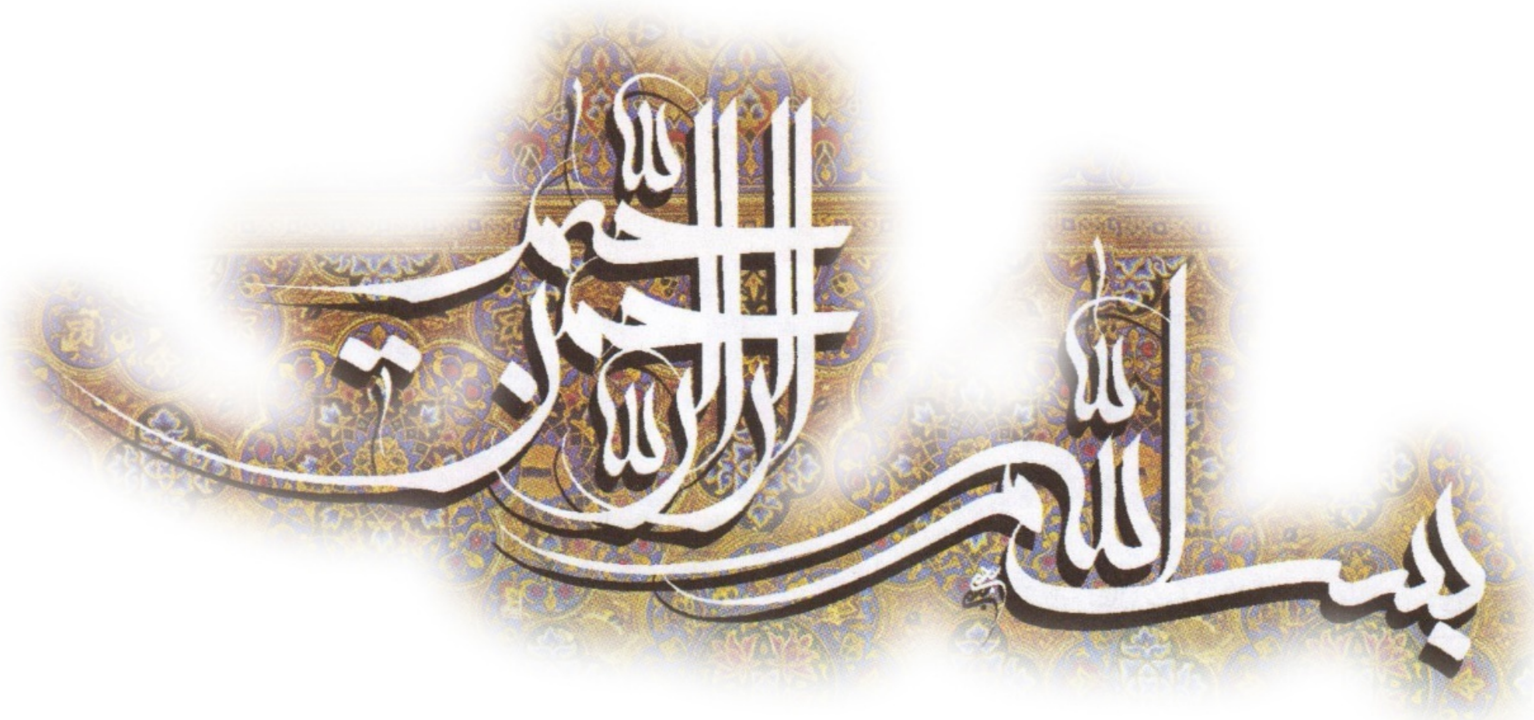

بسم الله الرحمن الرحيم

فصل چهارم – بخش دوم

نیروهای جدایی پذیر

۳.۴ نیروهایی از نوع جداپذیر: حرکت پرتابی

تعریف نیروی جداپذیر:

مولفه نیرو در هر راستا تابعی از مختصه در آن راستا است

$$\mathbf{F} = \mathbf{i}F_x(x) + \mathbf{j}F_y(y) + \mathbf{k}F_z(z) \longrightarrow \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x(x) & F_y(y) & F_z(z) \end{vmatrix} = 0$$

میدان پایستار است زیرا هر مشتق جزئی از نوع آمیخته است و به این جهت عیناً صفر می‌شود، زیرا مختصات x، y، و z متغیرهای مستقل‌اند.

$$m\ddot{x} = F_x(x, \dot{x}, t)$$

$$m\ddot{y} = F_y(y, \dot{y}, t)$$

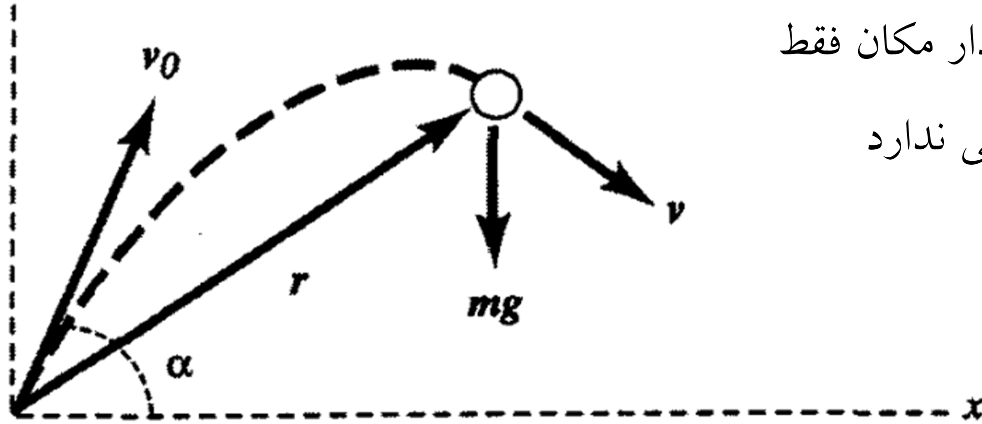
$$m\ddot{z} = F_z(z, \dot{z}, t)$$

حرکت پرتابه در میدان گرانشی یکنواخت

الف) بدون مقاومت هوا:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^{2}\mathbf{r}}{dt^{2}} = -\mathbf{k}mg \\ \vec{F} = 0\,\hat{i} + 0\,\hat{j} - mg\,\hat{k} \end{cases}$$

نیرو پایستار و از نوع جداپذیر



سرعت اولیه در صفحه XZ و نیرو در رستای Z پس بردار مکان فقط محدود به صفحه XZ خواهد شد و در راستای y حرکتی ندارد

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{k}z$$

تغییرات سرعت با مکان و زمان

$$\text{نیرو پایستار} \longrightarrow E(x,z) = E(0,0)$$

$$\frac{۱}{۲}m(\underbrace{\dot{x}^{۲}+\dot{z}^{۲}}_{v^2}) + mgz = \frac{۱}{۲}mv_{\circ}^{۲}$$

$$v^{۲} = v_{\circ}^{۲} - ۲gz$$

$$m\frac{d^{۲}\mathbf{r}}{dt^{۲}} = -\mathbf{k}mg$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{k}gt + \mathbf{v}_{\circ}$$

$$v_0 \begin{cases} v_{0x} = \dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = \dot{y}_0 = v_0 \sin\alpha \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} v_x &= \dot{x} = v_0\cos\alpha \\ v_y &= \dot{y} = v_0 \sin\alpha - gt \end{aligned}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}v_{\circ}\cos\alpha + \mathbf{k}(v_{\circ}\sin\alpha - gt)$$

معادله مکان و مسیر

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{k}gt + \mathbf{v}_\circ \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \mathbf{r} = -\mathbf{k}\frac{۱}{۲}gt^۲ + \mathbf{v}_\circ t + \mathbf{r}_\circ$$

مکان اولیهٔ پرتابه، $\mathbf{r}_\circ$، که مساوی صفر.

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}(v_\circ \cos\alpha)t + \mathbf{k}\left((v_\circ \sin\alpha)t - \frac{۱}{۲}gt^۲\right)$$

$$\left\{\begin{aligned} x &= \dot{x}_\circ t = (v_\circ \cos\alpha)t \longrightarrow t = \frac{x}{v_\circ \cos\alpha} \\ y &= \dot{y}_\circ t \equiv \circ \\ z &= \dot{z}_\circ t - \frac{۱}{۲}gt^۲ = (v_\circ \sin\alpha)t - \frac{۱}{۲}gt^۲ \end{aligned}\right.$$

$$z = (\tan\alpha)x - \left(\frac{g}{۲v_\circ^۲ \cos^۲\alpha}\right)x^۲$$

(۱) ارتفاع بیشینهٔ، $z_{\max}$

در ارتفاع بیشینه مؤلفهٔ قائم سرعت پرتابه صفر است

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}\underbrace{v_0 \cos\alpha}_{v_x} + \mathbf{k}(\underbrace{v_0 \sin\alpha - gt}_{v_z = 0})$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gz$$

$$v^2 = v_x^2 + v_z^2 \xrightarrow{\textit{in}\ \text{max}\ \textit{height}} v^2 = v_0^2 \cos^2\alpha$$

$$v_0^2 \cos^2\alpha = v_0^2 - 2g z_{\max} \longrightarrow z_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

(۲) زمانی، $t_{\max}$، که طول می‌کشد تا به ارتفاع بیشینه برسد

در ارتفاع بیشینه، مؤلفهٔ قائم سرعت صفر

$$v_\circ \sin\alpha - g t_{\max} = \circ \longrightarrow t_{\max} = \frac{v_\circ \sin\alpha}{g}$$

(۳) زمان پرواز، T، پرتابه:

$$\begin{cases} z = \dot{z}_\circ t - \frac{۱}{۲} g t^{۲} = (v_\circ \sin\alpha) t - \frac{۱}{۲} g t^{۲} \\ z = \circ \end{cases} \Rightarrow T = \frac{۲ v_\circ \sin\alpha}{g}$$

این مدت‌زمان دو برابر زمانی است که طول می‌کشد تا پرتابه به ارتفاع بیشینه برسد و نشان می‌دهد که پرواز پرتابه به بالا تا نقطهٔ اوج مسیرش، با پرواز آن به پایین و در جهت مخالف آن اول، متقارن است.

(۴) برد، R، و برد بیشینهٔ، $R_{\max}$، پرتابه

$$\begin{cases} x = \dot{x}_{\circ} t = (v_{\circ} \cos\alpha) t \\ T = \dfrac{۲ v_{\circ} \sin\alpha}{g} \end{cases} \Rightarrow \quad R = x = \frac{v_{\circ}^{۲} \sin ۲\alpha}{g}$$

بیشینهٔ R $\quad \dfrac{dR}{d\alpha} = 0 \longrightarrow \begin{cases} \alpha = ۴۵^{\circ} \\ R_{\max} = v_{\circ}^{۲}/g \end{cases}$

ب) با در نظرگرفتن مقاومت خطی هوا:

دراین حالت، انرژی کل در حین حرکت پایسته نمی‌ماند، و در خلال پرواز پرتابه پیوسته کاهش می‌یابد.

نیروی مقاوم به‌طور خطی با سرعت تغییر می‌کند $f(v) = -m\gamma v$

$$m\frac{d^{2}\mathbf{r}}{dt^{2}} = -m\gamma\mathbf{v} - \mathbf{k}mg$$

$$\frac{d^{2}\mathbf{r}}{dt^{2}} = -\gamma\mathbf{v} - \mathbf{k}g \longrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\gamma\dot{x} \\ \ddot{y} = -\gamma\dot{y} \\ \ddot{z} = -\gamma\dot{z} - g \end{cases}$$

معادلات از هم جدا شده‌اند؛

حل مسئله در راستای x و y با مقایسه با مثال ۲–٤–۱ :

مثال ۲–٤–۱

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ -c_1 v = m\dfrac{dv}{dt} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v = v_0 e^{-c_1 t/m} \\ x = \dfrac{m v_0}{c_1}\left(1 - e^{-c_1 t/m}\right) \end{cases}$$

نیروی ترمزی

در این مسئله

$$\gamma = c_1/m \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 e^{-\gamma t} \\ \quad \Rightarrow x = \dfrac{\dot{x}_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) \\ \dot{y} = \dot{y}_0 e^{-\gamma t} \\ \quad \Rightarrow \dot{y} = \dot{y}_0 = 0 \end{cases}$$

حل مسئله در راستای z با مقایسه با مثال سقوط قائم به داخل شاره:

مثال سقوط

$$\begin{cases} -mg - c_1 v = m\dfrac{dv}{dt} \\ v = -v_t(1 - e^{-t/\tau}) + v_0 e^{-t/\tau} \end{cases}$$

در این مسئله

$$\ddot{z} = -\gamma\dot{z} - g$$

$$\begin{cases} \gamma = c_1/m \\ v_t = \dfrac{mg}{c_1} = \dfrac{g}{\gamma} \\ \tau = \dfrac{m}{c_1} = \dfrac{1}{\gamma} \end{cases} \longrightarrow \dot{z} = \dot{z}_0 e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})$$

$$z = \left(\frac{\dot{z}_0}{\gamma} + \frac{g}{\gamma^2}\right)(1 - e^{-\gamma t}) - \frac{g}{\gamma}t$$

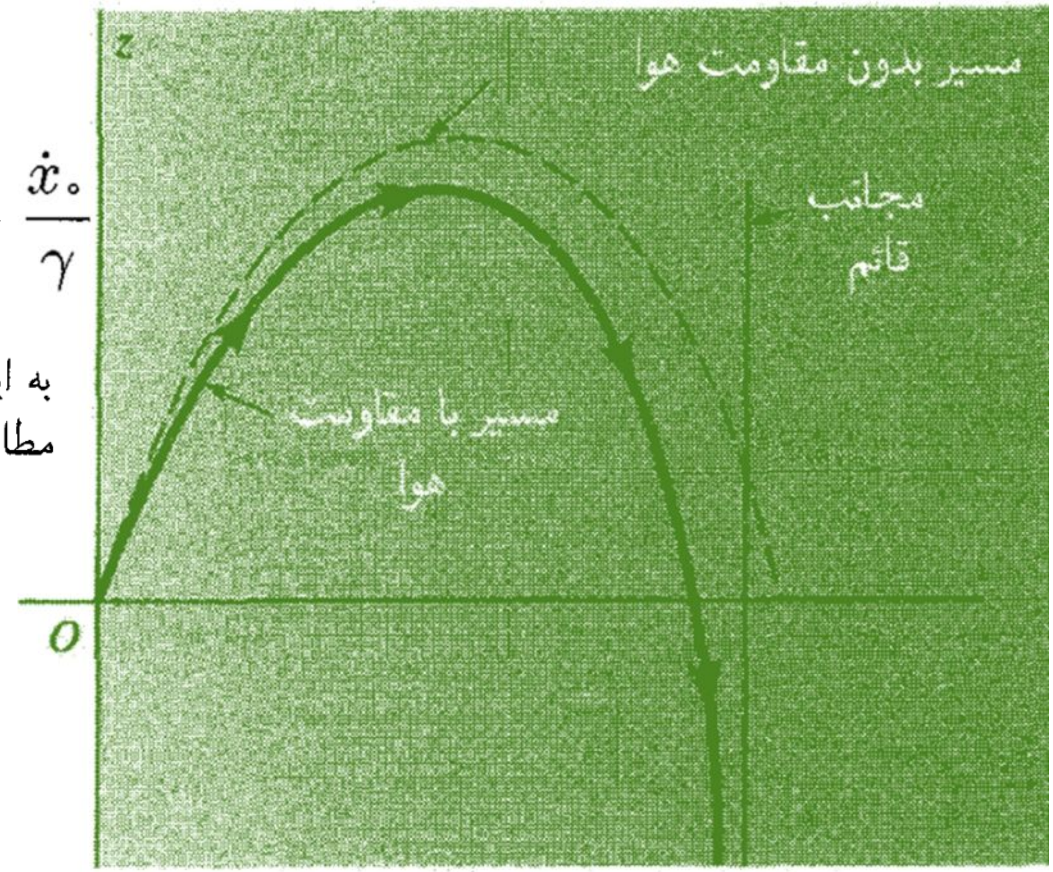
	$t=0$	$t=\infty$
$\dot{x} = \dot{x}_{\circ} e^{-\gamma t}$	$\dot{x} = \dot{x}_0$	$\dot{x} = 0$
$x = \frac{\dot{x}_{\circ}}{\gamma}(\text{۱} - e^{-\gamma t})$	$x = 0$	$x = \frac{\dot{x}_0}{\gamma}$
$\dot{z} = \dot{z}_{\circ} e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}(\text{۱} - e^{-\gamma t})$	$\dot{z} = \dot{z}_0$	$\dot{z} = -\frac{g}{\gamma}$
$z = \left(\frac{\dot{z}_{\circ}}{\gamma} + \frac{g}{\gamma^{\text{۲}}}\right)(\text{۱} - e^{-\gamma t}) - \frac{g}{\gamma} t$	$z = 0$	$z = -\infty$

مکان اولیهٔ پرتابه را مبدأ دستگاه مختصات، صفر، گرفته‌ایم

$$\mathbf{r} = \left(\frac{\mathbf{v}_\circ}{\gamma} + \frac{\mathbf{k}g}{\gamma^۲}\right)(۱ - e^{-\gamma t}) - \mathbf{k}\frac{gt}{\gamma}$$

$$x = \frac{\dot{x}_\circ}{\gamma}(۱ - e^{-\gamma t}) \xrightarrow{t \to \infty} x \to \frac{\dot{x}_\circ}{\gamma}$$

به این معنی که مسیر کامل پرتابه، اگر به چیزی اصابت نکند، مطابق شکل ۲.۳.۴، باید مجانب قائم داشته باشد.



برد افقی

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) \longrightarrow 1 - \gamma x/\dot{x}_0 = e^{-\gamma t}$$

$$\longrightarrow t = -\gamma^{-1} \ln(1 - \gamma x/\dot{x}_0)$$

برای بدست آوردن برد افقی؛ t را در رابطه z گذارده و برابر با صفر قرار می دهیم

$$z = \left(\frac{\dot{z}_0}{\gamma} + \frac{g}{\gamma^2}\right) \underbrace{(1 - e^{-\gamma t})}_{\frac{\gamma x_{\max}}{\dot{x}_0}} - \frac{g}{\gamma} t = 0$$

$$\left(\frac{\dot{z}_0}{\gamma} + \frac{g}{\gamma^2}\right) \frac{\gamma x_{\max}}{\dot{x}_0} = \frac{g}{\gamma^2} \ln\left(1 - \frac{\gamma x_{\max}}{\dot{x}_0}\right)$$

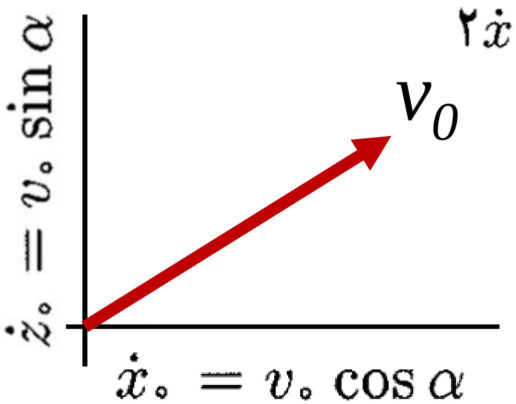
$$\left(\frac{\dot z_0}{\gamma}+\frac{g}{\gamma^2}\right)\frac{\gamma x_{\max}}{\dot x_0}=\frac{g}{\gamma^2}\ln\left(1-\frac{\gamma x_{\max}}{\dot x_0}\right)$$

$$\ln(1-u)=-u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}-\cdots$$

به‌ازای $\dot x_0$ / $u=\gamma x_{max}$،

؟

$$x_{\max}=\frac{2\dot x_0\dot z_0}{g}-\frac{8\dot x_0\dot z_0^2}{3g^2}\gamma+\cdots$$



$$2\dot x_0\dot z_0=2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha=v_0^2\sin 2\alpha.$$

$$x_{\max}=\underbrace{\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}}_{\text{برد در غیاب مقاومت هوا.}}-\frac{4v_0^3\sin 2\alpha\sin\alpha}{3g^2}\gamma+\cdots$$

کاهش برد ناشی از مقاومت هوا.

مثال ۱.۳.۴ برد افقی توپ گلف

مقاومت پس‌کشی هوا برحسب v، به‌جای خطی‌بودن به درجهٔ دوم نزدیکتر است

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}(c_1 + c_2|\mathbf{v}|)$$

«خطی‌سازی» تابع نیرو

$|\mathbf{v}|$ را با سرعت اولیه، v_0، مساوی قرار می‌دهیم

$$F(v) = -v(c_1 + c_2 v_0)$$

تعریف

$$\gamma = \frac{c_1 + c_2 v_0}{m}$$

$$F(v) = -\gamma\, v$$

توپ گلف به قطر $D = ۰٫۰۴۲\text{m}$ و جرم $m = ۰٫۰۴۶\text{kg}$،

می‌توان از $c_۱$ چشم پوشید

$$\gamma = \frac{c_۲ v_۰}{m} = \frac{۰٫۲۲ D^۲ v_۰}{m} = \frac{۰٫۲۲(۰٫۰۴۲)^۲ v_۰}{۰٫۰۴۶} = ۰٫۰۰۸۴ v_۰$$

برای مثال $\quad v_۰ = ۲۰\text{m/s} \longrightarrow \gamma = ۰٫۰۰۸۴ \times ۲۰ = ۰٫۱۷\text{s}^{-۱}$

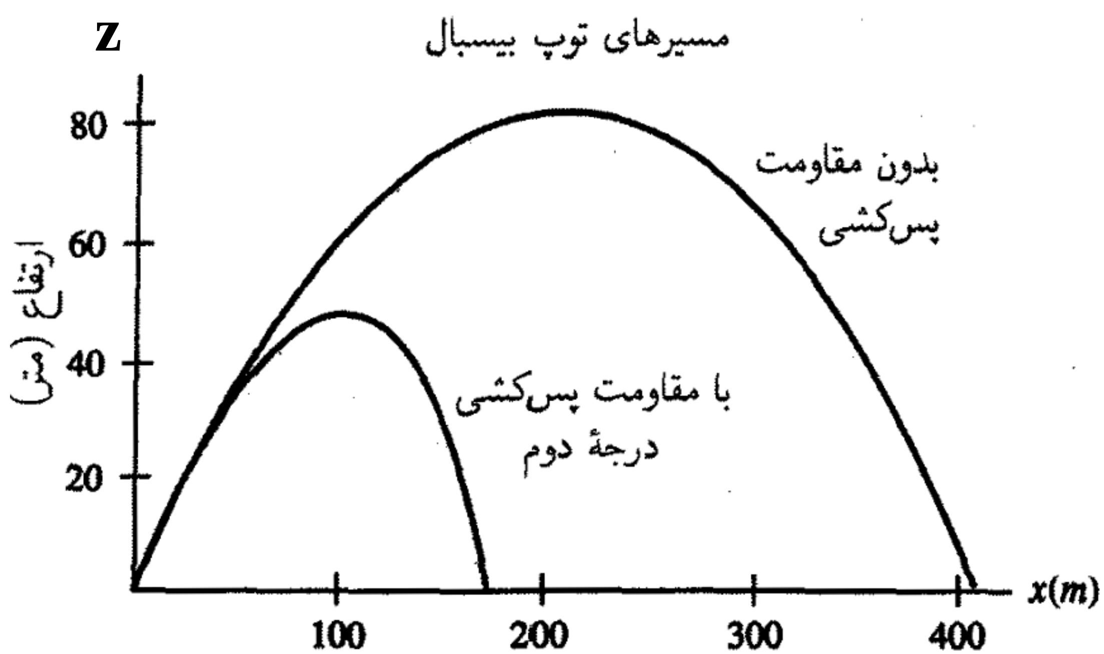
برد افقی، به‌ازای $\alpha = ۳۰^\circ$، $x_{\max} = \frac{(۲۰)^۲ \sin ۶۰^\circ}{۹٫۸}\text{m} - \frac{۴(۲۰)^۳ \sin ۶۰^\circ \sin ۳۰^\circ \times ۰٫۱۷}{۳(۹٫۸)^۲}\text{m}$

$$= ۳۵٫۳\text{m} - ۸٫۲\text{m} = ۲۷٫۱\text{m}$$

مثال) ضربه به توپ بیسبال

نیروی مقاومت پس‌کشی هوای وارد بر توپ بیسبال اساساً با مجذور سرعت توپ متناسب است:

$$\mathbf{F}_D(v) = -c_۲|v|\mathbf{v}$$



$$m\ddot{\mathbf{r}} = -c_۲|v|\mathbf{v} - mg\mathbf{k}$$

$$m\ddot{x} = -c_۲|v|\dot{x}$$

$$m\ddot{z} = -c_۲|v|\dot{z} - mg$$

$$m\ddot{x} = -c_۲|v|\dot{x}$$

$$m\ddot{z} = -c_۲|v|\dot{z} - mg$$

$$\xrightarrow{\gamma = c_۲/m}$$

$$\ddot{x} = -\gamma(\dot{x}^۲ + \dot{z}^۲)^{۱/۲}\dot{x}$$

$$\ddot{z} = -\gamma(\dot{x}^۲ + \dot{z}^۲)^{۱/۲}\dot{z} - g$$

$D = ۰٫۰۷۲۸\mathrm{m}$ و $m = ۰٫۱۴۵\mathrm{kg}$

$$\gamma = \frac{c_۲}{m} = \frac{۰٫۱۵D^۲}{m} = \frac{۰٫۱۵(۰٫۰۷۲۸)^۲}{۰٫۱۴۵}\mathrm{m}^{-۱} = ۰٫۰۰۵۵\mathrm{m}^{-۱}$$

حل معادله دیفرنسیل درجه دوم ناخطی به کمک کامپیوتر