بسم الله الرحمن الرحیم

فصل پنجم – بخش دوم

دستگاه مختصات چرخان

(بررسی سینماتیکی)

۲.۵ دستگاههای مختصات چرخان

هدف بررسی ارتباط:

سرعتها، شتابها و نیروها بین دستگاه مرجع لخت و دستگاه مرجع نالخت که شتابی با بزرگی ثابت دارد:

دستگاه مختصات پریم‌دار چرخان نسبت به دستگاه مختصات بدون پریم، یعنی ثابت:

محورهای دستگاههای مختصات مبدأ مشترک دارند

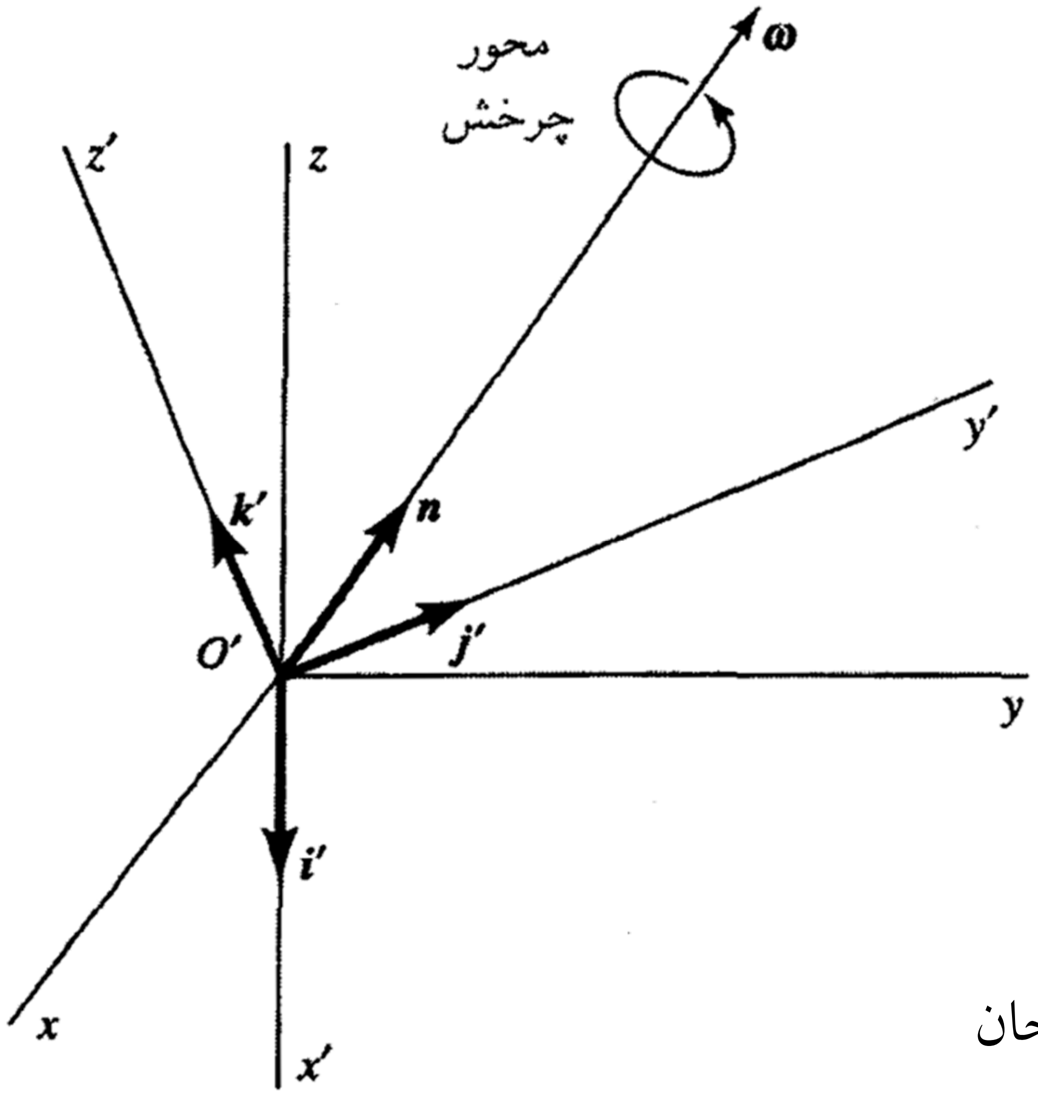
در هر لحظهٔ معین، چرخش دستگاه پریم‌دار حول محور چرخش خاصی صورت می‌گیرد

راستای این محور با بردار یکهٔ $\mathbf{n}$

سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای چرخش با ω نمایش داده می‌شود

حاصلضرب $\omega\mathbf{n}$ را بردار سرعت زاویه‌ای دستگاه چرخان می‌نامند

بردار سرعت زاویه‌ای



$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$$

اندازه: سرعت چرخش

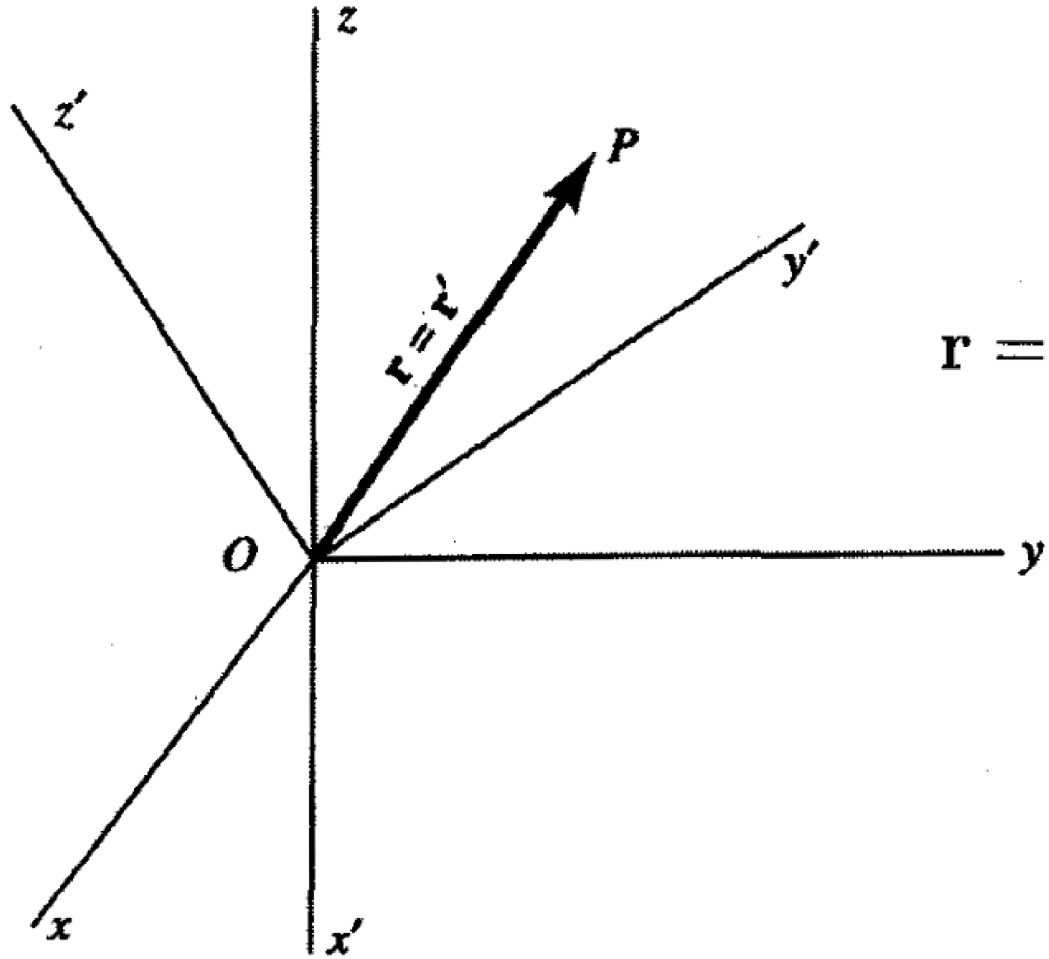
راستا: محور چرخش

جهت: قاعده دست راست

S (xyz) : دستگه مختصات ثابت

S' (x'y'z') : دستگاه مختصات چرخان

مکان هر نقطهٔ P در فضا می‌تواند با بردار $\mathbf{r}$ در دستگاه ثابت، بدون پریم و با بردار $\mathbf{r}'$ در دستگاه چرخان، دستگاه پریم‌دار، نشان داده شود (شکل ۲.۲.۵). چون محورهای مختصات دو دستگاه مبدأ یکسانی دارند، این بردارها یکسان‌اند، یعنی



$$\mathbf{r} = \underbrace{\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z}_{\text{بیان بردار توسط بردارهای یکه ثابت}} = \mathbf{r}' = \underbrace{\mathbf{i}'x' + \mathbf{j}'y' + \mathbf{k}'z'}_{\text{بیان بردار توسط بردارهای یکه چرخان}}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z = \mathbf{r}' = \mathbf{i}'x' + \mathbf{j}'y' + \mathbf{k}'z'$$

مشتق

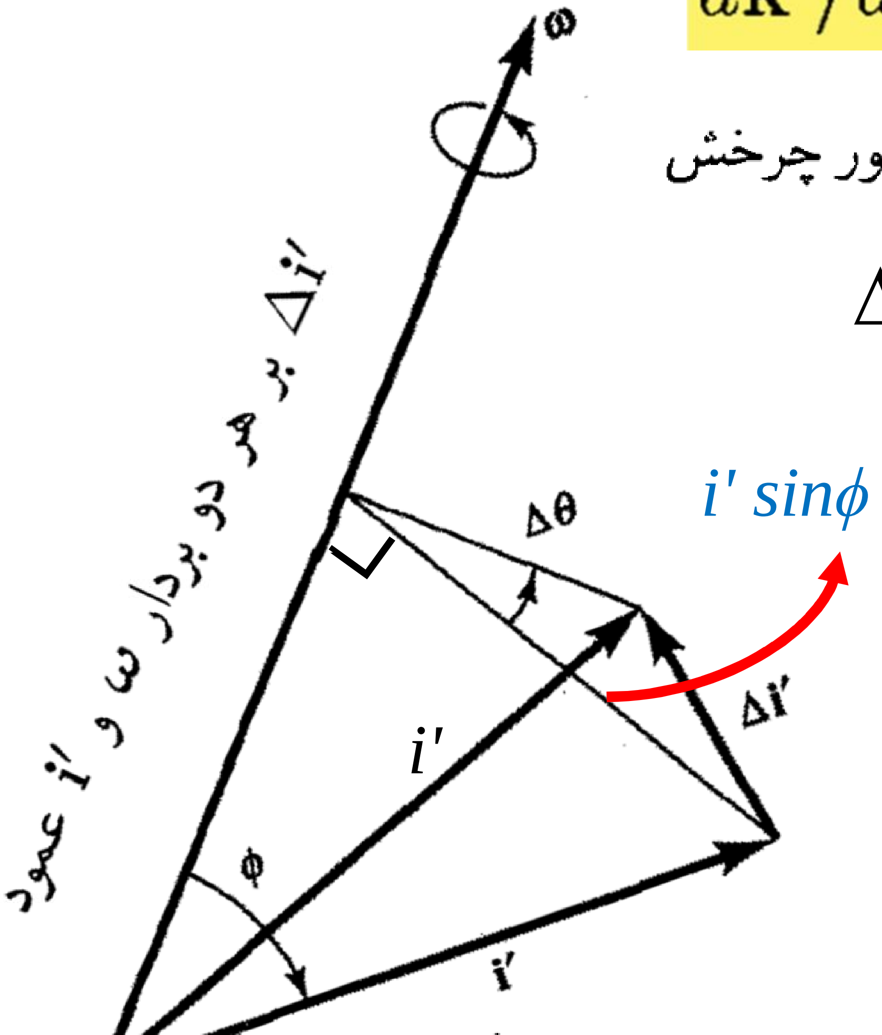
$$\mathbf{i}\frac{dx}{dt} + \mathbf{j}\frac{dy}{dt} + \mathbf{k}\frac{dz}{dt} = \underbrace{\mathbf{i}'\underbrace{\frac{dx'}{dt}}_{v'_x} + \mathbf{j}'\underbrace{\frac{dy'}{dt}}_{v'_y} + \mathbf{k}'\underbrace{\frac{dz'}{dt}}_{v'_z}}_{v'} + \underbrace{x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt}}$$

بردار سرعت جسم
در دستگاه چرخان

بیانگر سرعت ناشی از
چرخش دستگاه پریم دار

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt}$$

یافتن مشتقهای زمانی $d\mathbf{i}'/dt$، $d\mathbf{j}'/dt$ و $d\mathbf{k}'/dt$



ϕ زاویهٔ بین $\mathbf{i}'$ و ω

تغییر $\Delta\mathbf{i}'$ در بردار یکهٔ $\mathbf{i}'$ ناشی از چرخش جزئی $\Delta\theta$ حول محور چرخش

$$\Delta\hat{i}' = \hat{i}' - \hat{i}' \neq 0$$

$$|\Delta\mathbf{i}'| \approx (|\mathbf{i}'| \sin\phi)\Delta\theta = (\sin\phi)\Delta\theta$$

اگر تغییر i' در مدت dt برابر با di' باشد

$$\left|\frac{d\mathbf{i}'}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\Delta\mathbf{i}'}{\Delta t}\right| = \sin\phi \frac{d\theta}{dt} = (\sin\phi)\omega$$

$$\left|\frac{d\vec{i}'}{dt}\right| = \left|\vec{i}'\right| \times \omega \times \sin\phi$$

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}' \qquad \frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}' \qquad \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}'$$

$$\begin{aligned} x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt} &= x'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}') + y'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}') + z'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}') \\ &= \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{i}'x' + \mathbf{j}'y' + \mathbf{k}'z') \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \end{aligned}$$

سرعت P ناشی از چرخش دستگاه مختصات پریم‌دار

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{\text{چرخان}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{چرخان}} + \boldsymbol{\omega}\times\right]\mathbf{r}'$$

1 عمل مشتق‌گیری بردار مکان نسبت به زمان در دستگاه ثابت با عمل مشتق‌گیری نسبت به زمان در دستگاه چرخان به اضافهٔ عملگر $\boldsymbol{\omega}\times$ معادل است

2 در مورد هر بردار $\mathbf{Q}$ صادق است

$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times$$

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{\text{چرخان}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}$$

3 اگر آن کمیت بردار سرعت باشد

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{\text{چرخان}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{چرخان}} (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

$$= \left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt}\right)_{\text{چرخان}} + \left[\frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')}{dt}\right] + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt}\right)_{\text{چرخان}} + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{\text{چرخان}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{\text{چرخان}}$$

$$+\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

$$(d\boldsymbol{\omega}/dt)_{\text{ثابت}} = (d\boldsymbol{\omega}/dt)_{\text{چرخان}} + \overbrace{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}}^{0}$$

$$(d\boldsymbol{\omega}/dt)_{\text{ثابت}} = (d\boldsymbol{\omega}/dt)_{\text{چرخان}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$$

$$\mathbf{v}' = (d\mathbf{r}'/dt)_{\text{چرخان}} \qquad \mathbf{a}' = (d\mathbf{v}'/dt)_{\text{چرخان}}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + ۲\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

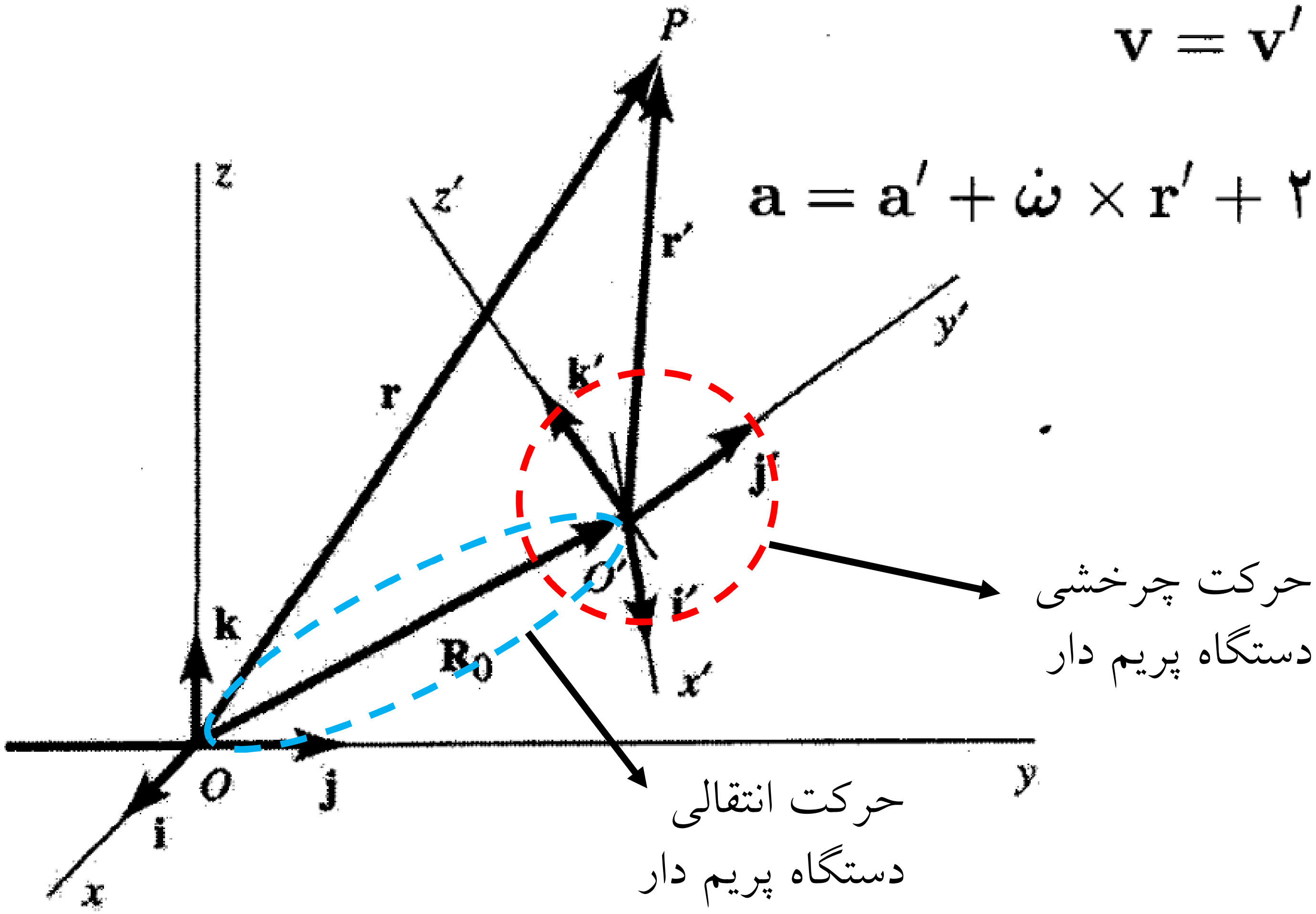
Coriolis theorem

شتاب در دستگاه را برحسب مکان، سرعت، و شتاب در دستگاه چرخان بیان می‌کند

حالت کلی، دستگاه پریم‌دار هم حرکت انتقالی دارد و هم چرخشی

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{V}_\circ$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + ۲\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \mathbf{A}_\circ$$



- a = شتاب نسبت به دستگاه مختصات ساکن
- a' = شتاب نسبت به دستگاه مختصات چرخان

- جملهٔ $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ را شتاب کوریولیس

شتاب کوریولیس وقتی ظاهر می‌شود که ذره در دستگاه مختصات چرخان حرکت کند

(مگر وقتی که سرعت $\mathbf{v}'$ با محور چرخش موازی باشد)

- جملهٔ $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ را شتاب مرکزگرا می‌نامند.

شتاب مرکزگرا حاصلِ قرارگرفتن ذره در مسیری دایره‌ای در دستگاه چرخان است

شتاب مرکزگرا همواره به‌سوی محور چرخش متوجه و بر آن عمود است

- جملهٔ $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'$ شتاب عرضی نامیده می‌شود

زیرا بر بردار مکان $\mathbf{r}'$ عمود است

این شتاب به‌صورت هرگونه شتاب زاویه‌ای دستگاه چرخان، یعنی هرگاه بزرگی یا جهت بردار سرعت زاویه‌ای، یا هر دو تغییر کنند، ظاهر می‌شود (چرخش غیریکنواخت)

جملهٔ $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \times \boldsymbol{\omega}$ را شتاب مرکزگرا می‌نامند.

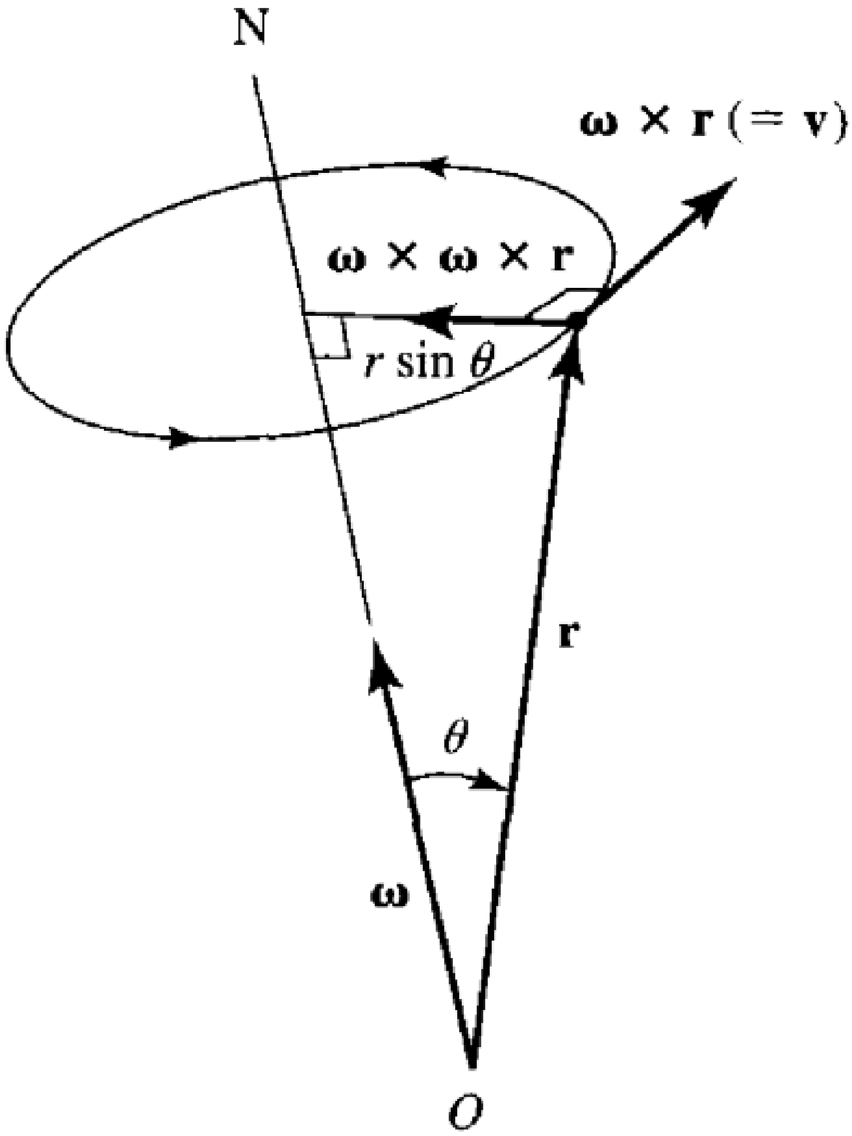


Figure 11.4 Centripetal acceleration $a_c = |\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|$ resulting from the rotation of the primed coordinate system.

In Eq. (11.33), $|\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}| = a_c$ is the centripetal acceleration because, as shown in Fig. 11.4, it is directed toward the center and perpendicular to the axis of rotation. As shown, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ or $v = \omega r \sin\theta$, where v is the speed of the circular motion and $r \sin\theta$ is the distance from the axis. From Fig. 11.5, using $\omega = v/(r \sin\theta)$, we get

$$a_c = |\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}| = \omega^2 r \sin\theta = \frac{v^2}{r \sin\theta} \tag{11.36}$$

The quantity $-m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ is called the *centrifugal force* and is equal to $-m\omega^2 r$ in the case where $\boldsymbol{\omega}$ is normal to the radius vector. The negative sign means that the centrifugal force is directed outward or away from the center of rotation, as shown in Fig. 11.5. According to classical mechanics, the centrifugal force is not a real force; it is a fictitious or noninertial force.

This force is present only if we refer to moving coordinates in space. Thus, for example, a particle moving in a circle has no centrifugal force acting on it. A force that is acting toward the center, producing centripetal acceleration, is present. On the other hand, if we observe this moving particle from a reference frame that is moving with the particle, the particle will be at rest in this system. There is a force acting toward the center, but the particle does not fall toward the center. This is possible only if the force toward the center is balanced by an outward force, the centrifugal force.

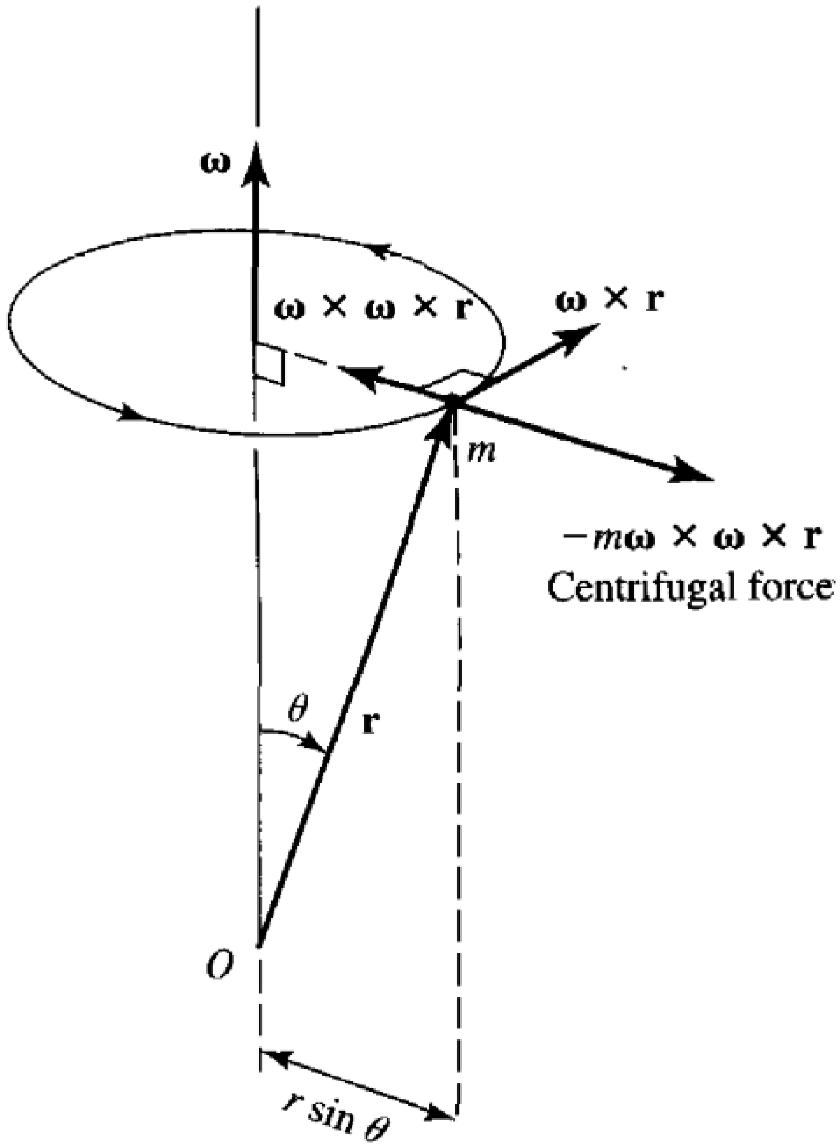
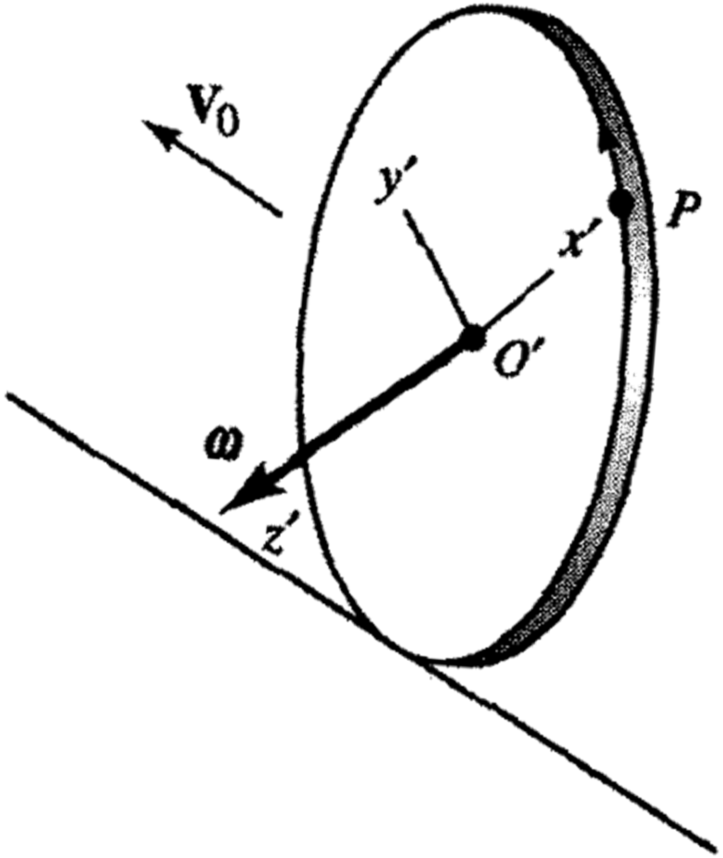


Figure 11.5 Centrifugal force resulting from rotational motion is shown directed away from the center.

مثال ۱.۲.۵

چرخی به‌شعاع b روی زمین می‌غلتد و با سرعت $V_\circ$ به پیش می‌رود. شتاب هر نقطه از محیط چرخش را نسبت به زمین پیدا کنید.



دستگاه مختصات را متصل به چرخ چرخان می‌گیریم (x'y')

مبدأ متحرک در مرکز چرخ واقع باشد و محور x' از نقطهٔ موردنظر بگذرد.

$$\mathbf{r}' = \mathbf{i}'b \qquad \mathbf{a}' = \ddot{\mathbf{r}}' = \circ \qquad \mathbf{v}' = \dot{\mathbf{r}}' = \circ$$

نقطه P در دستگاه چرخان ثابت است

بردار سرعت زاویه‌ای در دستگاه مختصات چرخان

$$\omega = \mathbf{k}'\omega = \mathbf{k}'\frac{V_\circ}{b}$$

از این‌رو با انتخاب مختصات نشان داده‌شده، تمام جملات در عبارت مربوط به شتاب صفر می‌شود به‌استثنای جملهٔ شتاب مرکزگرا:

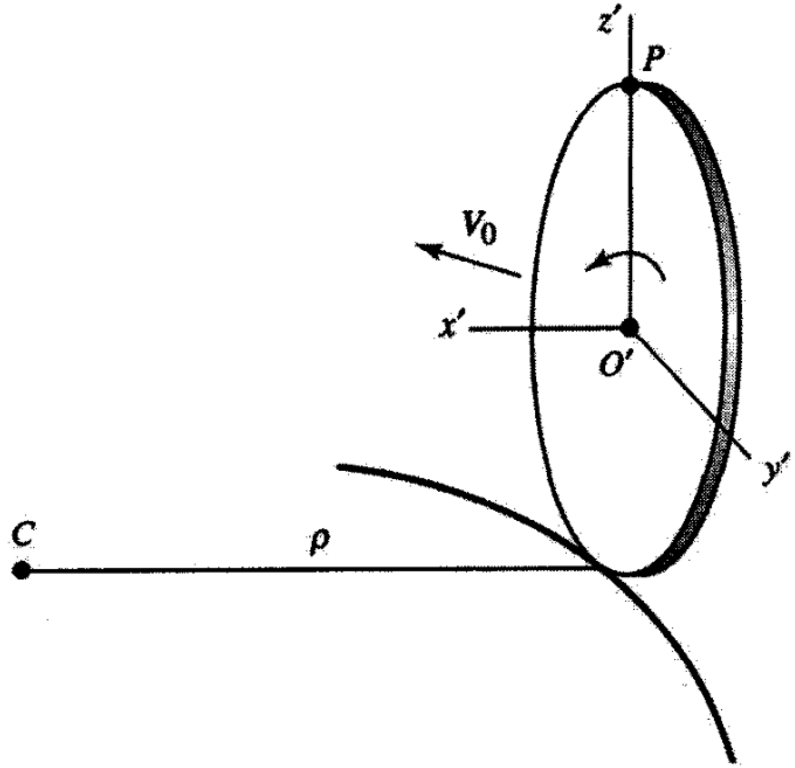
$$\mathbf{a} = \underbrace{\mathbf{a}'}_{0} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\omega}}}_{0} \times \mathbf{r}' + ۲\boldsymbol{\omega} \times \underbrace{\mathbf{v}'}_{0} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') &= \mathbf{k}'\omega \times (\mathbf{k}'\omega \times \mathbf{i}'b) \\
&= \frac{V_\circ^۲}{b}\mathbf{k}' \times (\mathbf{k}' \times \mathbf{i}') \\
&= \frac{V_\circ^۲}{b}\mathbf{k}' \times \mathbf{j}' \\
&= \frac{V_\circ^۲}{b}(-\mathbf{i}')
\end{aligned}$$

بنابراین، بزرگی $\mathbf{a}$ عبارت است از $V_\circ^۲/b$ و همواره به‌سوی مرکز چرخ غلتان متوجه است.

مثال ۲.۲.۵

دوچرخه‌ای با سرعت ثابت، مسیری دایره‌ای به شعاع ρ را می‌پیماید. شتاب بالاترین نقطه روی یکی از چرخهایش چقدر است؟ سرعت دوچرخه را به V_0 و شعاع چرخ آن را به b نشان می‌دهیم.

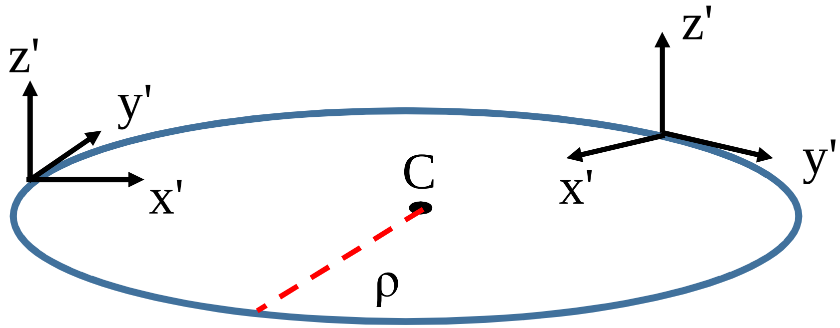


دستگاه مختصاتی اختیار می‌کنیم که

مبدأ آن در مرکز چرخ

محور x' آن افقی و به‌سوی محور انحنای مسیر، C

محور z' آن قائم باقی بماند



دستگاه $O'x'y'z'$ با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ می‌چرخد

معادل با سرعت زاویه ای چرخش دوچرخه حول نقطه C

$$\mathrm{V} = \mathrm{r}\,\omega \longrightarrow \boldsymbol{\omega} = \mathbf{k}'\frac{V_{\circ}}{\rho}$$

شتاب مبدأ متحرک $\mathbf{A}_{\circ}$ = شتاب مرکزگرا در حرکت دایره ای حول نقطه **C** و به شعاع **ρ**

$$\mathbf{A}_{\circ} = \mathbf{i}'\frac{V_{\circ}^{2}}{\rho}$$

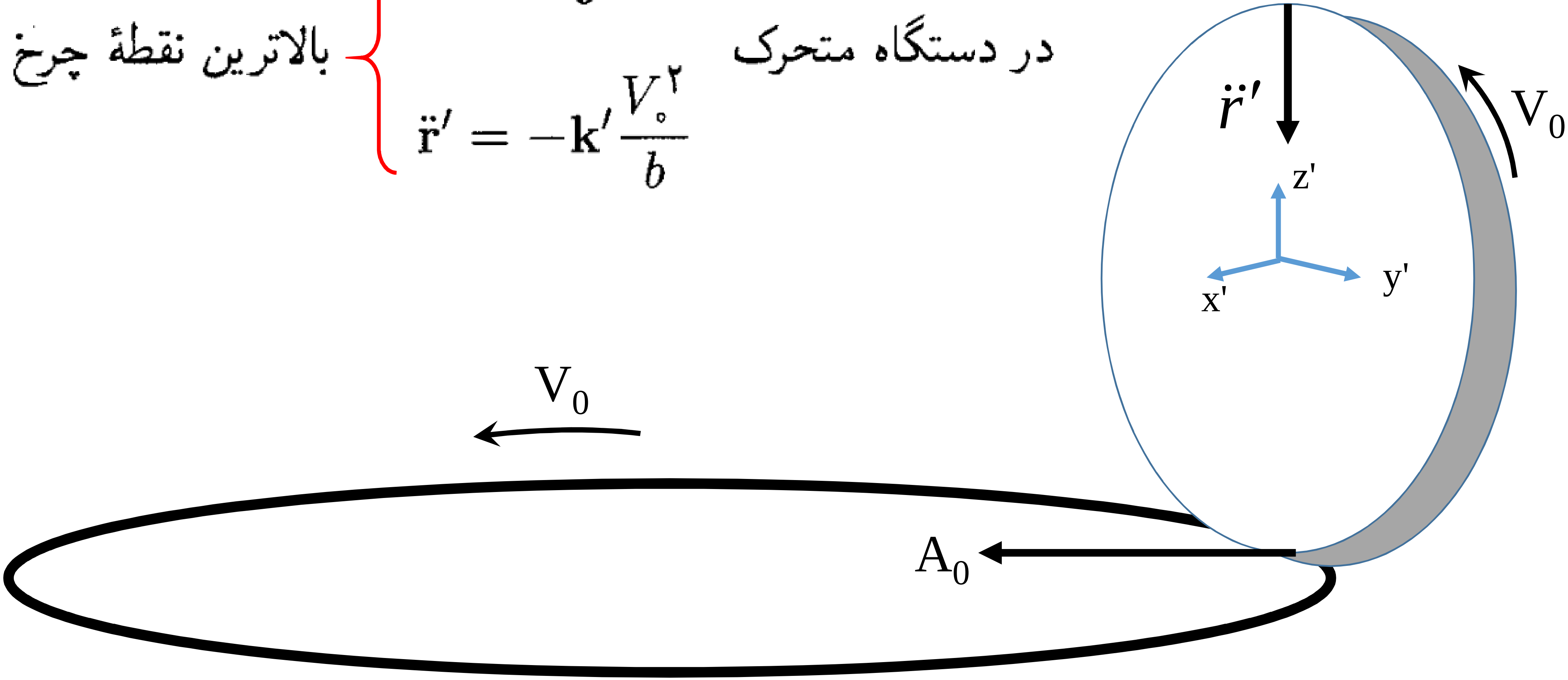
چون هر نقطه بر روی چرخ نسبت به مبدأ حرکت با مسیری دایره‌ای به شعاع b می‌پیماید، در دستگاه $O'x'y'z'$ شتاب هر نقطه روی چرخ به سمت O' متوجه و بزرگیش $V_{\circ}^{2}/b$ است. بنابراین، در دستگاه متحرک برای شتاب بالاترین نقطهٔ چرخ داریم:

$$\ddot{\mathbf{r}}' = -\mathbf{k}'\frac{V_{\circ}^{2}}{b}$$

بالاترین نقطهٔ چرخ

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{v}' = -\mathbf{j}'V_{\circ} \\[2ex] \ddot{\mathbf{r}}' = -\mathbf{k}'\dfrac{V_{\circ}^{۲}}{b} \end{array}\right.$$

در دستگاه متحرک



شتاب خالص بالاترین نقطهٔ روی چرخ

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \dot{\omega} \times \mathbf{r}' + ۲\omega \times \mathbf{v}' + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}') + \mathbf{A}_\circ$$

$$\ddot{\mathbf{r}}' = -\mathbf{k}'\frac{V_\circ^۲}{b} \qquad \mathbf{A}_\circ = \mathbf{i}'\frac{V_\circ^۲}{\rho}$$

شتاب کوریولیس $$۲\omega \times \mathbf{v}' = ۲\left(\frac{V_\circ}{\rho}\mathbf{k}'\right) \times (-\mathbf{j}'V_\circ) = ۲\frac{V_\circ^۲}{\rho}\mathbf{i}'$$

شتاب عرضی $$\dot{\omega} \times \mathbf{r}' = \circ$$ چون سرعت زاویه‌ای ω ثابت است

شتاب مرکزگرا $$\omega \times (\omega \times \mathbf{r}') = \frac{V_\circ^۲}{\rho^۲}\mathbf{k}' \times (\mathbf{k}' \times b\mathbf{k}') = \circ$$

$$\mathbf{a} = ۳\frac{V_\circ^۲}{\rho}\mathbf{i}' - \frac{V_\circ^۲}{b}\mathbf{k}'$$ شتاب خالص بالاترین نقطهٔ روی چرخ، نسبت به زمین