
بسم الله الرحمن الرحيم

فصل پنجم – بخش اول

دستگاههای مرجع نالخت

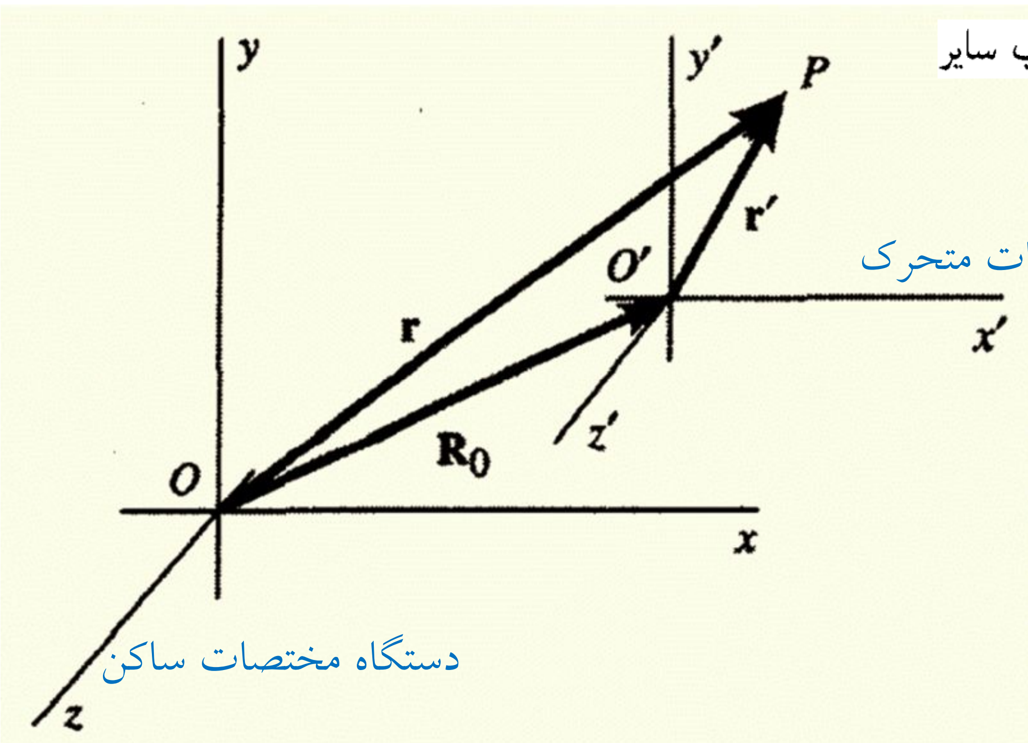
there are types of problems for which these equations would be extremely complex, and it becomes easier to treat the motion of the system in a noninertial frame of reference.

To describe, for example, the motion of a particle on or near the surface of Earth, it is tempting to do so by choosing a coordinate system fixed with respect to Earth. We know, however, that Earth undergoes a complicated motion, compounded of many different rotations (and hence accelerations) with respect to an inertial reference frame identified with the "fixed" stars. Earth's coordinate system is, therefore, a *noninertial* frame of reference; and, although the solutions to many problems can be obtained to the desired degree of accuracy by ignoring this distinction, many important effects result from the noninertial nature of the Earth coordinate system.

۱.۵ دستگاههای مختصات شتابدار و نیروهای لخت

الف) حالت اول: دستگاه مختصات صرفاً حرکت انتقالی اجرا می‌کند.

در انتقال خالص محورهای متناظر Ox و $O'x'$، و به‌همین ترتیب سایر محورها، با یکدیگر موازی باقی می‌مانند



دستگاه مختصات متحرک

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_{\circ} + \mathbf{r}'$$

بردار مکان ذره در دستگاه ثابت

بردار مکان مبدا متحرک نسبت به دستگاه ثابت

بردار مکان ذره در دستگاه متحرک

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_\circ + \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_\circ + \mathbf{v}'$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}_\circ + \mathbf{a}'$$

$\mathbf{V}_\circ$ و $\mathbf{A}_\circ$، به‌ترتیب، سرعت و شتاب دستگاه متحرک

$\mathbf{v}'$ و $\mathbf{a}'$ سرعت و شتاب ذره در دستگاه متحرک‌اند.

These coordinate transformations are called the ***Galilean Coordinate Transformations.*** They enable the observer in frame S to predict the position vector in frame S', based only on the position vector in frame S and the relative position of the origins of the two frames.

اگر دستگاه متحرک شتابدار نباشد $\longrightarrow$ $\mathbf{A}_\circ = \circ$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'$$

شتاب در هر دو دستگاه یکسان است. در نتیجه، اگر دستگاه $oxyz$ لخت باشد، قانون دوم نیوتون، $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$، در دستگاه متحرک به‌صورت $\mathbf{F} = m\mathbf{a}'$ در می‌آید؛ یعنی، دستگاه متحرک نیز دستگاهی لخت است (به‌شرط آنکه حرکت چرخشی نداشته باشد)

When two reference frames are moving with a constant velocity relative to each other as above, the reference frames are called ***relatively inertial reference frames***.

First law

- *Law 1: Every body continues in its state of rest, or of uniform motion in a right line, unless it is compelled to change that state by forces impressed upon it.*

- *In relatively inertial reference frames, if there is no net force impressed on an object at rest in frame S, then there is also no net force impressed on the object in frame S′ .*

Second law

- اگر قوانین نیوتون در یک دستگاه برقرار باشند، در هر دستگاه دیگری که نسبت به دستگاه اولی با سرعت یکنواخت حرکت می‌کنند، نیز صادق‌اند.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\mathbf{a}'$$

- اگر دستگاه متحرک شتابدار باشد، قانون دوم نیوتون در مورد حرکت در دستگاه شتابدار از این قرار خواهد شد

$$\mathbf{F} = m\mathbf{A}_\circ + m\mathbf{a}' \longrightarrow \mathbf{F} - m\mathbf{A}_\circ = m\mathbf{a}' \longrightarrow \mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$$

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + (-m\mathbf{A}_\circ)$$

نیروی وارد بر جسم در دستگاه مختصات متحرک

نیروی وارد بر جسم در دستگاه مختصات ثابت یا لخت

جمله لختی

جملات لختی در معادلات حرکت، نیروهای لختی یا نیروهای مجازی می‌گویند.

چنین «نیروهایی» ناشی از برهم‌کنش با سایر اجسام نیستند

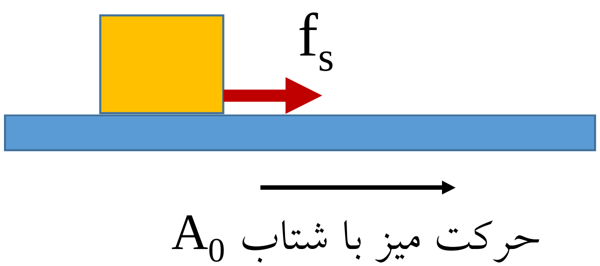
از انتخاب دستگاه مرجع نتیجه می‌شوند.

نیروی واقعی نیستند بلکه حاصلضرب جرم در شتاب (دستگاه مختصات متحرک نسبت به ثابت) می باشد

اگر برای توصیف حرکت ذره دستگاه مختصات نالخت به‌کار رود،
جمله‌های لختی نیز حضور خواهند داشت.

مثال ۱.۱.۵

قطعه‌چوبی روی میز افقی ناهمواری قرار دارد. اگر میز در راستای افقی شتاب پیدا کند، قطعه‌چوب تحت چه شرایطی خواهد لغزید؟ $\mathbf{A}_\circ$ شتاب میز



در آستانه لغزش: نیروی اصطکاک بیشینه

$$f_s^{max} = \mu_s \, mg$$

شرط لغزش آن است که نیروی لختی $-m\mathbf{A}_\circ$ از نیروی اصطکاک بیشتر شود

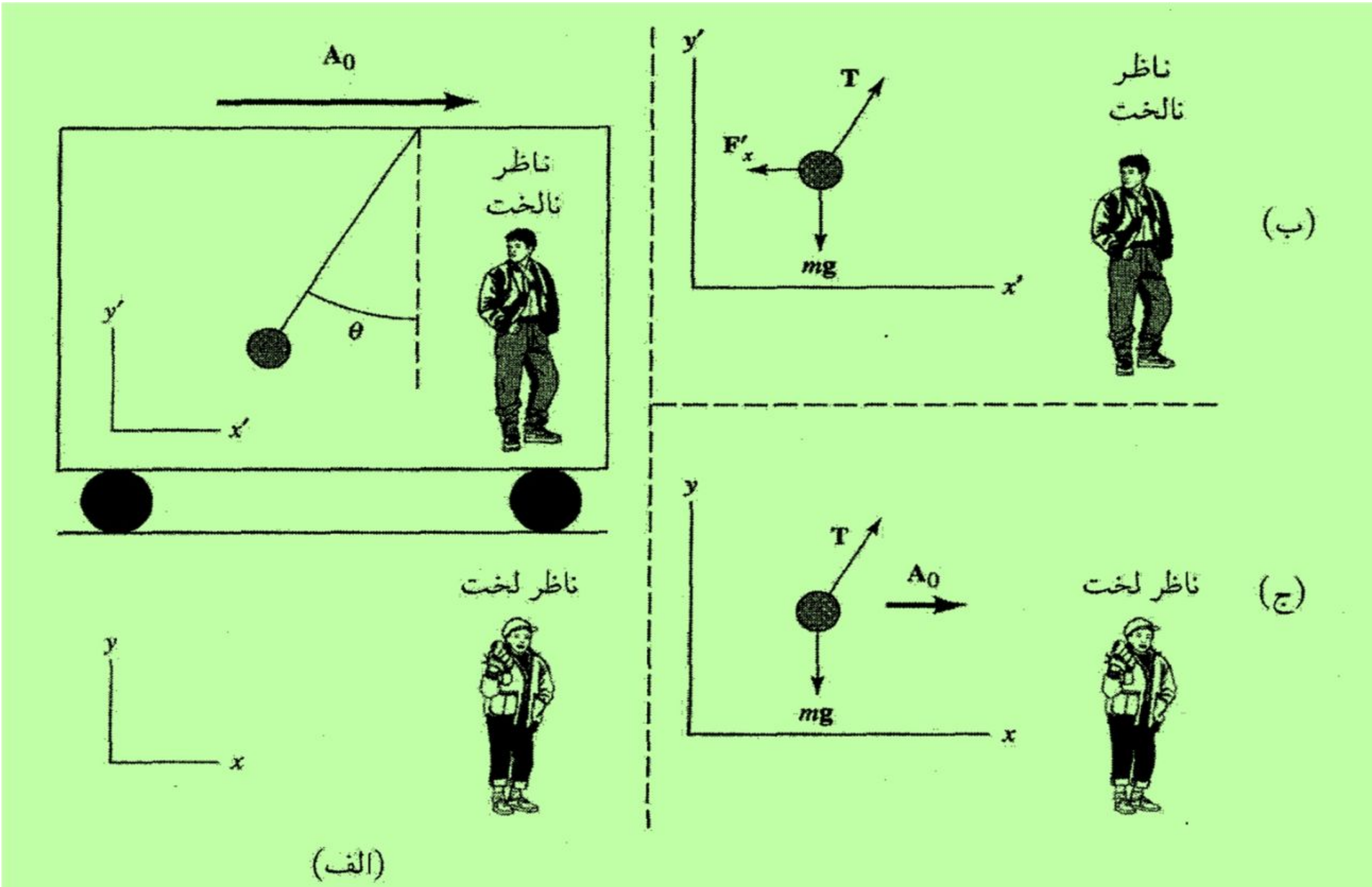
$$\underbrace{|-m\mathbf{A}_\circ|} > \underbrace{\mu_s m g} \longrightarrow A_\circ > \mu_s g$$

نیروی مجازی که سبب حرکت نسبی میز و جسم نسبت به همدیگر می شود

نیرویی که سبب ساکن ماندن جسم و میز نسبت بهم می شود

مثال ۲.۱.۵

آونگی (مطابق شکل ۲.۱.۵ الف) از سقف یک واگن قطار آویزان است فرض کنید واگن به‌طور یکنواخت به‌سمت راست (در جهت $+x$) شتاب می‌گیرد. ناظر نالختی، پسرکی در داخل واگن، می‌بیند که آونگ تحت زاویهٔ θ در طرف چپ راستای قائم آویزان است. او باور دارد که به این طریق آویخته‌شدن آونگ به‌علت وجود نیروی لخت $\mathbf{F}'_x$ است، که روی تمام اشیائی که در دستگاه مرجع شتابدارش قرار دارند، وارد می‌آید (شکل ۲.۱.۵ ب). ناظر نالخت، دخترکی بیرون از واگن، همان چیز را می‌بیند، ولی او می‌داند که نیروی حقیقی $\mathbf{F}'_x$ که بر آونگ وارد می‌آید، وجود ندارد. او می‌داند آونگی که به این طریق آویخته است، به‌علت نیروی خالص در جهت افقی است که لازم است آونگ را به‌میزان $\mathbf{A}_\circ$ شتاب بدهد [که آن دختر مشاهده می‌کند (شکل ۲.۱.۵ ج)]. نشان دهید که، برطبق نظر ناظر نالخت، $\mathbf{F}'_x = -m\mathbf{A}_\circ$ نیرویی است که باعث می‌شود آونگ در زاویهٔ θ آویزان شود.



A_0
ناظر
نالخت
θ
y'
x'
ناظر لخت
y
x
(الف)
y'
T
F'_x
mg
x'
ناظر
نالخت
(ب)
y
T
A_0
mg
x
ناظر لخت
(ج)

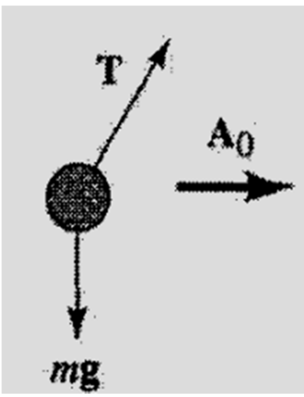
در دیدگاه ناظر لخت

ناظر لخت قانون دوم نیوتون را برای آونگ آویخته به‌صورت زیر می‌نویسد:

$$\sum \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$$

$$T \sin\theta = mA_\circ \qquad T\cos\theta - mg = \circ$$

$$\therefore A_\circ = g\tan\theta$$



1. آونگ تحت زاویهٔ θ آویزان می‌ماند،
2. زیرا واگن قطار در جهت افقی شتاب می‌گیرد
3. مولفه افقی نیروی کشش نخ سبب حرکت شتابدار آونگ می شود
4. شتاب واگن متناسب با تانژانت زاویهٔ انحراف است
5. آونگ به‌صورت یک شتاب‌سنج خطی به‌کار می‌رود

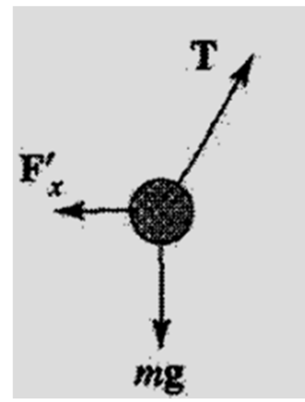
در دیدگاه ناظر نالخت

در دیدگاه این ناظر جسم داخل واگن ساکن است پس برآیند نیروها از دید این ناظر صفر است

$$\sum \mathbf{F}'_i = m\mathbf{a}' = 0$$

$$T\sin\theta - F'_x = 0 \qquad T\cos\theta - mg = 0$$

$$\therefore F'_x = mg\tan\theta$$



1. تمام نیروهای وارد بر آونگ در وضعیت تعادل‌اند
2. آونگ در سمت چپ راستای قائم بر اثر وارد آمدن نیروی $\mathbf{F}'_x(= -m\mathbf{A}_0)$ آویزان می‌شود
3. نیرویی در آنجا باید برقرار باشد که اشیاء را با شتاب $\mathbf{A}_0$ به‌طرف چپ واگن هُل دهد.

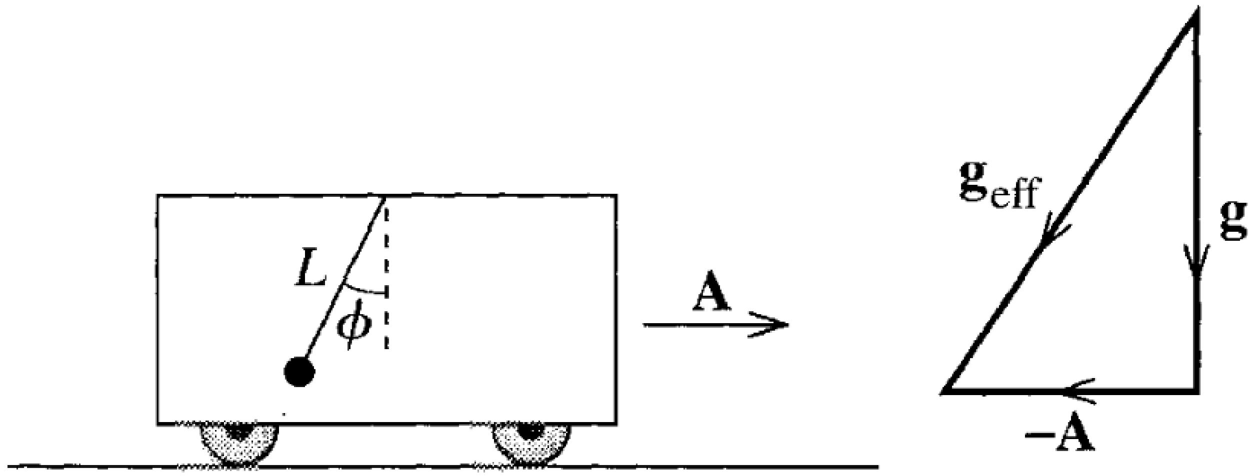
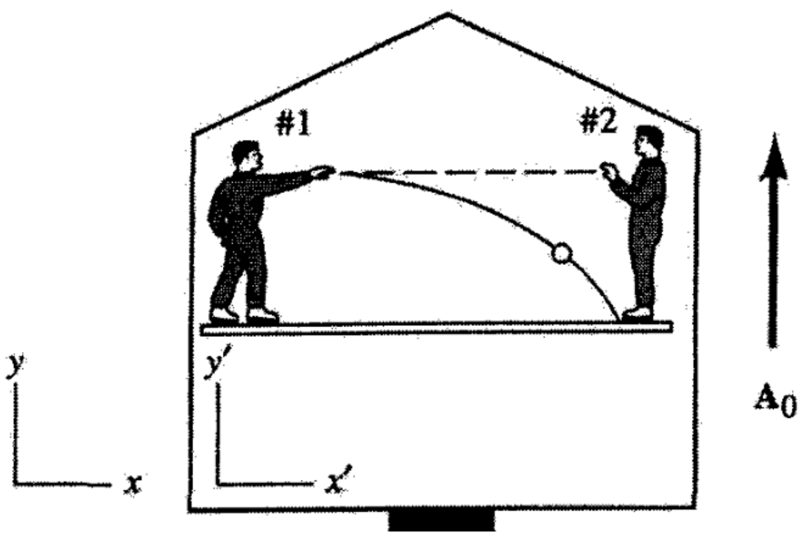


Figure 9.1 A pendulum is suspended from the roof of a railroad car that is accelerating with constant acceleration $\mathbf{A}$. In the non-inertial frame of the car, the acceleration manifests itself through the inertial force $-m\mathbf{A}$, which, in turn, is equivalent to the replacement of $\mathbf{g}$ by the effective $\mathbf{g}_{\text{eff}} = \mathbf{g} - \mathbf{A}$.

مثال ۳.۱.۵

دو فضانورد در یک سفینهٔ فضایی ایستاده‌اند که (مطابق شکل ۳.۱.۵) بالا می‌رود. بزرگی $\mathbf{A}_{\circ}$ را مساوی g بگیرید. فضانورد ۱# توپی را مستقیماً به‌سوی فضانورد ۲# پرتاب می‌کند، که به‌فاصلهٔ $10\,\mathrm{m}$ از او در طرف دیگر سفینه قرار دارد. سرعت اولیهٔ توپ چقدر باید باشد تا قبل از برخورد به کف سفینه به فضانورد ۲# برسد؟ فرض کنید فضانورد ۱# توپ را در ارتفاع $h = 2\,\mathrm{m}$ بالای کف سفینه رها کند. مسئله را از دیدگاه هر دو حل کنید: (الف) ناظر نالخت (در داخل سفینه)؛ و (ب) ناظر لخت (در خارج سفینه).



$$|\mathbf{A}_{\circ}| = |\mathbf{g}|$$

در دیدگاه ناظر نالخت

به‌نظر ناظر نالخت نیروی $-m\mathbf{A}_0$ بر تمام اشیاء واقع در سفینه وارد می‌آید $|\mathbf{A}_0| = |\mathbf{g}|$

$$\vec{a}\left|\begin{matrix} a_x \\ a_y \end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} + a_x t \\ v_y = v_{0y} + a_y t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{1}{2}a_x t^2 \\ y = y_0 + v_{0y}t + \dfrac{1}{2}a_y t^2 \end{cases}$$

$$\vec{a}'\left|\begin{matrix} 0 \\ -A_0 \end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = \dot{x}'_0 t \\ y'(t) = y'_0 - \dfrac{1}{2}A_0 t^2 \end{cases}$$

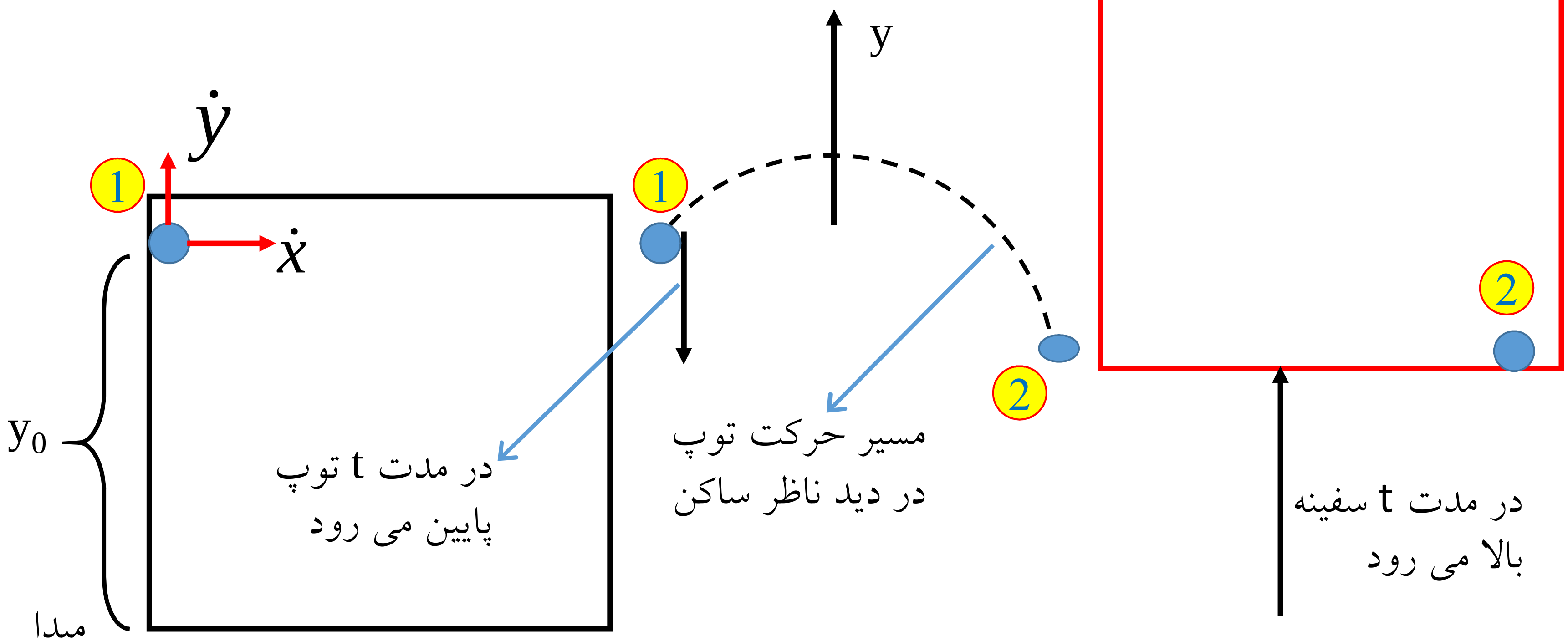
$$\therefore y'(x') = y'_0 - \frac{1}{2}A_0\left(\frac{x'}{\dot{x}'_0}\right)^2$$

مسیر توپ سهمی است،

در محل برخورد توپ با کف سفینه

$$y'(x') = 0 \longrightarrow \dot{x}'_0 = \left(\frac{A_0}{2y'_0}\right)^{1/2} x' \xrightarrow{x'=10} \dot{x}'_0 = 15{,}6\,\mathrm{ms}^{-1}$$

در دیدگاه ناظر لخت



$$\underbrace{y_0 + \dot{y}_0 t}_{\text{معادله حرکت توپ نسبت به ناظر ساکن}} = \underbrace{\dot{y}_0 t + \frac{1}{2} A_0 t^2}_{\text{معادله حرکت کف سفینه نسبت به ناظر ساکن}} \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2} A_0 t^2$$

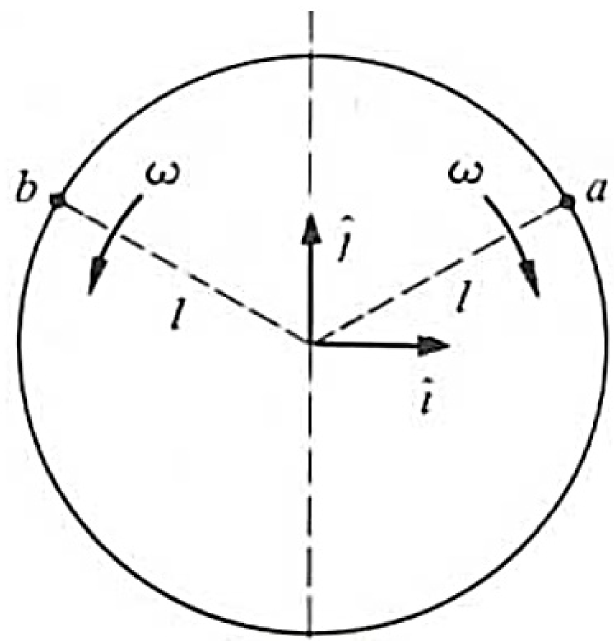
$$t = \frac{x_0}{\dot{x}_0} \quad \text{یا} \quad x = \dot{x}_0 t \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2} A_0 \left(\frac{x}{\dot{x}_0}\right)^2$$

$$\dot{x}_0 = \left(\frac{A_0}{2 y_0}\right)^{1/2} x$$

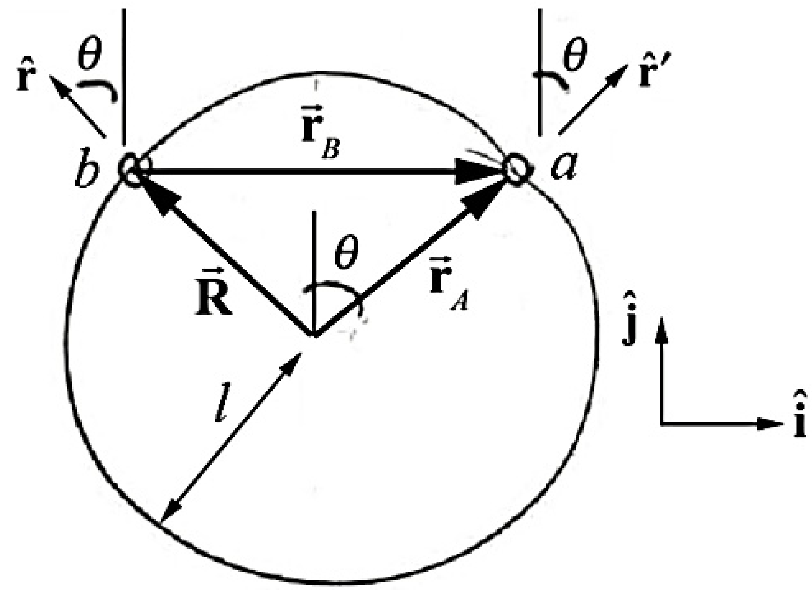
هر دو ناظر برای سرعت افقی اولیه، همان‌طور که باید، مقدار یکسانی را به‌دست می‌آورند.

مثال:

دو ذره a و b از بالای مسیر دایره ای رها می شوند ($\vec{r} = l\ \hat{j}$). آنها در جهت های مختلف روی محیط دایره با سرعت زاویه ای ثابت پایین می آیند. سرعت جسم a نسبت به جسم b را پیدا کنید



(b) Let's choose two reference frames; frame B is centered at particle b, and frame A is centered at the center of the circle in Figure 11.5. Then the relative position vector between the origins of the two frames is given by



$$\vec{\mathbf{r}}_B = \vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{R}}.$$

$$\vec{\mathbf{v}}_B = \vec{\mathbf{v}}_A - \vec{\mathbf{V}}.$$

$$\vec{\mathbf{r}}_A = l\,\hat{\mathbf{r}}'.$$

$$\vec{\mathbf{R}} = l\,\hat{\mathbf{r}}.$$

$$\vec{\mathbf{r}}_B = \vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{R}} = l\,\hat{\mathbf{r}}' - l\,\hat{\mathbf{r}}.$$

موقعیت جسم a در دستگاه B که متصل به جسم b است

$$\vec{\mathbf{r}}_B = \vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{R}} = l\,\hat{\mathbf{r}}' - l\,\hat{\mathbf{r}}\,.$$

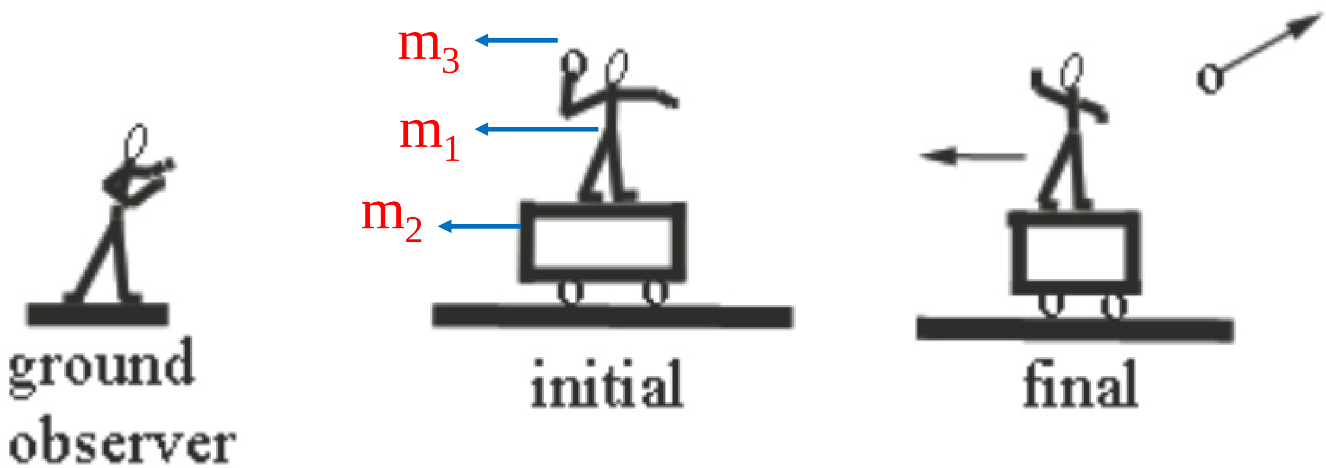
$$\hat{\mathbf{r}} = -\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}$$
$$\hat{\mathbf{r}}' = \sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}\,.$$

$$\vec{\mathbf{r}}_B = l\,\hat{\mathbf{r}}' - l\,\hat{\mathbf{r}} = l\,(\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}) - l\,(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}) = 2l\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}}\,.$$

$$\vec{\mathbf{v}}_B = \frac{d}{dt}(2l\sin\theta)\,\hat{\mathbf{i}} = (2l\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\mathbf{i}} = 2\omega l\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}}\,.$$

Example 11.3 Recoil in Different Frames

A person of mass m_1 is standing on a cart of mass m_2. Assume that the cart is free to move on its wheels without friction. The person throws a ball of mass m_3 at an angle of θ with respect to the horizontal as measured by the person in the cart. The ball is thrown with a speed v_0 with respect to the cart (Figure 11.6). (a) What is the final velocity of the ball as seen by an observer fixed to the ground? (b) What is the final velocity of the cart as seen by an observer fixed to the ground? (c) With respect to the horizontal, what angle the fixed observer see the ball leave the cart?



چون نیروی اصطکاک وجود ندارد نیروی افقی خارجی در راستای افق وجود ندارد لذا تکانه خطی سیستم پایسته می ماند

سیستم: گاری + **شخص** + **توپ**

$$P_{x,i}^{total} = 0 \qquad \rightarrow \qquad P_{x,f}^{total} = 0$$

تکانه کل اولیه　　　　　　تکانه کل ثانویه

$$P_{x,f}^{total} = P_{f,cart} + P_{f,ball} = 0$$

$$\vec{\mathbf{p}}_{f,\text{cart}} = -(m_2 + m_1) v_{f,\text{cart}}\,\hat{\mathbf{i}}$$

$$P_{f,ball} = ?$$

The ball is thrown with a speed v_0 and at an angle θ with respect to the horizontal as measured by the person in the cart. Therefore the person in the cart throws the ball with velocity

$$\vec{\mathbf{v}}'_{f,\mathrm{ball}} = v_0 \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + v_0 \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}. \qquad (11.4.15).$$

Because the cart is moving in the negative x-direction with speed $v_{f,\mathrm{cart}}$ just as the ball leaves the person's hand, the x-component of the velocity of the ball as measured by an observer on the ground is given by

$$v_{xf,\mathrm{ball}} = v_0 \cos\theta - v_{f,\mathrm{cart}}. \qquad (11.4.16)$$

The ball appears to have a smaller x-component of the velocity according to the observer on the ground. The velocity of the ball as measured by an observer on the ground is

$$\vec{\mathbf{v}}_{f,\mathrm{ball}} = (v_0 \cos\theta - v_{f,\mathrm{cart}})\,\hat{\mathbf{i}} + v_0 \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}. \qquad (11.4.17)$$

The final momentum of the ball according to an observer on the ground is

$$\vec{\mathbf{p}}_{f,\text{ball}} = m_3\left[(v_0\cos\theta - v_{f,\text{cart}})\,\hat{\mathbf{i}} + v_0\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right]. \tag{11.4.18}$$

The momentum flow diagram is shown in (Figure 11.7).

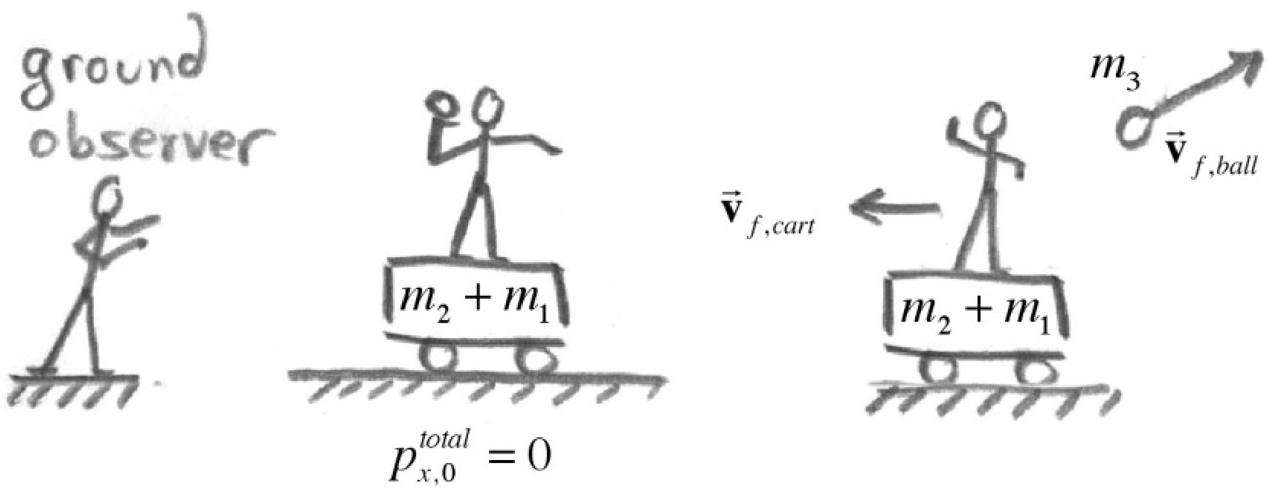


Figure 11.7 Momentum flow diagram for recoil

$$P_{x,f}^{total} = P_{f,cart} + P_{f,ball} = 0$$

$$0 = (p_{x,f})_{\text{cart}} + (p_{x,f})_{\text{ball}}$$

$$= -(m_2 + m_1)v_{f,\text{cart}} + m_3(v_0 \cos\theta - v_{f,\text{cart}}).$$

$$v_{f,\text{cart}} = \frac{m_3\, v_0 \cos\theta}{m_2 + m_1 + m_3},$$

$$\vec{\mathbf{v}}_{f,\text{ cart}} = v_{f,\text{ cart}}\,\hat{\mathbf{i}} = \frac{m_3\, v_0 \cos\theta}{m_2 + m_1 + m_3}\hat{\mathbf{i}}\,.$$

$$\vec{\mathbf{v}}_{f,\text{ball}} = (v_0 \cos\theta - v_{f,\text{cart}})\,\hat{\mathbf{i}} + v_0 \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$= \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3}(v_0 \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + v_0 \sin\theta)\,\hat{\mathbf{j}}.$$

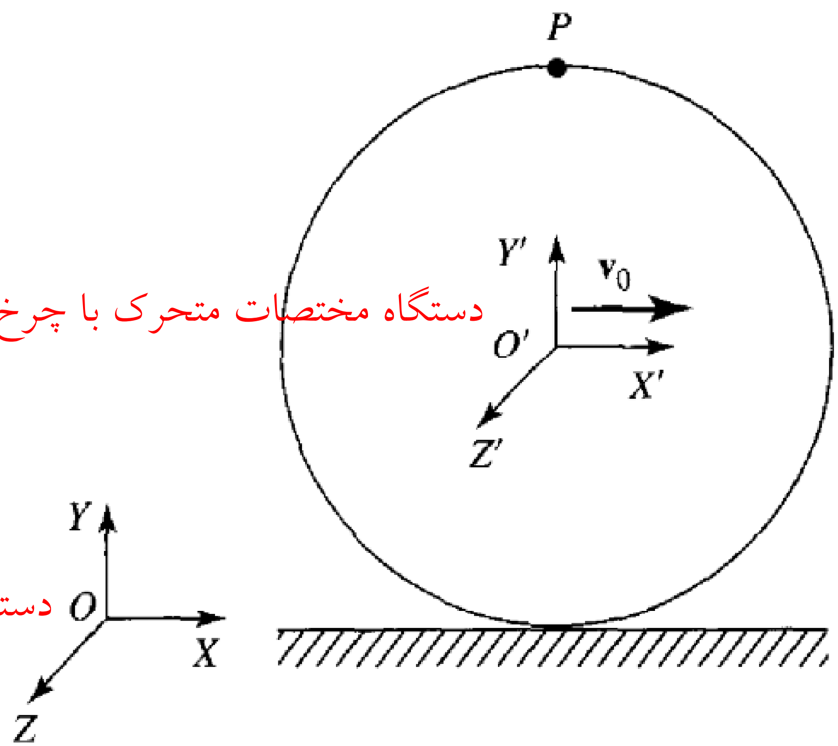
c) The angle ϕ at which the ball is thrown as seen by the observer on the ground is given by

$$\phi = \tan^{-1}\frac{(v_{f,\text{ball}})_y}{(v_{f,\text{ball}})_x} = \tan^{-1}\frac{v_0 \sin\theta}{\left[(m_1+m_2)/(m_1+m_2+m_3)\right]v_0\cos\theta}$$
$$= \tan^{-1}\left[\tan\theta \frac{m_1+m_2+m_3}{m_1+m_2}\right]. \tag{11.4.23}$$

For arbitrary values for the masses, the above expression will not reduce to a simplified form. However, we can see that $\tan\phi > \tan\theta$ for arbitrary masses, and that in the limit $m_3 << m_1 + m_2$, $\phi \to \theta$ and in the unrealistic limit $m_3 >> m_1 + m_2$, $\phi \to \pi/2$. Can you explain this last odd prediction?

مثال:

A wheel of radius R is rolling with a uniform linear velocity $\mathbf{v}_0$ along a straight line path, as shown in Fig. Ex. 11.1. What are the position, velocity, and acceleration of a particle fixed to the rim of the wheel according to **(a)** a reference frame fixed with the wheel, and **(b)** a stationary observer on the ground?



دستگاه مختصات متحرک با چرخ (حرکت انتقالی)

دستگاه مختصات ساکن

$$\omega = \frac{v_0}{R} \quad \text{or} \quad v_0 = R\omega$$

سرعت زاویه ای چرخ
حول مرکز چرخ

To the moving observer, the position, velocity, and acceleration of point P are

$$\mathbf{r}' = R\hat{\mathbf{j}}' \tag{ii}$$

$$\dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{v}' = R\omega\hat{\mathbf{i}}' = v_0\hat{\mathbf{i}}' \tag{iii}$$

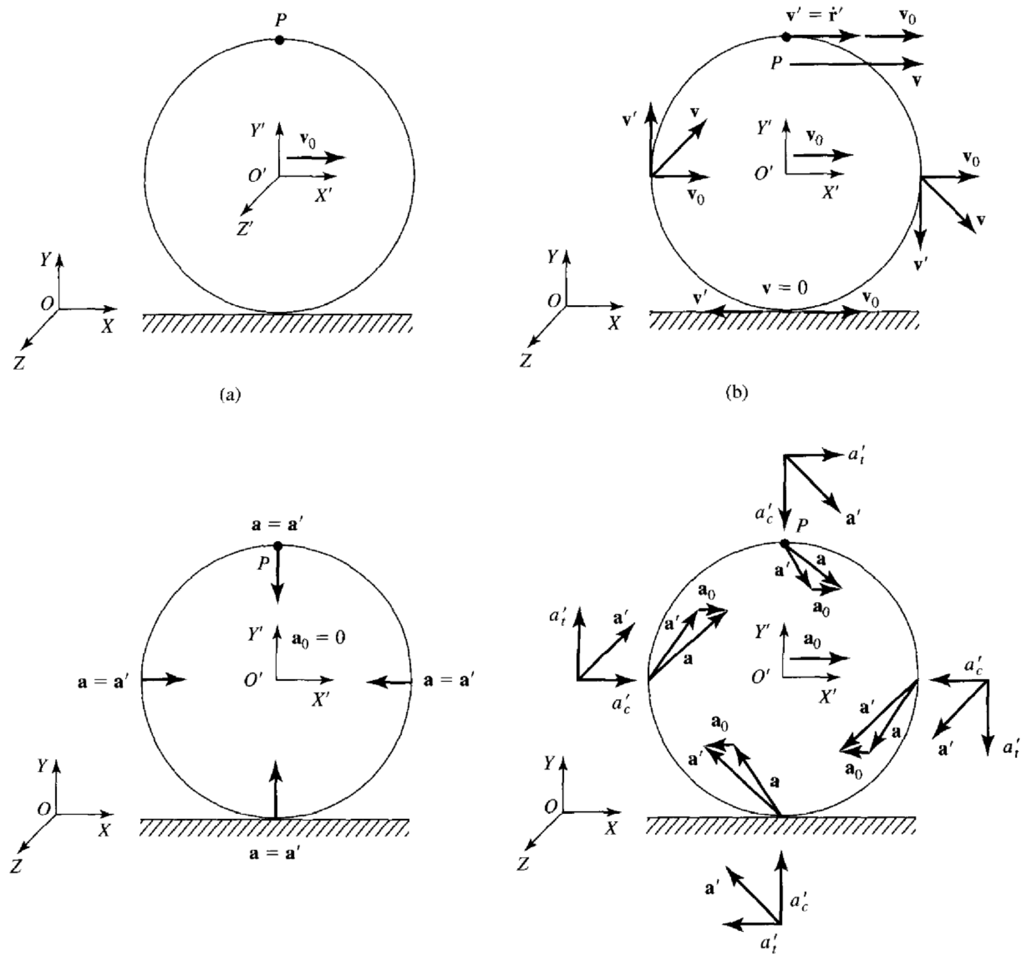
$$\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{a}' = -\frac{v_0^2}{R}\hat{\mathbf{j}}' = -R\omega^2\hat{\mathbf{j}}' \tag{iv}$$

$\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{i}}', \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}'$, and $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}'$. نقطه O´ فقط نسبت به O حرکت انتقالی دارد

The position of O' with respect to O $\quad \mathbf{r}_0 = v_0t\hat{\mathbf{i}} + R\hat{\mathbf{j}}$

حرکت نقطه P نسبت به دستگاه مختصات ثابت

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0, & \mathbf{r} = v_0t\hat{\mathbf{i}} + 2R\hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0, & \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = 2v_0\hat{\mathbf{i}} \\ \mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0, & \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a} = -\dfrac{v_0^2}{R}\hat{\mathbf{j}} = -R\omega^2\hat{\mathbf{j}} \end{array}\right.$$



(a) (b) (c) (d)