

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

The image displays the Basmala (Bismillah) in a highly decorative, calligraphic style. The text is written in a dark brown color and is mirrored below itself, creating a reflection effect. The calligraphy is fluid and elegant, with prominent vertical strokes and intricate flourishes. The background is a light beige color with a subtle, repeating pattern of the same calligraphic text, which is faded and serves as a watermark.

فصل پنجم – بخش سوم

دستگاه مختصات چرخان (بررسی دینامیکی)

۳.۵ دینامیک ذره در دستگاه مختصات چرخان

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \mathbf{A}_0$$

$$\mathbf{F} - m\mathbf{A}_0 - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = ma'$$

نیروهای لختی اضافه شده به نیروهای حقیقی و فیزیکی \mathbf{F}

معادله دینامیکی حرکت ذره در دستگاه مرجع ناخست

تحت تأثیر نیروهای فیزیکی حقیقی و نیروهای لختی

عامل حرکت در دید ناظر در حال دوران

$$\mathbf{F} - m\mathbf{A}_0 - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = ma'$$

$$\mathbf{F}'_{\text{مرکزگریز}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

$$\mathbf{F}'_{\text{عرضی}} = -m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{F}'_{\text{کوریولیس}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

شتاب در دستگاه مختصات پیریم دار

$-m\mathbf{A}_0$ نیروی لختی ناشی از حرکت انتقالی دستگاه مختصات پیریم دار

نیروهای حقیقی در دستگاه مختصات لخت

ناظر نالخت در دستگاه مرجع شتابدار که شتاب ذره را با بردار a' نمایش می‌دهد؛ باید هر یک یا تمام این نیروهای لختی همواره با نیروهای حقیقی را به حساب آورد تا حرکت صحیح ذره محاسبه شود. به بیان دیگر، چنین ناظری معادلهٔ اساسی حرکت را از این قرار می‌نویسد:

$$\mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$$

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}_{\text{فیزیکی}} + \mathbf{F}'_{\text{کوریولیس}} + \mathbf{F}'_{\text{عرضی}} + \mathbf{F}'_{\text{مرکزگریز}} - m\mathbf{A}.$$

نیروهای \mathbf{F} (یا فیزیکی \mathbf{F}) تنها نیروهایی‌اند که ناظر نالخت ادعا می‌کند واقعاً به ذره وارد می‌آیند. چهار جملهٔ لختی به علت خاصیت لختی ماده‌ای که حرکتش بررسی می‌شود ظاهر می‌شوند.

نیروی کوریولیس

$$\mathbf{F}'_{\text{کوریولیس}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

این نیرو فقط زمانی وجود دارد که ذره در دستگاه مختصات چرخان در حالت حرکت باشد جهت آن همیشه بر بردار سرعت ذره در دستگاه متحرک عمود است.

نیروی کوریولیس ذره متحرک را در امتداد عمود بر جهت حرکت آن منحرف می‌کند

آثار کوریولیس عامل گردش هوای اطراف نواحی پر فشار، یا کم فشار بر سطح زمین به شمار می‌آیند مورد ناحیهٔ پرفشار، هنگامی که هوا از بالا به پایین می‌ریزد، گرایش آن، در حالی که به سوی ناحیهٔ کم فشار می‌رود، برون سو و با منحرف شدن و جریان یافتن به سمت راست است. بدین ترتیب، گردشی ساعتگرد برقرار می‌شود. در نیمکرهٔ جنوبی، عکس این حالت صادق است.

نیروی عرضی

$$\mathbf{F}'_{\text{عرضی}} = -m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

وقتی برقرار است که شتاب (یا شتاب منفی) زاویه‌ای وجود داشته باشد
این نیرو همیشه در دستگاه مختصات چرخان بر بردار شعاعی \mathbf{r}' عمود است

نیروی مرکزگریز

$$\mathbf{F}'_{\text{مرکزگریز}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

بر اثر چرخش حول یک محور حاصل می‌شود
نیرو همواره به سوی خارج از محور چرخش متوجه و بر آن عمود است

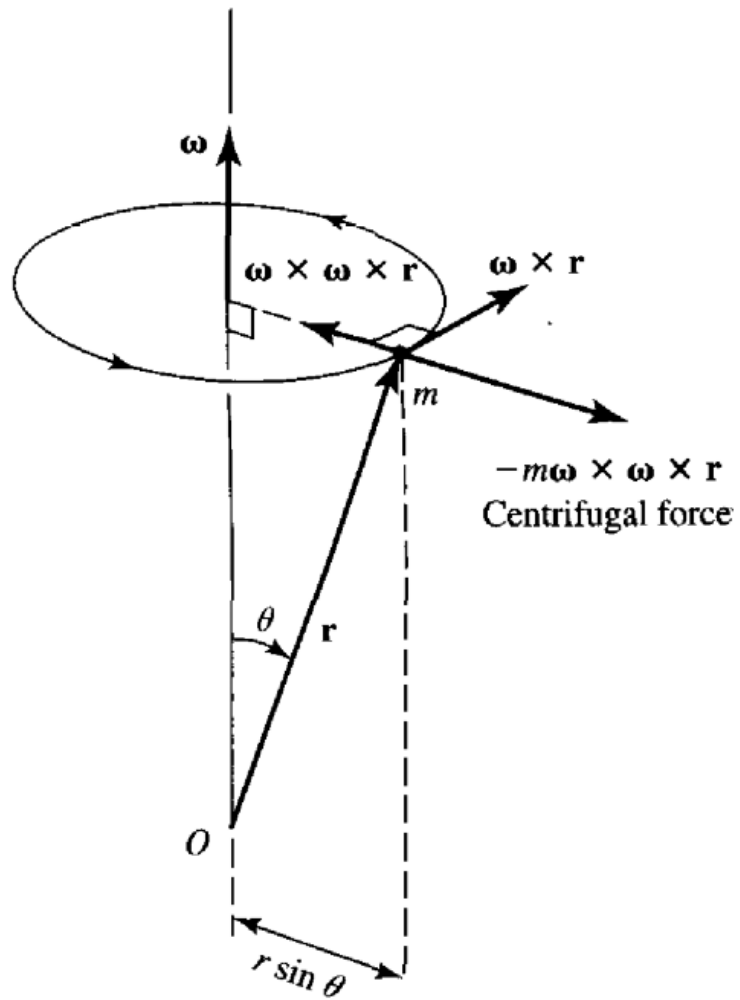


Figure 11.5 Centrifugal force resulting from rotational motion is shown directed away from the center.

The centrifugal and Coriolis forces are not due to any physical interaction but are a result of kinematics; hence such forces are called noninertial or fictitious forces. For example, real forces always decrease with distance, whereas the centrifugal force increases with distance. It is true that it is convenient to use a rotational coordinate system to describe rotational motion of an object, but one must remember that the noninertial fictitious forces must be used only in a noninertial system or rotational coordinate system and not in an inertial system. For example, when a stone tied to a string is whirled in a circle, we feel as if a force is pulling the stone outward; we call this centrifugal force. For an observer in a rotating coordinate system with the stone, the stone is stationary and the outward centrifugal force balances the inward tension in the string. But in an inertial system there is no centrifugal force, only the tension in the string that causes the radial acceleration. Description in either coordinate system is correct provided the proper forces are taken into consideration. Similarly, when a car is going around a curve too fast, it will skid outward. According to an observer in an inertial system, the sideways force exerted by the road on the tires of a car is not sufficient to keep the car turning with the road. To an observer in the car (in the noninertial system), it may feel as if the car is being pushed outward by a centrifugal force.

The first term, \mathbf{F} , is the sum of the forces acting on the particle as measured in the fixed inertial system. The second ($-m\ddot{\mathbf{R}}_f$) and third ($-m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$) terms result because of the translational and angular acceleration, respectively, of the moving coordinate system relative to the fixed system.

The quantity $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ is the usual centrifugal force term and reduces to $m\omega^2 r$ for the case in which $\boldsymbol{\omega}$ is normal to the radius vector. Note that the minus sign implies that the centrifugal force is directed *outward* from the center of rotation (Figure 10-3).

The last term in Equation 10.25 is a totally new quantity that arises from the motion of the particle in the rotating coordinate system. This term is called the **Coriolis force**. Note that the Coriolis force does indeed arise from the *motion* of the particle, because the force is proportional to v_r and hence vanishes if there is no motion.

meaning of these quantities. It is important to realize that the centrifugal and Coriolis forces are not forces in the usual sense of the word; they have been introduced in an artificial manner as a result of our arbitrary requirement that we be able to write an equation resembling Newton's equation that is at the same time valid in a noninertial reference frame; that is, the equation

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_f$$

is valid only in an inertial frame. If, in a rotating reference frame, we wish to write (let $\ddot{\mathbf{R}}_f$ and $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ be zero for simplicity)

$$\mathbf{F}_{\text{eff}} = m\mathbf{a}_r$$

then we can express such an equation in terms of the real force $m\mathbf{a}_f$ as

$$\mathbf{F}_{\text{eff}} = m\mathbf{a}_f + (\text{noninertial terms})$$

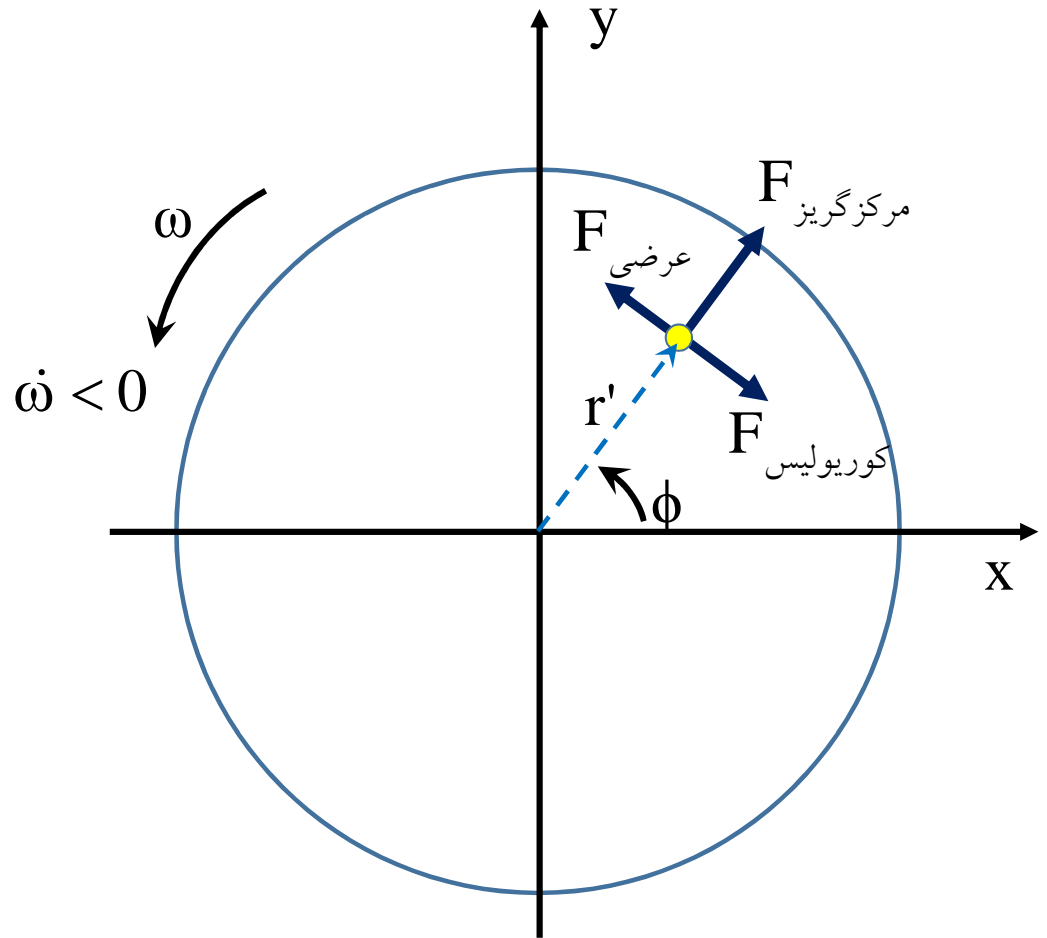
where the “noninertial terms” are identified as the centrifugal and Coriolis “forces.” Thus, for example, if a body rotates about a fixed force center, the only real force on the body is the force of attraction toward the force center (and gives rise to the *centripetal* acceleration). An observer moving with the rotating body, however, measures this central force and also notes that the body does not fall toward the force center. To reconcile this result with the requirement that the net force on the body vanish, the observer must postulate an additional force—the centrifugal force. But the “requirement” is artificial; it arises solely from an attempt to extend the form of Newton’s equation to a noninertial system, and this can be done only by introducing a fictitious “correction force.” The same comments apply for the Coriolis force; this “force” arises when an attempt is made to describe motion relative to the rotating body.

Despite their artificiality, the concepts of centrifugal and Coriolis forces are useful. To describe the motion of a particle relative to a body rotating with respect to an inertial reference frame is a complicated matter. But the problem can be made relatively easy by the simple expedient of introducing the “noninertial forces,” which then allows the use of an equation of motion resembling Newton’s equation.

مثال: جرم m روی یک سکوی چرخان به طور شعاعی به سمت خارج حرکت می‌کند

نیروهای نالخت

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}'_{\text{مرکزگریز}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \\ \mathbf{F}'_{\text{عرضی}} = -m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' \\ \mathbf{F}'_{\text{کوریولیس}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \end{array} \right.$$



جرم m روی یک سکوی چرخان به طور شعاعی به سمت خارج حرکت می‌کند

آهنگ چرخش سکو کندشونده ($\omega < 0$) است

z ، محور چرخش و به سوی خارج صفحه کاغذ متوجه است.

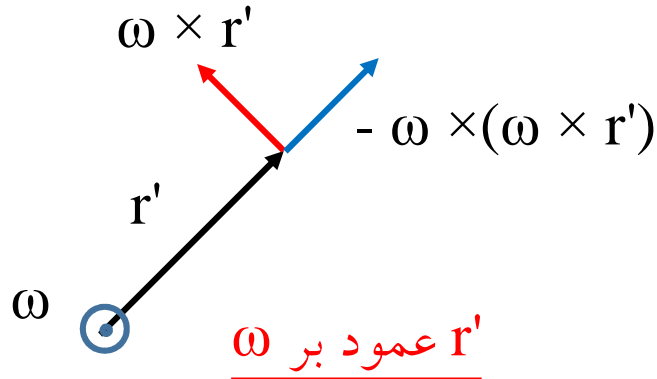
محور z نیز در جهت بردار سرعت زاویه‌ای ω است

\mathbf{r}' ، بردار شعاعی، نمایانگر مکان m در دستگاه چرخان، بر ω عمود است

بررسی جمله های لختی

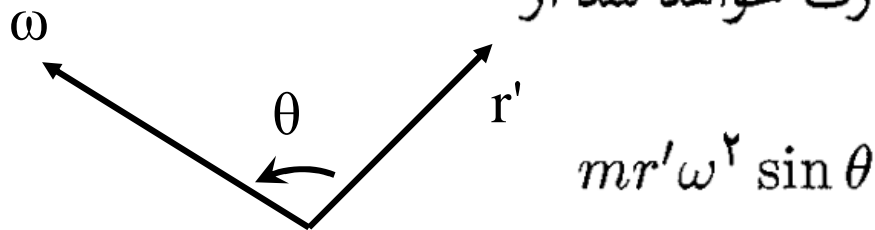
نیروی مرکزگریز

$$\mathbf{F}'_{\text{مرکزگریز}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$



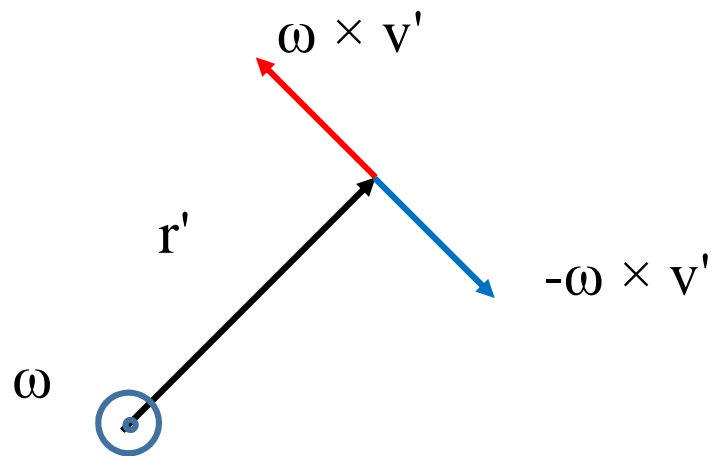
بزرگی $mr'\omega^2$
 راستا: در امتداد شعاع
 جهت: به سمت خارج از مرکز دایره چرخش

اگر زاویه بین $\boldsymbol{\omega}$ و \mathbf{r}' باشد نیروی مرکزگریز عبارت خواهد شد از



نیروی کوریولیس

$$\mathbf{F}'_{\text{کوریولیس}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

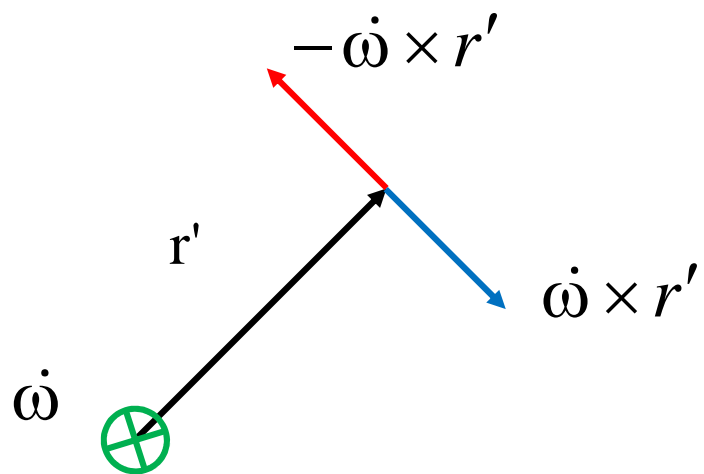


r' عمود بر ω

$2m\omega v'$ } بزرگی
راستا: در امتداد عمود بر شعاع
جهت: قاعده دست راست

نیروی عرضی

$$\mathbf{F}'_{\text{عرضی}} = -m\dot{\omega} \times \mathbf{r}'$$



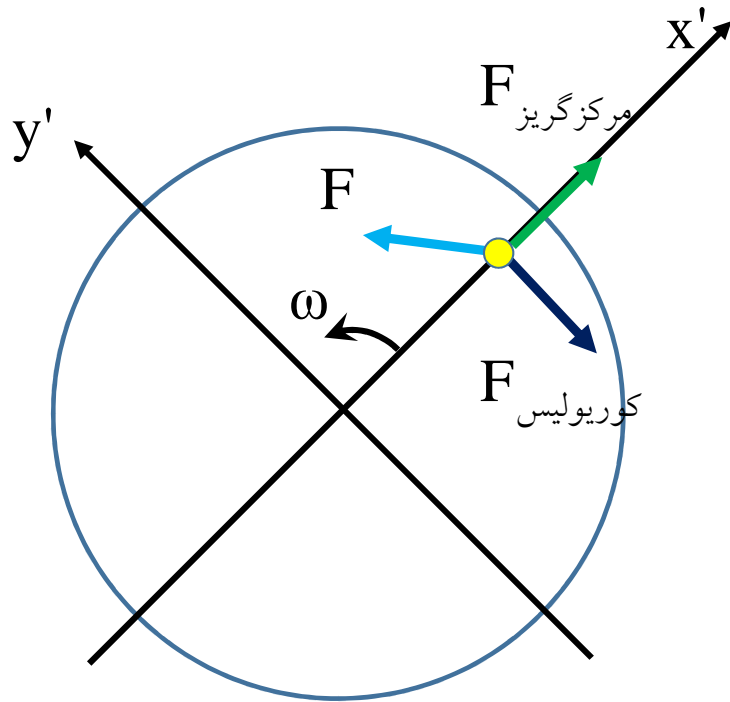
بزرگی: $m\dot{\omega}r'$

راستا: در امتداد عمود بر شعاع

جهت: قاعده دست راست

مثال ۱.۳.۵

حشره‌ای با سرعت ثابت v' در امتداد پره‌ی یک چرخ به برونسو می‌خزد؛ چرخ با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور قائمی می‌چرخد. تمام نیروهای مشخص وارد بر حشره را بیابید



دستگاه مختصات را متصل به چرخ اختیار می‌کنیم
محور x' را در امتداد پره‌ی موردنظر

سرعت و شتاب حشره در دستگاه چرخان

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{i}}' x' = \dot{\mathbf{i}}' v'$$

$$\ddot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{o}} \quad .$$

محور z محور دوران

$$\omega = k' \omega$$

بررسی نیروهای وارد بر حشره

$$-2m\omega \times \dot{\mathbf{r}}' = -2m\omega v'(\mathbf{k}' \times \mathbf{i}') = -2m\omega v' \mathbf{j}'$$

نیروی کوریولیس

$$-m\dot{\omega} \times \mathbf{r}' = 0 \quad (\omega = \text{ثابت})$$

نیروی عرضی

$$-m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}') = -m\omega^2 [\mathbf{k}' \times (\mathbf{k}' \times \mathbf{i}' x')]]$$

نیروی مرکزگریز

$$= -m\omega^2 (\mathbf{k}' \times \mathbf{j}' x')$$

$$= m\omega^2 x' \mathbf{i}'$$

$$\mathbf{F} - m\overset{0}{\mathbf{A}} - 2m\omega \times \mathbf{v}' - m\overset{0}{\dot{\omega}} \times \mathbf{r}' - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}') = m\overset{0}{\mathbf{a}'}$$

رابطه کلی

$$\mathbf{F} - 2m\omega v' \mathbf{j}' + m\omega^2 x' \mathbf{i}' = 0$$

\mathbf{F} عبارت است از نیروی واقعی وارد بر ذره از سوی پره

مثال ۲.۳.۵

در مثال ۱.۳.۵، معلوم کنید قبل از آنکه حشره شروع به لغزیدن کند، چه مقدار راه می‌پیماید؟ ضریب اصطکاک بین حشره و پره را μ_s بگیرید.

بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی در آستانه لغزش $|\mathbf{F}| = \mu_s mg$

$$\mathbf{F} - 2m\omega v' \mathbf{j}' + m\omega^2 x' \mathbf{i}' = \mathbf{0}$$

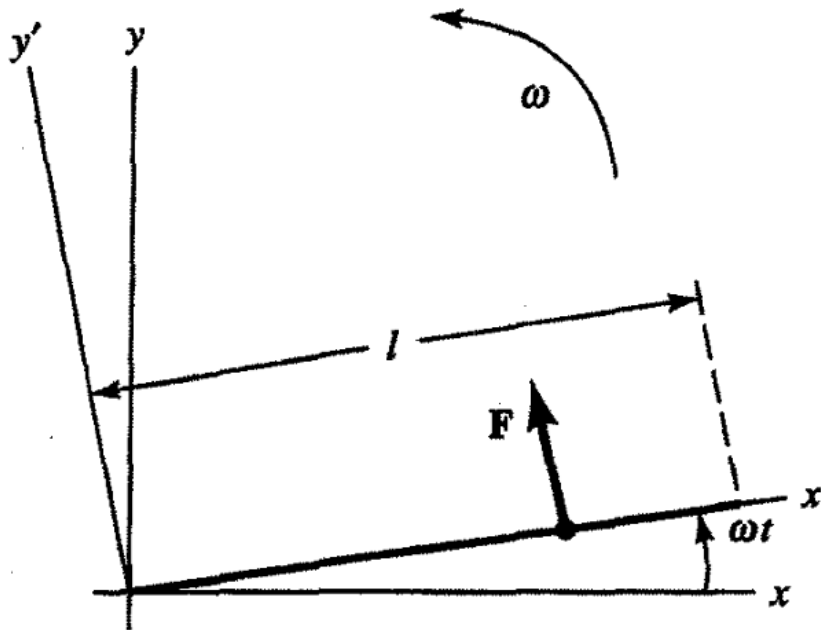
$$[(2m\omega v')^2 + (m\omega^2 x')^2]^{\frac{1}{2}} = \mu_s mg$$

x' فاصله‌ای است که حشره قبل از لغزیدن می‌تواند طی کند

$$x' = \frac{[\mu_s^2 g^2 - 4\omega^2 (v')^2]^{\frac{1}{2}}}{\omega^2}$$

مثال ۳.۳.۵

میله صافی به طول l در یک صفحه با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محوری می‌چرخد که از ابتدای میله می‌گذرد و بر صفحه چرخش عمود است. حشره‌ای به جرم m نخست در ابتدای ثابت میله قرار گرفته و به آن اندکی هل داده می‌شود، به طوری که سرعت اولیه‌اش با جهتی به سوی انتهای میله عبارت است از $\epsilon = \omega l$ (شکل ۳.۳.۵). مدت زمانی را محاسبه کنید که طول می‌کشد تا حشره به انتهای میله برسد.



بررسی در دستگاه مرجع (x', y') که با میله می‌چرخد

محور x' را در امتداد میله بگیریم

مسئله یک بعدی

$$\omega = k' \omega$$

محور Z محور دوران

تنها نیروی واقعی وارد بر حشره، \mathbf{F} ، نیروی واکنش میله بر حشره است (نیروی قیدی)

این نیرو عمود بر میله و در امتداد y' است

به علت فقدان اصطکاک، \mathbf{F} مؤلفه x' ندارد

$$\mathbf{F} - m\mathbf{A}_0 - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = m\mathbf{a}'$$

نیروی واقعی در دستگاه چرخان

سرعت ذره در جهت x'

$$F\mathbf{j}' - 2m\omega\mathbf{k}' \times \dot{x}'\mathbf{i}' - m\dot{\omega}\mathbf{k}' \times (x'\mathbf{i}') = m\ddot{x}'\mathbf{i}'$$

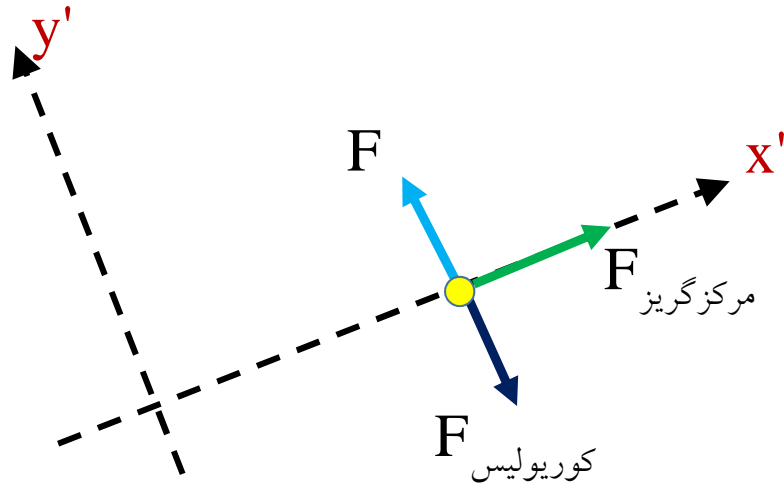
$$F\mathbf{j}' - 2m\omega\dot{x}'\mathbf{j}' + m\dot{\omega}x'\mathbf{i}' = m\ddot{x}'\mathbf{i}'$$

$$Fj' - \underbrace{2m\omega\dot{x}'j'}_{\text{نیروی کوریولیس}} + \underbrace{m\omega^2 x'i'}_{\text{نیروی مرکزگریز}} = m\ddot{x}'i'$$

اولین نیروی لختی در معادله بالا نیروی کوریولیس است. این نیرو از آن جهت در این معادله وارد می‌شود که سرعت حشره، $\dot{x}'i'$ ، در امتداد محور x' در دستگاه چرخان است. توجه کنید که حشره با واکنش نیروی F که میله روی حشره وارد می‌آورد به حالت موازنه در می‌آید.

دومین نیروی خطی نیروی مرکزگریز عبارت است از $m\omega^2 x'$. از دیدگاه حشره، این نیرو و آن را به سوی انتهای میله هل می‌دهد.

$$\begin{cases} x' & m\omega^2 x' = m\ddot{x}' \quad \star \\ y' & F = \gamma m\omega \dot{x}' \end{cases}$$



$$\star \quad m\omega^2 x' = m\ddot{x}' \quad \xrightarrow{\text{حل معادله}} \quad \begin{cases} x'(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \\ \dot{x}'(t) = \omega Ae^{\omega t} - \omega Be^{-\omega t} \end{cases}$$

تعیین ثابتهای A و B

$$\text{شرایط مرزی} \begin{cases} x'(t=0) = 0 = A + B \\ \dot{x}'(t=0) = \epsilon = \omega(A - B) \end{cases} \Rightarrow A = -B = \frac{\epsilon}{2\omega}$$

$$\longrightarrow x'(t) = \frac{\epsilon}{2\omega} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) = \frac{\epsilon}{\omega} \sinh \omega t$$

حشره در انتهای میله در لحظه T به بیرون پرتاب می شود

$$x'(T) = \frac{\epsilon}{\omega} \sinh \omega T = l \longrightarrow T = \frac{1}{\omega} \sinh^{-1} \left(\frac{\omega l}{\epsilon} \right)$$

$$\text{سرعت اولیه حشره } \epsilon = \omega l \longrightarrow T = \frac{1}{\omega} \sinh^{-1}(1) = \frac{\ln 2}{\omega}$$

EXAMPLE 10.2

A student is performing measurements with a hockey puck on a large merry-go-round with a smooth (frictionless) horizontal, flat surface. The merry-go-round has a constant angular velocity $\boldsymbol{\omega}$ and rotates counterclockwise as seen from above. (a) Find the effective force on the hockey puck after it is given a push. (b) Plot the path for various initial directions and velocities of the puck as observed by the person on the merry-go-round that pushes the puck.

Solution. The first three terms for \mathbf{F}_{eff} in Equation 10.25 are zero, so the effective force as observed by the person on the merry-go-round is

$$\mathbf{F}_{\text{eff}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \quad (10.26)$$

We have taken the frictional force to be zero. Remember that \mathbf{v}_r is the velocity as measured by the observer on the rotating surface. The effective acceleration is

$$\mathbf{a}_{\text{eff}} = \frac{\mathbf{F}_{\text{eff}}}{m} = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \quad (10.27)$$

The velocity and position are given by integration, in turn, of the acceleration.

$$\mathbf{v}_{\text{eff}} = \int \mathbf{a}_{\text{eff}} dt \quad (10.28a)$$

$$\mathbf{r}_{\text{eff}} = \int \mathbf{v}_{\text{eff}} dt \quad (10.28b)$$

We put the origin of our rotating coordinate system at the center of the merry-go-round. We will need the initial positions and velocities of the puck to plot the motion. For this example, we let the radius of the merry-go-round be R and the velocities be in units of ωR . The initial position of the puck will always be at an (x, y) position of $(-0.5R, 0)$.

We perform a numerical calculation to determine the motion and show the results for several directions and values of the initial velocity in Figure 10-4. For purposes of calculation, we let $\omega = 1 \text{ rad/s}$ and $R = 1 \text{ m}$, so the units of v_0 (initial speed) and T (time for puck to slide off the surface) shown in Figure 10-4 are in m/s and s, respectively. For parts (a)–(d), the initial velocity is in the $+y$ -direction, and the initial speed decreases in each succeeding view. In (a), the puck slides off quickly. For (b) and (d), the puck slides off at similar positions, but note the differences in initial speeds as well as the time it takes the puck to reach the edge. For a speed intermediate between these two speeds, as seen in (c), the puck may make several paths around the merry-go-round; at some speed, the puck must stay on. The last two views show the initial velocity at an angle of 45° to the x -axis. In (e), the puck loops around its path along the way to exiting the merry-go-round, and in (f), it changes direction rather abruptly.

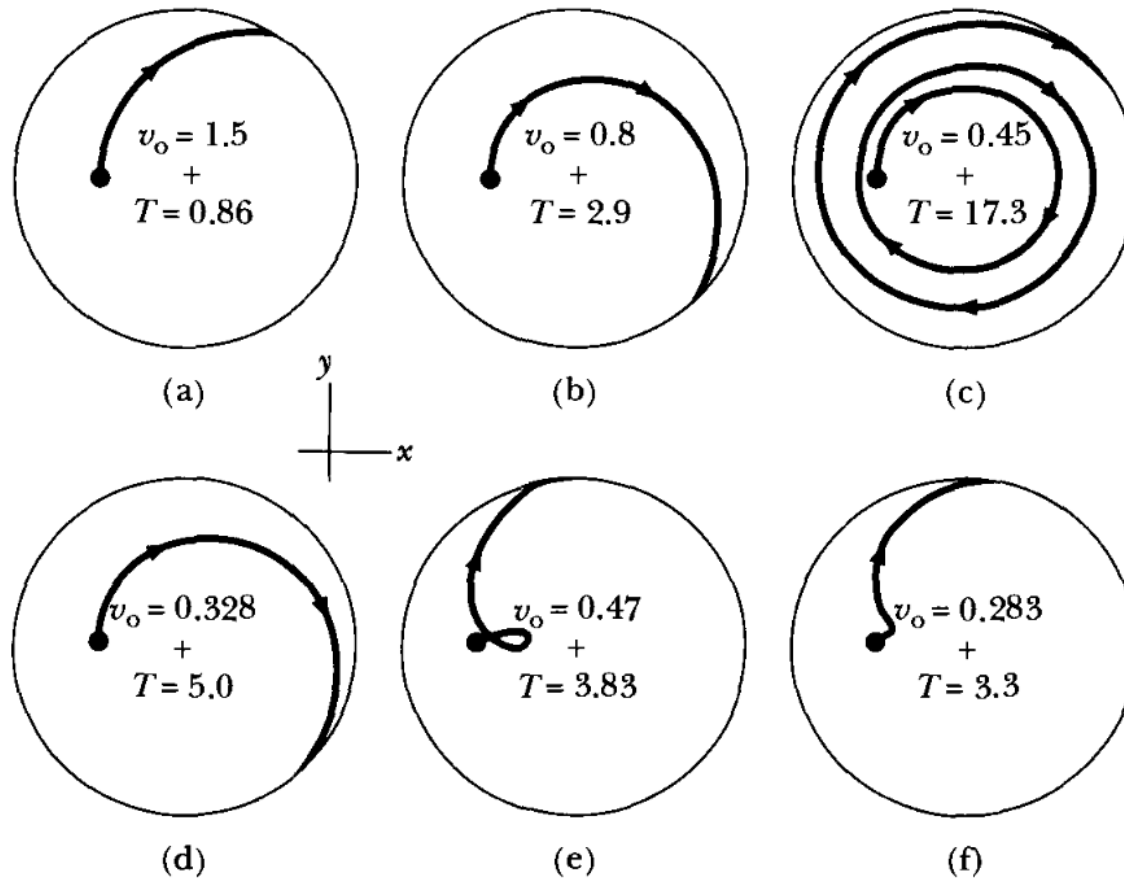


FIGURE 10-4 The motion of the hockey puck of Example 10.2 as observed in the rotating system for various initial directions and velocities v_0 at the times T noted. The angular velocity ω (1 rad/s) is out of the page.