۵.۴ حرکت ذراتِ باردار در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی

الف) حرکت ذره در حضور میدان الکتریکی

وقتی ذرهٔ باردار الکتریکی در مجاورت بارهای الکتریکی دیگر قرارگیرد، نیرویی بر آن وارد می‌آید. می‌گویند این نیروی $\mathbf{F}$ ناشی از میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ است که از بارهای دیگر پدید آمده است.

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \qquad m\frac{d^{2}\mathbf{r}}{dt^{2}} = q\mathbf{E}$$

$$m\ddot{x} = qE_x$$

$$m\ddot{y} = qE_y$$

$$m\ddot{z} = qE_z$$

مؤلفه‌های میدان توابعی از مختصات مکانی x، y، و z هستند

مؤلفه‌های میدان شامل t ⟵ میدانهای متغیر با زمان

یک حالت ساده، یعنی میدان الکتریکی ثابت یکنواخت:

محور z را در جهت میدان $\qquad E_x = E_y = 0$ و $E = E_z$

$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = 0 \qquad \ddot{z} = \frac{qE}{m} = \text{ثابت}$$

این معادلات دقیقاً با معادلات پرتابه در میدان گرانشی یکنواخت همسان‌اند.

اگر $\dot{x}$ و $\dot{y}$ هر دو در ابتدا صفر نباشند، مسیر سهمی است
در غیر این صورت، مانند مسیر جسمی است که به‌طور قائم سقوط می‌کند.

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = 0$$

$\mathbf{E}$ ناشی از بارهای ساکن

حرکت در چنین میدانی پایسته

تابع پتانسیل $\boldsymbol{\Phi}$ چنان وجود دارد که $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\Phi}$

انرژی پتانسیل ذره‌ای به بار q در چنین میدانی $q\boldsymbol{\Phi}$

انرژی کل ثابت $\quad \mathrm{E} = \frac{1}{2}mv^2 + q\boldsymbol{\Phi}$

ب) حرکت ذره در حضور میدان مغناطیسی

$\mathbf{v}$ سرعت و q بار ذره

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \longrightarrow m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

شتاب ذره همواره بر جهت حرکت عمود است

مؤلفهٔ مماسی شتاب $(\dot{v})$ صفر است

ذره با سرعت ثابت حرکت می‌کند

حتی اگر $\mathbf{B}$ تابع متغیری از مکان $\mathbf{r}$ باشد، تا هنگامی که با زمان تغییر نکند، باز هم این موضوع صادق است

مثال ۱.۵.۴

حرکت ذرهٔ بارداری را در میدان مغناطیسی ثابت یکنواخت بررسی می‌کنیم. فرض کنید محور z را در جهت میدان اختیار کنیم؛ یعنی خواهیم نوشت:

$$\mathbf{B} = \mathbf{k}B$$

$$m\frac{d^{۲}\mathbf{r}}{dt^{۲}} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{k}B) = qB\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$m(\mathbf{i}\ddot{x} + \mathbf{j}\ddot{y} + \mathbf{k}\ddot{z}) = qB(\mathbf{i}\dot{y} - \mathbf{j}\dot{x})$$

$$m\ddot{x} = qB\dot{y}$$

$$m\ddot{y} = -qB\dot{x}$$

$$\ddot{z} = ۰$$

معادلاتی نیستند که از هم مجزا باشند.

$$m\ddot{x} = qB\dot{y} \quad \rightarrow \quad m\int \ddot{x}dt = qB\int \dot{y}dt \quad \rightarrow \quad m\dot{x} = qBy + c_{\text{۱}}$$

$$m\ddot{y} = -qB\dot{x} \quad \rightarrow \quad m\int \ddot{y}dt = -qB\int \dot{x}dt \quad \rightarrow \quad m\dot{y} = -qBx + c_{\text{۲}}$$

$$\ddot{z} = 0 \quad \rightarrow \quad \int \ddot{z}dt = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{z} = \text{ثابت} = \dot{z}_{\text{۰}}$$

تغییر متغیر $\omega = qB/m$

$$\dot{x} = \omega y + C_{\text{۱}} \qquad \dot{y} = -\omega x + C_{\text{۲}} \qquad \dot{z} = \dot{z}_{\text{۰}}$$

$C_{\text{۱}} = c_{\text{۱}}/m$ و $C_{\text{۲}} = c_{\text{۲}}/m$

$$\dot{x} = \omega y + C_1 \xrightarrow{\text{مشتق گیری}} \ddot{x} = \omega \dot{y} = \omega(-\omega x + C_2)$$

$$\rightarrow \quad \ddot{x} = -\omega^2 x + \omega C_2 \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = -\omega^2 x + \omega^2 \frac{C_2}{\omega}$$

معادلهٔ مجزای برحسب x $\quad \ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 a \quad$ $a = C_۲/\omega$

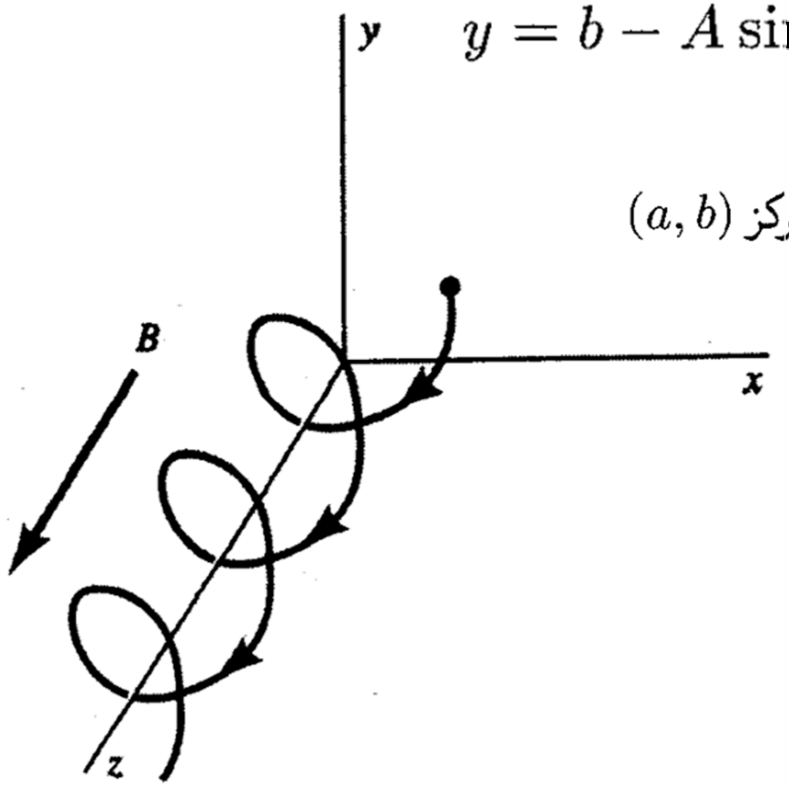
جواب معادله $\quad x = a + A\cos(\omega t + \theta_۰)$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -A\omega \sin(\omega t + \theta_۰) \\ m\dot{y} &= -qBx + c_۲ \end{aligned}\right\} \quad y = b - A\sin(\omega t + \theta_۰)$$

$$b = -C_۱/\omega$$

شکل مسیر حرکت

$$\left.\begin{aligned} x &= a + A\cos(\omega t + \theta_\circ) \\ y &= b - A\sin(\omega t + \theta_\circ) \end{aligned}\right\} \quad (x-a)^۲ + (y-b)^۲ = A^۲$$



تصویر مسیر حرکت بر صفحهٔ xy دایره‌ای است به شعاع A و به مرکز (a, b)

سرعت در جهت z ثابت $\dot{z} = \text{ثابت} = \dot{z}_\circ$

مسیر مارپیچ است

محور مارپیچی در امتداد میدان مغناطیسی واقع است

شعاع مارپیچ

$$x = a + A\cos(\omega t + \theta_0) \qquad \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \theta_0)$$

$$y = b - A\sin(\omega t + \theta_0) \qquad \dot{y} = -A\omega\cos(\omega t + \theta_0)$$

$$\underbrace{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}_{v_1^2} = A^2\omega^2 = A^2\left(\frac{qB}{m}\right)^2$$

شعاع مارپیچ $A = \dfrac{v_1}{\omega} = v_1\dfrac{m}{qB}$

اگر مؤلفهٔ سرعتی در جهت محور z نداشته باشد، مسیر عبارت خواهد بود از دایره‌ای به شعاع A

A با سرعت v_1 تناسب مستقیم دارد.

بسامد زاویه‌ای حرکت در مسیر دایره‌ای از سرعت مستقل است

بسامد زاویه‌ای ω را بسامد سیکلوترونی می‌گویند

۶.۴ حرکت مقید ذره

وقتی ذرهٔ متحرک از لحاظ هندسی محدود می‌شود، به این معنی که باید روی روی سطح یا منحنی تعریف‌شدهٔ معینی باقی بماند، می‌گویند حرکت مقید است

مثال ۱ :

قطعهٔ یخی که داخل ظرف نیمکره‌ای

مثال ۲ :

دانهٔ تسبیحی که روی سیمی می‌لغزد

قیدها ممکن است ثابت باشند یا متحرک

معادلهٔ انرژی در مورد قیدهای هموار

نیروی کل وارد بر ذرهٔ متحرک تحت تأثیر قید را می‌توان به‌صورت جمع برداری نیروی خارجی خالص $\mathbf{F}$ و نیروی قیدی $\mathbf{R}$ بیان کرد

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{R}$$

$\mathbf{R} =$ واکنش عامل مقیدکننده روی ذره

ضرب اسکالر طرفین این معادله در $\mathbf{v}$

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$$

در مورد قید هموار، مثلاً سطح بدون اصطکاک، واکنش $\mathbf{R}$ بر سطح یا بر منحنی عمود است، در حالی که $\mathbf{v}$ بر سطح مماس است. از این رو، $\mathbf{R}$ بر $\mathbf{v}$ عمود است

$\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$ صفر می‌شود

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}+\underbrace{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}_{0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{۱}{۲}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right)=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$$

اگر $\mathbf{F}$ پایسته باشد می‌توانیم از آن انتگرال بگیریم

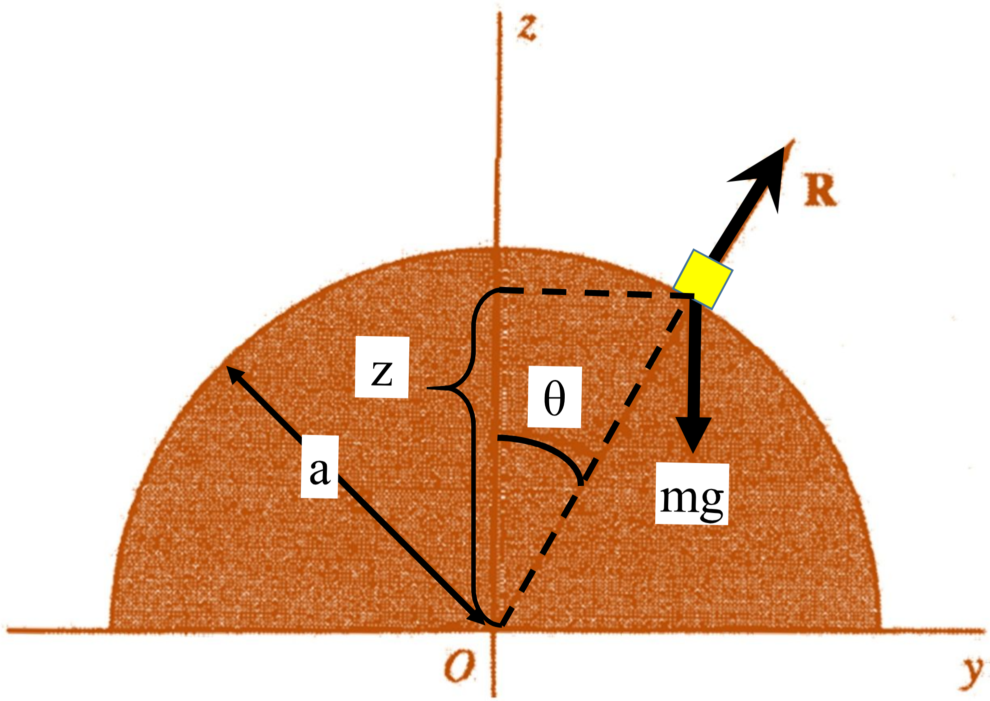
حتی اگر ذره مقید باشد که روی سطح یا منحنی حرکت کند، انرژی کل آن ثابت باقی می‌ماند

$$\frac{۱}{۲}mv^{۲}+V(x,y,z)=\text{ثابت}=E$$

این حالت برای قیدهای بدون اصطکاک برقرار باشد.

مثال

ذره‌ای بر بالاترین نقطهٔ کرهٔ همواری به شعاع a قرار داده شده است. اگر وضعیت آن اندکی به‌هم بخورد، در چه نقطه‌ای از کره جدا می‌شود؟



$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

$$\frac{۱}{۲}mv^{۲} + mgz = E$$

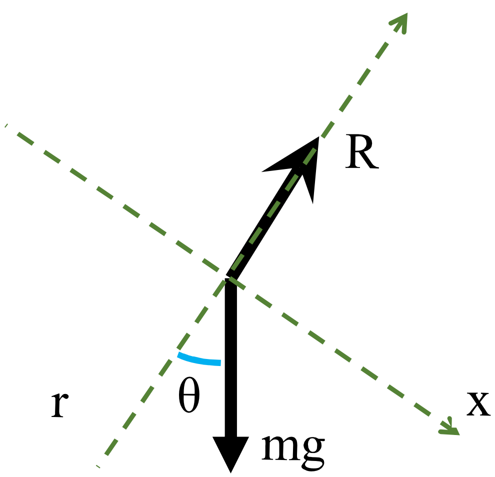
بررسی انرژی مکانیکی:

شرایط اولیه (به‌ازای $z = a$ ، $v = 0$) $\longrightarrow$ $E = mga$

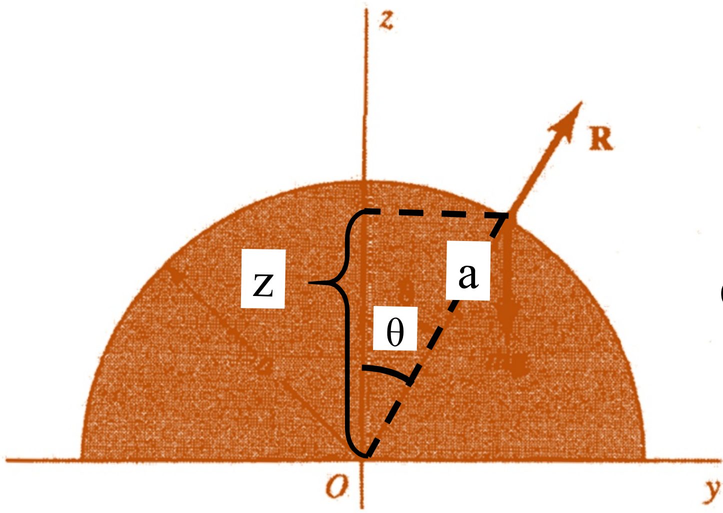
$$E(z=a) = E(z) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_0^2 + mga = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$$

$$0 + mga = \frac{1}{2}mv^2 + mgz \quad \rightarrow \quad v^2 = 2g(z-a) \qquad (1)$$

تحلیل نیروها:



$$\begin{cases} r: & -mg\cos\theta + R = -m\dfrac{v^2}{a} \qquad (2) \\ x: & mg\sin\theta = ma_x \end{cases}$$



$$\cos\theta = \frac{z}{a}$$

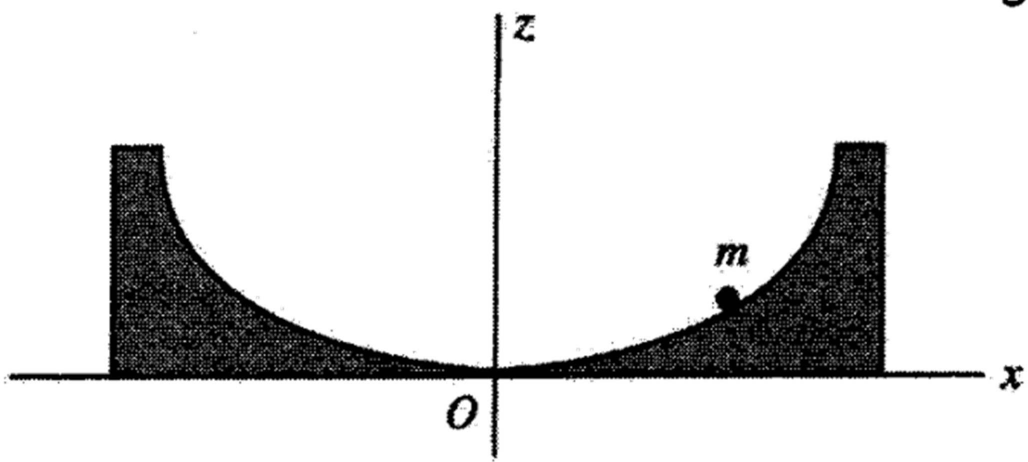
2 $$-mg\cos\theta + R = -m\frac{v^2}{a} \rightarrow -mg\frac{z}{a} + R = -m\frac{v^2}{a}$$ 3

1 3 $$R = mg\frac{z}{a} - \frac{mv^{۲}}{a} = mg\frac{z}{a} - \frac{m}{a}۲g(a-z)$$

در لحظه جدا شدن جسم از سطح نیم کره $R = 0$ $\longrightarrow$ $z = \frac{۲}{۳} = a$

مثال ۲.۶.۴ حرکت مقید روی چرخزاد (سیکلوئید)

ذره‌ای لغزان را تحت تأثیر نیروی گرانش در داخل یک تشت هموار چرخزادی در نظر بگیرید. شکل ۲.۶.۴، به‌وسیلهٔ معادلات پارامتری زیر نشان داده شده است:



$$x = A(2\phi + \sin 2\phi)$$

$$z = A(1 - \cos 2\phi)$$

که ϕ پارامتر است. اکنون معادلهٔ انرژی حرکت، به فرض آنکه حرکتی در امتداد y وجود نداشته باشد، عبارت است از

$$E = \frac{m}{2}v^2 + V(z) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + mgz$$

$$x = A(۲\phi + \sin ۲\phi)$$

$$z = A(۱ - \cos ۲\phi)$$

$$\dot{x} = ۲A\dot{\phi}(۱ + \cos ۲\phi)$$

$$\dot{z} = ۲A\dot{\phi}\sin ۲\phi$$

$$E = \frac{m}{۲}(\dot{x}^{۲} + \dot{z}^{۲}) + mgz$$

$$E = ۴mA^{۲}\dot{\phi}^{۲}\underbrace{(۱ + \cos ۲\phi)}_{۲\cos^{۲}\phi} + mgA\underbrace{(۱ - \cos ۲\phi)}_{۲\sin^{۲}\phi}$$

$$E = ۸mA^{۲}\dot{\phi}^{۲}\cos^{۲}\phi + ۲mgA\sin^{۲}\phi$$

تغییر متغیر $s = 4A\sin\phi$

$$E = 8mA^2\dot{\phi}^2\cos^2\phi + 2mgA\sin^2\phi$$

$$E = \frac{m}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{4A}\right)s^2$$

این معادله دقیقاً همان معادلهٔ انرژی حرکت هماهنگ برحسب تک‌متغیر s است