بسم الله الرحمن الرحیم
سنة ١٤٣٦
احسان هنسار
١٣٩٤٠

جلسه دهم

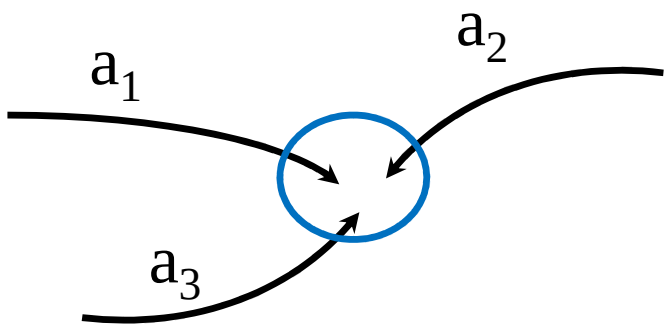
امواج عرضی (۳)

تداخل امواج (interference)

همپوشانی امواج در فضا

اصل برهم نهی:

اگر چندین اثر به طور همزمان در یک نقطه رخ دهند، اثر خالص آنها برابر با حاصل جمع تک تک آنها است



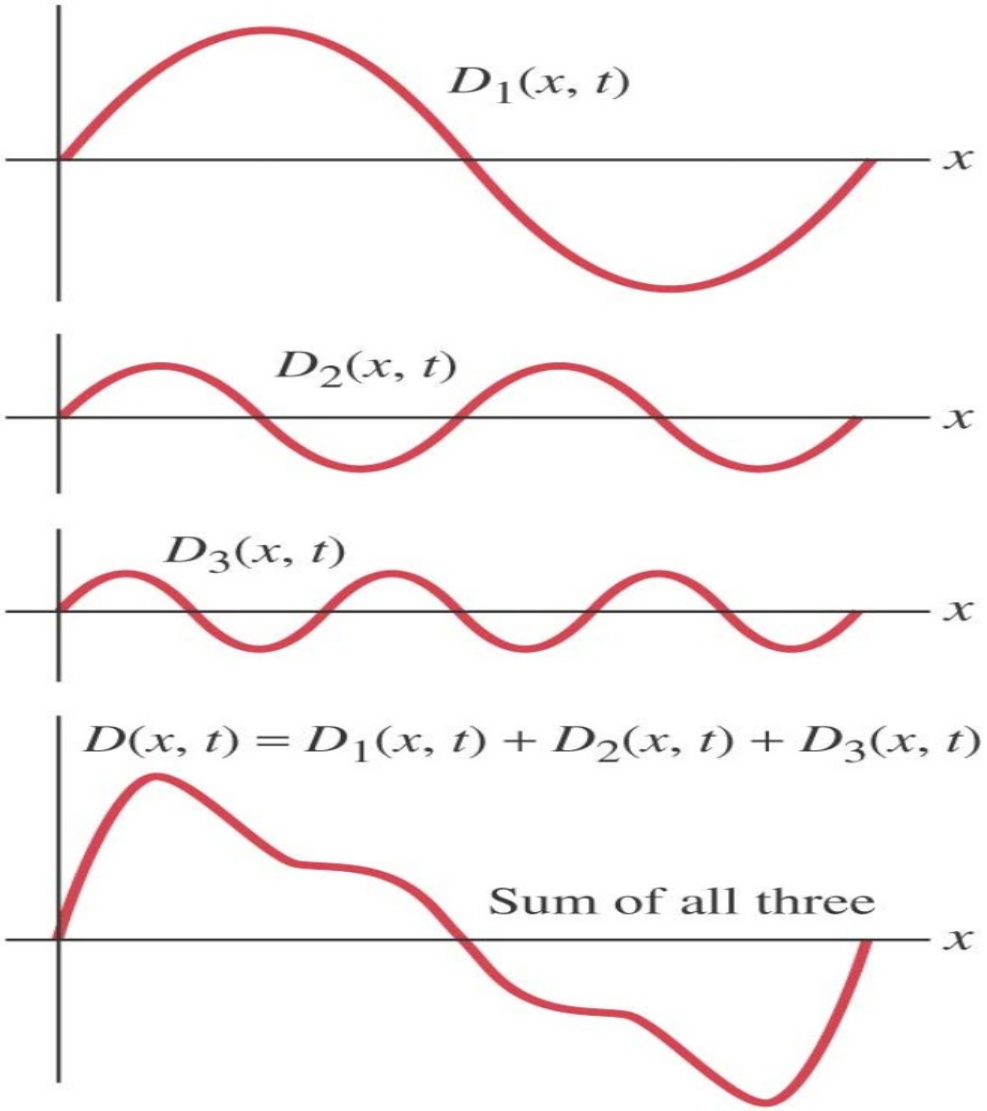
$$a_1 + a_2 + a_3 = a_t$$

تداخل امواج با توجه به

دامنه

و بسامد

و اختلاف فاز



الف) تداخل دو موج هم دامنه و هم فرکانس و دارای اختلاف فاز

فرضها:

$$y_1(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

دو موج سینوسی

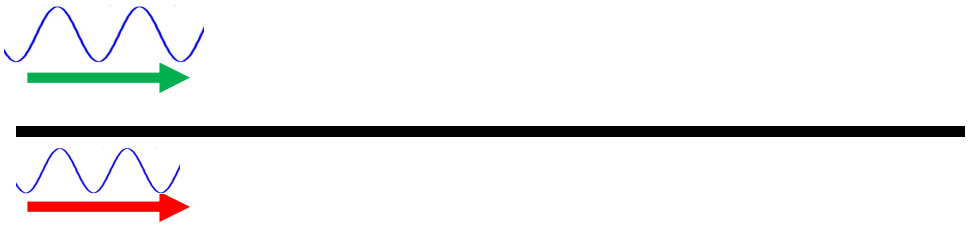
$$y_2(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$$

با فرکانس یکسان

با طول موج یکسان

با دامنه یکسان

امتداد انتشار یکسان و در امتداد سیم کشیده



موج ها هم جهت

دو موج نسبت به هم دارای اختلاف فاز ϕ

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$y(x,t) = y_m[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \phi)]$$

استفاده از معادله مثلثاتی مقابل

$$Sin\alpha + Sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\frac{\alpha + \beta}{2})\cos(\frac{\alpha - \beta}{2})\}$$

$$y(x,t) = y_m \times 2\sin\frac{1}{2}\{(kx - \omega t) + (kx - \omega t + \phi)\} \times \cos\frac{1}{2}\{(kx - \omega t) - (kx - \omega t + \phi)\}$$

$$y(x,t) = [2y_m \cos(\frac{\phi}{2})][\sin(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi)]$$

نتایج: $y(x,t) = [2y_m \cos(\frac{\phi}{2})][\sin(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi)]$

- موج موج حاصل از برهم نهی سینوسی است
- هم فرکانس با دو موج
- با طول موج یکسان با دو موج
- امتداد و جهت انتشار موج حاصل برهم نهی همان امتداد و جهت موج ها
- دامنه موج حاصل $y'_m = 2y_m \cos(\frac{\emptyset}{2})$
- ثابت فاز موج حاصل نسبت به هر موج دارای اختلاف فاز $\frac{\emptyset}{2}$

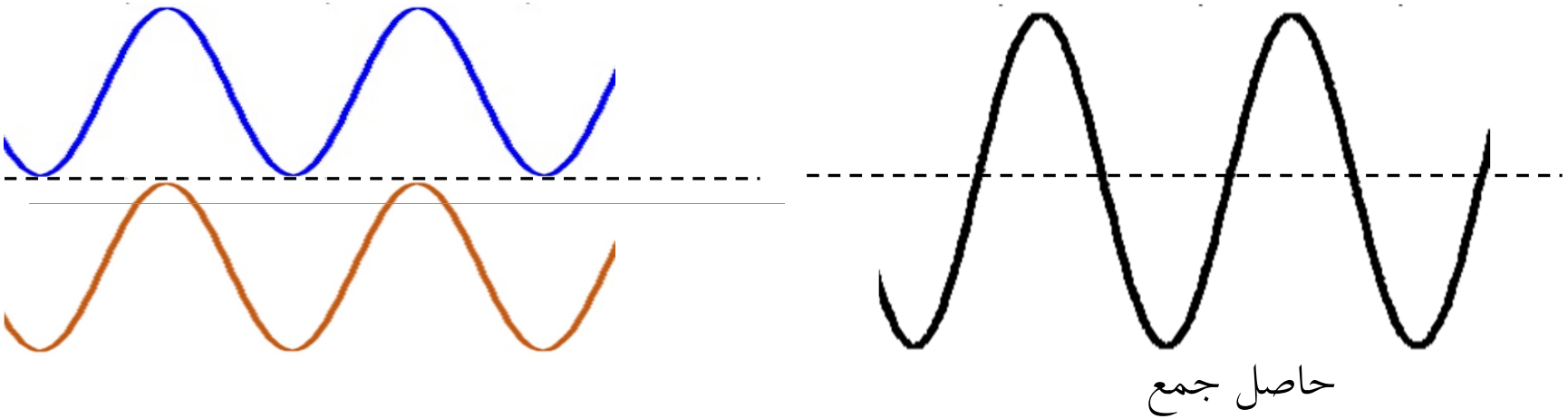
❑ تداخل سازنده

اگر $\phi = 0$ دو موج اولیه هم فاز باشند

$$\cos(\frac{\phi}{2}) = 1$$

$$y(x,t) = \underbrace{2y_m}\sin(kx - \omega t)$$

دامنه موج حاصل جمع = دو برابر دامنه هر موج اولیه



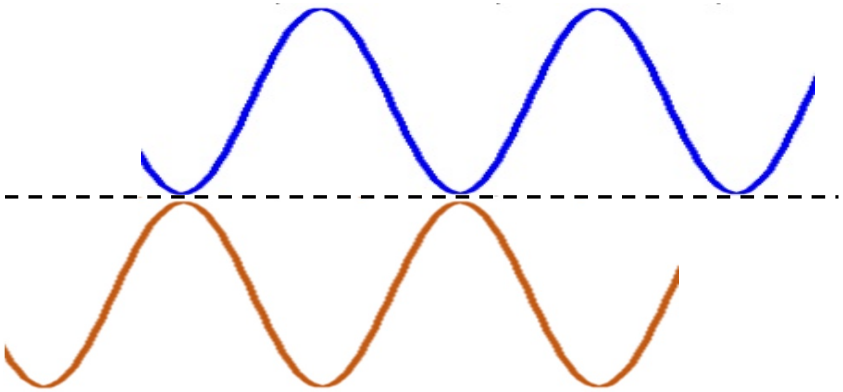
حاصل جمع

❑ تداخل ویرانگر

اگر $\phi = \pi$ دو موج اولیه در فاز مخالف باشند

$$\cos(\frac{\phi}{2}) = 0$$

$$y(x,t) = 0$$



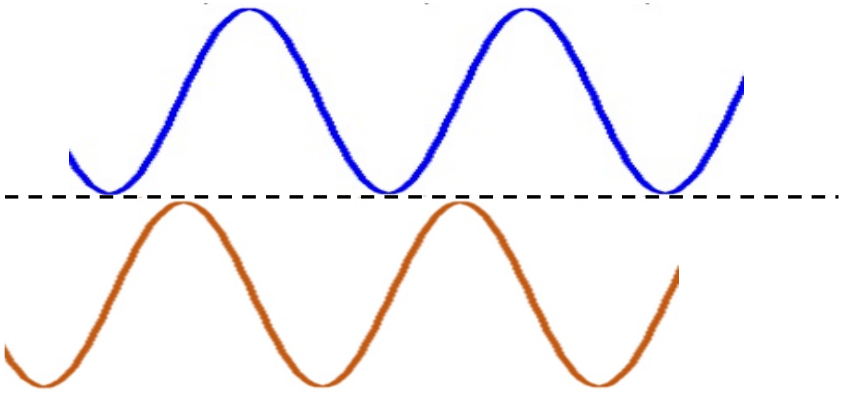
حاصل جمع

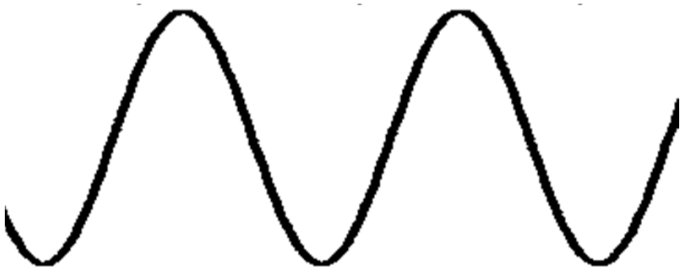
❑ حالات بینابینی

اگر $0 < \phi < \pi$ دو موج اولیه دارای اختلاف فاز خیر از صفر و π

$$0 < \cos(\frac{\phi}{2}) < 1$$

$$y(x,t) = \underbrace{[2y_m \cos(\frac{\phi}{2})]}_{\text{دامنه موج حاصل جمع}}[\sin(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi)]$$





حاصل جمع

ب) تداخل دو موج هم فرکانس ولی با دامنه های مختلف (روش فازوری)

فرضها:

دو موج سینوسی

با فرکانس یکسان

با طول موج یکسان

با دامنه متفاوت

امتداد انتشار یکسان و در امتداد سیم کشیده

موج ها هم جهت

دو موج نسبت به هم دارای اختلاف فاز ϕ

روش فازوری

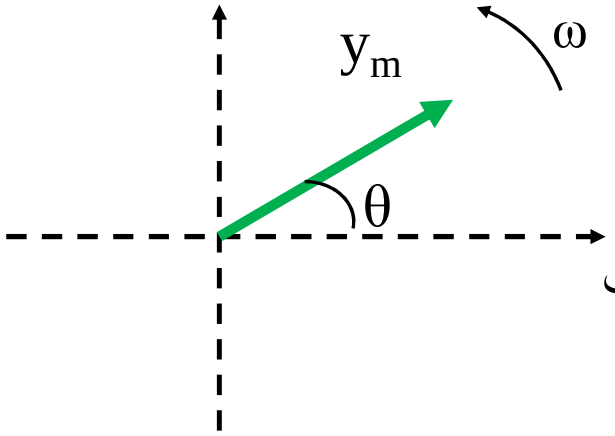
روشی مبتنی بر نمایش هندسی – تحلیلی بردارهای فازور منسوب به امواج

فازور: به هر موج یک برداری نسبت داده می شود که حول مبدا مختصات می چرخد

اندازه بردار: دامنه موج

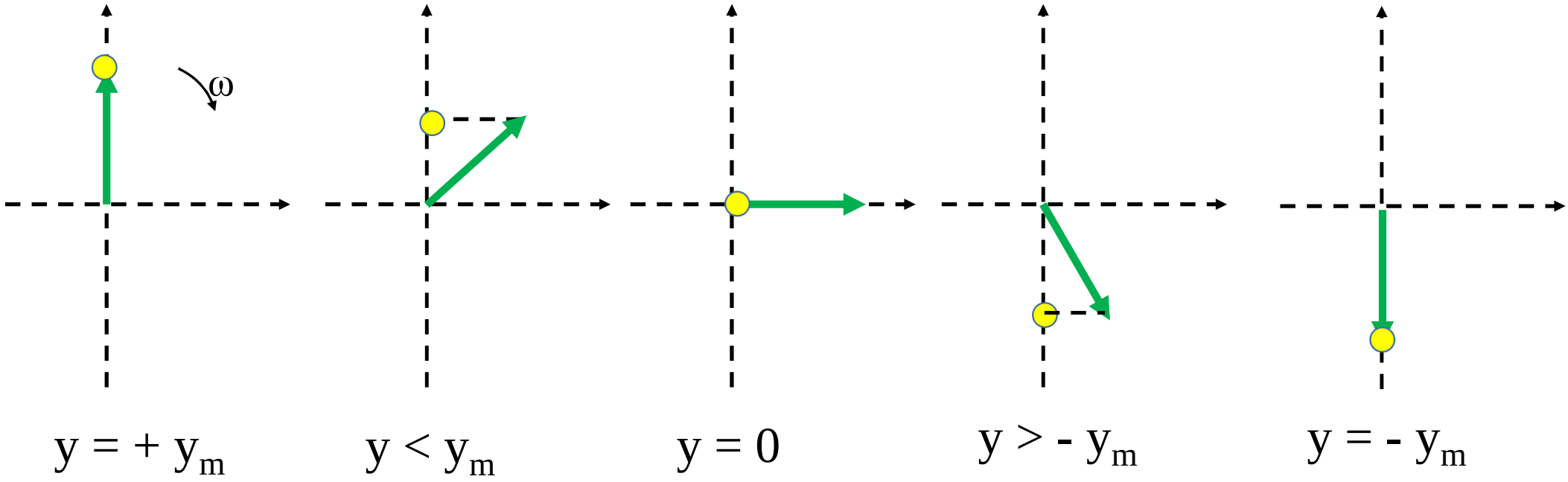
راستای بردار: شعاعی و در حال چرخش با سرعت زاویه ای ω معادل با بسامد زاویه ای موج

جهت: به سمت بیرون از مبداء



زاویه بردار فازور نسبت به جهت مثبت x به اندازه زاویه فاز آن است

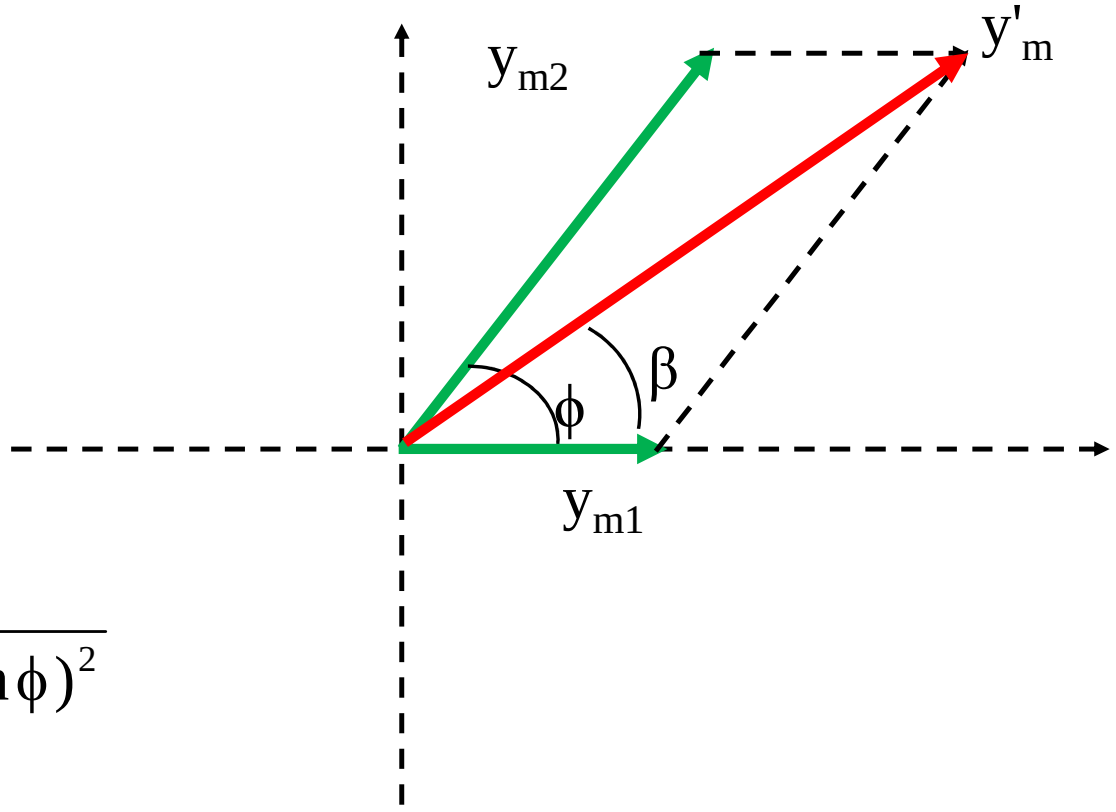
تصویر بردار فاز روی محور عمودی = با حرکت نوسانی المانهای سیم هنگام عبور موج



$$y_1(x,t) = y_{m1}\sin(kx-\omega t)$$

$$y_2(x,t) = y_{m2}\sin(kx-\omega t+\phi)$$

$$y'(x,t) = y'_m\sin(kx-\omega t+\beta)$$



$$y'_m = \sqrt{(y_{m1}+y_{m2}\cos\phi)^2+(y_{m2}\sin\phi)^2}$$

$$\tan\beta = \frac{y_{m2}\sin\phi}{y_{m1}+y_{m2}\cos\phi}$$

ج) تداخل دو موج هم فرکانس هم دامنه که در جهت های مخالف در حرکتند (تشکیل موج ایستاده)

فرضها:

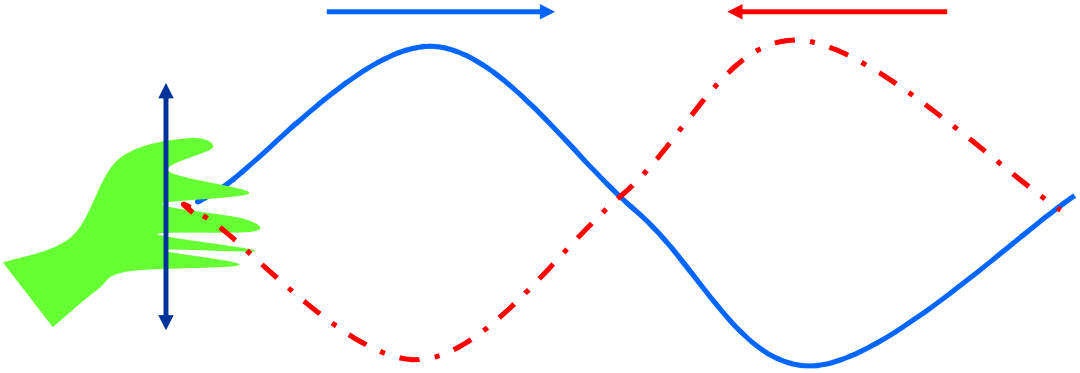
دو موج سینوسی

با فرکانس یکسان

با طول موج یکسان

با دامنه یکسان

امتداد انتشار یکسان و در امتداد سیم کشیده



موج ها در جهت مخالف

دو موج نسبت هم فاز

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t)$$

$$y(x,t) = y_m[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \phi)]$$

استفاده از معادله مثلثاتی مقابل

$$Sin\alpha + Sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\frac{\alpha + \beta}{2})\cos(\frac{\alpha - \beta}{2})\}$$

$$y(x,t) = y_m \times 2\sin\frac{1}{2}\{(kx - \omega t) + (kx + \omega t)\} \times \cos\frac{1}{2}\{(kx - \omega t) - (kx + \omega t)\}$$

$$y(x,t) = [2y_m \sin kx][\cos\omega t]$$

نکات:

۱- جدا شدن تابعیت زمانی که سبب می شود دیگر موج حاصل جمع، موج رونده نباشد و یک موج ایستا باشد.

شکل تابع موج رونده $y(x,t) \propto \sin(kx-\omega t) \quad or \quad \cos(kx-\omega t)$

شکل تابع موج ایستاده $y(x,t) \propto \sin kx \times \cos \omega t$

۲- هنگام عبور موج؛ هر المان از سیم با دامنه مشخص و خاص خود نوسان می کند.

برای المان واقع در مکان x روی سیم دامنه = $|2\ y_m \sin kx|$

$$y(x,t) = \underbrace{[2y_m \sin kx]}_{\text{دامنه موج در نقطه x}}\underbrace{[\cos \omega t]}_{\text{تابعیت نوسانی}}$$

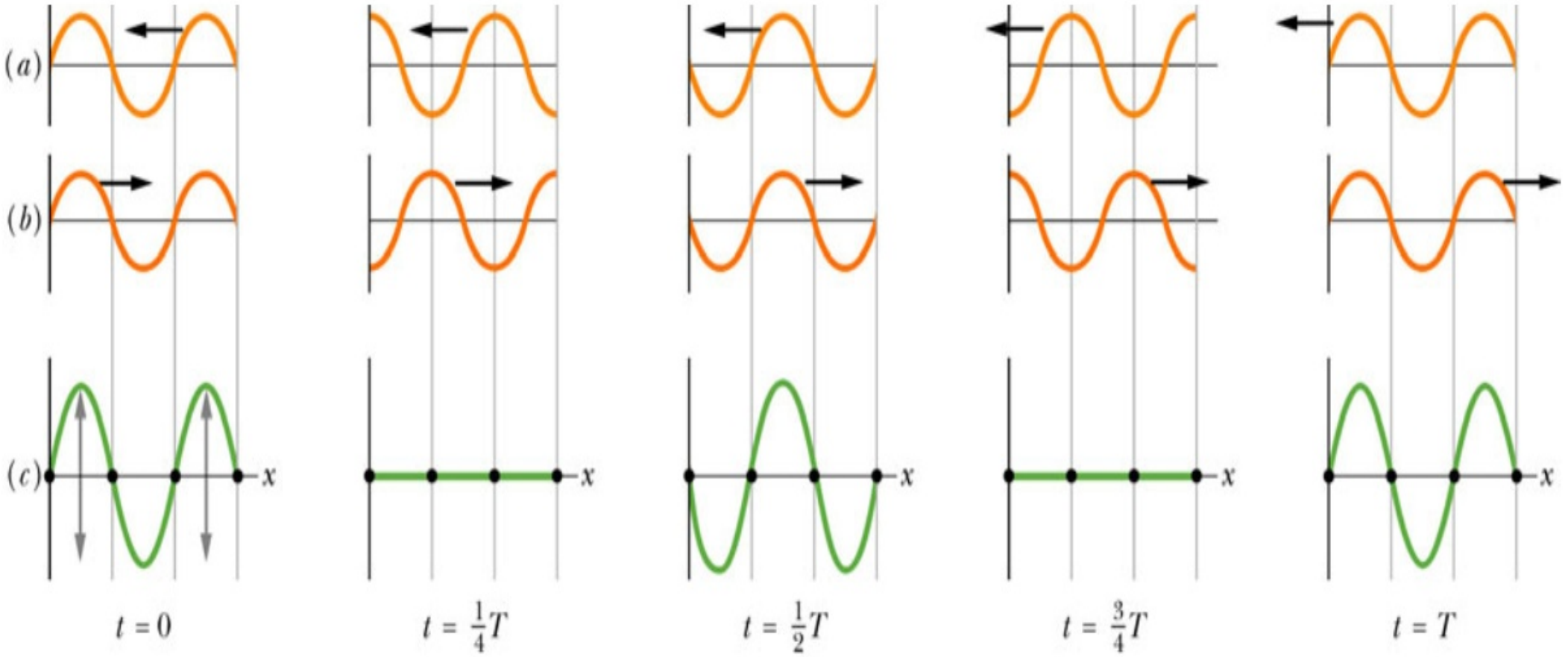
برای نقطه x ثابت است

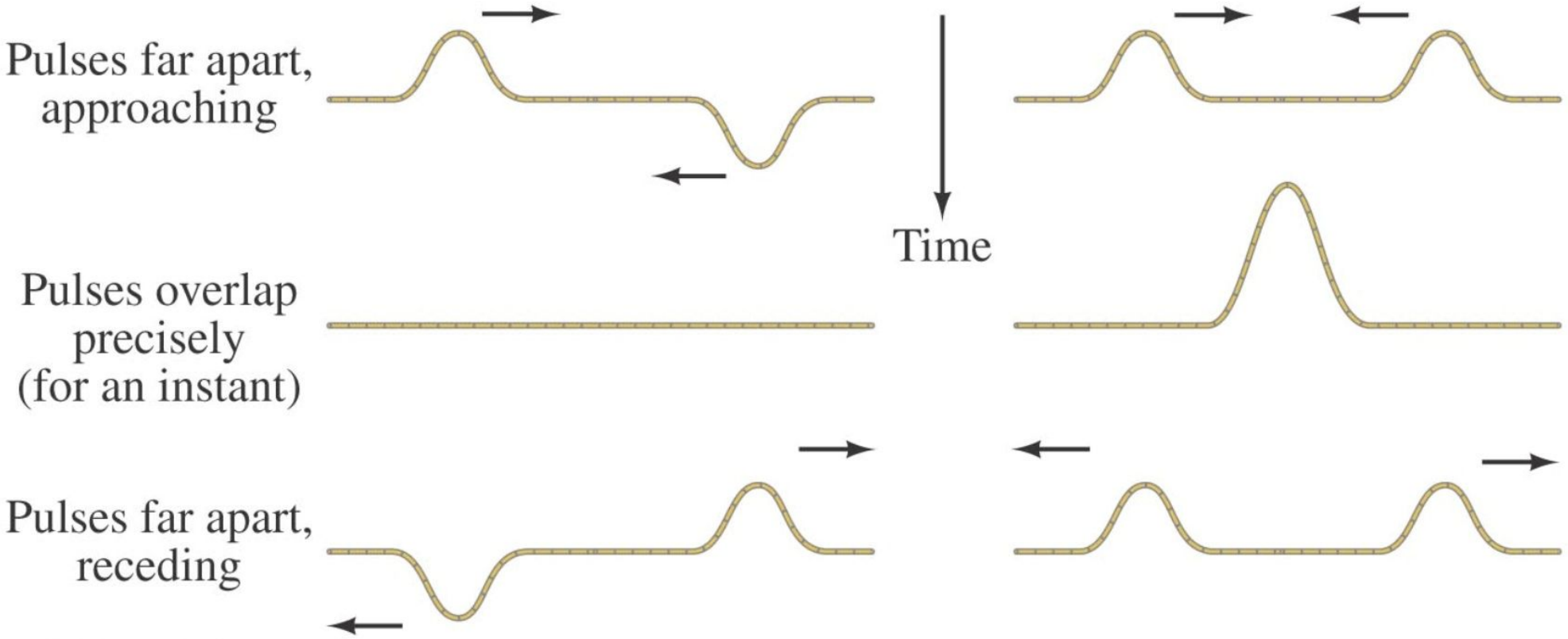
۳- دامنه هر المان از سیم وابسته به مکان آن بین صفر تا $2\ y_m$ تغییر می کند $0 \le |\sin kx| \le 1$

۴- تفاوت موج رونده و موج ایستاده از لحاظ دامنه

- ❖ دامنه موج رونده برای همه نقاط سیم یکسان است
- ❖ دامنه موج ایستاده برای نقاط مختلف سیم متفاوت و تابع مکان هر نقطه است

۵- موج ایستاده با گذشت زمان در یک دوره تناوب





Film 1 & 2

Destructive interference

Constructive interference

۶- نقاط گره:

نقاطی با دامنه صفر

این نقاط با گذشت زمان هیچ نوسانی نخواهند داشت یا به عبارتی همواره ساکن خواهند بود

$$\sin kx = 0 \quad \rightarrow \quad y(t) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} kx = n\pi \quad , \quad n = 0\,,1\,,2\,,\cdots \\ k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \end{array}\right\} x = n\frac{\lambda}{2}$$

فاصله بین دو گره متوالی $\lambda/2$

۶- نقاط شکم:

نقاطی با دامنه بیشینه

این نقاط با گذشت زمان نوسان خواهند داشت

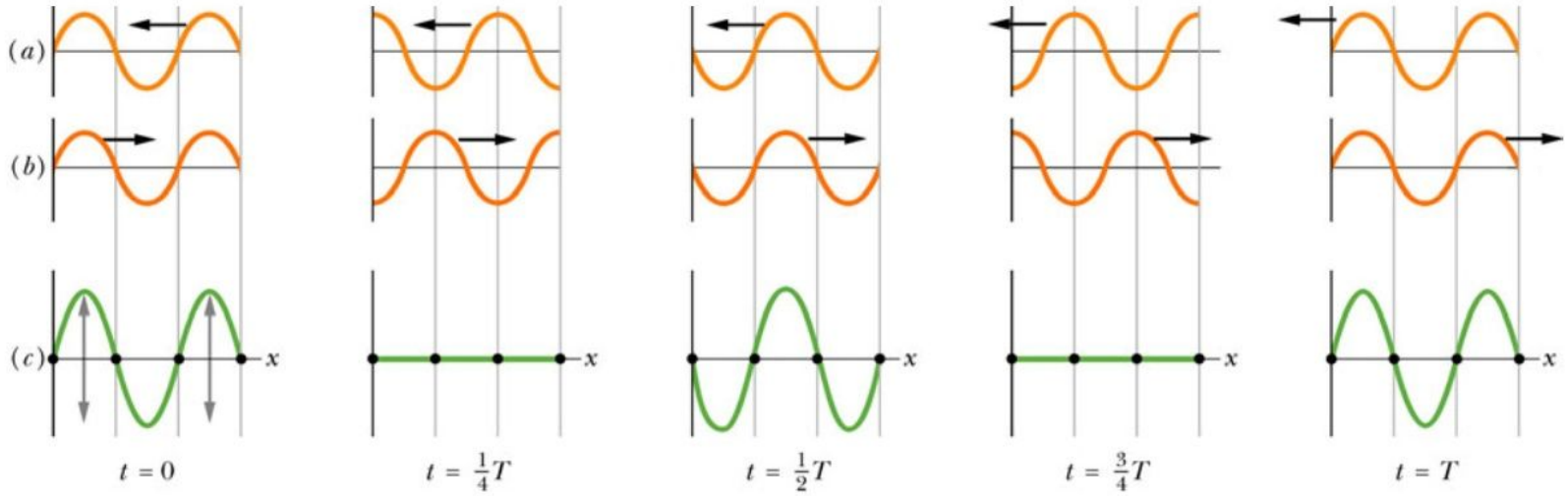
در بین نقاط مختلف روی سیم مرتعش، این نقاط بیشینه انحراف را از وضعیت تعادل خواهند داشت

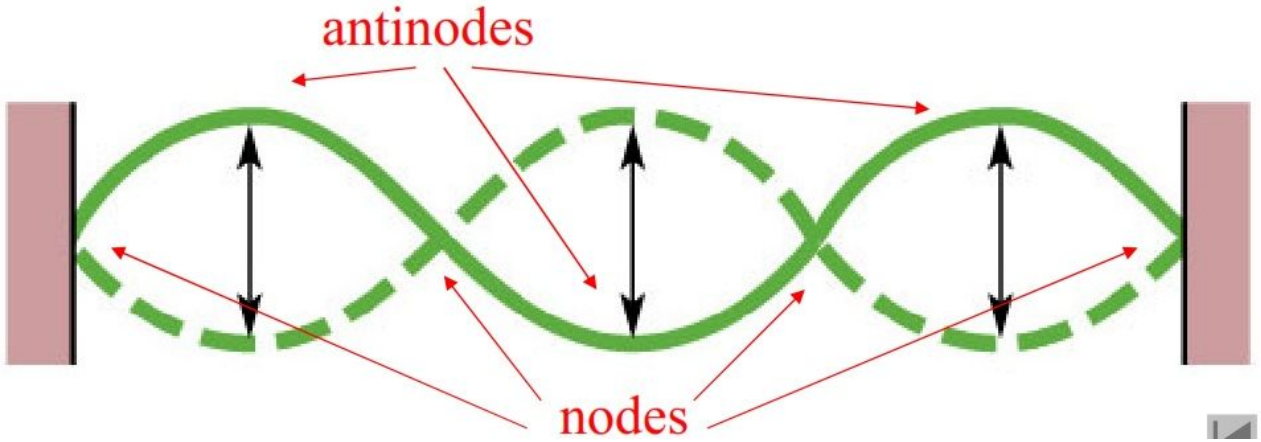
$$\left|\sin kx\right| = 1 \quad \rightarrow \quad y(t) = 2y_m \cos\omega t$$

$$\left.\begin{aligned} kx &= (n+\frac{1}{2})\pi \quad , \quad n = 0\,,1,\,2\,,\cdots \\ k &= \frac{2\pi}{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad x = (n+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$$

فاصله بین دو شکم متوالی $\lambda/2$

Standing Waves





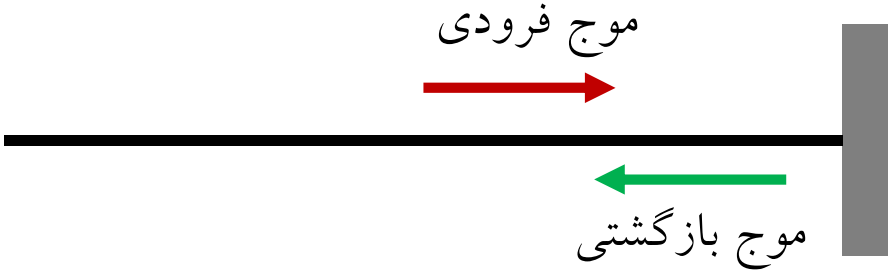
۷- مقایسه رفتار ذرات محیط در حضور موج رونده و ایستاده

موج رونده	موج ایستاده
ذرات محیط در حال نوسان هماهنگ ساده	ذرات محیط در حال نوسان هماهنگ ساده
همه ذرات دارای دامنه یکسان	ذرات مجاور دارای دامنه متفاوت
فرکانس نوسانی همه ذرات یکسان	فرکانس نوسانی همه ذرات یکسان
ذرات مجاور در فازهای متفاوت	همه ذرات بین دو گره متوالی دارای فاز یکسان و نسبت به ذرات بین دو گره بعدی در فاز مخالف

ایجاد موج ایستاده:

از برهم نهی موج فرودی و بازتاب آن توسط یک مرز موج ایستاده در یک سیم مرتعش ایجاد می شود.

در برخورد یک موج به مرز، طبق قانون سوم نیوتن یک موج ثانویه ای توسط مرز به داخل محیط برگردانده می شود.



موج ایستاده = موج فرودی + موج بازگشتی

انواع انعکاس:

نوع و کیفیت انعکاس رخ داده در یک بستگی به نوع مرز دارد:

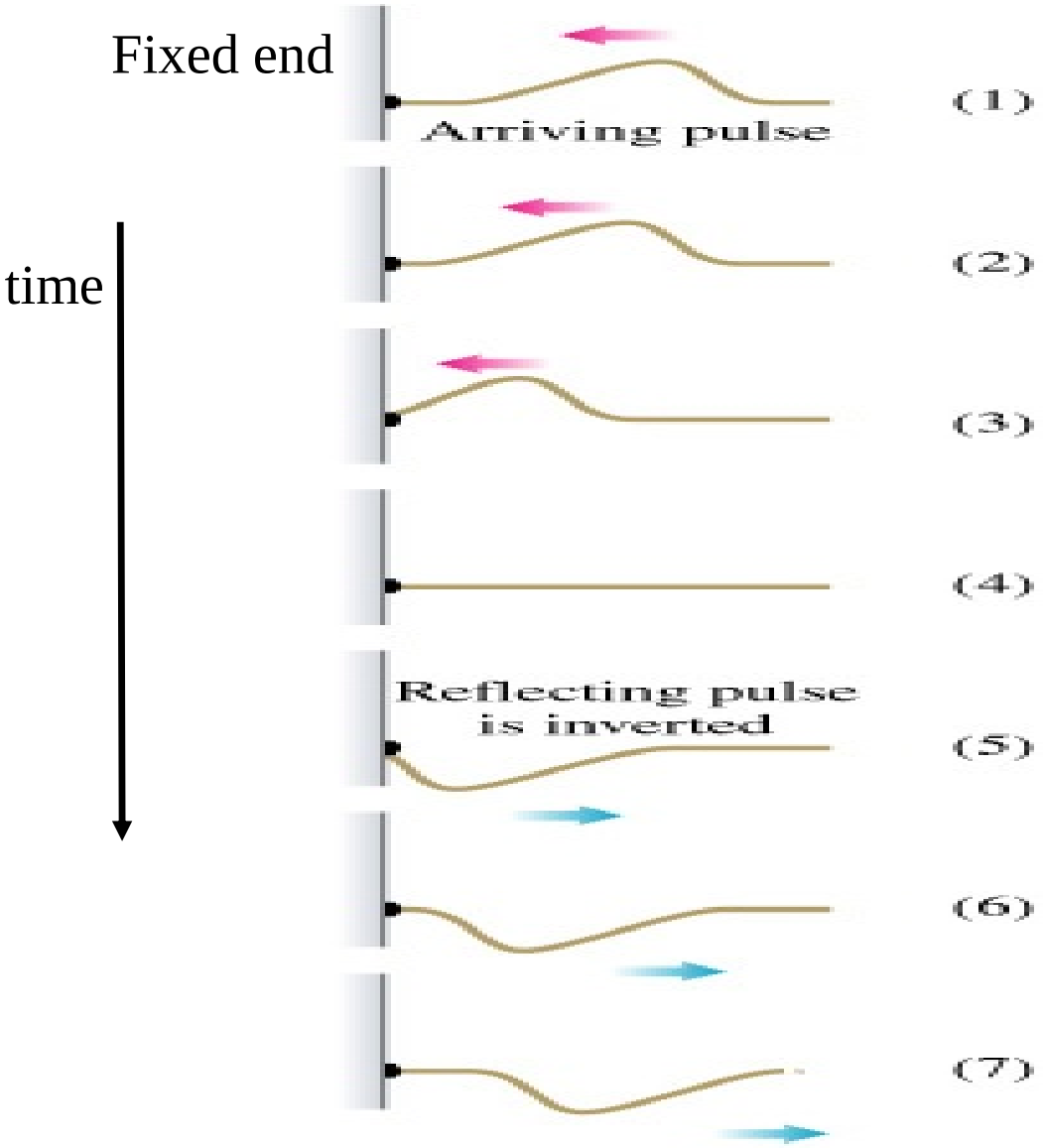
- انعکاس سخت (hard reflection)

مرز محکم و ساکن بوده و در برخورد موج فرودی با آن موج بازگشتی کاملا وارونه می گردد

- انعکاس نرم (soft reflection)

مرز دارای قابلیت تحرک بوده به گونه ای که موج انعکاسی به صورت هم فاز نسبت به موج فرودی از مرز باز می گردد

انعکاس سخت:



در هنگام رسیدن موج به دیوار یا مرز یک نیروی کششی از طرف سیم به مرز وارد می گردد که طبق قانون سوم نیوتن مرز هم نیروی کششی به سیم وارد می نماید که حاصل آن ایجاد یک موج بازگشتی است. موج انعکاسی:

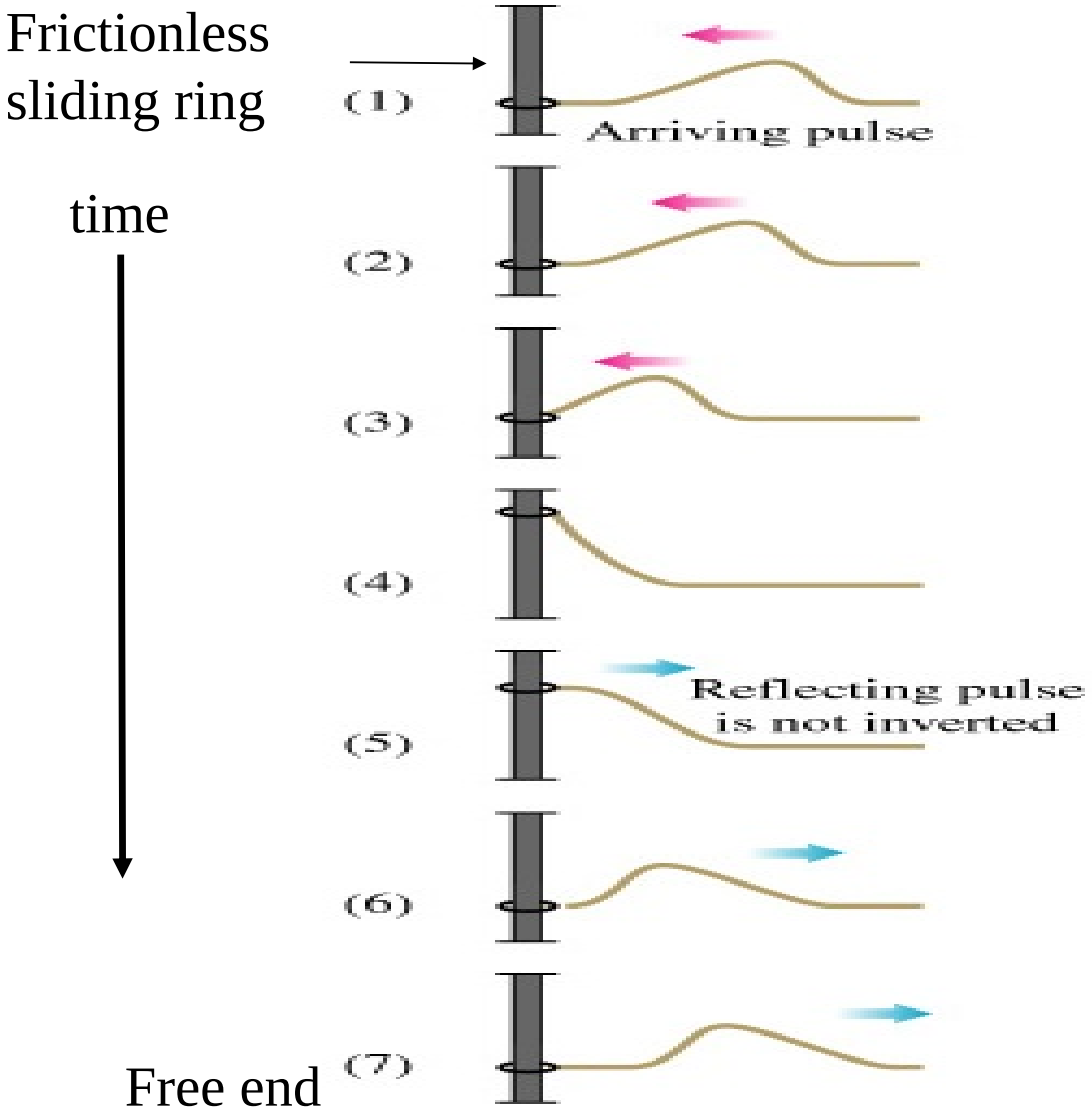
- با همان دامنه
- با همان فرکانس و طول موج
- در فاز مخالف $\phi = \pi$
- در محل مرز یک گره (نقطه ساکن) ایجاد می شود

Film 3-5

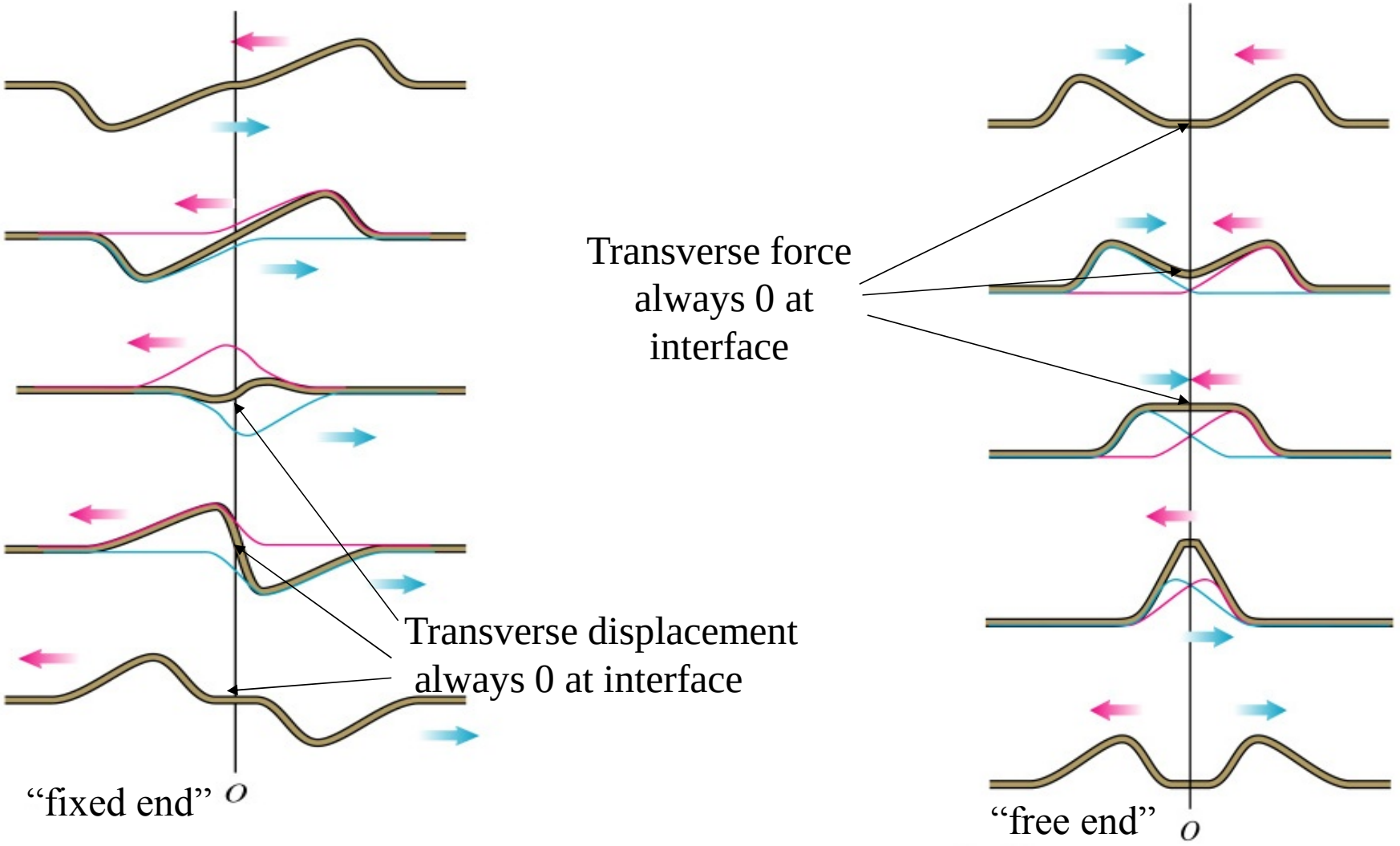
انعکاس نرم:

با رسیدن موج به مرز، مرز بدلیل برخورداری از تحرک، مرز توسط نیروی سیم به مرز، آن را به سمت بالا خواهد کشید و نیروی مرز به سیم یک موج بازگشتی را در سیم ارسال می نماید. موج بازگشتی:

- با همان دامنه
- با همان فرکانس و طول موج
- در فاز یکسان
- در محل مرز یک شکم خواهیم داشت با دامنه ای دوبرابر دامنه موج فرودی

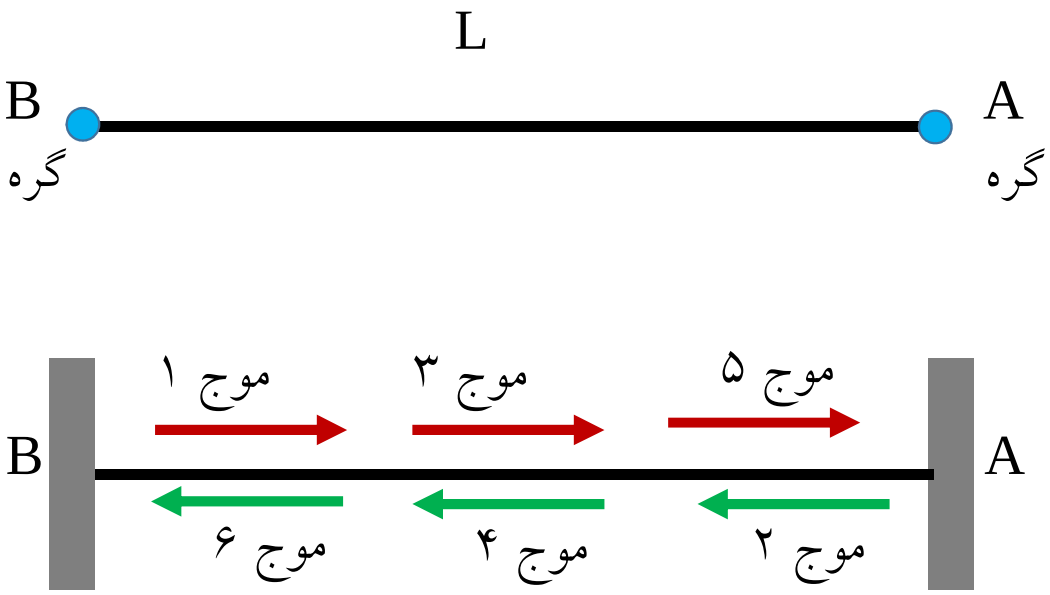


رفتار مرزهای سخت و نرم در عبور دو موج در جهات مختلف



امواج ایستاده و تشدید

بررسی تشکیل موج ایستاده در برهم نهی امواج درون یک سیم با دو انتهای بسته (مرز سخت)



موج ۱: موج فرودی اولیه

موج۲ : انعکاس موج ۱ در مرز سخت در نقطه A

موج۳ : انعکاس موج ۲ در مرز سخت در نقطه B

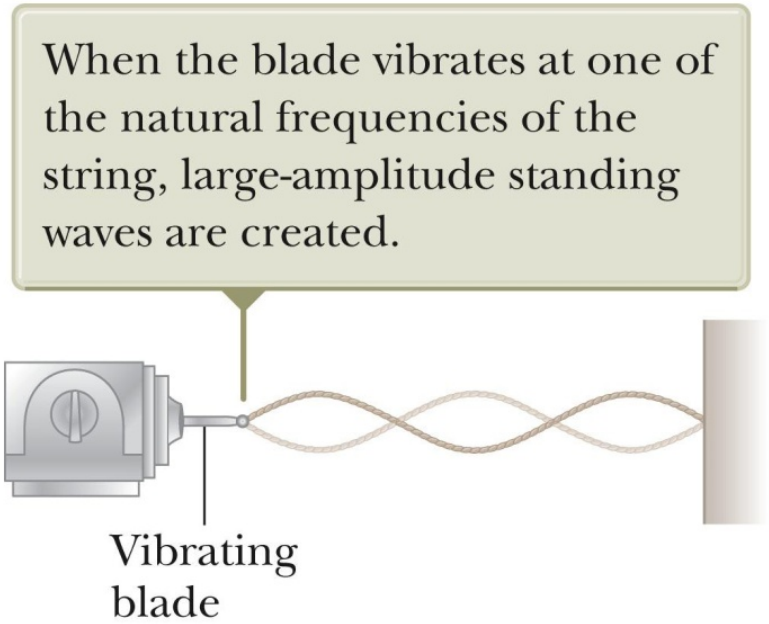
موج۴ : انعکاس موج ۱ در مرز سخت در نقطه A

موج۵ : انعکاس موج ۱ در مرز سخت در نقطه B

موج۶ : انعکاس موج ۱ در مرز سخت در نقطه A

در اثر برهم نهی تعداد زیادی موج انعکاسی در سیم، موج ایستاده در آن تشکیل شده و درنتیجه فرآیند تشدید در آن رخ می دهد

پدیده تشدید



تداخل امواج

تولید موج ایستاده

ایجاد شکم های بزرگ تحت فرکانس های خاص

در چنین حالتی که موج ایستاده با بیشینه اندازه دامنه تشکیل می سود پدیده تسدید رح می دهد

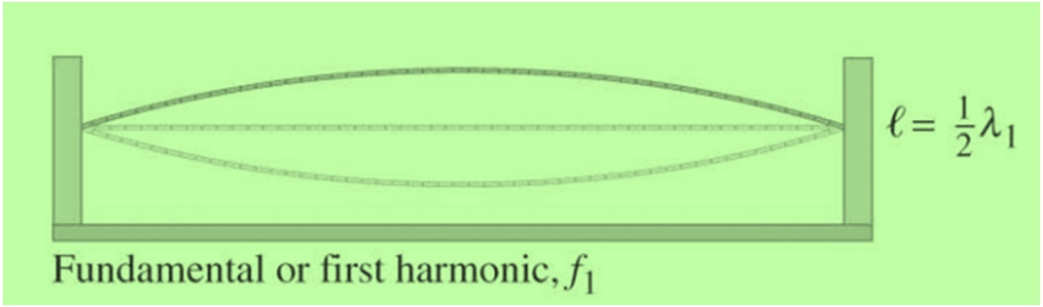
به فرکانس های خاص در حالت تشدید، مدهای نوسانی گفته می شود

در خارج از فرکانسهای تشدید؛ دامنه موج ایستاده (شکم ها) خیلی کوچک اند

فرکانس تشدید

۱- ساده ترین حالت موج ایستاده

(مد نوسانی اول یا اصلی)



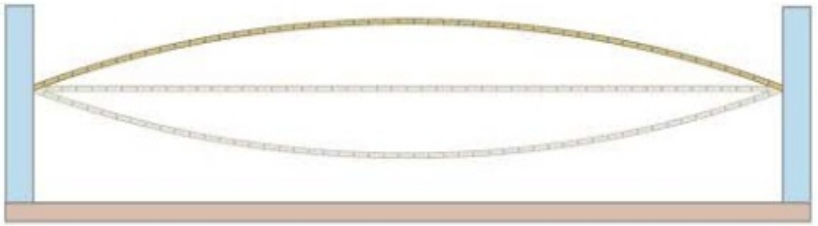
شامل دو گره و یک شکم

$$l = \frac{\lambda}{2} \quad \rightarrow \quad \lambda = 2l$$

هرگاه طول موج ایجاد شده در سیم برابر با دو برابر طول

سیم باشد تشدید در مد نوسانی اصلی رخ می دهد

۱- مد نوسانی اول



Fundamental or first harmonic, f_1

دو گره- یک شکم

$$l = \frac{\lambda}{2} \quad \rightarrow \quad \lambda = 2l$$

۲- مد نوسانی دوم

First overtone or second harmonic, $f_2 = 2f_1$

سه گره- دو شکم

$$l = \lambda$$

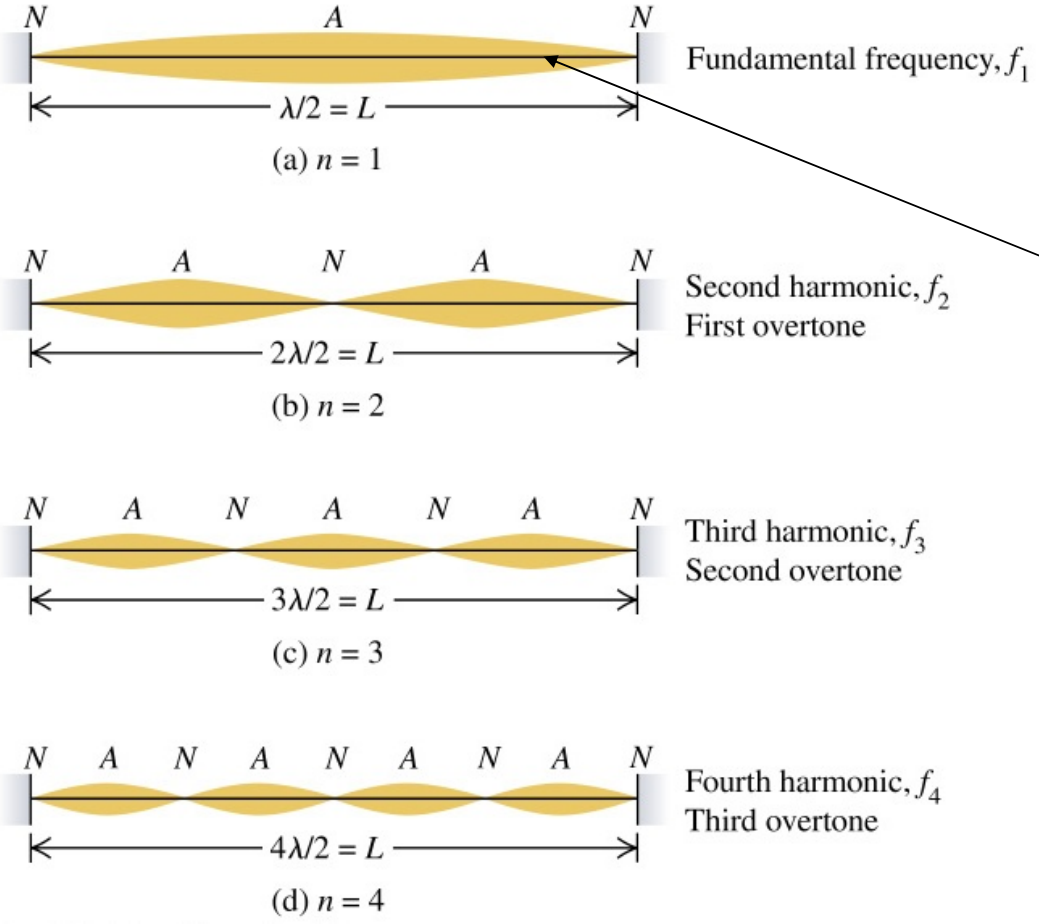
۳- مد نوسانی سوم

Second overtone or third harmonic, $f_3 = 3f_1$

چهار گره- سه شکم

$$l = \frac{3\lambda}{2} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3}l$$

Some very basic physics of stringed instruments…….



شرط تشکیل موج ایستاده روی سیم در یک مد خاص

$$\lambda = \frac{2l}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2l} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

فرکانس لازم برا ایجاد پدیده تشدید مضرب صحیحی از کمترین مقدار $\frac{v}{2l}$ است

مد نوسانی با کوچکترین فرکانس تشدید به ازاء n = 1 $f_1 = \frac{v}{2l}$

مد نوسانی دوم به ازاء n = 2 $f_2 = 2\frac{v}{2l} = \frac{v}{l}$

مد نوسانی سوم به ازاء n = 3 $f_3 = \frac{3v}{2l}$

$$f = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2l} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

در این معادله:

f فرکانس تشدید در مد n ام

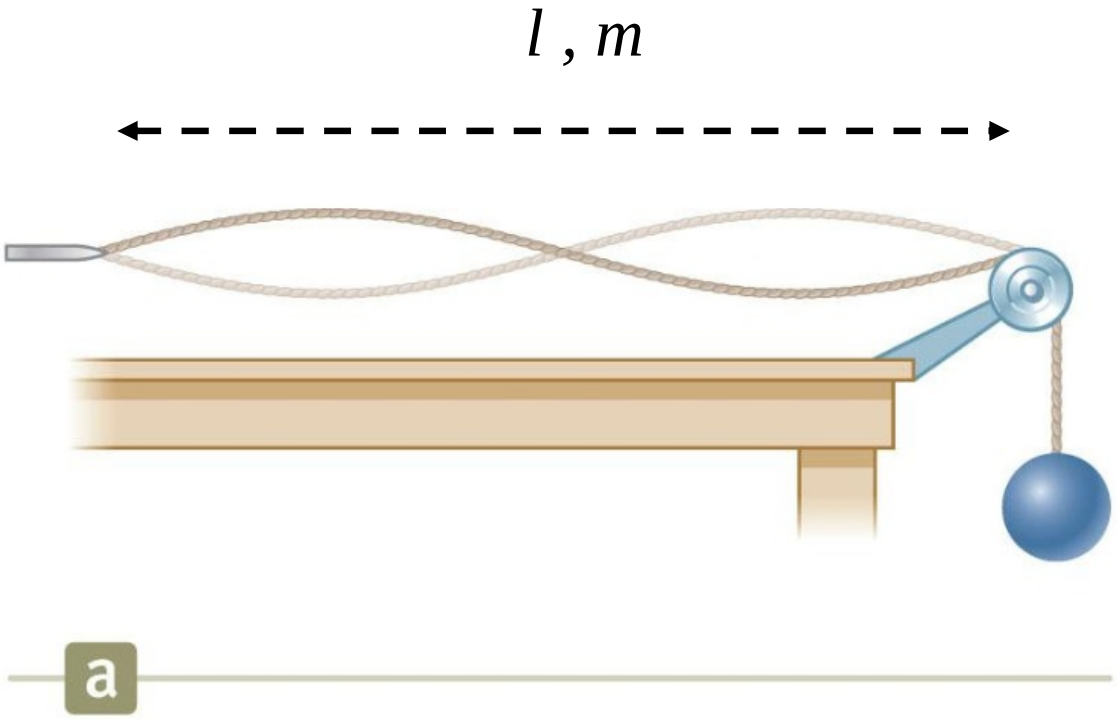
n عدد هارمونیک

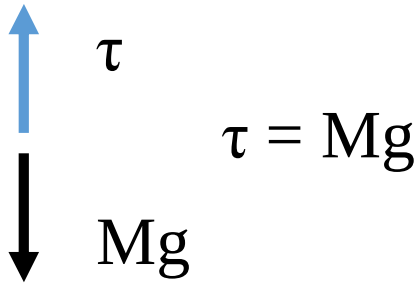
v سرعت موج در سیم کشیده

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

l طول سیم کشیده

Film 6





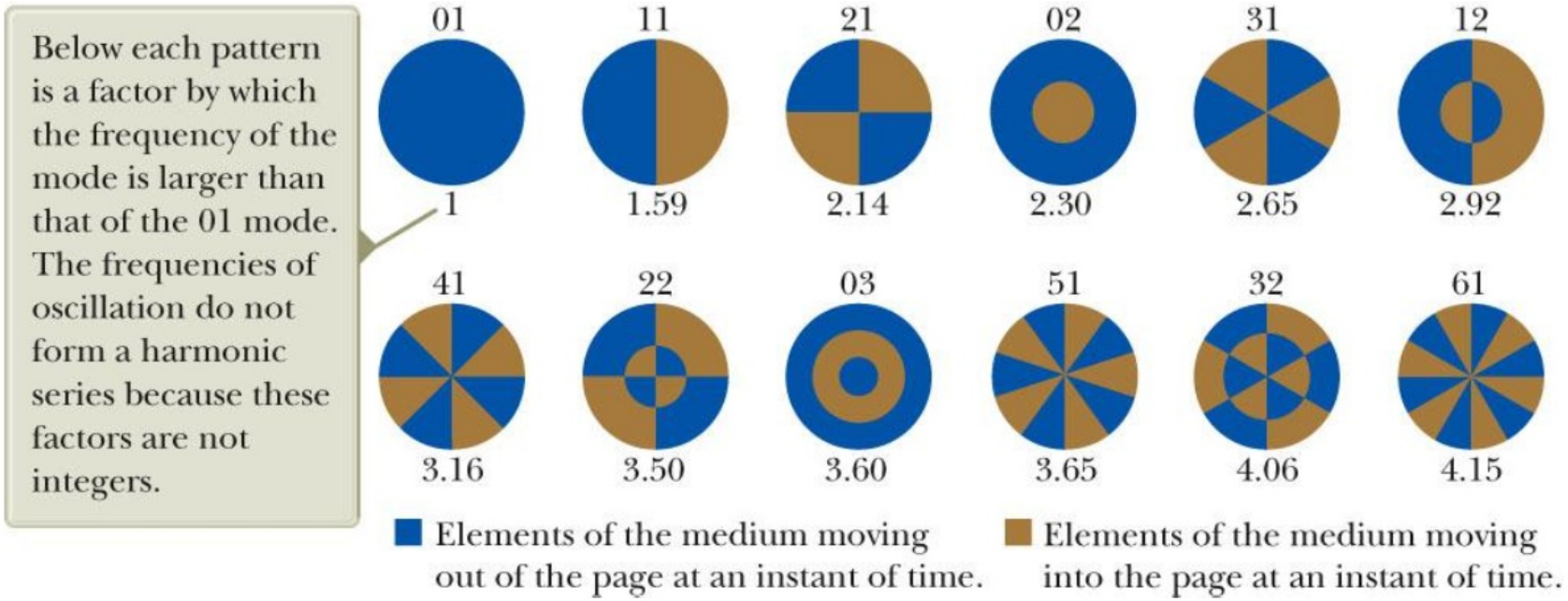
$\tau = Mg$

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{Mg}{\mu}} = \sqrt{\frac{Mg}{\frac{m}{l}}} = \sqrt{\frac{lMg}{m}} \quad \rightarrow \quad f = n\frac{v}{2l} = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{lMg}{m}} = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{Mg}{lm}}$$

مثال:

یک سیم پیانو دارای طولی در حدود 1.1 m و جرم 9 g است. چه نیروی کششی باید در سیم ایجاد شود تا فرکانس اصلی نوسانی در آن 131 Hz باشد. چهار فرکانس اول آن را نشان دهید.

Standing Waves in Membranes

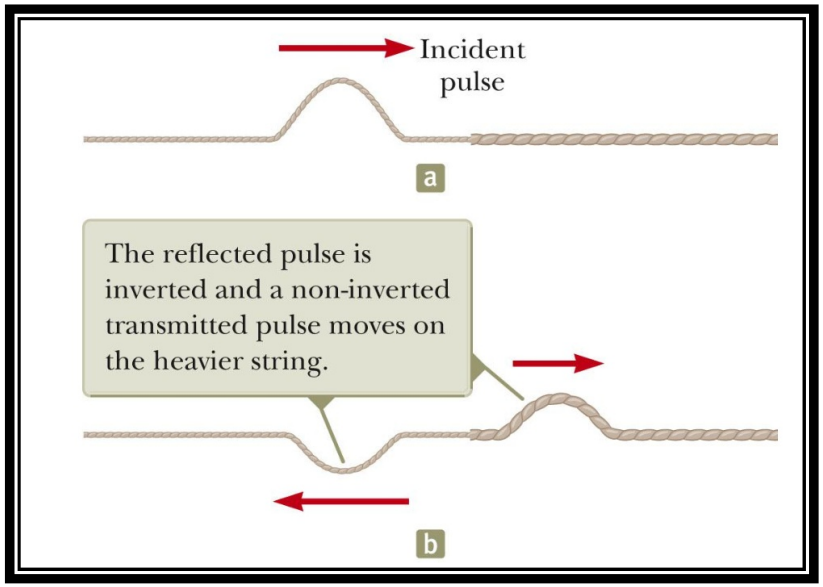


موج عبوری:

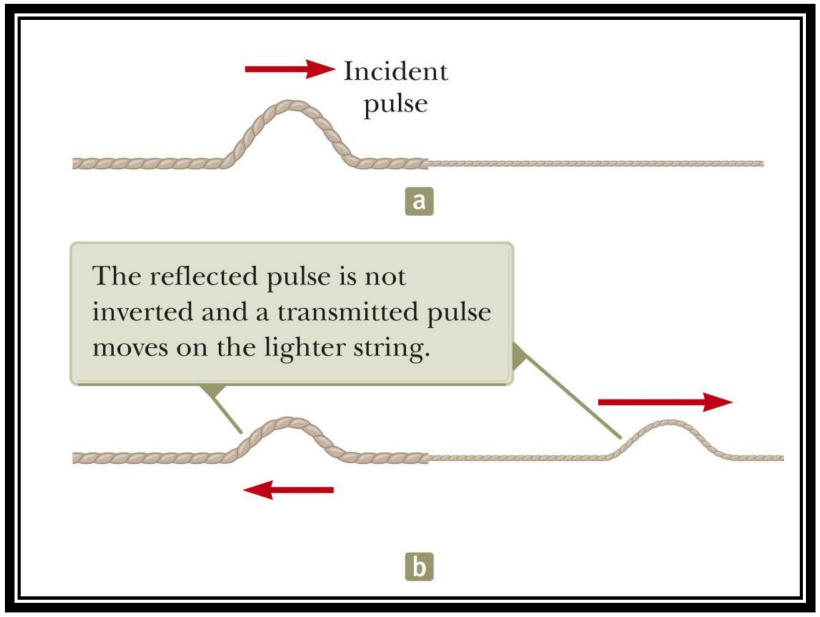
هنگامی موج به مرزی در بین محیط انتشار برخورد کند بخشی از انرژی فرودی از مرز منعکس شده و بخشی از آن عبور می کند.

هنگامی که یک موج یا پالس فرودی در مرز، به بخش های انعکاسی و عبوری تقسیم می شود جمع انرژی های انعکاسی و عبوری برابر با انرژی فرودی در مرز است (**پایستگی انرژی**)

هنگام انتقال یک پالس یا موج از ماده A به ماده B؛ در صورتی که چگالی ماده B بیشتر از ماده A است:
سرعت موج در B کاهش می یابد ($v_A > v_B$) و موج منعکس شده وارون می شود.
هنگام انتقال یک پالس یا موج از ماده A به ماده B؛ در صورتی که چگالی ماده B کمتر از ماده A است:
سرعت موج در B افزایش می یابد ($v_A < v_B$) و موج منعکس شده وارون نمی شود.



اگر موج از طریق یک سیم نازک منتقل و به سیم ضخیم تری برسد. بخشی از آن منعکس و بخشی عبور می نماید. بخشی که منعکس می شود وارونه می شود و دامنه آن کوچکتر خواهد بود



اگر موج از طریق یک سیم ضخیم منتقل و به سیم نازکتری برسد. بخشی از آن که منعکس می شود وارونه نمی شود و دامنه آن کوچکتر خواهد بود

Film 7