بسم الله الرحمن الرحيم

فصل پنجم – بخش چهارم

آثار چرخش زمین

۴.۵ آثار چرخش زمین

اندازه سرعت زاویه ای زمین

سرعت زاویه‌ای چرخش زمین ۲π رادیان بر روز یا حدود $۷٫۲۷ \times ۱۰^{-۵}$ رادیان بر ثانیه

نمونه اثر چرخش زمین (در دستگاه مختصات چرخان زمین)

چرخش زمین یک برآمدگی در استوای زمین ایجاد می‌کند؛ شعاع استوایی نسبت به شعاع قطبی حدود ۱۳ مایل (۲۲ کیلومتر) بزرگتر است

آثار استاتیکی: راستای شاقولی

آثار دینامیکی: حرکت پرتابه

The results derived in the previous section can now be applied to describe motion in a coordinate system that is fixed on Earth and hence moving with the rotating Earth; that is, we describe motion in a noninertial coordinate system. The angular velocity ω of Earth with a radius vector relative to the sun is 2π radians per day. This value of angular velocity, when corrected to give the angular velocity with respect to fixed stars, is

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600\text{ s}} \frac{366.5}{365.5} \simeq 7.292 \times 10^{-5}\text{ rad/s} \tag{11.41}$$

1. It is the spinning motion of Earth that causes the equatorial bulge; that is, Earth is flattened at the North and South Poles, resulting in an equatorial radius of $\simeq$21 km ($\simeq$13 miles) greater than the polar radius.
2. It is the Coriolis force on moving masses that produces a counterclockwise circulation of winds in the Northern Hemisphere. It affects the course of the trade winds and the Gulf Stream.
3. It is necessary to take into account the Coriolis force to accurately compute the trajectories of long-range projectiles and missiles.
4. The motion of the Foucault pendulum is the result of the Coriolis force.


earth equatorial bulge

آثار چرخش زمین

آثار استاتیکی: راستای شاقولی

شاقول برای تعیین راستای «قائم» مکانی روی سطح زمین استفاده می‌شود

بدون درنظر گرفتن حرکت زمین

شاقول عمود بر سطح محلی است

با درنظر گفتن چرخش زمین

به علت چرخش زمین راستای شاقول به سمت مرکز زمین متوجه

نیست مگر اینکه جایی در طول خط استوا یا درست بالای یکی از قطبها آویزان شود

توصیف حرکت شاقول در دستگاه مرجع محلی که مبدأ آن در مکان وزنهٔ شاقول است

مبدأ دستگاه مختصات محلی روی گلوله قرار دارد

دستگاه مرجع

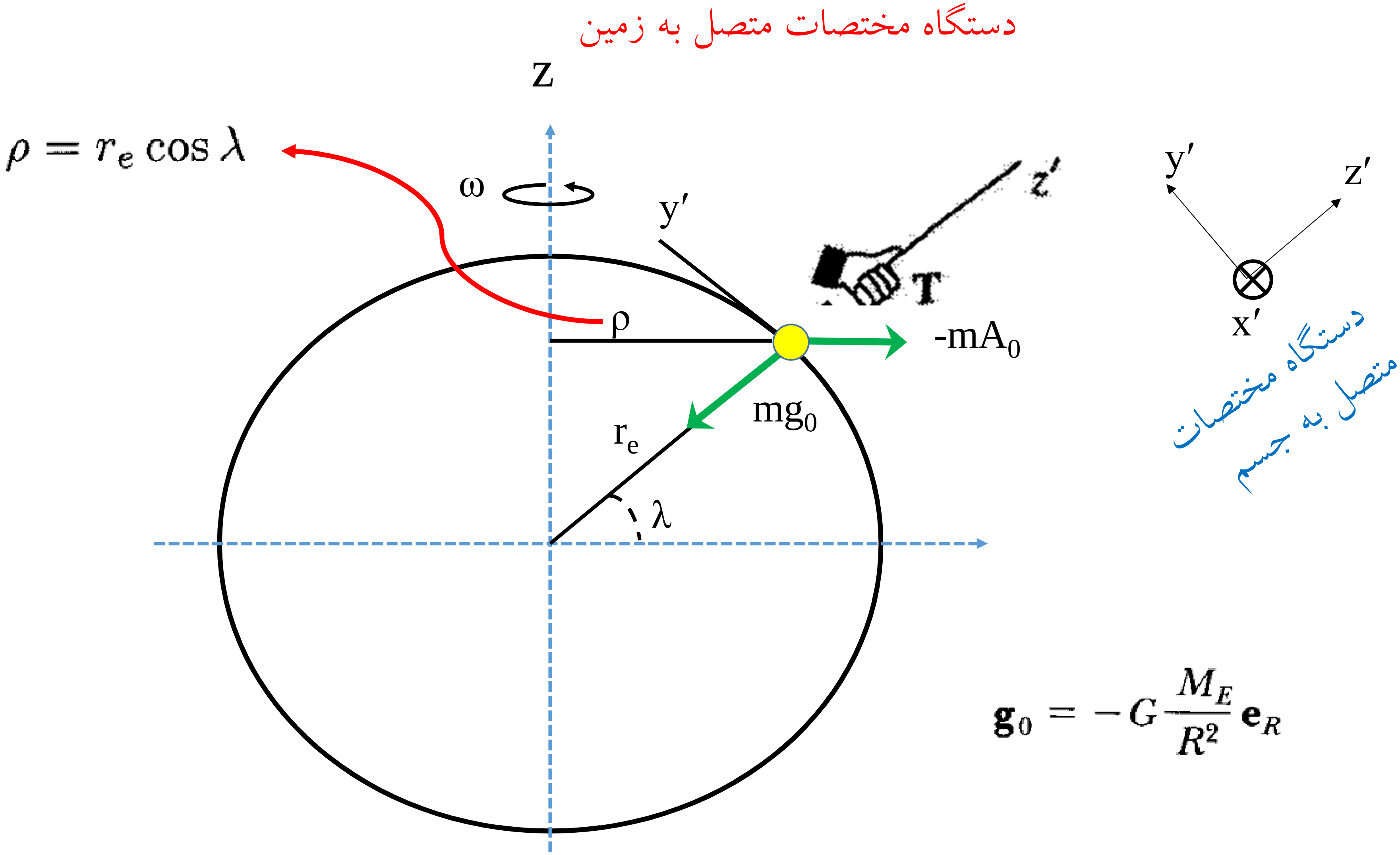
متصل به سطح زمین

این دستگاه مرجع هم حرکت انتقالی و هم حرکت چرخشی دارد

انتقال دستگاه مرجع در طول دایره‌ای صورت می‌گیرد که شعاع آن عبارت است از

$$\rho = r_e \cos \lambda$$

r_e شعاع زمین و λ عرض زمین مرکزی (جغرافیایی) شاقول



دستگاه مختصات متصل به زمین
z
$\rho = r_e \cos\lambda$
ω
y′
z′
T
ρ
-mA₀
mg₀
r_e
λ
y′
z′
x′
دستگاه مختصات متصل به جسم
$\mathbf{g}_0 = -G\frac{M_E}{R^2}\mathbf{e}_R$

The motion of Earth with respect to an inertial reference frame is dominated by Earth's rotation about its own axis. The effects of the other motions (e.g., the revolution about the Sun and the motion of the solar system with respect to the local galaxy) are small by comparison.

$$\omega_{earth} = \frac{2\pi}{24 \times 3600}$$

$$\omega_{sun} = \frac{2\pi}{24 \times 3600 \times 365}$$

$$\mathbf{F} - m\mathbf{A}_\circ - ۲m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = m\mathbf{a}'$$

- آهنگ چرخش ω، همان آهنگ چرخش زمین حول محورش است
- $a' = 0$ چون گلوله در دستگاه مرجع محلی در حال سکون است
- نیروی مرکزگریز وارد برگلوله نسبت به دستگاه محلی
- $\mathbf{r}'$ هم صفر

نیروی مرکز گریز = صفر

- نیروی عرضی نیز صفر است، زیرا $\dot{\omega} = ۰$، چرخش زمین ثابت است
- نیروی کوریولیس صفر است زیرا $\mathbf{v}'$ سرعت حرکت شاقول صفر و شاقول در دستگاه محلی در حال سکون است
- نیروهای حاضر: نیروهای واقعی $\mathbf{F}$ و جملهٔ $-m\mathbf{A}_\circ$، به‌علت شتابدار بودن دستگاه مرجع لخت

$$\mathbf{F} - m\mathbf{A}_\circ = \circ$$

چرخش زمین به ایجاد شتاب دستگاه محلی می‌انجامد

گلوله روی خطی آویزان نمی‌ماند که به سمت مرکز زمین متوجه است

زیرا نیروی لختی $-m\mathbf{A}_\circ$ آن را به سمت خارج از محور زمین می‌راند

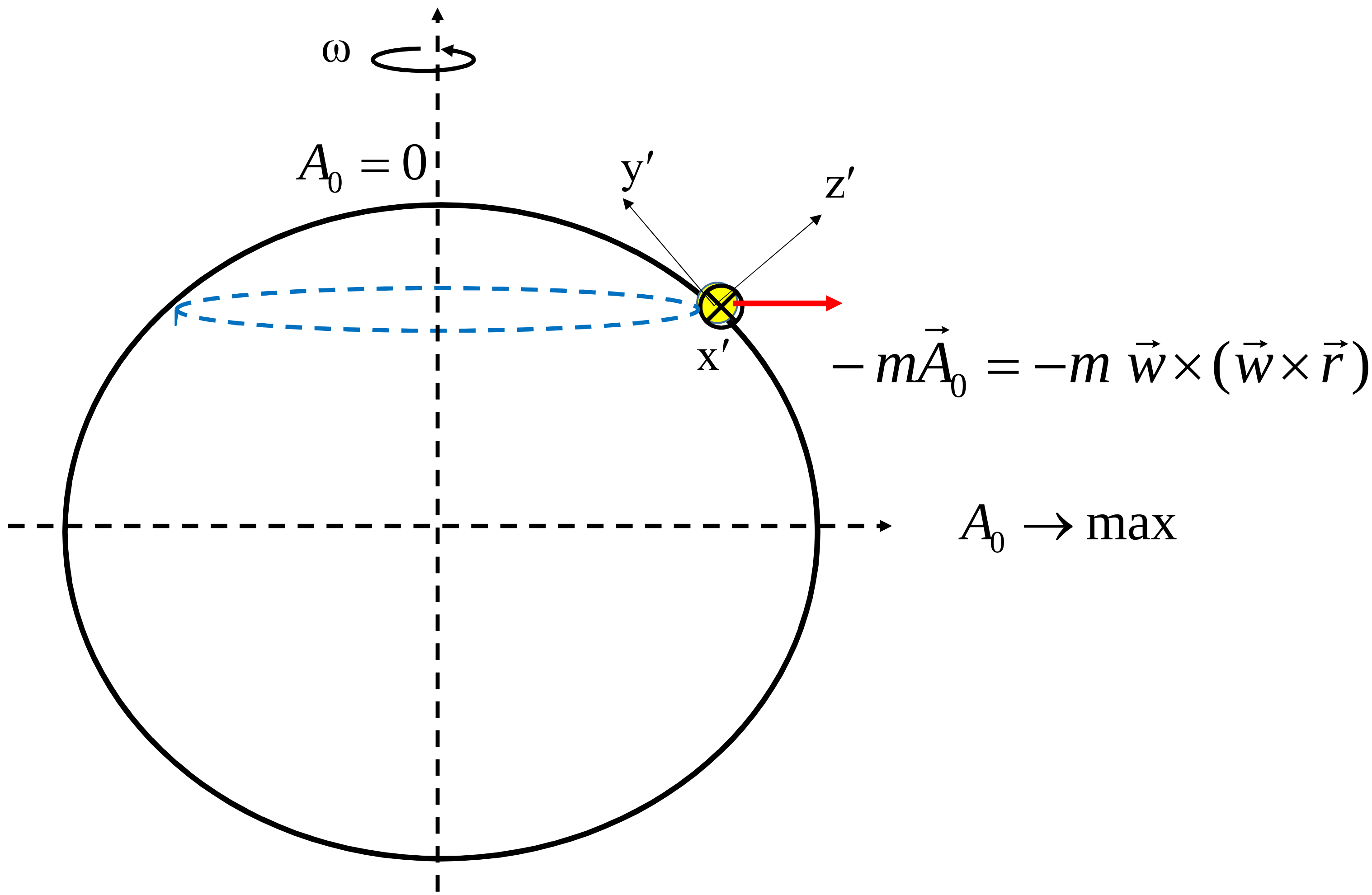
به سوی خلاف جهت شتاب دستگاه مرجع محلی متوجه است

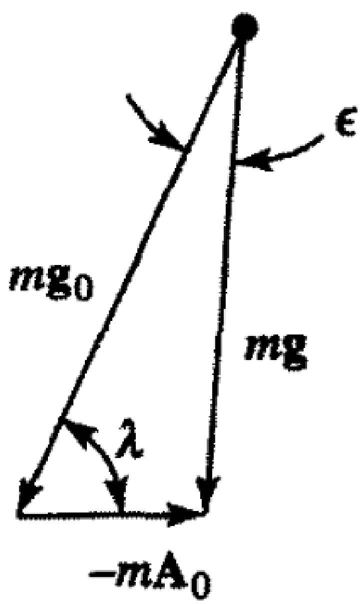
این امر از شتاب مرکزگرای دستگاه محلی ناشی می‌شود به سمت محور زمین

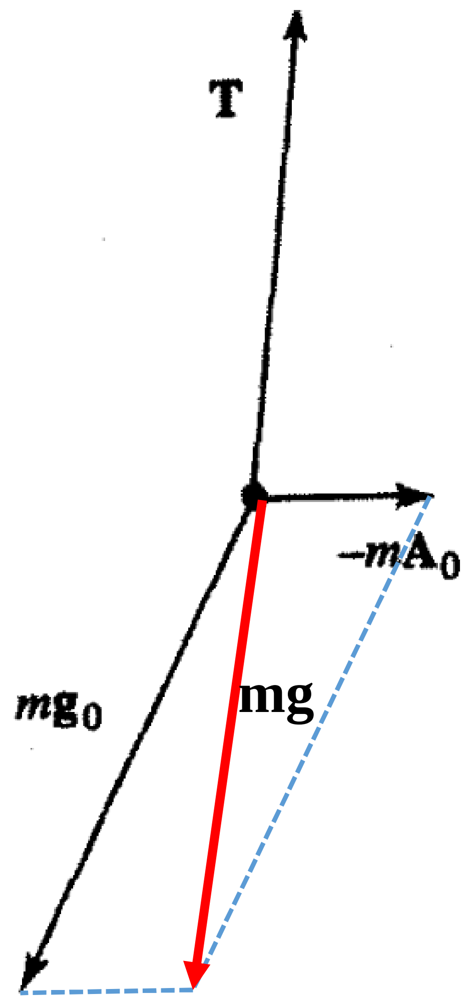
$A_\circ = \omega^۲ r_e \cos\lambda$ نیرو بیشینه $\lambda = \circ$، در استوای زمین

$mA_0 = m\omega^2 r_e \cos\lambda$ نیرو کمینه $\lambda = \pm ۹۰^\circ$ در هر یک از قطبها

این کمیت در استوا $۳{,}۴ \times ۱۰^{-۳} g$ یا کمتر از یک درصد g


ω
$A_0 = 0$
y′
z′
x′
$-m\vec{A}_0 = -m\,\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r})$
$A_0 \rightarrow \max$





$$\mathbf{F} - m\mathbf{A}_0 = 0$$

F حاصل‌جمع تمام نیروهای حقیقی
و فیزیکی است که بر شاقول وارد می‌آیند

کشش نخ، **T**، با نیروی گرانشی، $m\mathbf{g}_0$

$$\mathbf{F} - m\mathbf{A}_\circ = \circ \xrightarrow{\text{در حالت تعادل}} (\mathbf{T} + m\mathbf{g}_\circ) - m\mathbf{A}_\circ = \circ$$

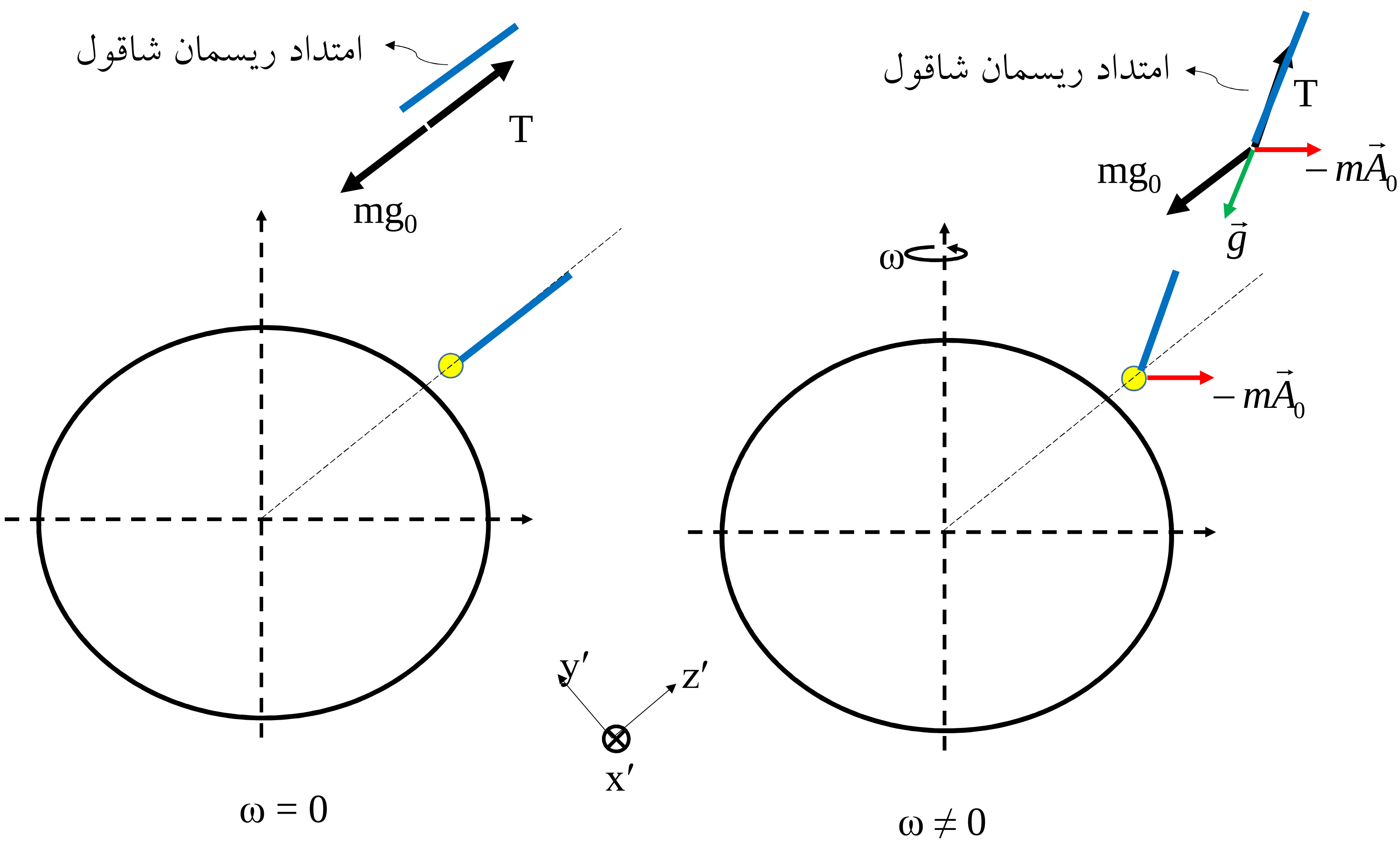
وقتی شاقول را می‌آویزیم، معمولاً به این فکر می‌افتیم که $\mathbf{T}$ با نیروی گرانش در محل که mg نامیده می‌شود، به حالت موازنه در می‌آید.

mg در واقع برایند برداری نیروی گرانشی حقیقی، $m\mathbf{g}_\circ$، و نیروی لختی، $-m\mathbf{A}_\circ$

شتاب محلی، گرانش، $\mathbf{g}$، $\quad \therefore \mathbf{g} = \mathbf{g}_\circ - \mathbf{A}_\circ \quad m\mathbf{g}_\circ - m\mathbf{g} - m\mathbf{A}_\circ = \circ$

نیروی $m\mathbf{g}_\circ$ نیروی گرانشی حقیقی و به سمت مرکز زمین متوجه است. واکنش لختی، $-m\mathbf{A}_\circ$ از مرکز زمین به بیرون از سطح زمین متوجه است، و باعث می‌شود راستای شاقولی با زاویهٔ کوچک ϵ از راستای متوجه به مرکز زمین، منحرف شود.

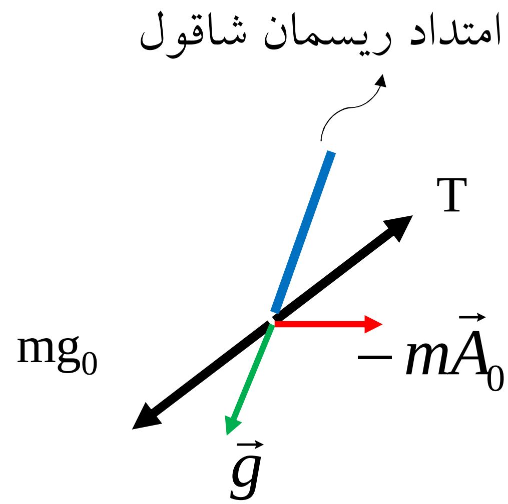
جهت راستای شاقولی، جهت محلی بردار $\mathbf{g}$ را تعریف می‌کند



امتداد ریسمان شاقول
T
mg0
ω = 0
y′
z′
x′
امتداد ریسمان شاقول
T
mg0
$-m\vec{A}_0$
$\vec{g}$
ω
$-m\vec{A}_0$
ω ≠ 0

$$\mathbf{F}' = m\frac{d'^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g} - m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = m\mathbf{g}_e$$

$$\mathbf{g}_e = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$



In general, the value of $\mathbf{g}_e$ changes with latitude λ and may be calculated as shown next. Referring to Fig. 11.6(b), the magnitude of the centrifugal acceleration of any point mass m is

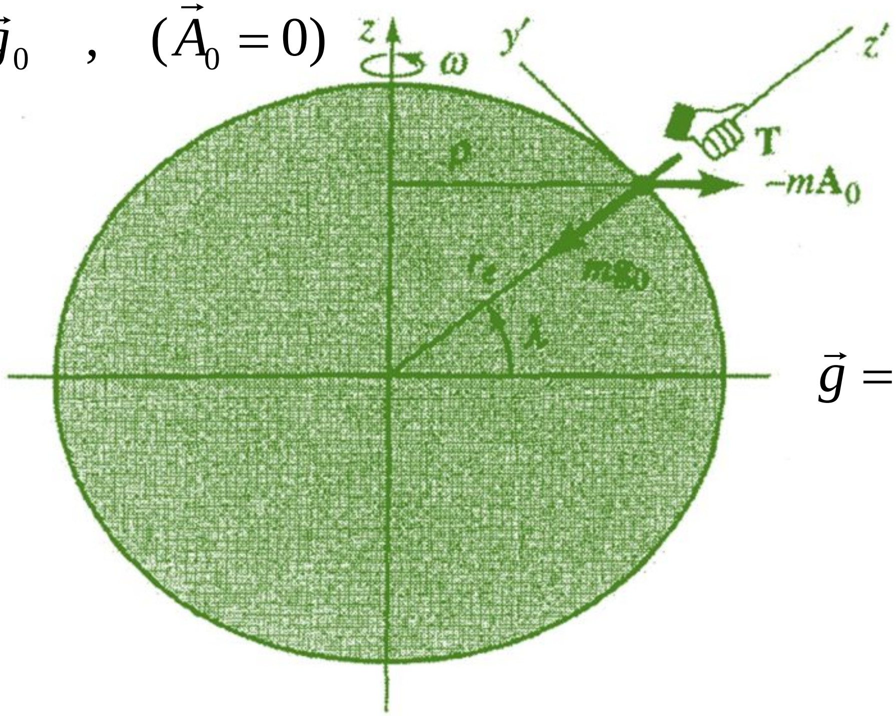
$$\rho\omega^2 = (r\cos\lambda)\omega^2 \tag{11.47}$$

where ρ is the distance of the mass m from the axis and λ is the latitude of the place at P on Earth. The magnitude of the centrifugal force is

$$m\rho\omega^2 = (mr\cos\lambda)\omega^2 \tag{11.48}$$

شکل زمین نیز با جهت g تعریف می‌شود. از این‌رو، راستای شاقولی همیشه بر سطح زمین عمود است؛ مطابق شکل ۱.۴.۵، شکل زمین مانند کرهٔ واقعی نیست بلکه در قطبها پهن‌شده و در استوا به سمت خارج برآمده است.

$$\vec{g} = \vec{g}_0 \quad , \quad (\vec{A}_0 = 0)$$

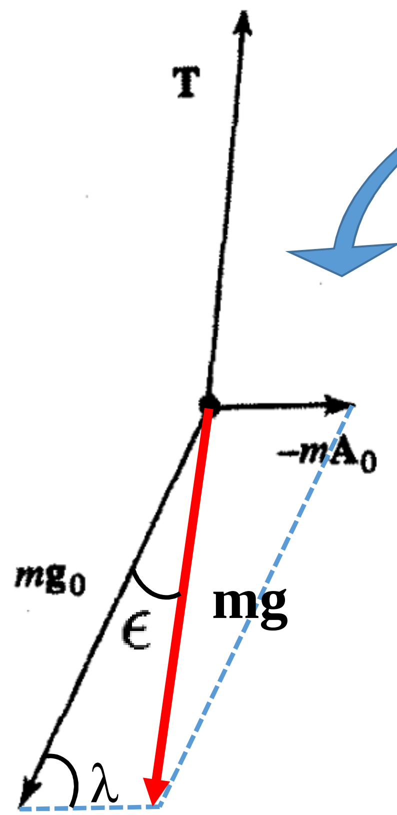


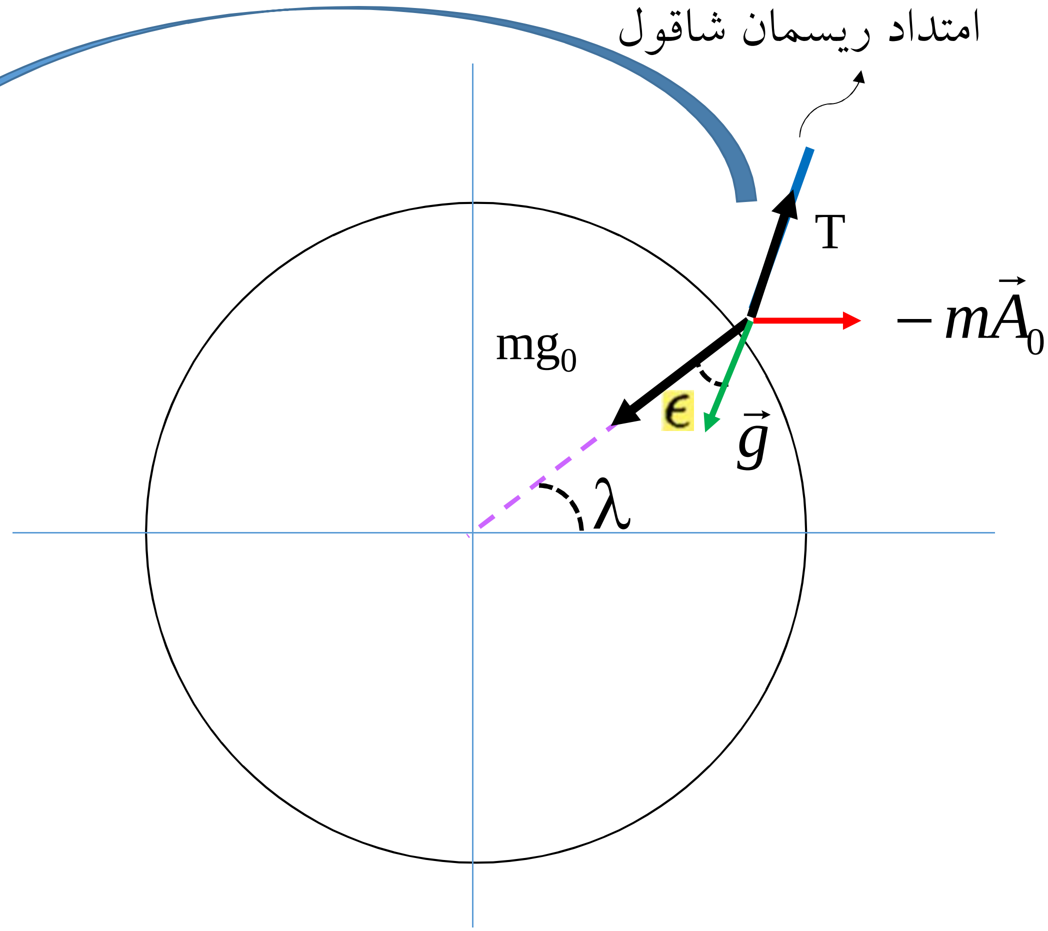
$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{A}_0 \qquad , \quad (\vec{g}_0 \parallel \vec{A}_0)$$

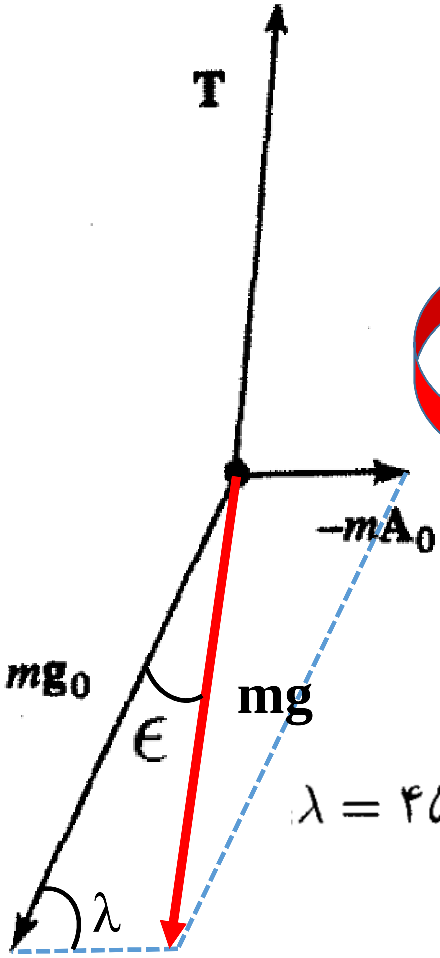
The centrifugal force is responsible for the oblateness of Earth. Earth is not really a solid spheroid; it is more like a strongly viscous liquid with a solid crust. Because of Earth's rotation, Earth has deformed so that its equatorial radius is 21.4 km greater than its polar radius, and the acceleration of gravity is 0.052 m/s^2 greater at the poles than at the equator. The surface of calm ocean water is perpendicular to $\mathbf{g}$, not $\mathbf{g}_0$ and on the average, the plane of Earth's surface is also perpendicular to $\mathbf{g}$.

But first, let's return to the effective $\mathbf{g}$ of Equation 10.33. The period of a pendulum determines the magnitude of $\mathbf{g}$, and the direction of a plumb bob in equilibrium determines the direction of $\mathbf{g}$. The value of $\omega^2 R$ is 0.034 m/s^2, and this is a significant enough amount (0.35%) of the magnitude of $\mathbf{g}$ to be consid-

پیرامون زاویه انحراف راستای شاقولی از خط واصل بین نقطه مورد نظر با شعاع زمین (ϵ)







$$mA_0 = m\omega^2 r_e \cos\lambda$$

با به‌کارگیری قانون سینوسها

$$\frac{\sin\epsilon}{m\omega^۲ r_e \cos\lambda} = \frac{\sin\lambda}{mg}$$

$$\sin\epsilon \approx \epsilon = \frac{\omega^۲ r_e}{g}\cos\lambda \sin\lambda = \frac{\omega^۲ r_e}{۲g}\sin ۲\lambda$$

- ϵ بسیار کوچک
- ϵ در استوا $(\lambda = ۰)$ و در قطبین $(\lambda = \pm ۹۰^\circ)$ صفر می‌شود
- بیشینهٔ انحراف راستای شاقولی از راستای متوجه به مرکز زمین به‌ازای $\lambda = ۴۵^\circ$

$$\epsilon_{\max} = \frac{\omega^۲ r_e}{۲g} \approx ۱{,}۷ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{rad} \approx ۰{,}۱^\circ$$

آثار چرخش زمین

آثار دینامیکی: حرکت پرتابه

$$\mathbf{F} - m\mathbf{A}_0 - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = m\mathbf{a}'$$

معادلهٔ حرکت پرتابه در نزدیکی سطح زمین

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F} + \overbrace{m\mathbf{g}_0 - m\mathbf{A}_0}^{\text{mg}} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

$\mathbf{F}$ نمایانگر هر نیروی وارد بر ذره غیر از نیروی گرانش

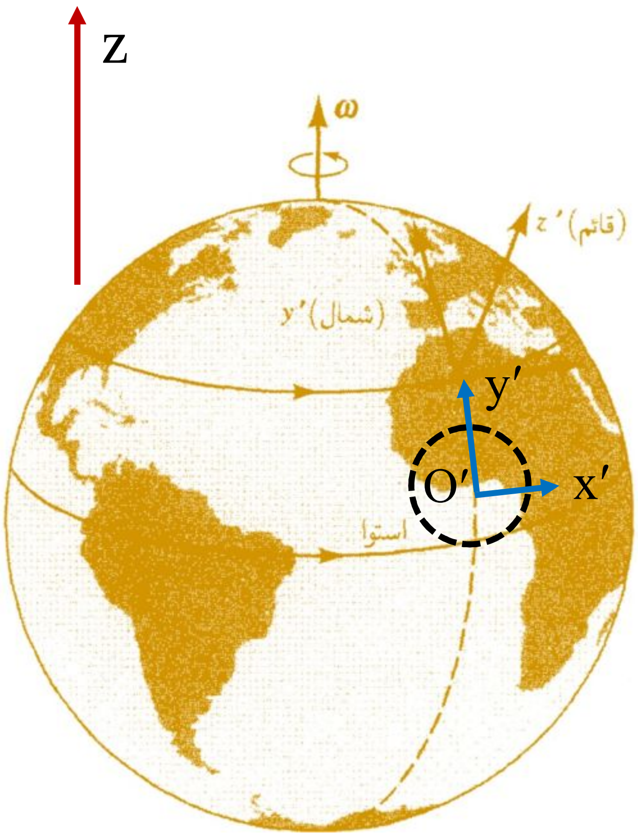
اگر از مقاومت هوا چشم بپوشیم، در این صورت $\mathbf{F} = 0$

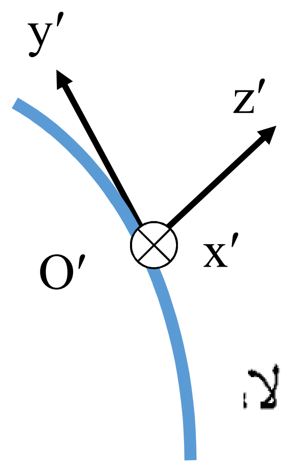
جملهٔ $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ در مقایسه با جمله‌های دیگر خیلی کوچک است

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'$$

نیروی کوریولیس

حل معادلهٔ $m\ddot{\mathbf{r}}' = m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'$





محورهای مختصات برای تحلیل حرکت پرتابه

جهت محورهای مختصات $O'x'y'z'$

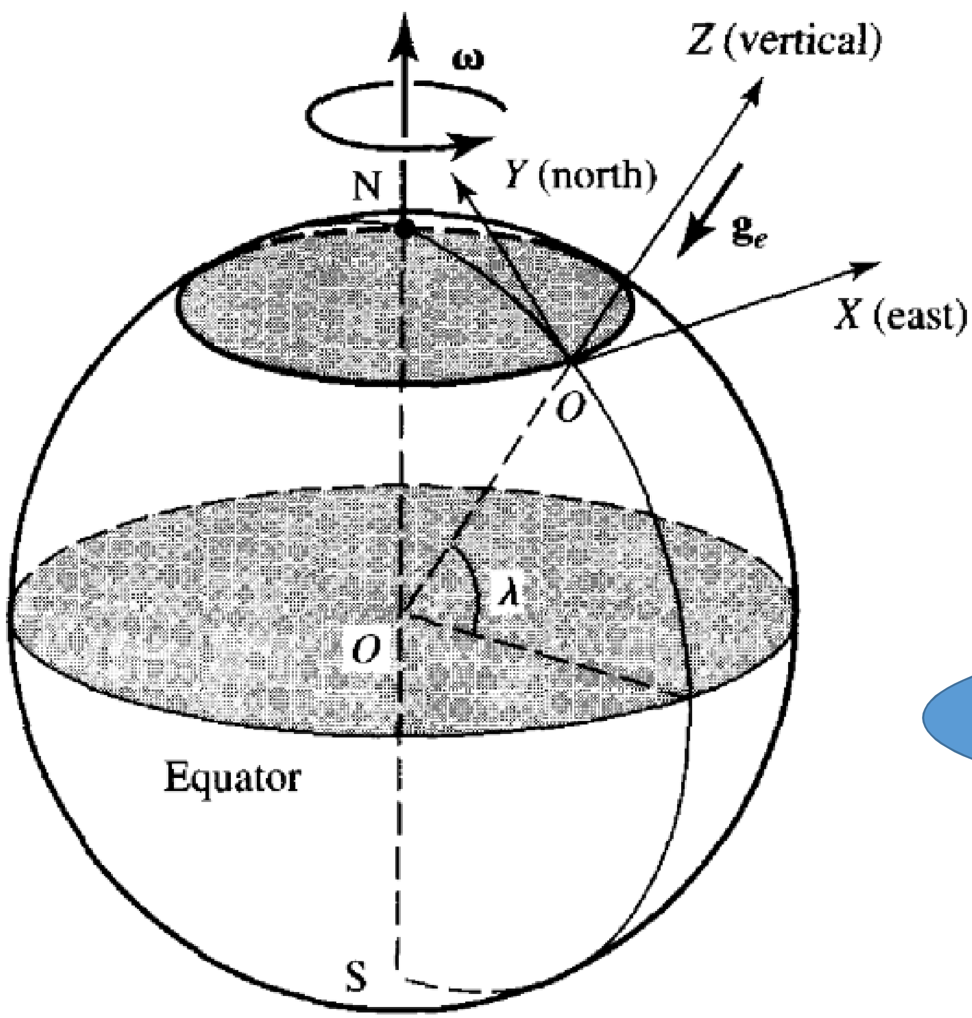
محور z' قائم (در راستای شاقول) روبه بالا،

محور x' به شرق

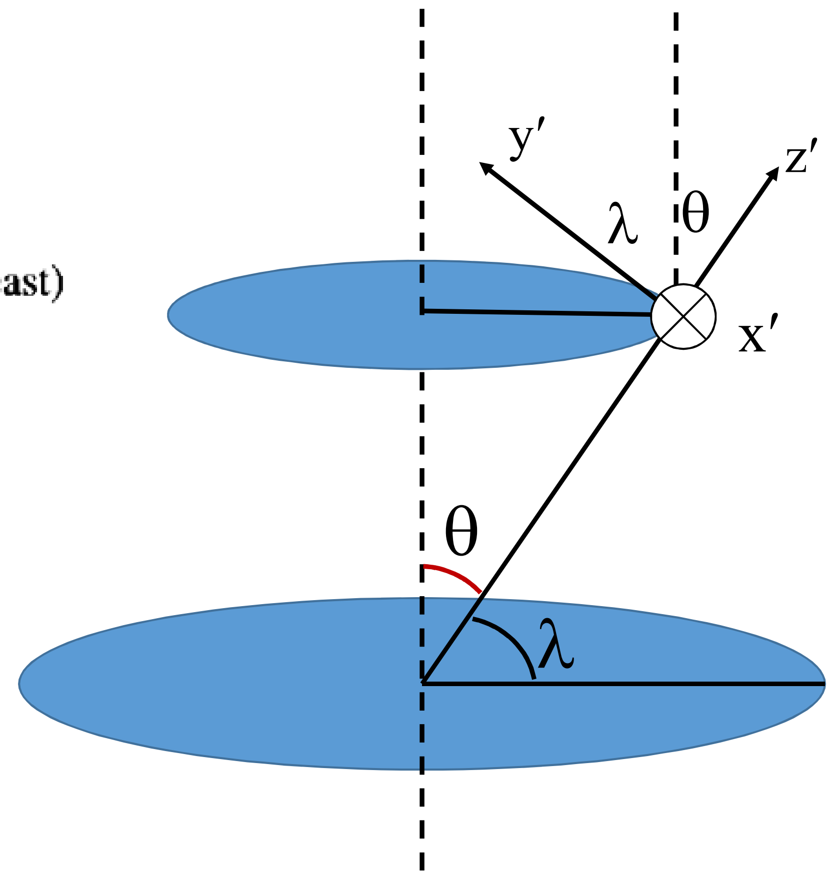
محور y' به شمال.

$$\mathbf{g} = -\mathbf{k}'g$$

جهت راستای شاقولی، جهت محلی بردار g را تعریف می‌کند



ω
Z (vertical)
Y (north)
N
g_e
X (east)
O
λ
O
Equator
S

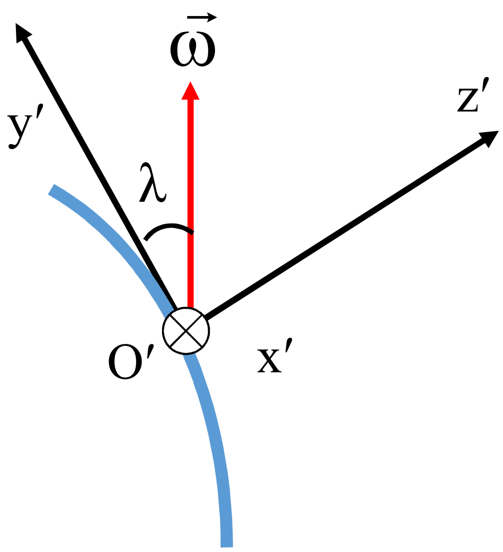


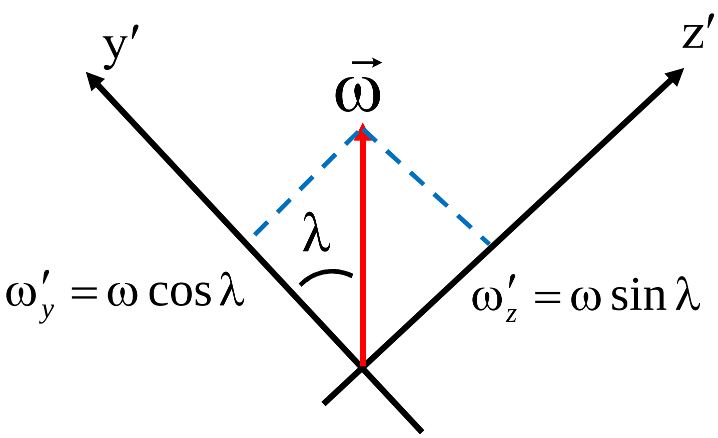
y′
z′
λ
θ
x′
θ
λ

بردار ω در دستگاه **xyz** $\qquad \vec{\omega} = \omega\,\hat{k}$

مؤلفه‌های ω در دستگاه پریم‌دار (درصفحه y'z')

$$\omega_{x'} = 0 \qquad \omega_{y'} = \omega \cos\lambda \qquad \omega_{z'} = \omega \sin\lambda$$





در صفحه y′z′

$\vec{\dot{r}}'$ = x'y'z' بردار سرعت جسم در دستگاه

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ \omega_{x'} & \omega_{y'} & \omega_{z'} \\ \dot{x}' & \dot{y}' & \dot{z}' \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}'(\omega \dot{z}' \cos\lambda - \omega \dot{y}' \sin\lambda) + \mathbf{j}'(\omega \dot{x}' \sin\lambda) + \mathbf{k}'(-\omega \dot{x}' \cos\lambda)$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = m\mathbf{g} - ۲m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' \quad \begin{cases} \ddot{x}' = -۲\omega(\dot{z}' \cos\lambda - \dot{y}' \sin\lambda) \\ \ddot{y}' = -۲\omega(\dot{x}' \sin\lambda) \\ \ddot{z}' = -g + ۲\omega \dot{x}' \cos\lambda \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\ddot{x}' = -۲\omega(\dot{z}'\cos\lambda - \dot{y}'\sin\lambda) \\
\ddot{y}' = -۲\omega(\dot{x}'\sin\lambda) \\
\ddot{z}' = -g + ۲\omega\dot{x}'\cos\lambda
\end{cases}
$$

انتگرال گیری نسبت به t

$$
\begin{cases}
\dot{x}' = -۲\omega(z'\cos\lambda - y'\sin\lambda) + \dot{x}'_۰ \\
\dot{y}' = -۲\omega x'\sin\lambda + \dot{y}'_۰ \\
\dot{z}' = -gt + ۲\omega x'\cos\lambda + \dot{z}'_۰
\end{cases}
$$

ثابتهای انتگرالگیری $\dot{x}'_۰$، $\dot{y}'_۰$، و $\dot{z}'_۰$ مؤلفه‌های سرعت

مستقل کردن رابطه $\ddot{x}'$ از $\dot{y}'$ و $\dot{z}'$

$$\ddot{x}' = -۲\omega(\dot{z}'\cos\lambda - \dot{y}'\sin\lambda)$$

$$\dot{y}' = -۲\omega x'\sin\lambda + \dot{y}'_{۰}$$

$$\dot{z}' = -gt + ۲\omega x'\cos\lambda + \dot{z}'_{۰}$$

مقادیر $\dot{y}'$ و $\dot{z}'$ در معادلهٔ $\ddot{x}'$

$$\ddot{x}' = ۲\omega gt\cos\lambda - ۲\omega(\dot{z}'_{۰}\cos\lambda - \dot{y}'_{۰}\sin\lambda)$$

از جمله‌های شامل $\omega^۲$ چشم پوشیده‌ایم

$$\ddot{x}' = 2\omega g t \cos\lambda - 2\omega\overbrace{(\dot{z}'_0 \cos\lambda - \dot{y}'_0 \sin\lambda)}^{\text{ثابت}}$$

انتگرال گیری نسبت به t

$$\dot{x}' = \omega g t^2 \cos\lambda - 2\omega t(\dot{z}'_0 \cos\lambda - \dot{y}_0 \sin\lambda) + \dot{x}'_0$$

انتگرال گیری نسبت به t

$$x'(t) = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\lambda - \omega t^2(\dot{z}'_0 \cos\lambda - \dot{y}'_0 \sin\lambda) + \dot{x}'_0 t + x'_0$$