است،

ج)

اختلاف کار انجام‌شده در طول این دو مسیر با مقدار انتگرال کار روی حلقهٔ بسته مساوی است؛ میدان نیروی ناپایستار ایجاب می‌کند که با تاریخچهٔ کامل ذره برای محاسبهٔ کار انجام‌شده و، و، بنابراین با انرژی جنبشی کسب‌شدهٔ آن، آشنا باشیم.

مفهوم انرژی پتانسیل، که ممکن است از آن نیرو به‌دست آید در این حالت خاص بی‌معنی می‌شود

د) تنها راهی که بتوانیم مقدار منحصربه‌فردی به تابع انرژی پتانسیل نسبت بدهیم این خواهد بود که انتگرال کار روی مسیر بسته صفر شود. در چنین حالتهایی، کار انجام‌شده در طول یک مسیر از A به B باید مستقل از مسیر و با اتلاف انرژی پتانسیل و کسب انرژی جنبشی برابر باشد

شرایط نیرو برای صفر شدن انتگرال کار در یک حلقه

روش بدست آوردن قید: محاسبهٔ نیروها در $x+\Delta x$ و $y+\Delta y$

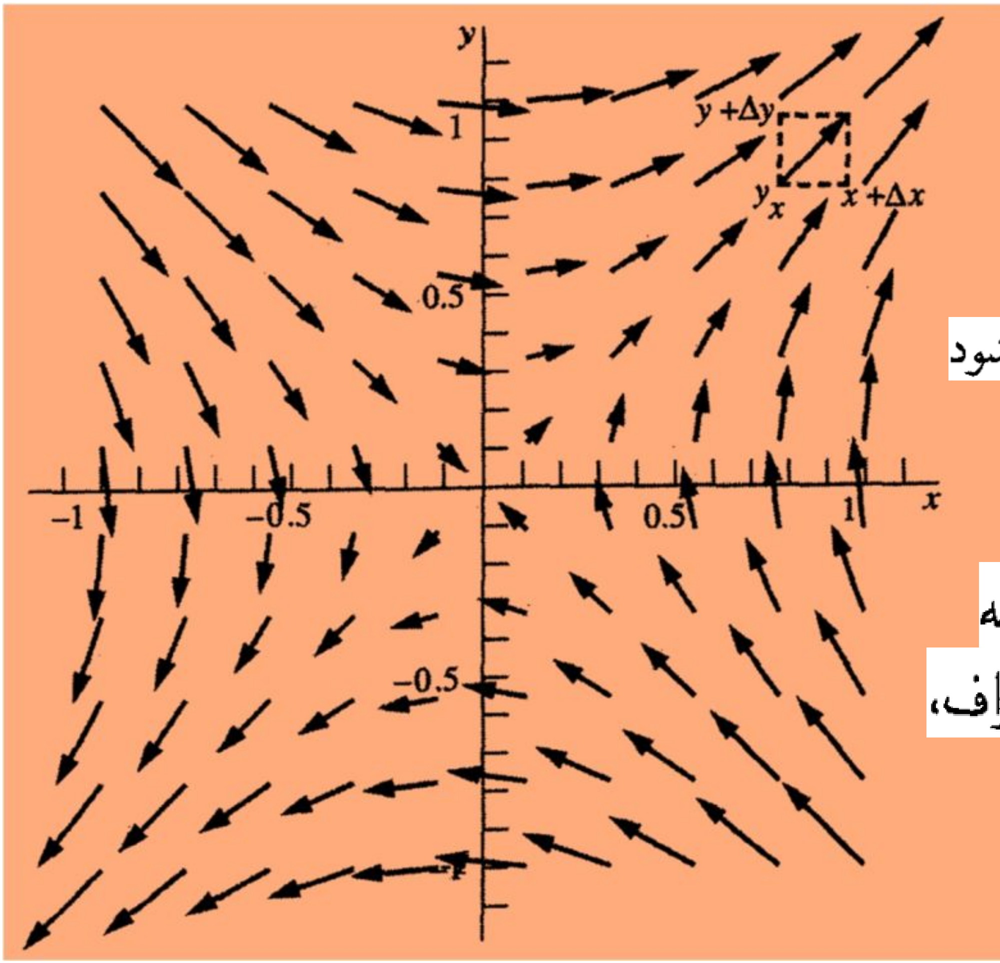
بهره‌گیری از بسط تیلور و سپس واردکردن بسط حاصل در انتگرال کار

$$W = \int_y^{y+\Delta y} (F_y(x+\Delta x) - F_y(x))dy + \int_x^{x+\Delta x} (F_x(y) - F_x(y+\Delta y))dx$$

$$F_x(y+\Delta y) = F_x(y) + \frac{\partial F_x}{\partial y}\Delta y \qquad F_y(x+\Delta x) = F_y(x) + \frac{\partial F_y}{\partial x}\Delta x$$

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_y^{y+\Delta y} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\Delta x\right) dy - \int_x^{x+\Delta x} \left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\Delta y\right) dx$$
$$= \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y$$

مثالی از نیروی پایستار



$$\begin{cases} F_x = +by \\ F_y = +bx \end{cases}$$

کار انجام‌شده بر واحد سطح در ضمن پیمودن حلقهٔ بسته، صفر می‌شود

؟

مقدار انتگرال روی حلقهٔ بسته به دقتی بستگی دارد که با آن بردار $\mathbf{F}$ جهت و بزرگیش را حین حرکت در اطراف، روی صفحهٔ xy تغییر می‌دهد.

سازوکار تشخیص پایدار بودن یا ناپایدار بودن نیرو

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \begin{cases} = 0 & \text{نیروی پایستار} \\ \neq 0 & \text{نیروی نا پایستار} \end{cases}$$

در مثال اول حاصل انتگرال کار برابر با 2b پس نیروی F در آن نیروی ناپایستار است

$$\begin{cases} F_x = -by \\ F_y = +bx \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = +b - (-b) = 2b$$

در مثال دوم حاصل انتگرال کار برابر با صفر است پس نیروی F نیروی پایستار است

$$\begin{cases} F_x = +by \\ F_y = +bx \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = +b - (b) = 0$$

قضية استوكس

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_s \text{curl } \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

$$\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla \times F = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}$$

بنا بر این قضیه، انتگرال خطی روی حلقهٔ بستهٔ هر تابع برداری $\mathbf{F}$، با انتگرال $\operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da$ روی سطح S برابر است که حلقهٔ بسته آن را محصور کرده است. بردار $\mathbf{n}$ عبارت است از بردار یکهٔ عمود بر عنصر سطحی که روی آن انتگرال‌گیری می‌شود و مساحت این عنصر سطح da است. جهت آن، جهت پیش‌روی پیچ راستگرد است که در همان جهت چرخشی پیچیده می‌شود که حلقهٔ بسته را دور می‌زند. در شکل ۲.۱.۴، $\mathbf{n}$ باید به سمت خارج از صفحهٔ کاغذ متوجه باشد؛ سطح مساحت مستطیلی است که به‌وسیلهٔ حلقهٔ مستطیلی خط‌چین‌شده محصور شده باشد. بنابراین، صفرشدن $\operatorname{curl} \mathbf{F}$ تضمین می‌کند که انتگرال خطی $\mathbf{F}$ روی مسیر بسته صفر و از این‌رو، $\mathbf{F}$ نیروی پایستار باشد.

۲.۴ تابع انرژی پتانسیل در حرکت سه‌بعدی: عملگر دِل

فرض کنید بر ذرهٔ آزمون نیرویی وارد می‌آید که تاو آن صفر است.

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=0 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_z}{\partial y}-\dfrac{\partial F_y}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z}-\dfrac{\partial F_z}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x}-\dfrac{\partial F_x}{\partial y}=0 \end{cases}$$

تاو صفر می‌شود، اگر $\mathbf{F}$ را از تابع انرژی پتانسیل، $V(x, y, z)$، طبق رابطهٔ زیر به‌دست آوریم

$$F_x=-\frac{\partial V}{\partial x} \qquad F_y=-\frac{\partial V}{\partial y} \qquad F_z=-\frac{\partial V}{\partial z}$$

برای مولفه x کرل F

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\\
&\frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right)=-\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}=-\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial y}\\
&\frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial y}=-\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}
\end{aligned}\right\}\ \frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}=0$$

برای مولفه z کرل F

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\\
&\frac{\partial F_y}{\partial x}=-\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x}\\
&\frac{\partial F_x}{\partial y}=-\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x}
\end{aligned}\right\}\ \frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}=0$$

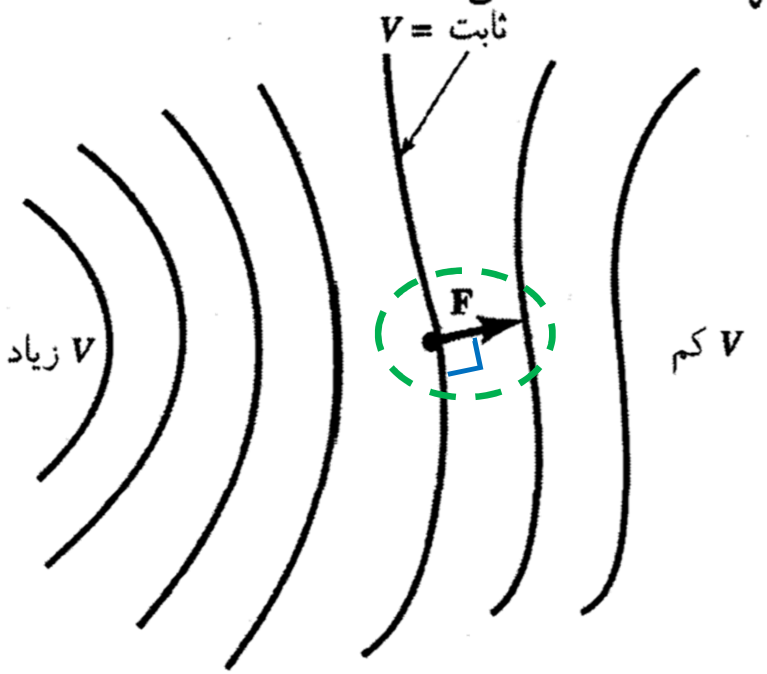
- جزء آخر در صورتی برقرار است که فرض کنیم V در هر جا پیوسته و مشتق‌پذیر باشد.
- $\mathbf{F}$ را می‌توان از تابع انرژی پتانسیل به‌دست آورد
- $\operatorname{curl} \mathbf{F} = 0$ شرط لازم و کافی برای وجود $V(x, y, z)$ است
- $$\mathbf{F} = -\mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x} - \mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y} - \mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = -\nabla V$$

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

تعبیر ریاضی، گرادیان

گرادیان هر تابع، برداری است که جهت و بزرگی بیشینهٔ مشتق فضایی تابع را نشان می‌دهد.

یا گرادیان منفی تابع انرژی پتانسیل جهت و بزرگی نیروی وارد بر ذره‌ای را مشخص می‌کند که در میدان حاصل از سایر ذرات قرار گرفته است. معنای علامت منفی آن است که ذره ناگزیر در جهت کاهش انرژی پتانسیل حرکت می‌کند تا در جهت مخالف آن



$$\vec{\nabla} A . d\vec{r} = dA$$

$$dA = A(x+dx) - A(x)$$

شرط پایسته‌بودن نیرو $\qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = 0$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = 0$$

در این صورت $\mathbf{F}$ می‌تواند از تابع اسکالر V با عملیات $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$ به‌دست آید

زیرا $0 \equiv \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} V$ یا کرل هر گرادیان صفر است

تعمیم اصل پایستگی انرژی را به سه بعد

الف) طبق تعریف تابع پتانسیل برای نیروی پایستار

$$\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_A^B \overbrace{\boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}}^{\text{دیفرانسیل کامل برای نیروی پایستار}} = -\int_{A_y}^{B_x} \frac{\partial V}{\partial x}dx - \int_{A_y}^{B_y} \frac{\partial V}{\partial y}dy - \int_{A_z}^{B_z} \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$= -\int_A^B dV(\mathbf{r}) = -\Delta V = V(A) - V(B)$$

ب) طبق قضیه کار- انرژی

$$\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \Delta T = -\Delta V$$

$$\therefore \Delta(T+V) = 0$$

$$\therefore T(A) + V(A) = T(B) + V(B) = E = \text{ثابت}$$

$$\boxed{E_1 = E_2}$$

ب) برای نیروی ناپایستار

اگر $\mathbf{F}'$ نیرویی ناپایستار باشد، نمی‌توان آن را مساوی $-\nabla V$ قرار داد. افزایش کار $\mathbf{F}' \cdot d\mathbf{r}$ دیفرانسیل کامل نیست و نمی‌تواند با $-dV$ مساوی قرار داده شود. در آن حالتی که هم نیروهای پایستار $\mathbf{F}$ و هم نیروهای ناپایستار $\mathbf{F}'$ حضور دارند، افزایش کار کل عبارت است از

شکل تعمیم‌یافتهٔ قضیهٔ کار و انرژی

$$(\mathbf{F} + \mathbf{F}') \cdot d\mathbf{r} = -dV + \mathbf{F}' \cdot d\mathbf{r} = dT$$

$$\int_A^B \mathbf{F}' \cdot d\mathbf{r} = \Delta(T + V) = \Delta E$$

کار نیروی ناپایستار $\Delta E = \int F'.dr$

انرژی کل، E، در طی حرکت ذره ثابت نمی‌ماند

بلکه بسته به ماهیت نیروی ناپایستار $\mathbf{F}'$ افزایش یا کاهش می‌یابد.

در مورد نیروهای اتلاف‌گری چون اصطکاک و مقاومت هوا، جهت $\mathbf{F}'$ همیشه برخلاف حرکت است

انرژی کل ذره کاهش می‌یابد.

مثال تابع انرژی پتانسیل دوبعدی زیر مفروض است:

$$V(\mathbf{r}) = V_0 - \frac{1}{2}k\delta^2 e^{-r^2/\delta^2}$$

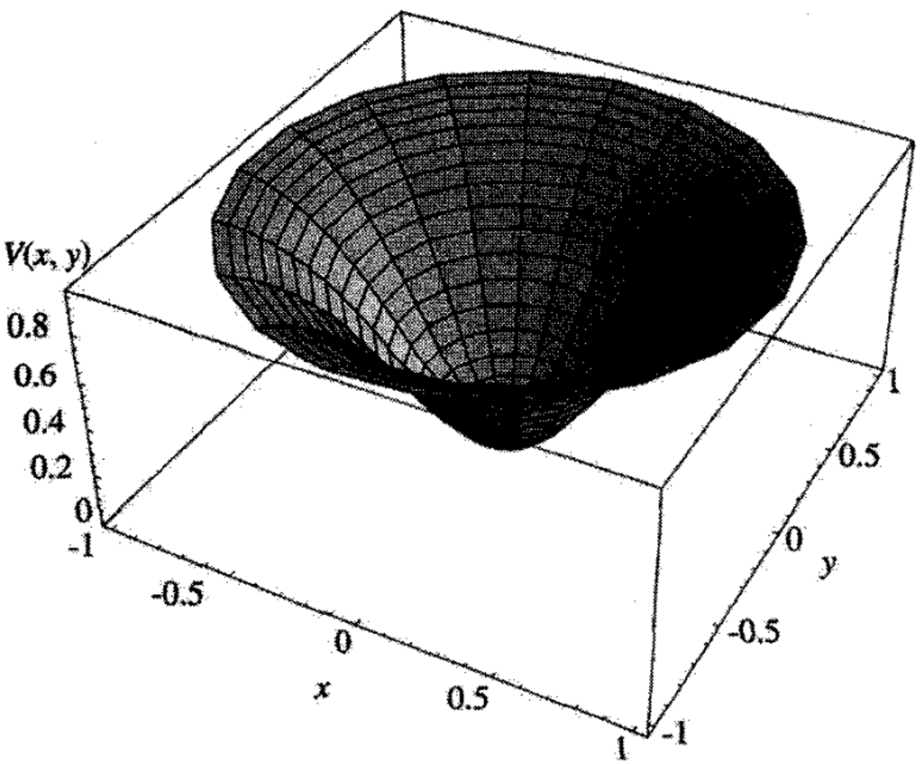
که $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$، و V_0، k، و δ ثابت‌اند. تابع نیرو را پیدا کنید.

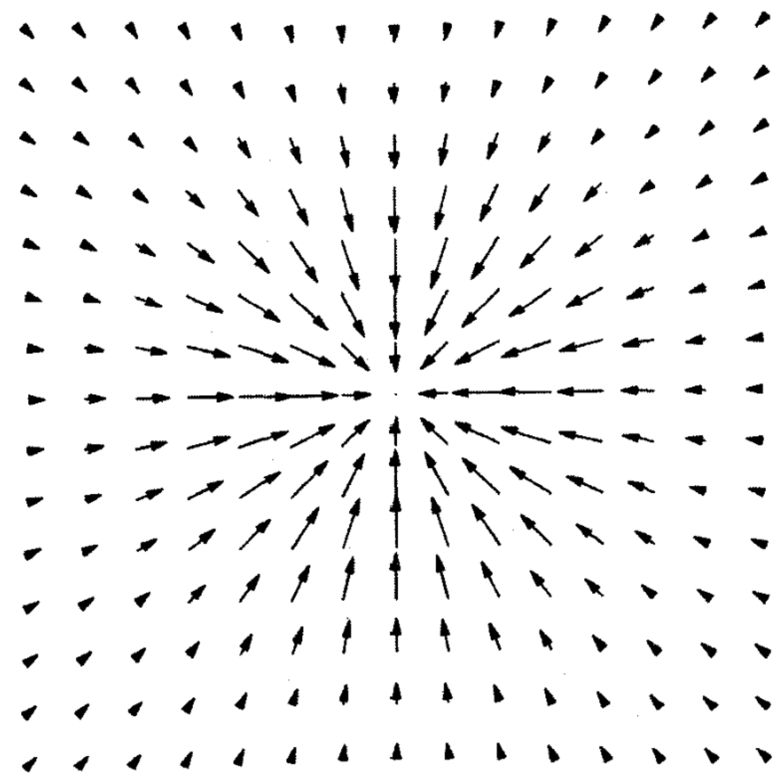
حل:

تابع انرژی پتانسیل را به‌صورت تابعی از x و y

$$V(x,y) = V_0 - \frac{1}{2}k\delta^2 e^{-(x^2+y^2)/\delta^2}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} V &= -\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\right) V(x,y) \\
&= -k(\mathbf{i}x + \mathbf{j}y)e^{-(x^2+y^2)/\delta^2} \\
&= -k\mathbf{r}e^{-r^2/\delta^2}
\end{aligned}$$





تابع انرژی پتانسیل

$$V(x,y) = V_0 - \frac{1}{2}k\delta^2 e^{-(x^2+y^2)/\delta^2}$$

گرادیان میدان نیروی تابع انرژی پتانسیل

$$\mathbf{F} = -\Delta V - k(\mathbf{i}x + \mathbf{j}y)e^{-(x^2+y^2)/\delta^2}$$

1 ثابت V_0 در تابع نیرو ظاهر نمی‌شود؛ مقدار آن دلخواه است.

2 ثابت V_0 تابع انرژی پتانسیل را با بزرگی ثابتی در همه جای صفحهٔ xy افزایش یا کاهش می‌دهد.

3 «حفره» در سطح انرژی پتانسیل به بزرگترین عمق خود در مبدأ می‌رسد که آشکارا مکان یک چشمهٔ ربایش است

4 دایره‌های هم‌مرکز اطراف مرکز حفره هم‌پتانسیل، خطوطی با انرژی پتانسیل ثابت، هستند

5 خطوط شعاعی، خطوطی با تندترین شیب‌اند که گرادیان سطح انرژی پتانسیل را ترسیم می‌کنند

6 شیب هر خط شعاعی در هر نقطه روی سطح متناسب با نیرویی است که در آنجا بر ذره وارد می‌آید

7 بردارهای نیرو به‌سمت مبدأ متوجه‌اند.

8 این بردارها هم دور از مبدأ و هم نزدیک جایی که شیب تابع انرژی پتانسیل به صفر میل می‌کند، ضعیف می‌شوند.

مثال فرض کنید ذره‌ای به جرم m در میدان نیروی مشروح در بالا حرکت می‌کند و در لحظهٔ $t = 0$ ذره با سرعت v_0 از مبدأ می‌گذرد. سرعت ذره در فاصلهٔ کمی دور از مبدأ که با $\mathbf{r} = \mathbf{e}_r \Delta$ و $\Delta \ll \delta$ مشخص می‌شود، چقدر خواهد بود؟

نیرو پایستار است، زیرا تابع انرژی پتانسیل وجود دارد.

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r}e^{-r^2/\delta^2}$$

$$E = T + V = \text{ثابت}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}mv_0^2 + V(0)$$

حل این معادله برحسب v

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2}{m}[V(0) - V(\mathbf{r})]$$

$$F=-\frac{dV}{dr} \quad \Rightarrow \quad dV=-Fdr$$

$$V(r)-V_0=-\int_{r=0}^{r}-kre^{-r^2/\delta^2}dr=-\frac{1}{2}k\delta^2 e^{-r^2/\delta^2}\Big|_{r=0}^{r}$$

$$V(r)-V_0=-\frac{1}{2}k\delta^2(e^{-r^2/\delta^2}-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} V_0-V(r)=-\frac{1}{2}k\delta^2(1-e^{-r^2/\delta^2}) \\ v^۲=v_۰^۲+\frac{۲}{m}[V(۰)-V(\mathbf{r})] \end{array}\right\} v^۲=v_۰^۲-\frac{k\delta^۲}{m}[۱-e^{-\Delta^۲/\delta^۲}]$$

بسط تیلور $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots$ $\longrightarrow$ $\approx v_۰^۲-\frac{k\delta^۲}{m}[۱-(۱-\Delta^۲/\delta^۲)]$

$x=\frac{\Delta^2}{\delta^2}<<<1$

$$=v_۰^۲-\frac{k}{m}\Delta^۲$$

مثال

آیا میدان نیروی $\mathbf{F} = \mathbf{i}xy + \mathbf{i}xz + \mathbf{k}yz$ پایستار است؟

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & xz & yz \end{vmatrix} = \mathbf{i}(z-x) + \mathbf{j}\circ + \mathbf{k}(z-x)$$

رابطهٔ آخری به‌ازای تمام مقادیر مختصات صفر نیست. از این رو میدان پایستار نیست.

مثال

به‌ازای چه مقادیری از ثابتهای a، b، و c نیروی $\mathbf{F} = \mathbf{i}(ax + by^۲) + \mathbf{j}cxy$ پایستار است؟

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ ax + by^۲ & cxy & ۰ \end{vmatrix} = \mathbf{k}(c - ۲b)y$$

این رابطه نشان می‌دهد که نیرو پایستار است به‌شرطی که $c = ۲b$. مقدار a بی‌تأثیر است.

مثال با بهره‌گیری از تاو نشان دهید که قانون نیروی عکس مجذوری در سه بعد، $\mathbf{F} = (-k/r^۲)\mathbf{e}_r$، پایستار است. از مختصات کروی بهره گیرید. تاو در پیوست و به‌صورت زیر آمده است:

$F_r = -\frac{k}{r^۲}$، $F_\theta = ۰$، و $F_\phi = ۰$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{۱}{r^۲ \sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta r & \mathbf{e}_\phi r \sin\theta \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & rF_\theta & rF_\phi \sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\mathbf{e}_\theta}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{-k}{r^۲}\right) - \frac{\mathbf{e}_\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{-k}{r^۲}\right) = ۰$$

هر دو مشتق جزئی صفر است.