

رسالة محمد بن عبد الله

فصل هفتم

کار و انرژی

نیروهای معرفی شده :

نیروی ثابت	mg و همواره به سمت زمین	نیروی وزن
	N همواره عمودی بر سطح و به سمت خارج	نیروی عمودی سطح
	T کشش یا رانش منتقل شده توسط ریسمان یا زنجیر و ...	نیروی کشش
	f_k یا f_s	نیروی اصطکاک
نیروی متغیر	F	نیروی فنر

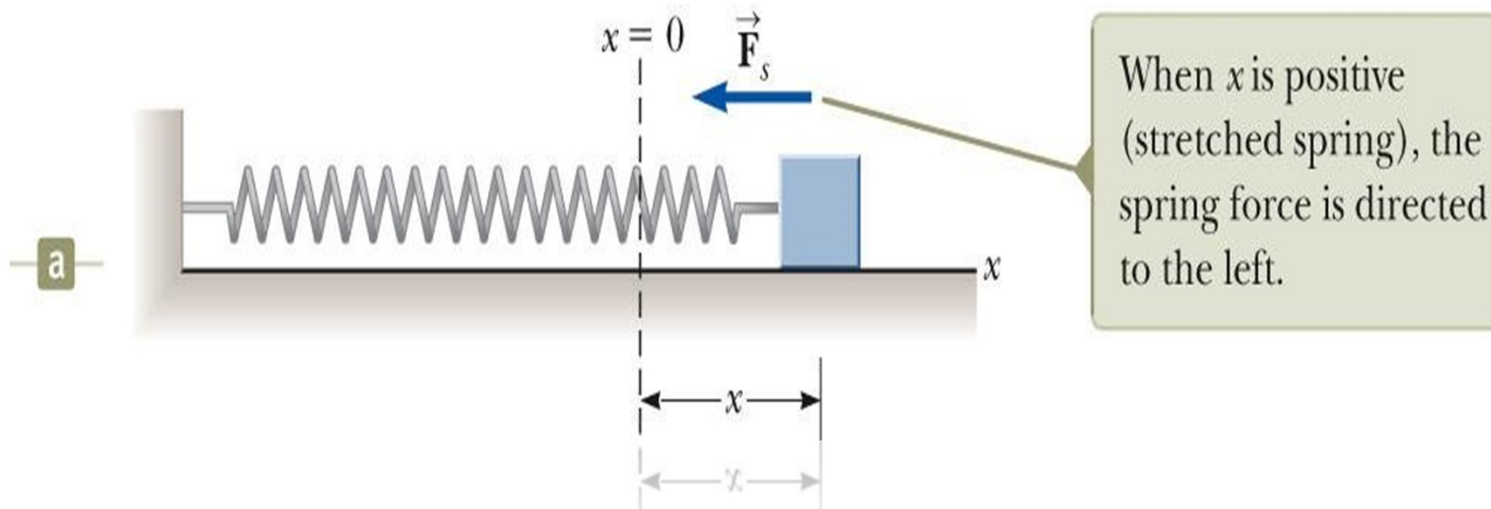
نیروی فنر (قانون هوک)

نیروی اعمال شده توسط فنر که در فنر ظاهر می شود تا از تغییر طول آن جلوگیری به عمل آورد

$$F_s = -kx$$

تغییر طول فنر x

ثابت فنر که بیانگر سختی فنر می باشد.



شکل برداری قانون هوک:

$$F = kx \quad \text{اندازه:}$$

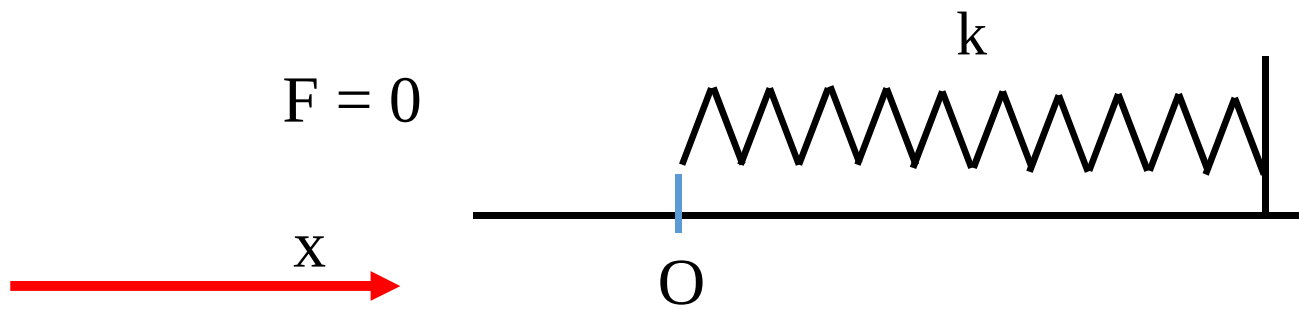
راستا: هم راستای طول فنر

جهت: به سمت نقطه تعادل

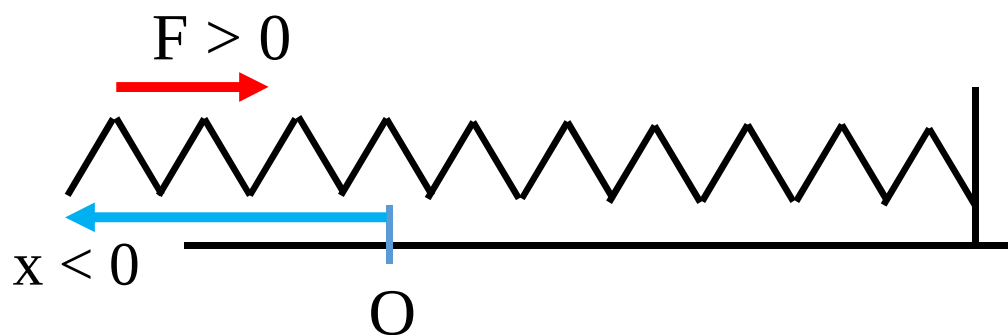
بردار نیروی فنر

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

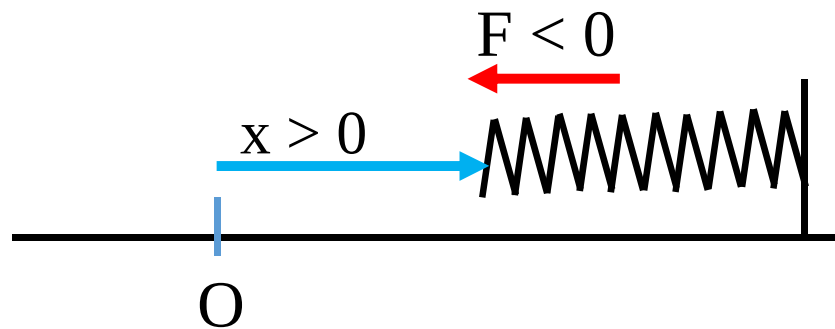
بردار جابه جایی انتهای فنر



الف) فنر در حالت تعادل
(فنر نه کشیده و نه فشرده)



ب) فنر کشیده



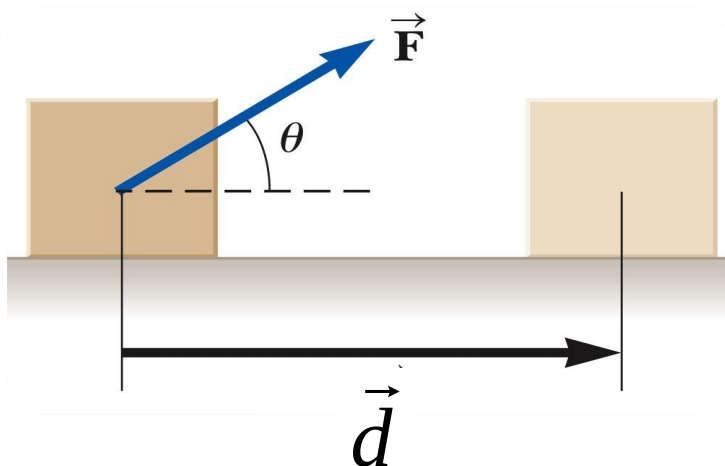
ج) فنر فشرده

تعریف کار نیروی ثابت

بر روی یک سیستم توسط یک نیروی و در یک جابه جایی کار انجام می شود. معنی کار مصطلح در روزمره به طور واضح در فیزیک متفاوت است.

نیروی ثابت: اندازه نیرو و راستا و جهت آن در جابه جایی ثابت باشد

کار نیروی ثابت $\vec{F}$ وارد بر جسم در یک جابه جایی $\vec{d}$ توسط رابطه زیر تعریف می شود



$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \theta$$

$$\Rightarrow N.m = J$$

ژول

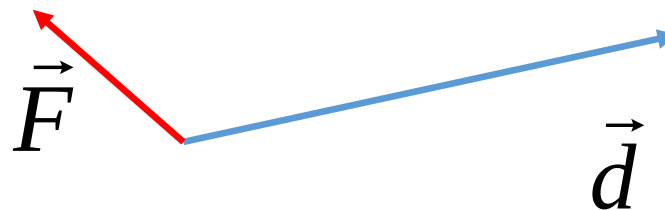
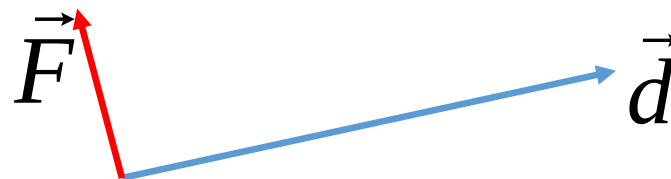
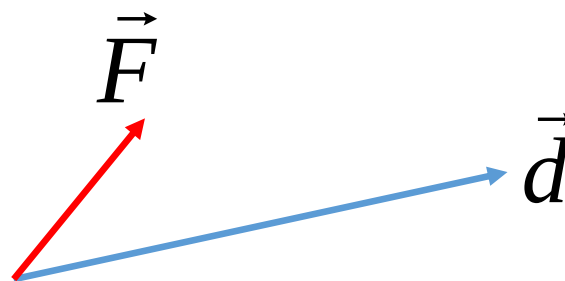
نکات

۱- علامت کار:

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \rightarrow W > 0$$

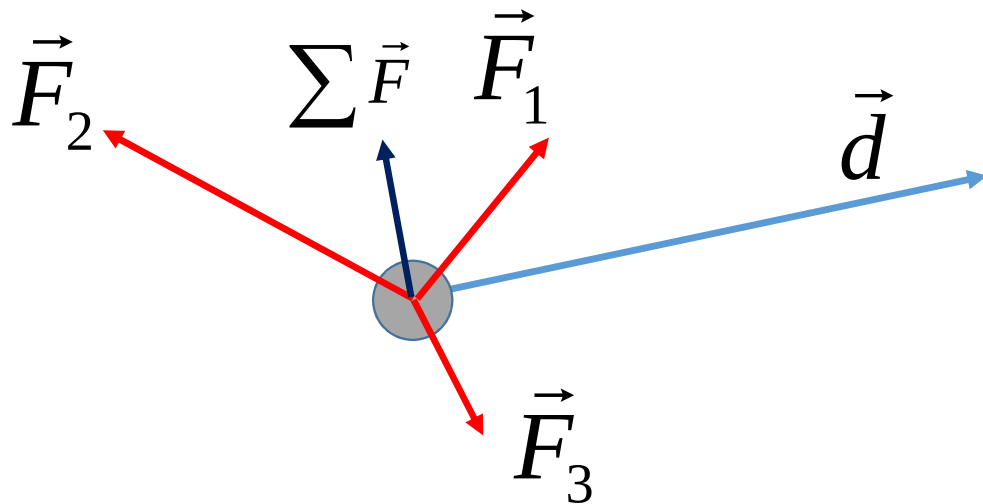
$$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow W = 0$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \rightarrow W < 0$$



۲- اگر در یک جابه جایی نیروهای مختلفی به جسم وارد شود:

کار کل = حاصلجمع کار تک تک نیروها = کار نیروی برآیند



$$W_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{d}$$

$$W_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{d}$$

$\vdots$

$$W_t = W_1 + W_2 + \dots$$

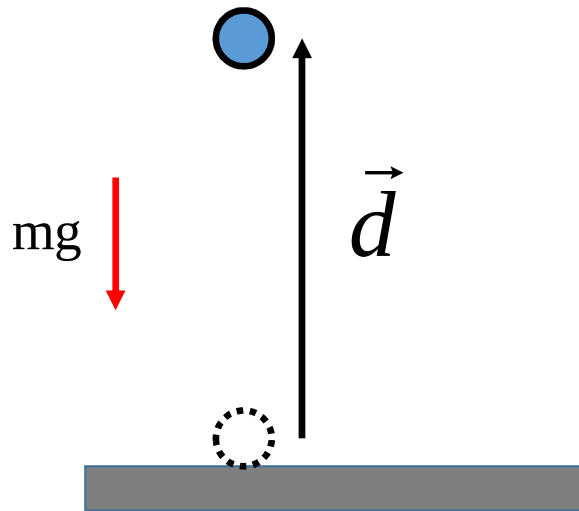
$$W_t = \vec{F}_1 \cdot \vec{d} + \vec{F}_2 \cdot \vec{d} + \dots$$

or

$$W_t = (\Sigma \vec{F}) \cdot \vec{d}$$

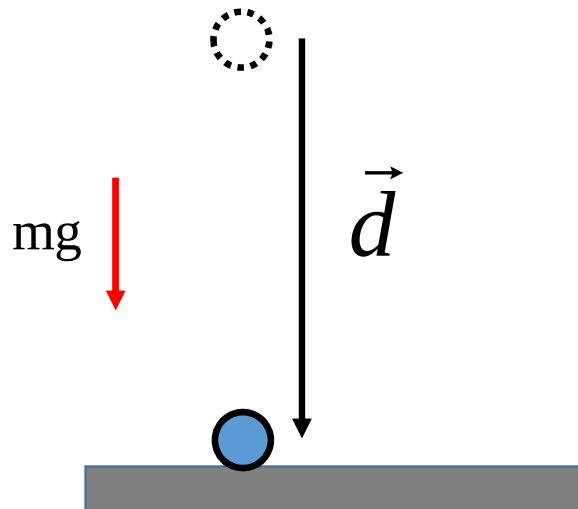
کار نیروی وزن:

* در بالا بردن جسمی به ارتفاع h در مسیری مستقیم



$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = mgh \cos \pi = -mgh$$

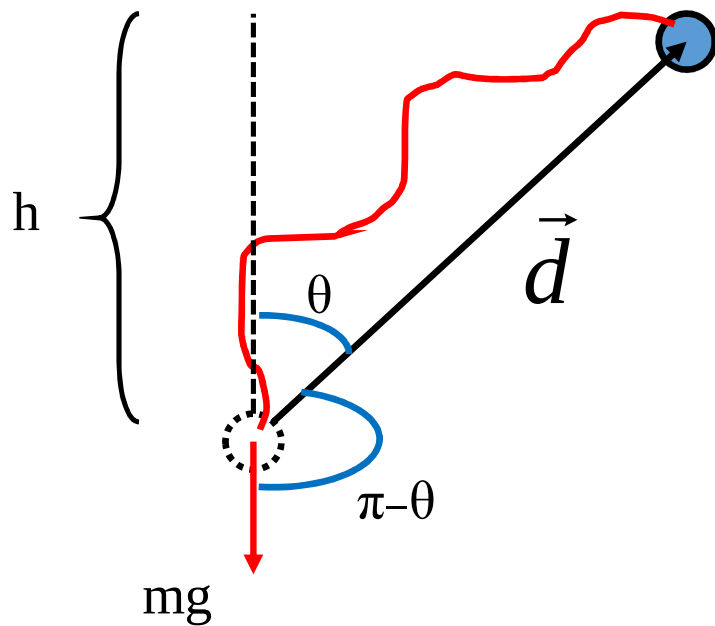
* در پایین آمدن جسمی از ارتفاع h در مسیری مستقیم



$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = mgh \cos 0 = mgh$$

کار نیروی وزن:

در بالا رفتن جسمی به ارتفاع h در مسیری غیرمستقیم



$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = mgd \cos(\pi - \theta)$$

$$W = mgd \times -\cos\theta$$

$$W = -mgd \cos\theta$$

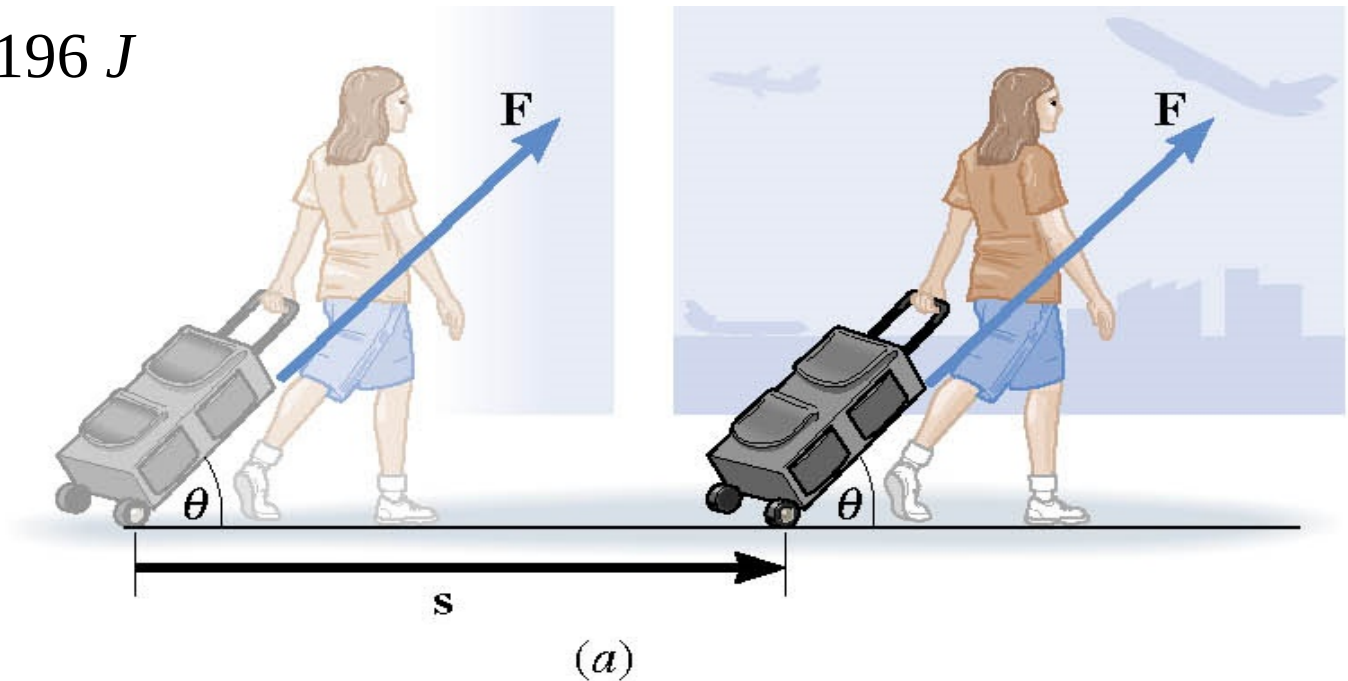
$$W = -mgh$$

مثال:

شخصی چمدانی را با نیروی 60 N تحت زاویه 30° روی زمین در مسافتی برابر با 100 m می کشد
کار او را حساب کنید

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs \cos \theta$$

$$W = 60 \times 100 \times \cos 30 = 5196 \text{ J}$$



مثال:

پسر بچه ای کتاب هایی به وزن 200 N را در یک مسیر به مسافت 100 m حمل می کند. کار انجام شده توسط او را حساب کنید

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = mgh \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

نیرویی که پسر بچه برای نگهداشتن کتاب ها به آنها وارد می سازد



$\vec{d}$



مثال:

شما کتابهایی را به وزن 200 N توسط پلکانی به ارتفاع 5 m و با طی مسافت 8 m به پایین منتقل می کنید. کار انجام شده توسط نیروی وزن را حساب کنید

$$W = mgh$$

$$W = 200 \times 5 = 1000\text{ J}$$



مثال:

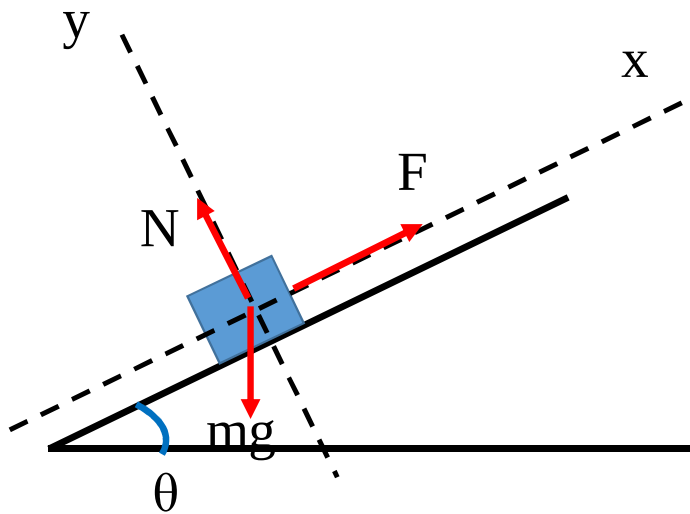
اسبی گاری با جرم 300 kg را با سرعت ثابت از سطح شیب‌داری با زاویه $\theta = 30^\circ$ به اندازه $d = 50 \text{ m}$ بالا می‌رود. مطلوبست:

الف) نیروی اسب

ب) کار اسب

ج) کار نیروی وزن

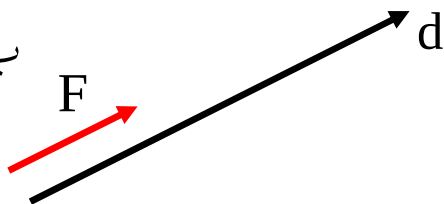
د) کار نیروی عمودی سطح



الف) نیروی اسب

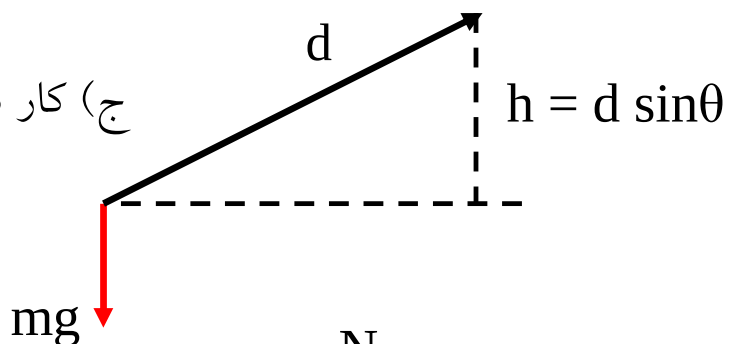
$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x = 0 \\ \sum F_y = ma_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F - mg \sin \theta = 0 \\ N - mg \cos \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = mg \sin \theta = 1500 N \\ N = mg \cos \theta \end{cases}$$

ب) کار اسب



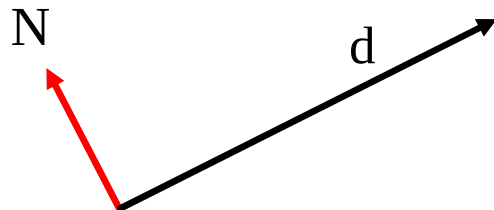
$$W_F = Fd \cos \theta = Fd = 1500 \times 50$$

ج) کار نیروی وزن



$$W_{mg} = -mgh = -300 \times 10 \times 50 \times 0.5$$

د) کار نیروی عمودی سطح



$$W_N = 0$$

کار نیروی اصطکاک لغزشی:

جسمی به جرم m و سرعت V_0 روی سطح افقی با ضریب اصطکاک μ_k هل داده می شود. کار نیروی اصطکاک را در متوقف کردن جسم بدست آورید

$$f_k = ma \quad \rightarrow \quad -\mu_k mg = ma \quad \rightarrow \quad a = -\mu_k g$$

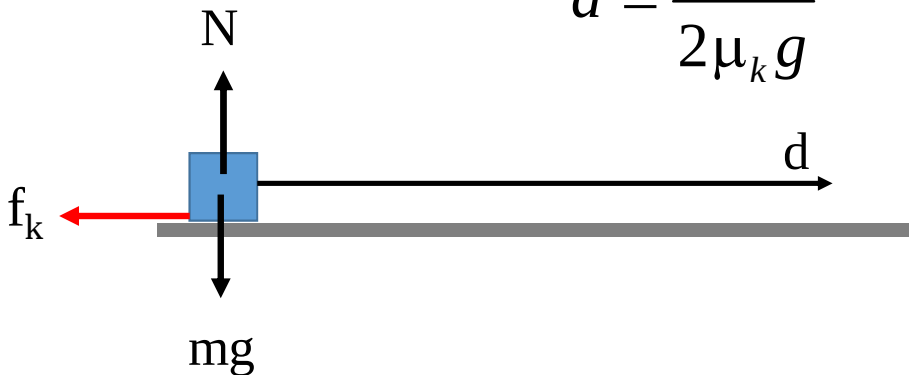
$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x$$

$$0 - v_0^2 = -2\mu_k g d$$

$$d = \frac{v_0^2}{2\mu_k g}$$

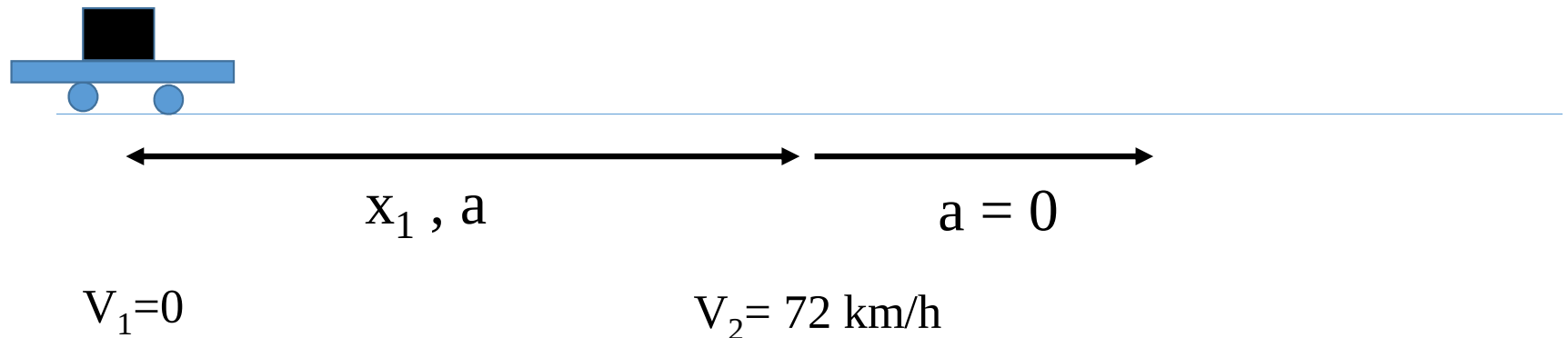
$$W = f_k d \cos \pi = -f_k d$$

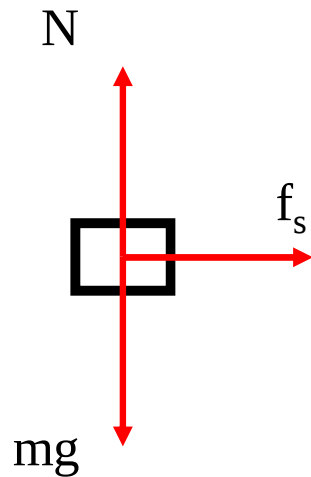
$$W = -\mu_k mg \times \frac{v_0^2}{2\mu_k g}$$



کار نیروی اصطکاک ایستایی:

تریلری که جعبه ای به جرم $m = 200 \text{ kg}$ روی آن قرار دارد از سکون و با شتاب $a = 1.5 \text{ m/s}^2$ شروع به حرکت می نماید و بعد از رسیدن به سرعت 72 km/h با سرعت ثابت طی مسیر خواهد نمود. کار نیروهای وارد بر جعبه را حساب کنید





$$f_s = ma$$

$$N = mg$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2ax_1 \rightarrow 20^2 - 0 = 2 \times 1.5 \times x_1 \rightarrow x_1 = 133.3m$$

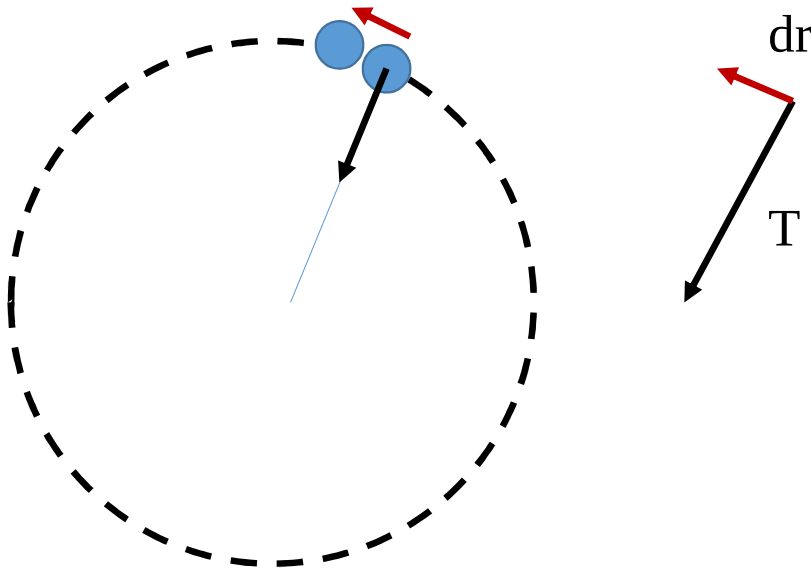
$$\text{total trajectory: } W_N = 0 \quad W_{mg} = 0$$

$$\text{accelerated motion: } f_s = ma \rightarrow W_{f_s} = f_s x_1$$

$$\text{steady velocity motion: } f_s = 0 \rightarrow W_{f_s} = 0$$

کار نیروی مرکزگرا در حرکت دایره ای:

جسمی به جرم m به ریسمانی به طول L متصل می باشد و روی مسیر دایره ای حرکت می کند کار نیروی کشش نخ را حساب کنید



$$\vec{T} \perp d\vec{r}$$

$$dW = \vec{T} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$W = \sum \vec{T} \cdot d\vec{r} = 0$$

«کار نیروی مرکزگرا در یک حرکت دایره ای صفر است»

کار انجام شده توسط یک نیروی متغیر

برای محاسبه کار، نیرو باید در طی جابه جایی ثابت باشد تا بتوان از رابطه $W = Fd \cos \theta$ استفاده نمود. بنابراین معادله را نمی توان برای محاسبه کار انجام شده توسط یک نیروی متغیر استفاده کرد.

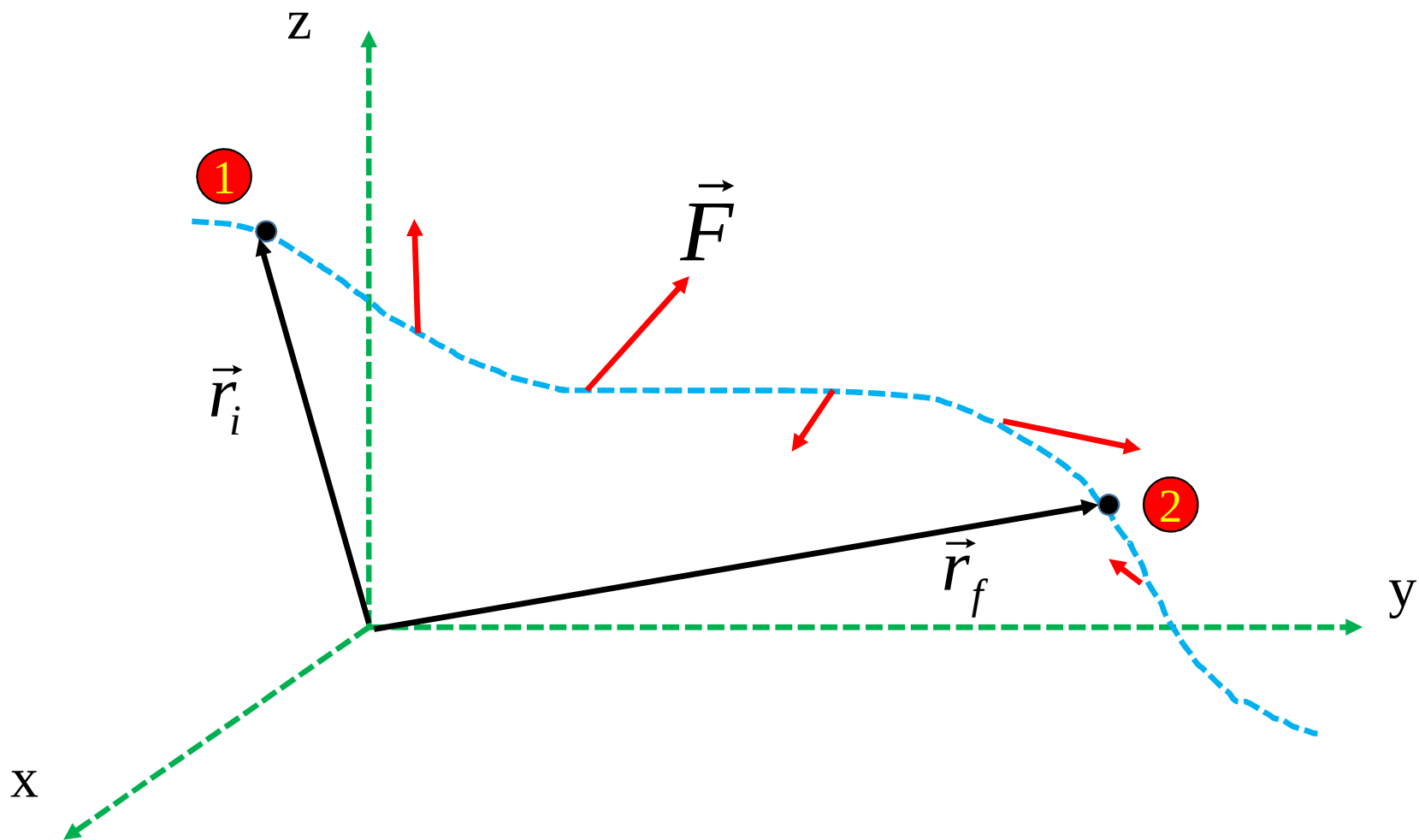
راهکار محاسبه کار نیروی متغیر:

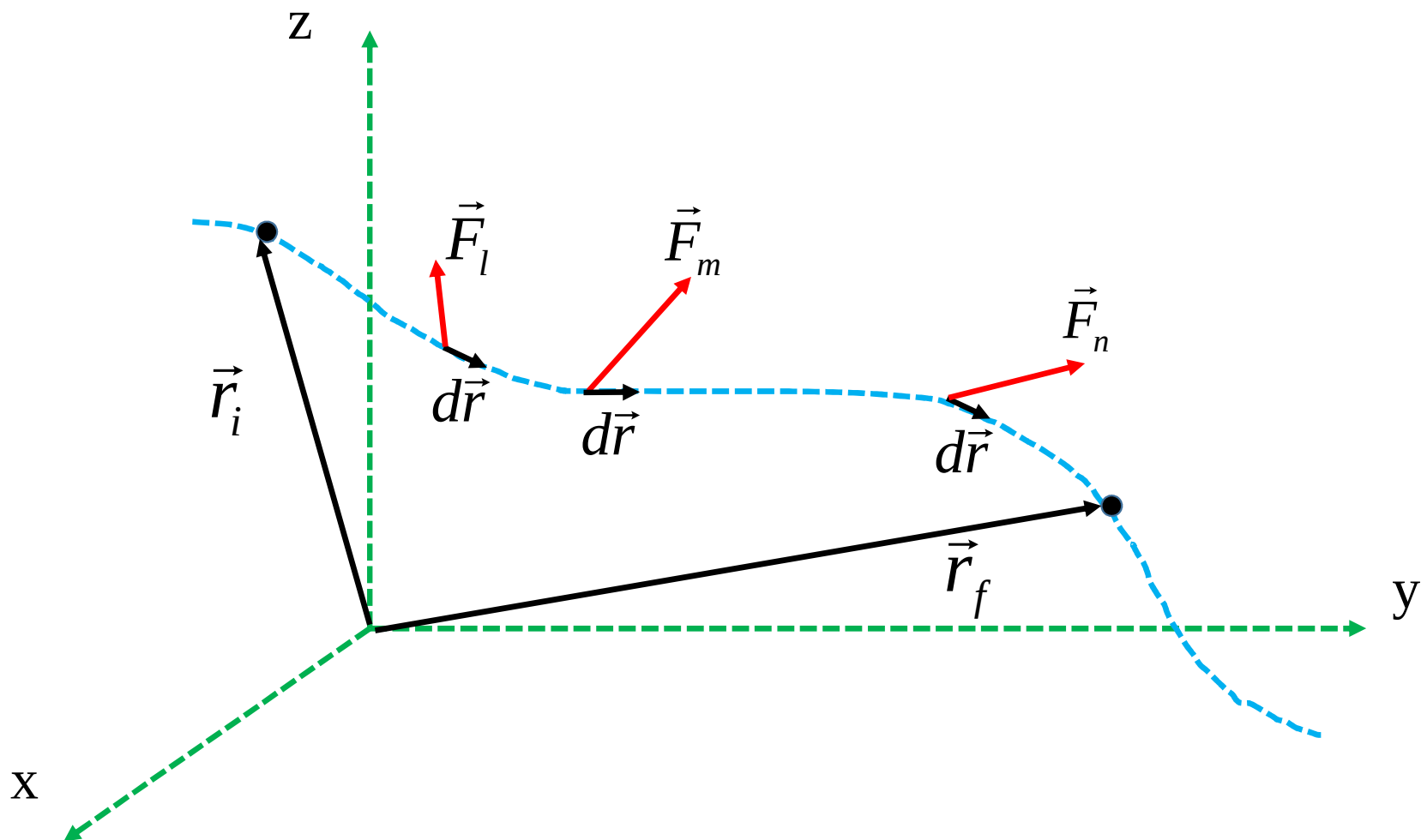
فرض کنید که در طول یک جابجایی بسیار کوچک Δr (المان جابه جایی) نیرو F را بتوان ثابت فرض کرد

برای این جابجایی کوچک $\Delta W \sim \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$

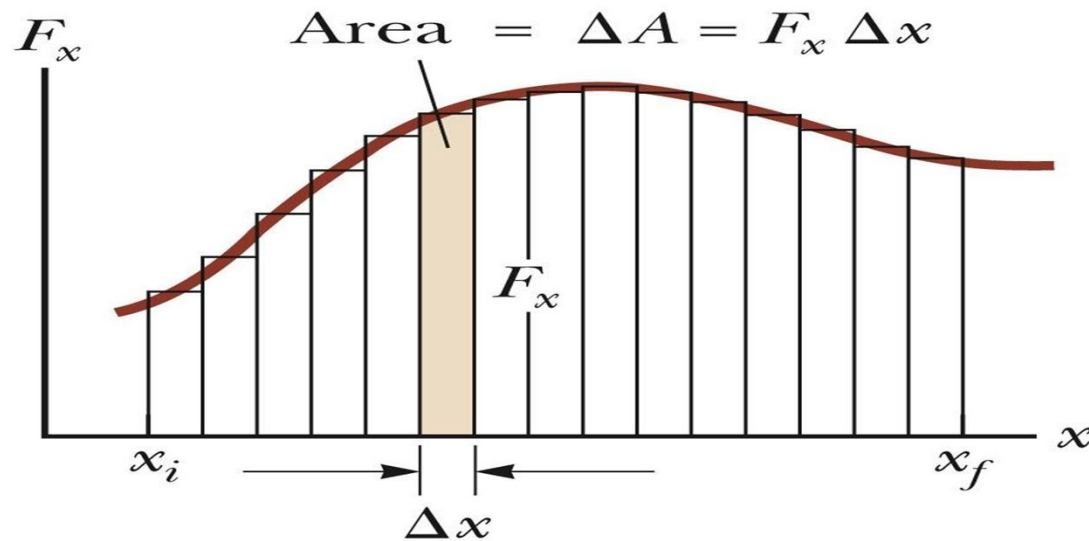
کار کل در فاصله r_i تا r_f = جمع کار در همه جابجایی بسیار کوچک Δr :

$$W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i$$





The total work done for the displacement from x_i to x_f is approximately equal to the sum of the areas of all the rectangles.



a

g



برای افزایش دقت المانهای جابه جایی را کوچکتر می کنیم تا با دقت بیشتری بتوان آن را در این المان

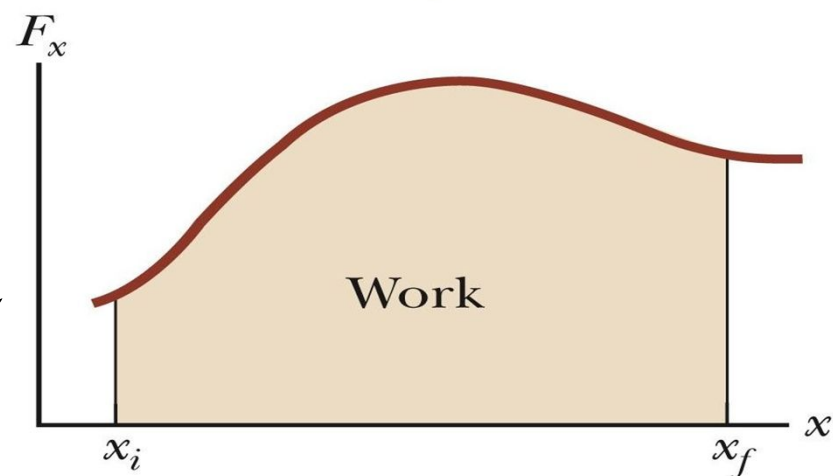
جابه جایی ثابت در نظر گرفت

$$\Delta r \rightarrow 0 \quad : \quad N \rightarrow \infty$$

$$W = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

The work done by the component F_x of the varying force as the particle moves from x_i to x_f is *exactly* equal to the area under the curve.

کار نیروی F برابر با مساحت زیر نمودار

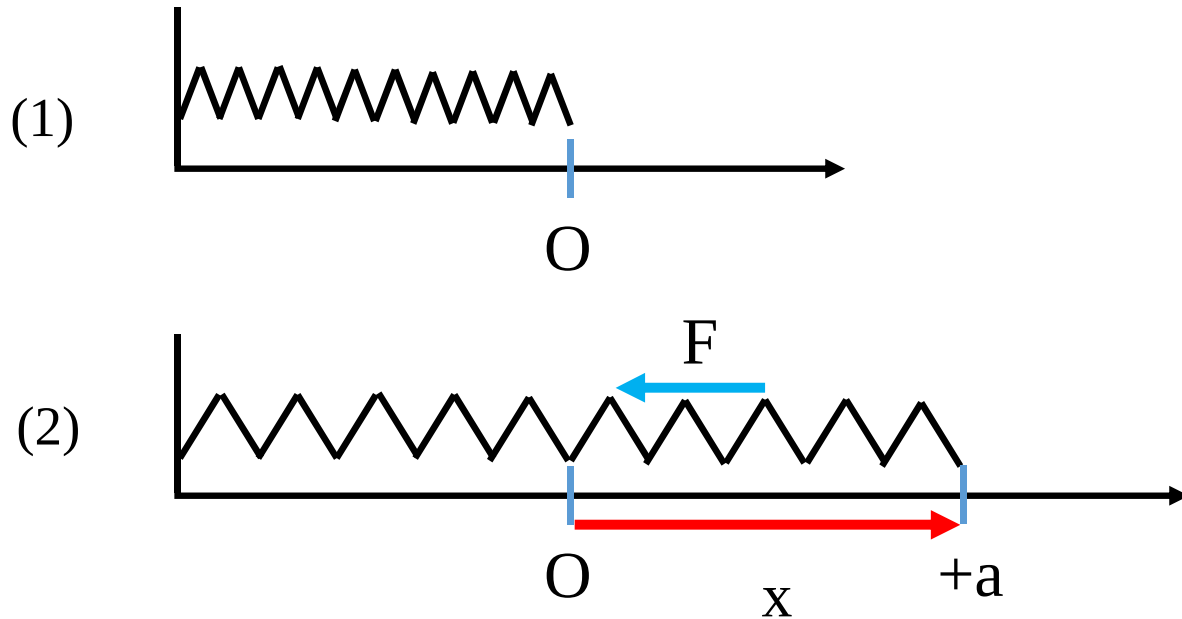


b

p

کار نیروی فنر

الف) کار نیروی فنر در کشیدن آن از نقطه تعادل تا فاصله a



$$W = \int_0^{+a} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

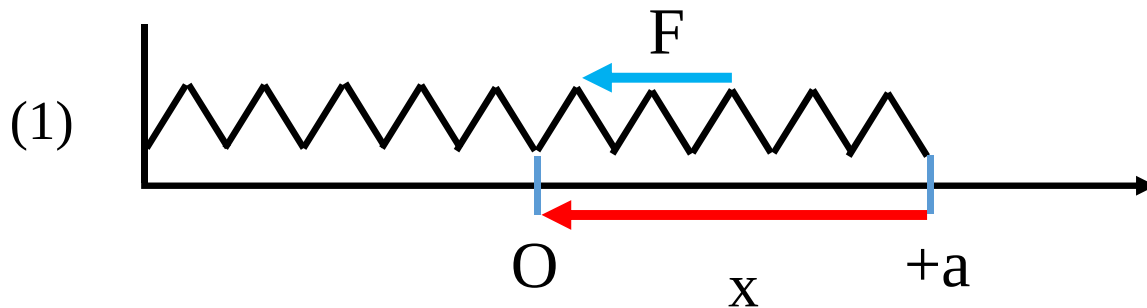
$$= \int_0^{+a} -k\vec{x} \cdot d\vec{x}$$

$$= -\frac{1}{2}kx^2 \Big|_0^{+a}$$

$$W = -\frac{1}{2}ka^2$$

کار نیروی فنر

ب) کار نیروی فنر در برگشت از کشیدگی از فاصله a تا نقطه تعادل

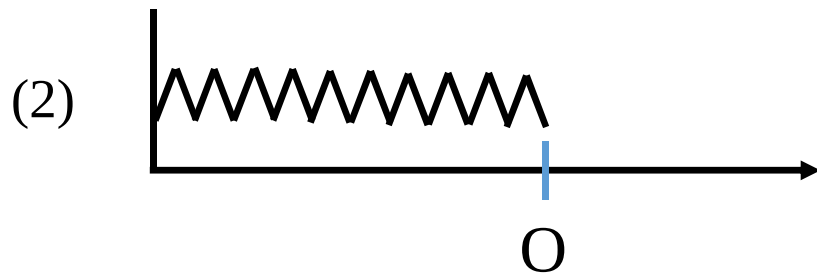


$$W = \int_{+a}^0 \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

$$= \int_{+a}^0 -k\vec{x} \cdot d\vec{x}$$

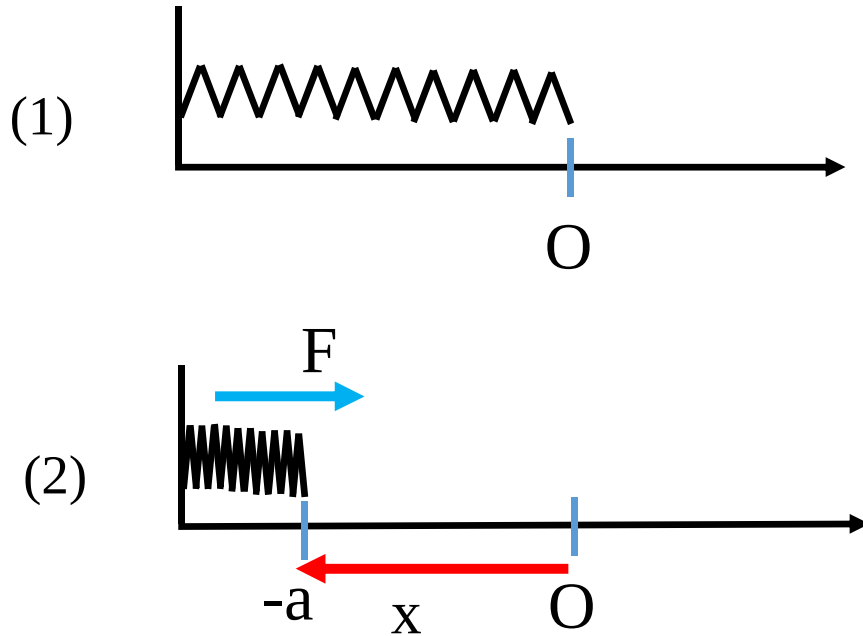
$$= -\frac{1}{2}kx^2 \Big|_{+a}^0$$

$$W = +\frac{1}{2}ka^2$$



کار نیروی فنر

ج) کار نیروی فنر در فشردگی از نقطه تعادل تا فاصله $-a$

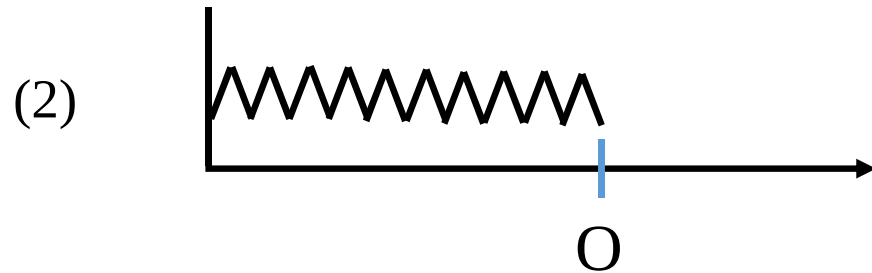
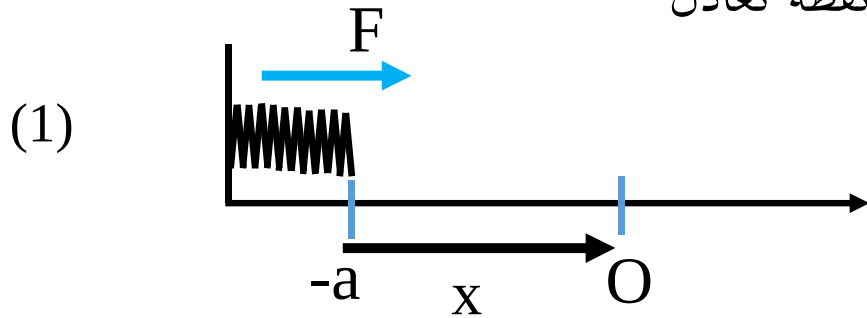


$$\begin{aligned} W &= \int_0^{-a} \vec{F} \cdot d\vec{x} \\ &= \int_0^{-a} -k\vec{x} \cdot d\vec{x} \\ &= -\frac{1}{2} kx^2 \Big|_0^{-a} \end{aligned}$$

$$W = -\frac{1}{2} ka^2$$

کار نیروی فنر

(د) کار نیروی فنر در برگشت از نقطه فشردگی فاصله $-a$ تا نقطه تعادل



$$\begin{aligned}
 W &= \int_{-a}^0 \vec{F} \cdot d\vec{x} \\
 &= \int_{-a}^0 -k\vec{x} \cdot d\vec{x} \\
 &= -\frac{1}{2} kx^2 \Big|_{-a}^0 \\
 W &= +\frac{1}{2} ka^2
 \end{aligned}$$

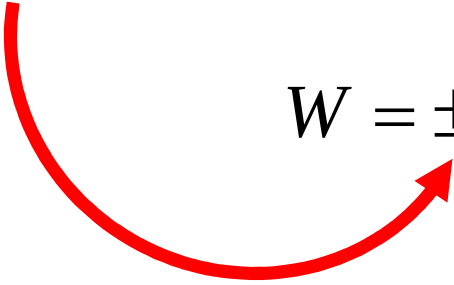
قاعده ای برای محاسبه کار نیروی فنر

اگر انتهای فنر به اندازه x جابه جا شود کار نیروی فنر در این جابه جایی از قاعده زیر بدست می آید:

۱- مشخص کردن جهت نیروی فنر (همواره به سمت نقطه تعادل)

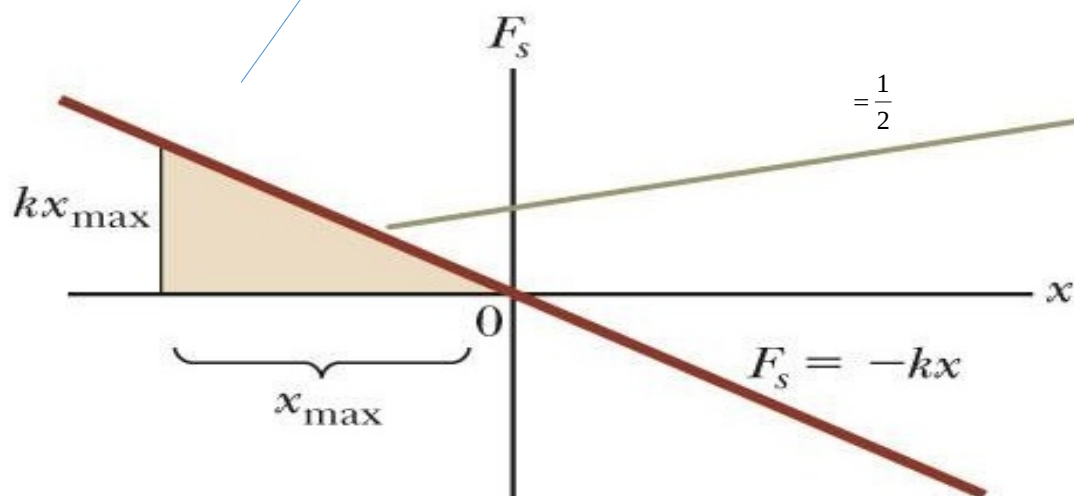
۲- مشخص کردن جهت جابه جایی انتهای فنر

۳- اگر نیرو و جابه جایی هم جهت باشند کار مثبت و در صورت خلاف جهت هم بودن کار منفی

$$W = \pm \frac{1}{2} kx^2 \quad -۴$$


کار نیروی فنر = مساحت سطح زیر نمودار نیرو بر حسب جابه جایی

$$W = \frac{1}{2} (\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}) = \frac{1}{2} kx^2$$

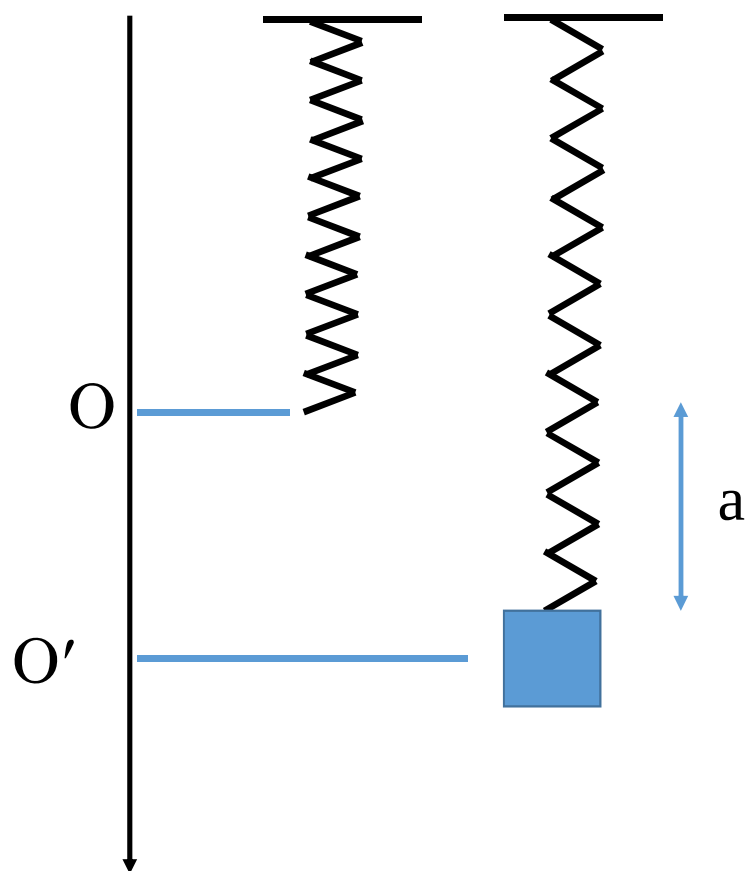


The work done by the spring force on the block as it moves from $-x_{\max}$ to 0 is the area of the shaded triangle, $\frac{1}{2} kx_{\max}^2$.

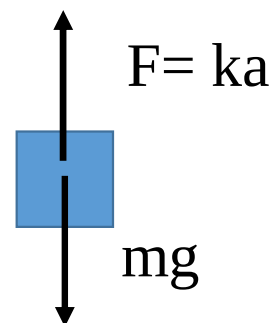
مثال:

با آویزان نمودن یک وزنه به جرم m به انتهای فنری با ثابت k طول آن به چه میزانی افزایش می یابد و کار نیروی فنر را در این جابه جایی حساب کنید

فرض می شود جسم به آرامی پایین بیاید و
به نقطه تعادل جدید O' برسد



تعادل در O'



$$F = mg$$

$$ka = mg$$

$$a = \frac{mg}{k}$$

$$W = -\frac{1}{2}ka^2 = -\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 =$$

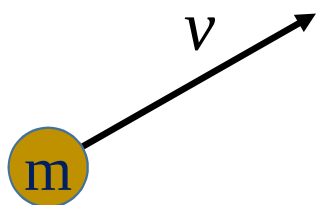
انرژی جنبشی:

انرژی مکانیکی

انرژی جنبشی

انرژی پتانسیل

انرژی جنبشی: انرژی یک جسم در حال حرکت (خطی یا دورانی) که بیانگر جنبش آن است



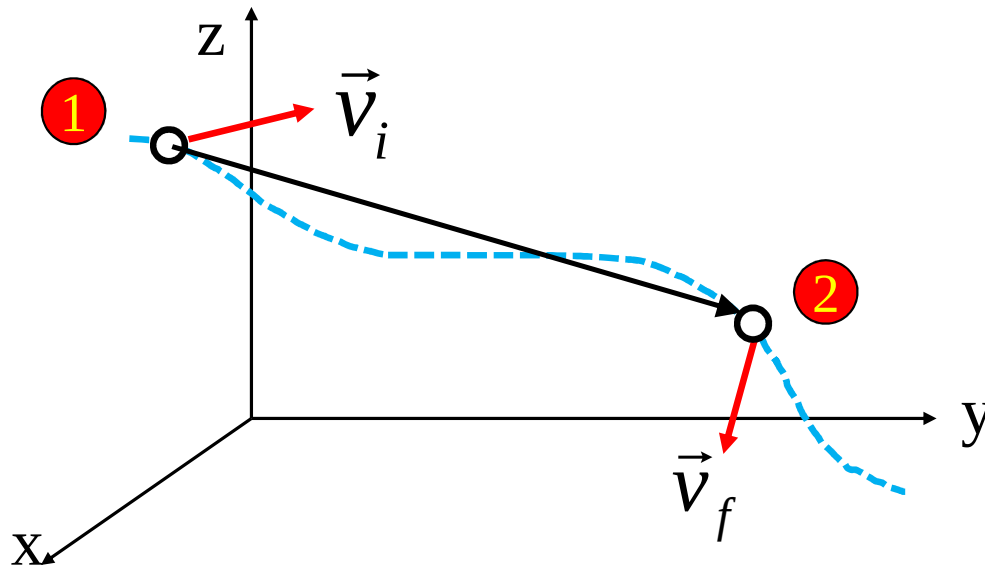
$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

قضیه کار – انرژی

تغییر در انرژی جنبشی یکی از نتایج احتمالی انجام کار برای انتقال انرژی به یک سیستم است.

قضیه می گوید:

تغییر انرژی جنبشی یک جسم، در یک جا به جایی برابر با کار انجام شده توسط نیروی های وارد بر جسم در این جابه جایی است



$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\Delta K = \sum W$$

اثبات قضیه کار – انرژی در یک بعد

$$W_{ext} = \int_{x_i}^{x_f} \sum F dx = \int_{x_i}^{x_f} ma dx$$

$$W_{ext} = \int_{v_i}^{v_f} mv dv$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$W_{ext} = K_f - K_i = \Delta K$$

نکاتی پیرامون قضیه کار – انرژی

۱- این قضیه یک معادله اسکالر است و سرعت بکار رفته به صورت توان دو یک کمیت اسکالر است

۲- کار برآیند نیروها در جابه جایی = مجموع کار تک تک نیروها در جابه جایی

$$W_t = W_1 + W_2 + \dots$$

$$W_t = \vec{F}_1 \cdot \vec{d} + \vec{F}_2 \cdot \vec{d} + \dots$$

۳- در قضیه کار – انرژی؛ منظور از کار، کار کل نیروها می باشد

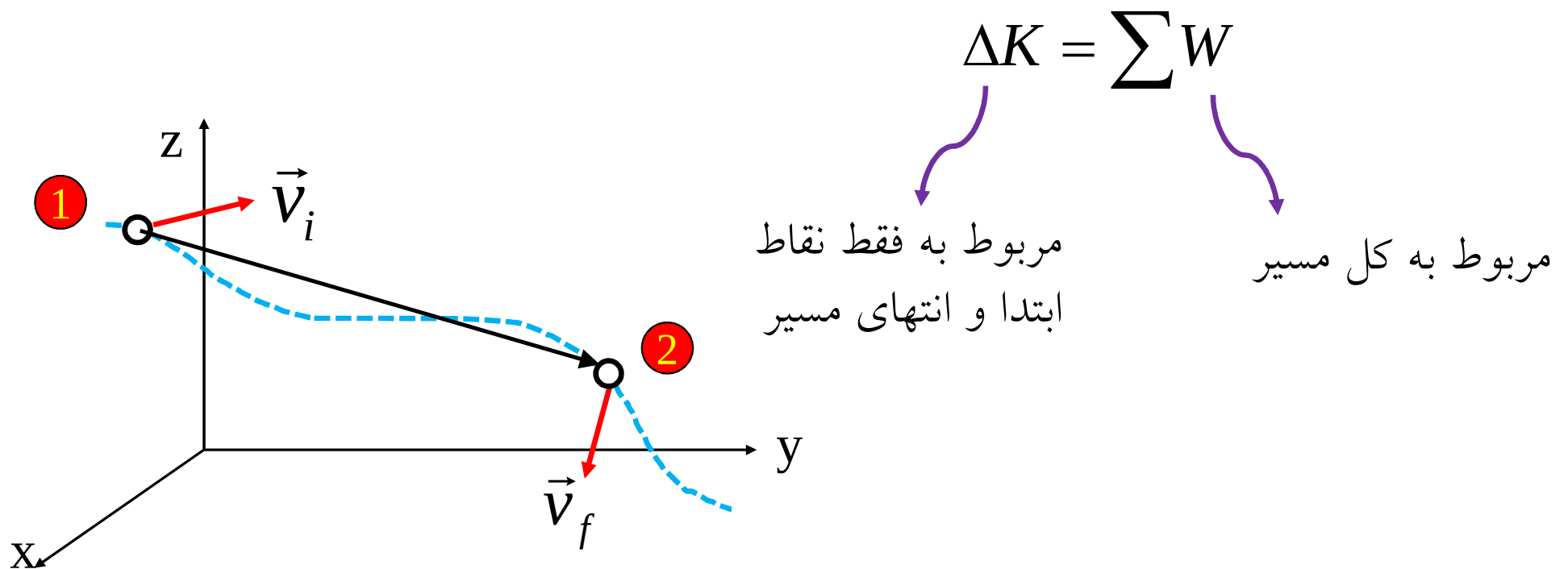
۴- اگر کار کل مثبت باشد سرعت جسم زیاد می شود

اگر کار کل صفر باشد سرعت جسم تغییری نمی کند

اگر کار کل منفی باشد سرعت جسم کم می شود

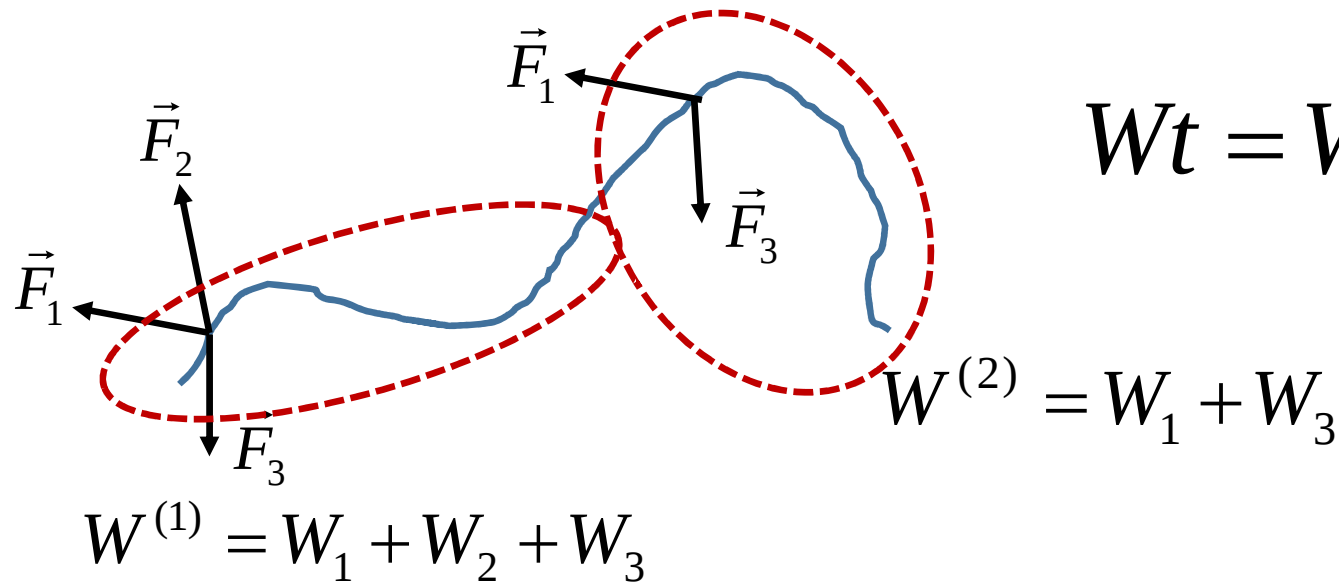
نکاتی پیرامون قضیه کار – انرژی

۵- در قضیه کار انرژی؛ ارتباط بین تغییر انرژی جنبشی فقط دو نقطه با کار انجام شده در کل مسیر بیان می شود



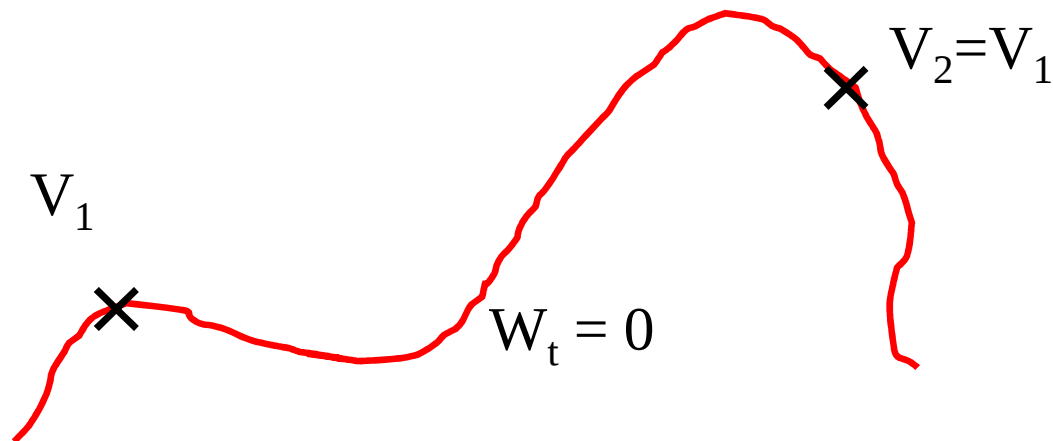
نکاتی پیرامون قضیه کار – انرژی

۶- در مسیر جابه جایی جسم ممکن است در بخشی از مسیر نیرویی وجود داشته باشد و در بخشی از آن وجود نداشته باشد. بنابراین کار این نیرو فقط در بخشی که وجود دارد محاسبه می شود



نکاتی پیرامون قضیه کار – انرژی

۷- اگر بین دو نقطه، سرعت جسم یکسان باشد انرژی جنبشی جسم در آن دو نقطه یکسان خواهد بود لذا کار کل نیروها در جابه جایی بین این دو نقطه صفر خواهد بود



نکاتی پیرامون قضیه کار – انرژی

۸- اهمیت قضیه کار- انرژی در مسائلی است که شتاب ثابت نیست مشخص می شود.

$$a = \text{constant}$$

$$V = V_0 + at$$

$$a = \text{variable}$$

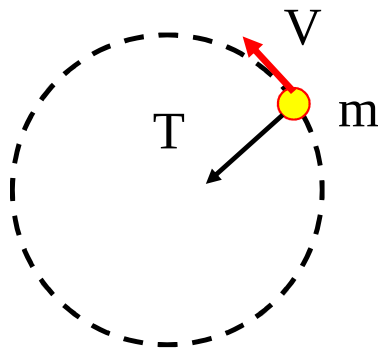
$$V - V_0 = \int a dt$$



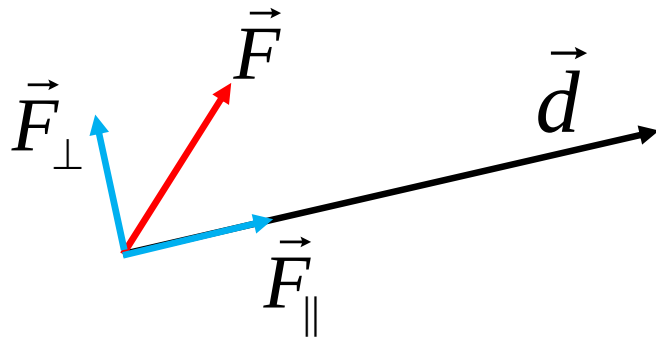
$$W_t = \frac{1}{2} m (V^2 - V_0^2)$$

نکاتی پیرامون قضیه کار – انرژی

۹- در حرکت دایره ای یکنواخت، نیروی مرکزگرا عمود بر راستای حرکت بوده و لذا کار انجام شده توسط آن هنگام چرخیدن جسم روی دایره صفر است. پس نیروی مرکزگرا نمی تواند سرعت جسم را تغییر دهد



۱۰- مولفه ای از نیرو که در جهت جابه جایی قرار دارد کار انجام خواهد داد و مولفه نیرویی که عمود بر جابه جایی است کاری انجام نمی دهد

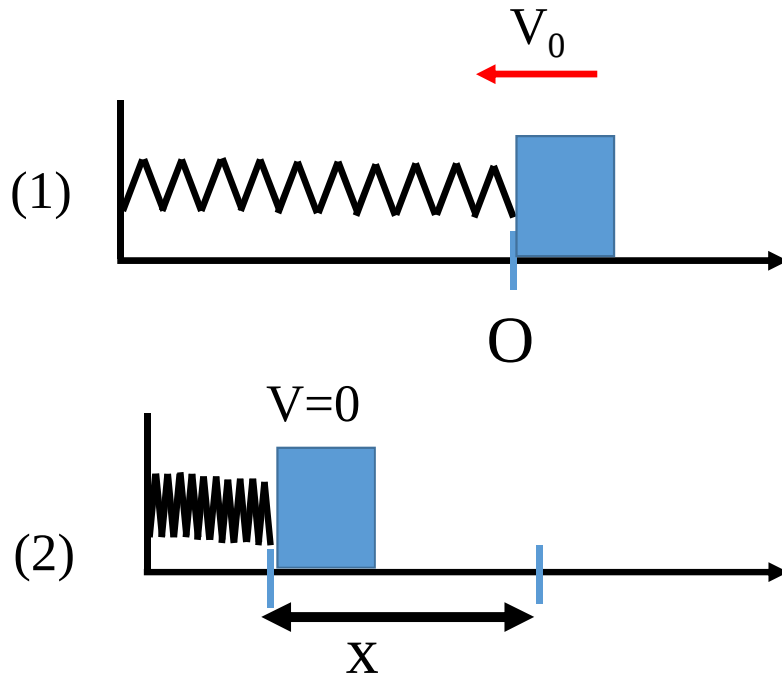


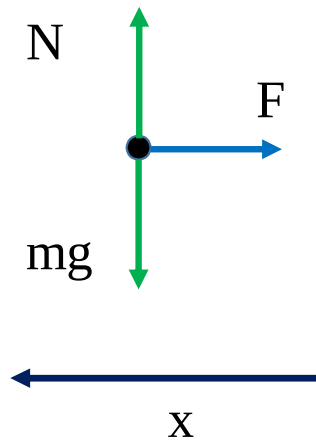
$$\vec{F} = \vec{F}_\perp + \vec{F}_\parallel$$

$$W = (\vec{F}_\perp \cdot \vec{d}) + (\vec{F}_\parallel \cdot \vec{d}) = 0 + F_\parallel d \cos 0 = F_\parallel d$$

مثال

جسمی به جرم m و با سرعت V_0 روی میز بدون اصطکاکی با فنری با ثابت k برخورد می نماید فنر به چه میزان فشرده می شود





$$W_{mg} = 0$$

$$W_N = 0$$

$$W_F = -\frac{1}{2}kx^2$$

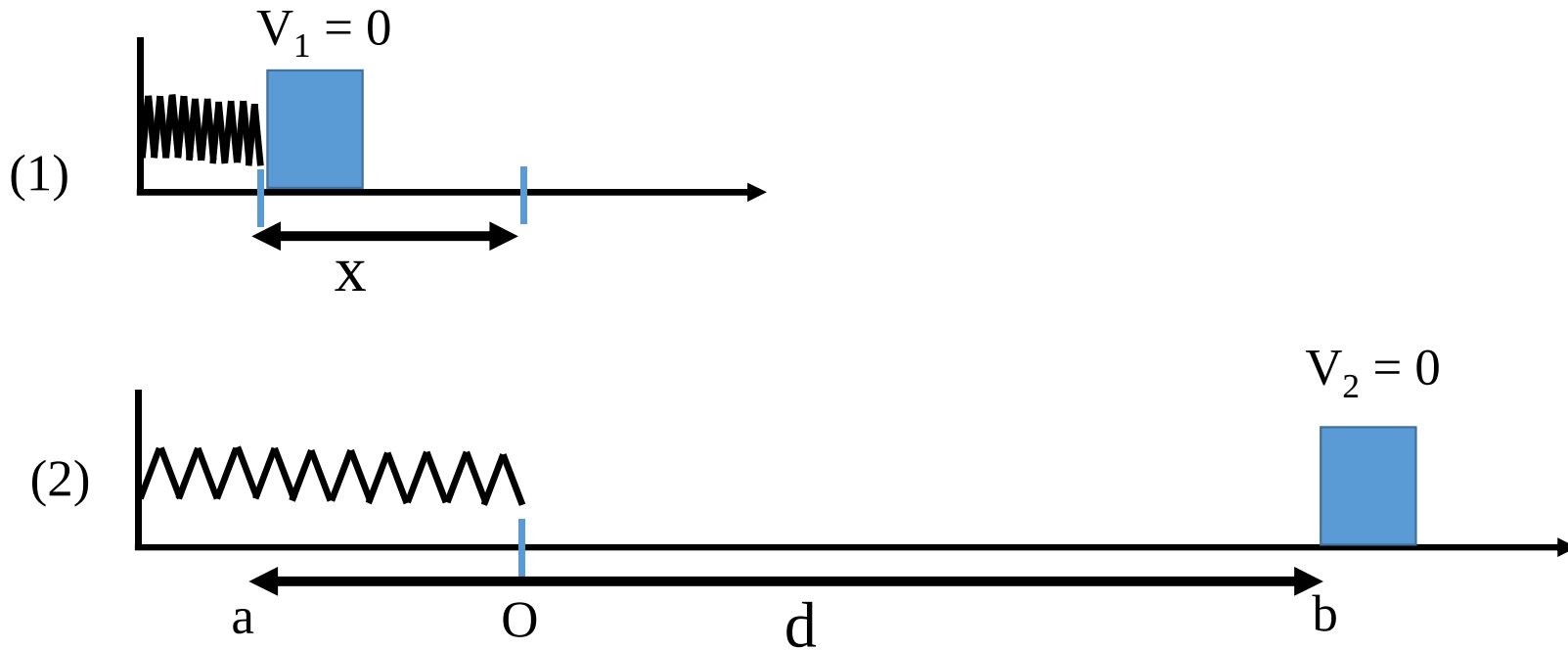
$$\text{Work-Energy Theorem} \rightarrow W_t = \Delta K \rightarrow -\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m(V_2^2 - V_1^2)$$

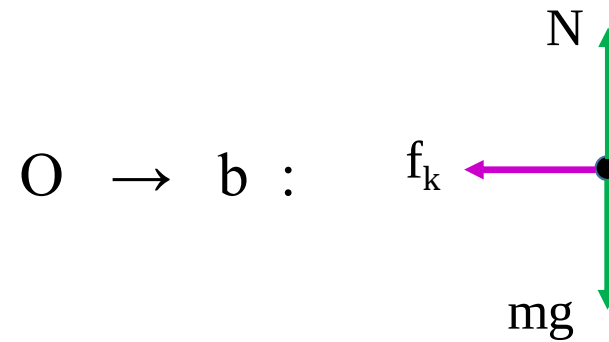
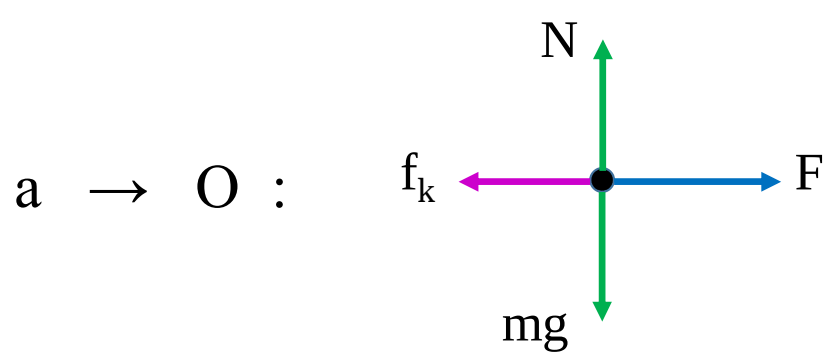
$$\rightarrow -\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m(0 - V_0^2)$$

$$\rightarrow x = V_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$$

مثال

جرم m را مقابل فنری با ثابت $k = 200 \text{ N/m}$ قرار داده و آن را به میزان $x = 15 \text{ cm}$ به فنری می فشاریم. سپس مجموعه (فنر و جسم) را از حالت سکون رها می کنیم. جسم بعد از طی $d = 60 \text{ cm}$ متوقف می شود. ضریب اصطکاک لغزشی میان جسم و سطح را بدست آورید





$$W_{mg} = 0$$

$$W_N = 0$$

$$W_F = \frac{1}{2} kx^2$$

$$W_{f_k} = -\mu_k mgd$$

$$W_t = W_{mg} + W_N + W_F + W_{f_k}$$

$$\Delta K = K_2 - K_1 = 0$$

$$W_t = \Delta K \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} kx^2 - \mu_k mgd = 0$$

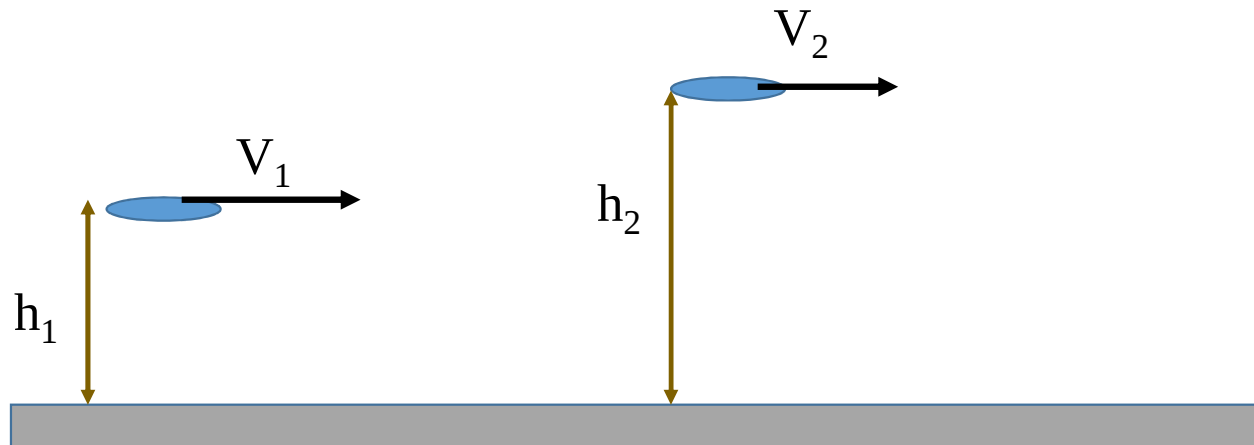
$$\rightarrow \quad \mu_k = \frac{kx^2}{2mgd}$$

مثال

یک بشقاب پلاستیکی چرخان (فریزی) به جرم $m = 125 \text{ g}$ با سرعت $V_1 = 12.3 \text{ m/s}$ از ارتفاع $h_1 = 1.06 \text{ m}$ بالای سطح زمین پرتاب می شود. هنگامی که بشقاب به ارتفاع $h_2 = 2.32 \text{ m}$ می رسد سرعت آن $V_2 = 9.57 \text{ m/s}$ می شود. مطلوبست:

الف) کار نیروی گرانش

ب) میزان انرژی کاهش یافته توسط نیروی مقاومت هوا



(الف) $W_{mg} = -mg(h_2 - h_1) = -1.575 \text{ J}$

(ب) $W_t = \Delta K$

$$W_{mg} + W_{air} = \Delta K$$
$$W_{air} = \Delta K - W_{mg}$$

مثال

یک تیر به جرم 0.075 kg به صورت افقی پرتاب می شود. کمان هنگامی که به میزان 0.9 m کشیده شده است یک نیرویی را به تیر وارد می سازد. سرعت تیر هنگام جدا شدن از کمان 40 m/s است. نیروی متوسطی که توسط کمان به تیر وارد می شود را حساب کنید

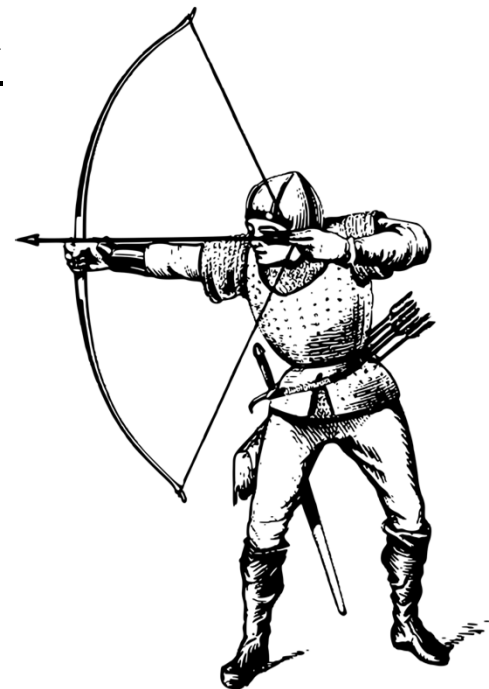
$$m = 0.075 \text{ kg}, \quad s = 0.90 \text{ m}, \quad v_0 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_f = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$W = K_f - K_0$$

$$F(0.90 \text{ m}) = \frac{1}{2} (0.075 \text{ kg}) \left(40 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \frac{1}{2} (0.075 \text{ kg}) \left(0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2$$

$$F(0.90 \text{ m}) = 60 \text{ J}$$

$$F = 66.7 \text{ N}$$



توان

آهنگ انجام کار توسط یک نیرو

کار در چه مدت زمانی انجام می شود

توان متوسط $\bar{P} = \frac{W}{t}$ وات $J/s = W$

توان لحظه ای $P = \frac{dW}{dt}$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

توان یک نیرو هنگامی بیشینه است که هم جهت با سرعت به جسم وارد شود

مثال:

جسمی به جرم $m = 3 \text{ kg}$ تحت تاثیر نیروی $F(x)$ حرکت می کند. مکان جسم در هر لحظه توسط معادله زیر داده می شود. در لحظه $t = 2 \text{ s}$ این نیرو با چه توانی کار انجام می دهد

$$x = 3t - 4t^2 + t^3$$

$$x(t) = 3t - 4t^2 + t^3$$

$$v(t) = 3 - 8t + 3t^2$$

$$a(t) = -8 + 6t$$

$$P = ma.v \quad \rightarrow \quad P(t = 2) =$$

مثال:

یک جرثقیل قطعه بزرگی از گرانیت به جرم $m = 1380 \text{ kg}$ را با سرعت ثابت $V = 1.34 \text{ m/s}$ از سطح شیب‌داری ($\theta = 30^\circ$) بالا می‌کشد. ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح $\mu_k = 0.4$ است. توان جرثقیل را حساب کنید.