

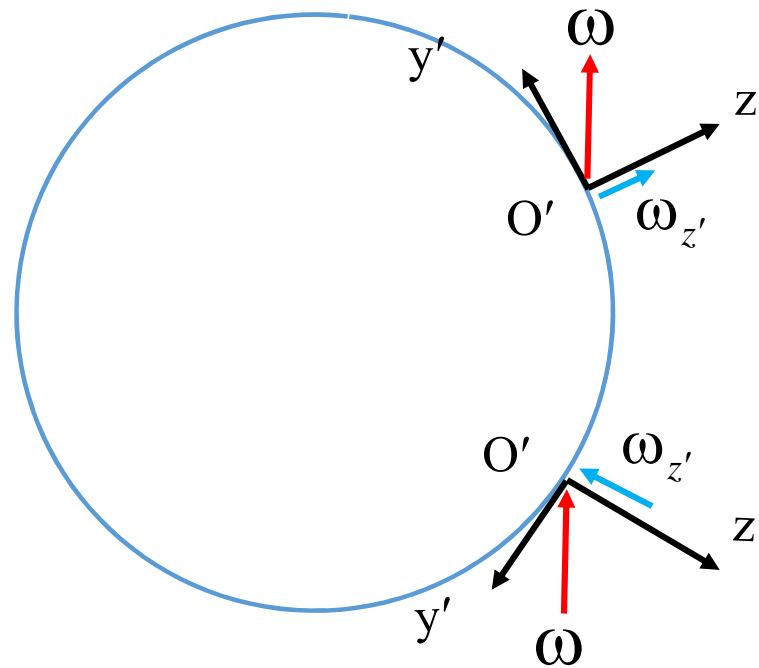


فصل پنجم - بخش پنجم

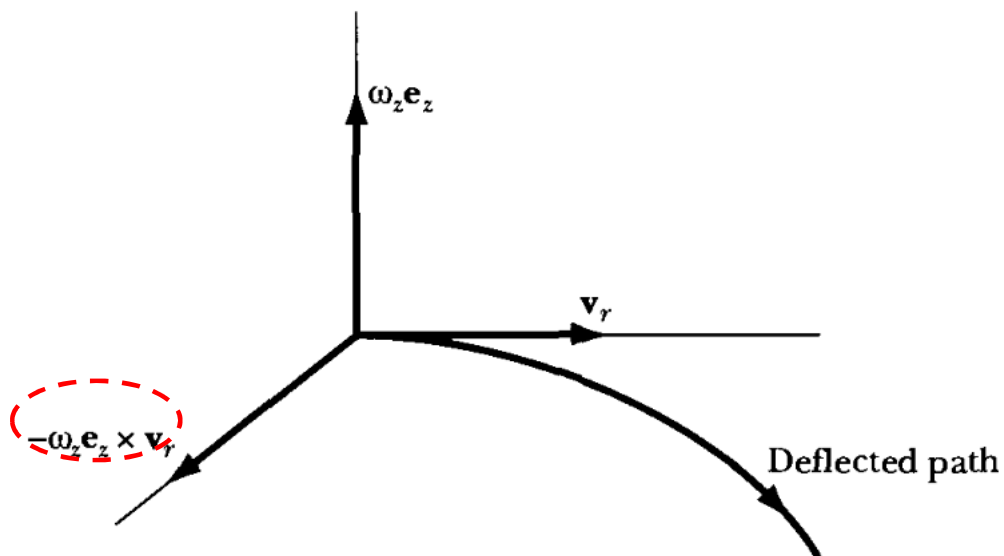
اثرات دینامیکی چرخش زمین ۲

Coriolis Force Effects

The angular velocity vector $\boldsymbol{\omega}$, which represents Earth's rotation about its axis, is directed in a northerly direction. Therefore, in the Northern Hemisphere, $\boldsymbol{\omega}$ has a component ω_z directed *outward* along the local vertical.

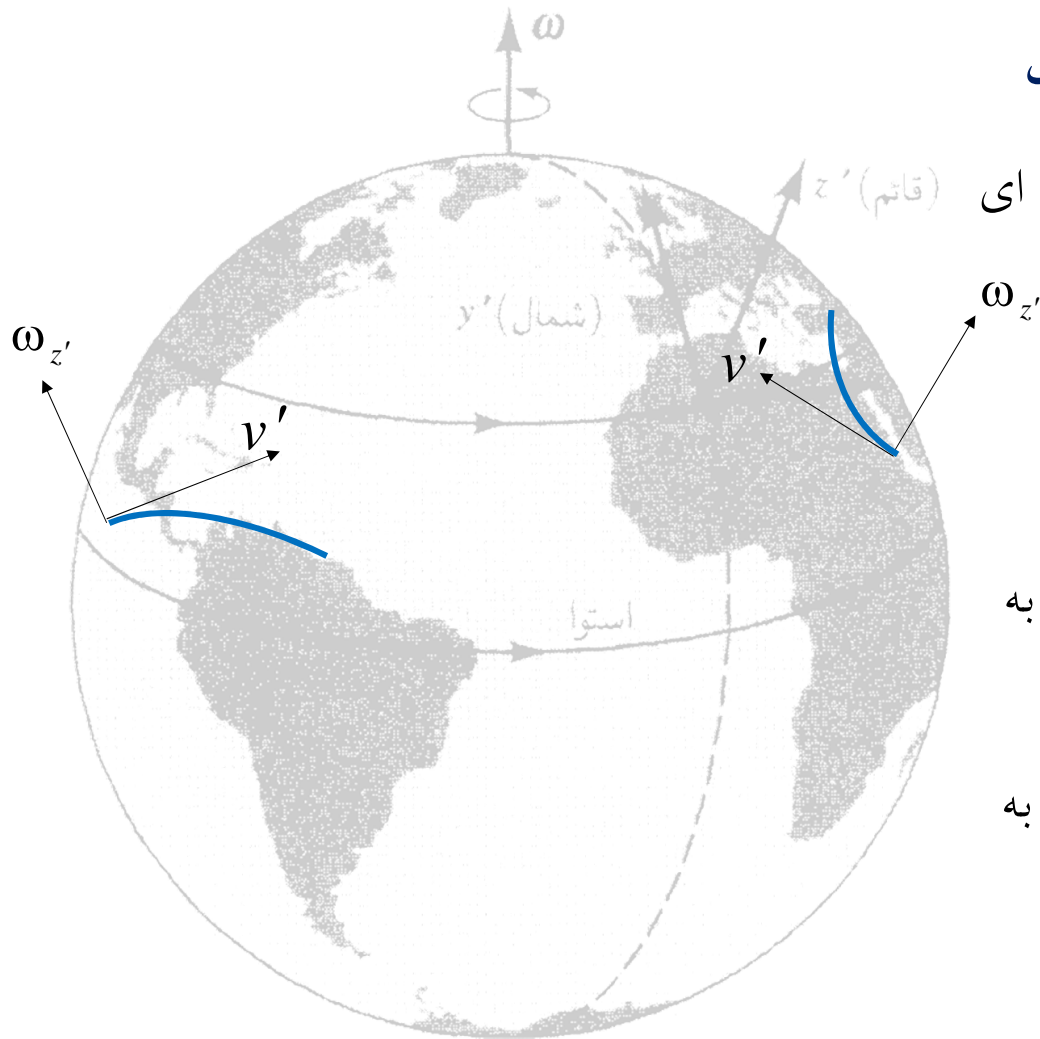


If a particle is projected in a horizontal plane (in the local coordinate system at the surface of Earth) with a velocity \mathbf{v}_r , then the Coriolis force $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ has a component in the plane of magnitude $2m\omega_z v_r$ directed toward the *right* of the particle's motion (see Figure 10-7), and a deflection from the original direction of motion results.*



In the Northern Hemisphere, a particle projected in a horizontal plane will be directed toward the right of the particle's motion. In the Southern Hemisphere, the direction will be to the left.

انحراف مسیر حرکت تحت تاثیر نیروی کریولیس



- ❖ نیروی کریولیس متناسب با مولفه سرعت زاویه ای زمین در امتداد عمود بر هر نقطه
- ❖ نیروی کریولیس در استوا صفر
- ❖ نیروی کریولیس در قطب ها بیشینه
- ❖ در نیم کره شمالی سبب انحراف حرکت جسم به سمت راست مسیر حرکت می شود
- ❖ در نیم کره جنوبی سبب انحراف حرکت جسم به سمت چپ مسیر حرکت می شود

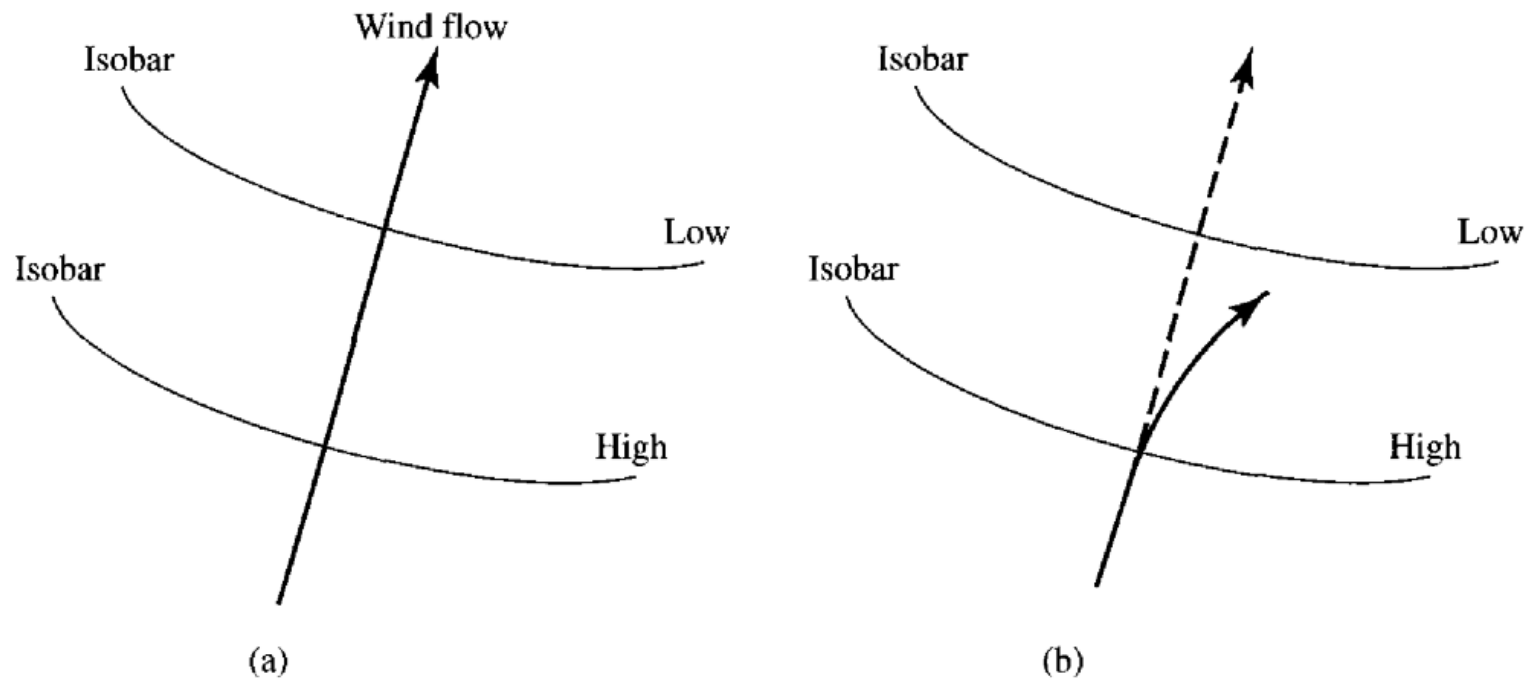


Figure 11.12 Wind direction from a high to low pressure (a) in the absence of the Coriolis force, and (b) in the presence of the Coriolis forces.

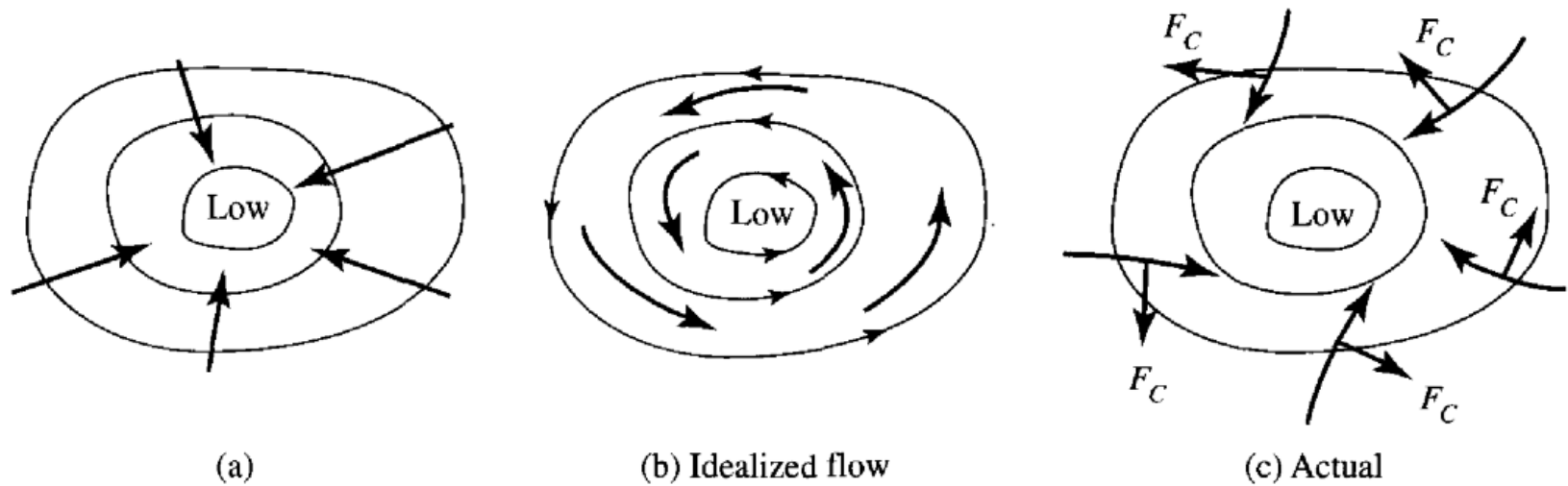


Figure 11.13 Wind flow about a low pressure in the Northern Hemisphere (a) without the Coriolis force, (b) idealized in the presence of the Coriolis force F_C , and (c) actual.

مثال ۱.۴.۵ جسم افتان

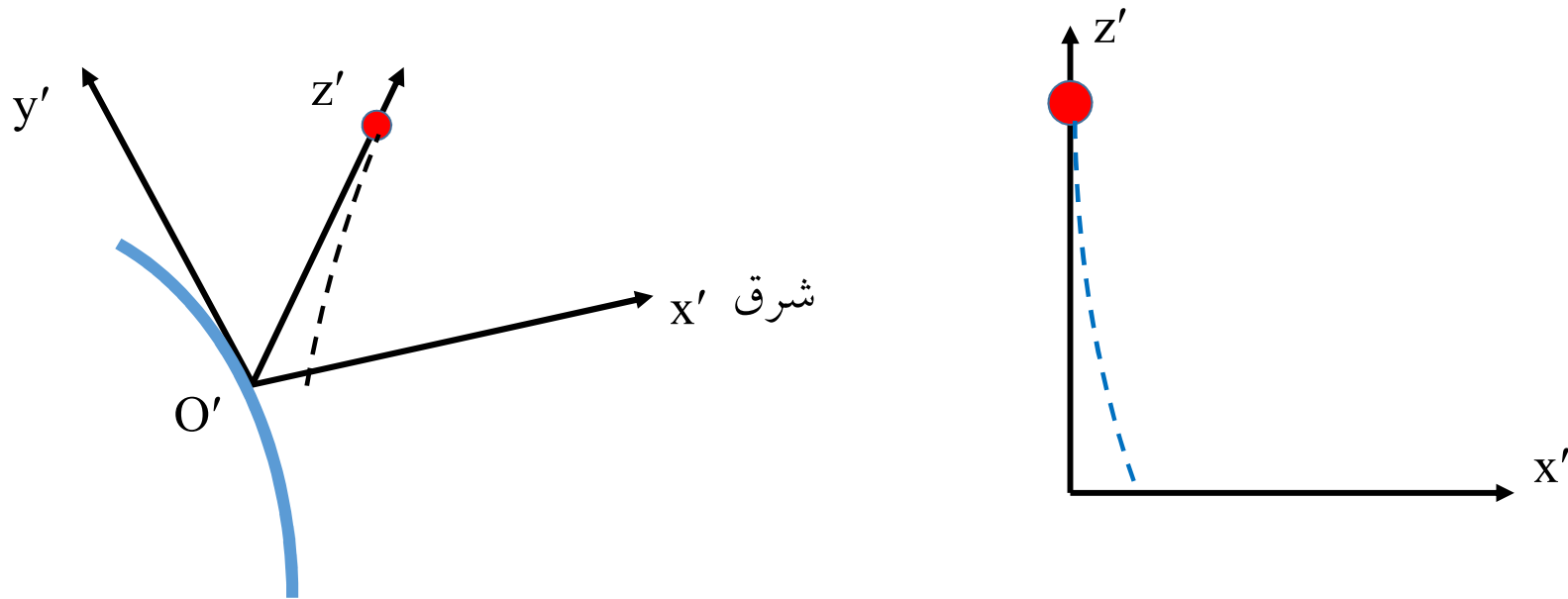
فرض کنید در ارتفاع h بر فراز سطح زمین جسمی از حال سکون به پایین رها شود.

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}'_0 = \dot{y}'_0 = \dot{z}'_0 = 0 \quad \text{سرعت} \\ z'_0 = h \quad , x'_0 = y'_0 = 0 \quad \text{مکان} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{شرایط اولیه} \\ t = 0 \end{array}$$

روابط پرتابه

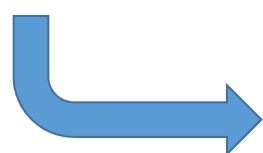
$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos \lambda - \omega t^2 (\dot{z}'_0 \cos \lambda - \dot{y}'_0 \sin \lambda) + \dot{x}'_0 t + x'_0 \\ y'(t) = \dot{y}'_0 t - \omega \dot{x}'_0 t^2 \sin \lambda + y'_0 \\ z'(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{z}'_0 t + \omega \dot{x}'_0 t^2 \cos \lambda + z'_0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos \lambda \\ y'(t) = 0 \\ z'(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{array} \right.$$



جسم در ضمن سقوط به شرق کشیده می شود

وقتی این جسم به زمین اصابت می کند ($z' = 0$)، می بینیم که $t^2 = 2h/g$



$$x'_h = \frac{1}{3}\omega \left(\frac{2h}{g} \right)^{\frac{3}{2}} \cos \lambda$$
 در هنگام برخورد با زمین

مثال ۲.۴.۵ انحراف گلوله تفنگ

پرتابه‌ای را در نظر بگیرید که با سرعت اولیه زیاد v_0 در راستای تقریباً افقی شلیک می‌شود و فرض کنید این راستا به مشرق باشد

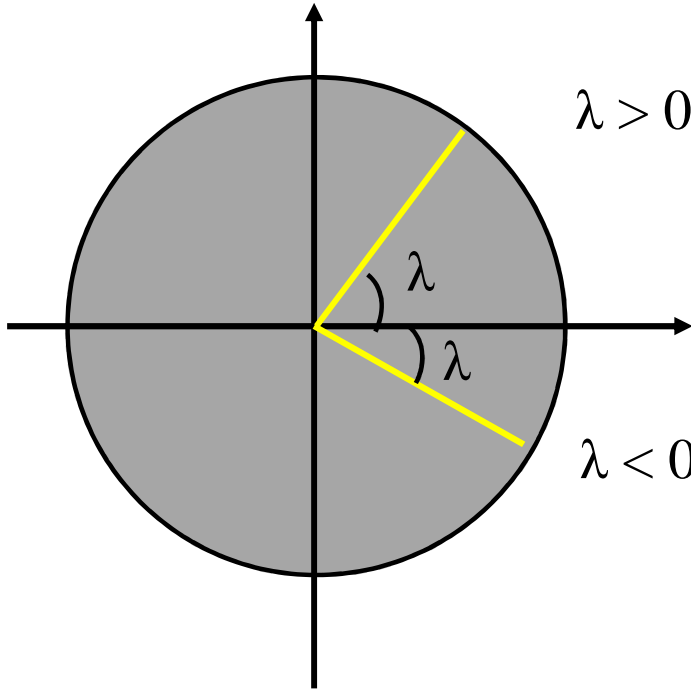
$$\left. \begin{array}{l} \text{سرعت } \dot{x}'_0 = v_0 \text{ و } \dot{y}'_0 = \dot{z}'_0 = 0 \\ \text{مکان } x'_0 = y'_0 = z'_0 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{شرایط اولیه} \\ t = 0 \end{array}$$

مبدأ را در نقطه‌ای بگیریم که پرتابه شلیک می‌شود

$$y'(t) = \dot{y}'_0 t - \omega \dot{x}'_0 t^2 \sin \lambda + y'_0$$



$$y'(t) = -\omega v_0 t^2 \sin \lambda$$

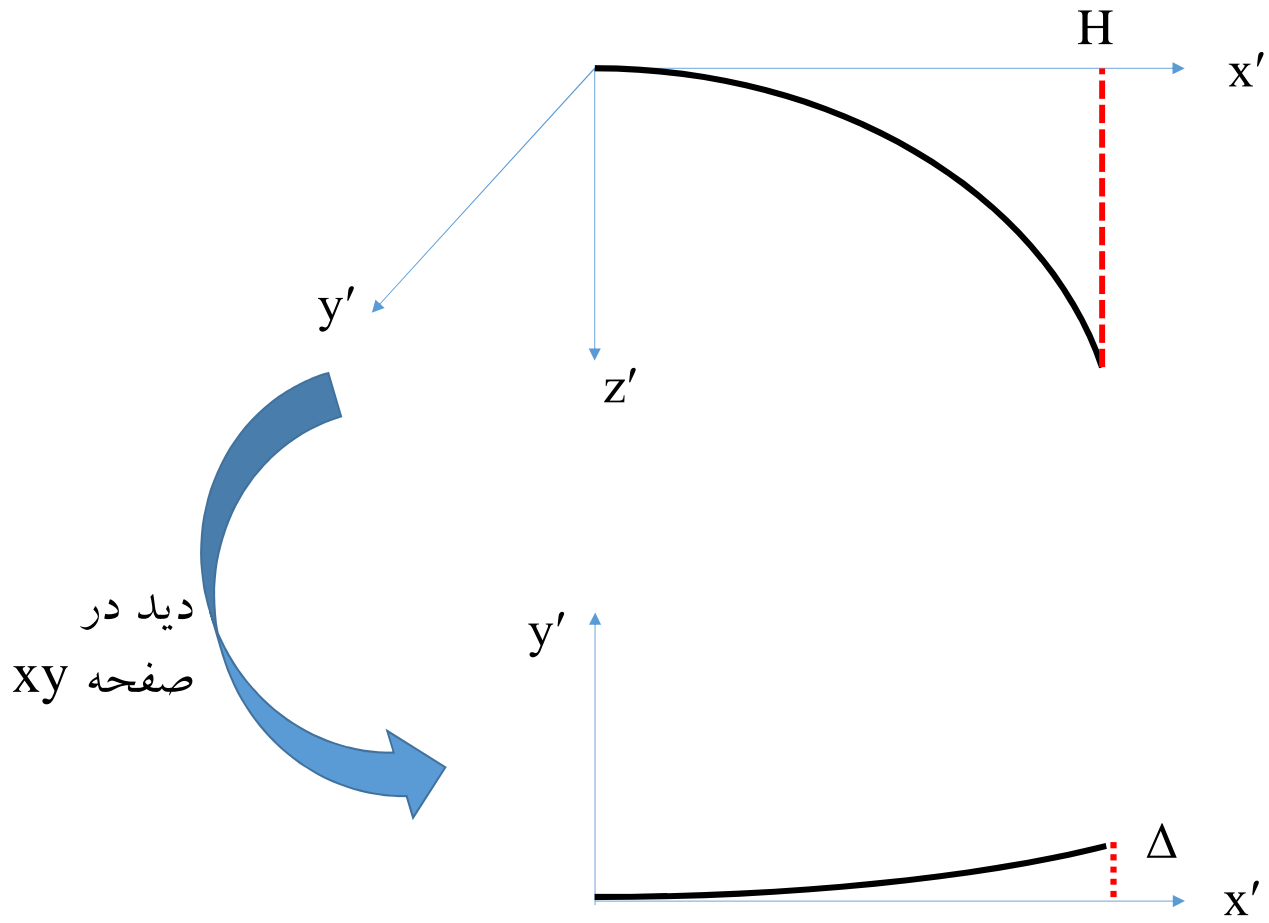


پرتابه به سمت راست نقطه پرتاب کشیده می شود $\lambda > 0 \rightarrow y' < 0$

پرتابه به سمت چپ نقطه پرتاب کشیده می شود $\lambda < 0 \rightarrow y' > 0$

اگر H برد افقی پرتابه باشد $H \approx v_0 t_1$ که t_1 مدت زمان پرواز است $\leftarrow t_1 = H/v_0$

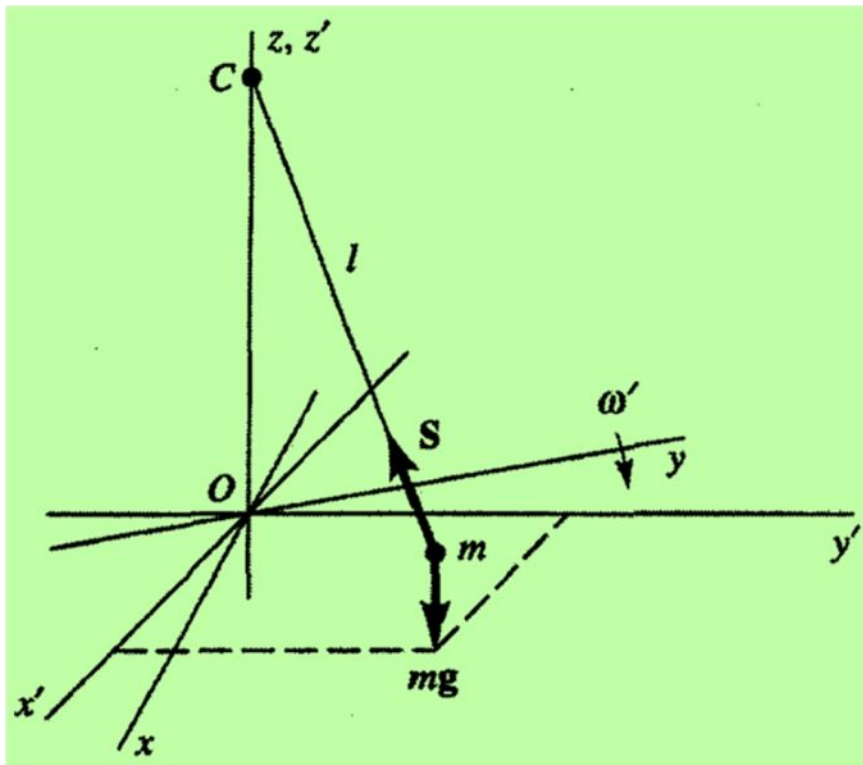
انحراف عرضی $y'(t_1) \rightarrow \Delta \approx \frac{\omega H^2}{v_0} |\sin \lambda|$



عبارت بالا برای هر جهتی که پرتابه هدف‌گیری شود، یکسان است، به شرطی که مسیر پرتابه مسطح باشد. این نتیجه پیامد این نکته است که بزرگی مؤلفه افقی نیروی کوریولیس وارد بر جسمی که موازی سطح زمین حرکت می‌کند، از جهت حرکت مستقل است (مسئله ۱۲.۵) چون انحراف با مجذور بردار افقی متناسب است، در تیراندازی بلند برد اهمیت چشمگیری پیدا می‌کند.

۶.۵ آونگ فوکو

در این بخش اثر چرخش زمین بر حرکت آونگی را مطالعه می‌کنیم که آزادانه در هر جهت تاب می‌خورد و از این رو به آن آونگ کروی می‌گویند.



نیروی وارد بر گلوله آونگ } وزن mg
کشش نخ، S

معادله دیفرانسیل حرکت

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = m\mathbf{g} + \mathbf{S} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'$$

11.5 FOUCAULT PENDULUM

In 1851, Jean Leon Foucault (1819–1868) devised a system, called the Foucault pendulum, that demonstrates that *Earth is a noninertial system*. In other words, as we shall show, he demonstrated the presence of the Coriolis force due to the rotation of Earth. The Foucault pendulum consisted of a heavy bob of 28-kg mass hanging from a long wire of 67-m length mounted from the dome of the Pantheon in Paris. The pendulum swung freely in any vertical plane. Once the pendulum was set swinging in a definite vertical plane, it was observed that the plane of the swing precessed about the vertical. The plane precessed almost a centimeter on each swing, thereby directly demonstrating that Earth is rotating. (Such a pendulum is exhibited at the Smithsonian Institution in Washington, D.C.)

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{T} + m \mathbf{g}_e - 2m \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (11.73)$$

The last term in this equation is the Coriolis force and would have been absent if Earth were not rotating. Equation (11.73) without the last term is simply an equation of a simple pendulum in a nonrotating Earth.

For small velocities, say $v \approx 10$ km/h, the Coriolis force is about 0.1% of the gravitational force $m\mathbf{g}_e$; hence the vertical component of the Coriolis force is negligible as compared to $m\mathbf{g}_e$. On the other hand, the horizontal component of the Coriolis force that is perpendicular to $\dot{\mathbf{r}}$ and is in the XY plane has an appreciable effect on the motion of the pendulum because no other forces are acting in this plane. This component of the Coriolis force makes it impossible for the pendulum to continue to swing in a fixed vertical plane and results in a precession or rotation of this plane about the vertical axis. We calculate the frequency of the precession as follows.

$$\mathbf{F} - m\mathbf{A}_0 - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = m\mathbf{a}'$$

\mathbf{F} → $mg + \mathbf{S}$
 $m\mathbf{A}_0$ → 0 بدون حرکت انتقالی
 $m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'$ → 0 حرکت دایره ای با سرعت ثابت
 $m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ → 0 بدلیل حضور ω^2 قابل صرف نظر کردن

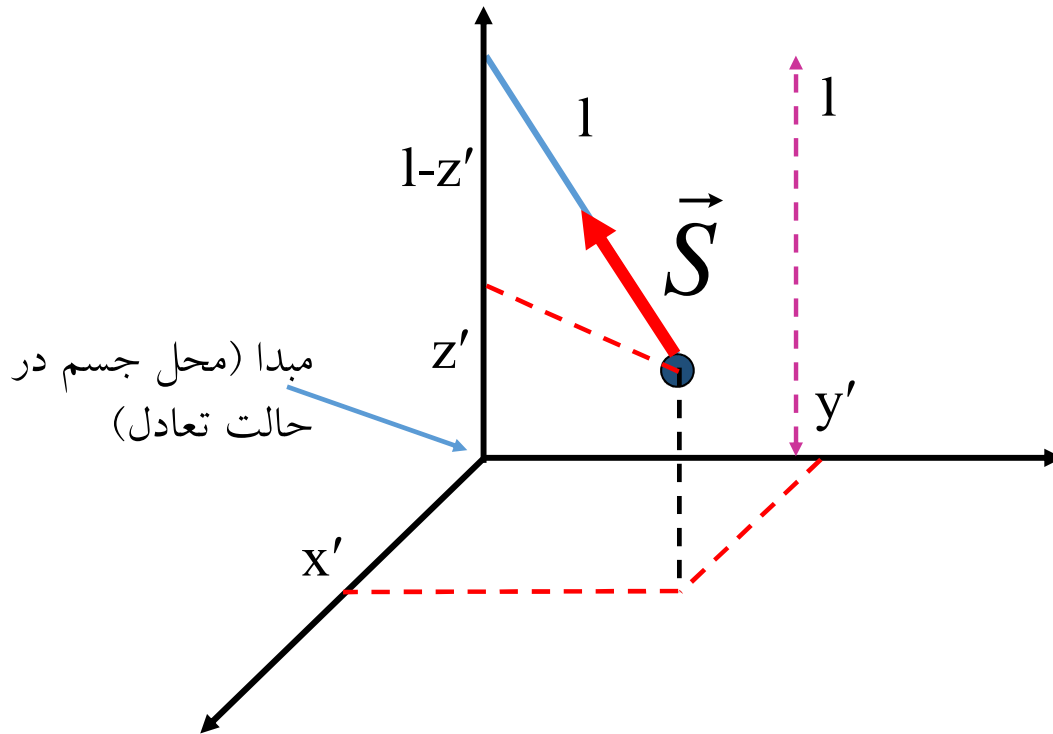


$$m\ddot{\mathbf{r}}' = mg + \mathbf{S} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' \quad 1$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{i}'(\omega\dot{z}' \cos \lambda - \omega\dot{y}' \sin \lambda) + \mathbf{j}'(\omega\dot{x}' \sin \lambda) + \mathbf{k}'(-\omega\dot{x}' \cos \lambda) \quad 2$$

کسینوسهای هادی بردارهای یکه در امتداد ریسمان است.

بردار کشش نیز در امتداد ریسمان می باشد

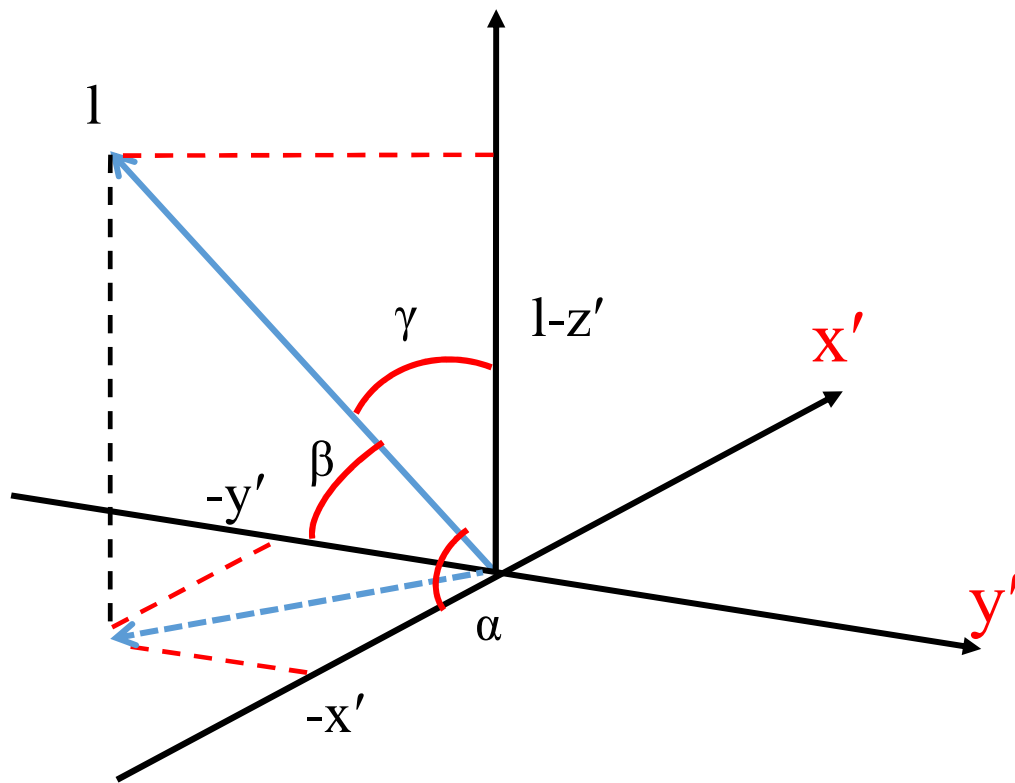


$$S_x = S \cos \alpha = -\frac{x'}{l} S$$

$$S_y = S \cos \beta = -\frac{y'}{l} S$$

$$S_z = S \cos \gamma = \frac{(l - z')}{l} S$$

کسینوسهای هادی بردار \mathbf{S} ، به ترتیب، عبارت‌اند از $-x'/l$ ، $-y'/l$ و $(l - z')/l$



$$\cos \alpha = \frac{-x'}{l}$$

$$\cos \beta = \frac{-y'}{l}$$

$$\cos \gamma = \frac{(l - z')}{l}$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = m\mathbf{g} + \mathbf{S} - \Upsilon m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'$$

1 2 3



$$m\ddot{x}' = \frac{-x'}{l}S - \Upsilon m\omega(\dot{z}' \cos \lambda - \dot{y}' \sin \lambda)$$

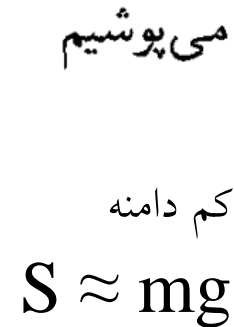
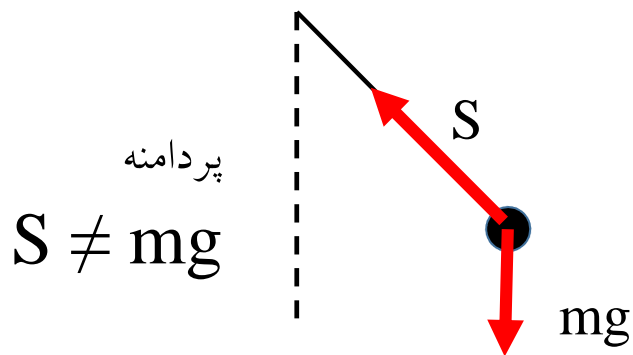
$$m\ddot{y}' = \frac{-y'}{l}S - \Upsilon m\omega \dot{x}' \sin \lambda$$

$$m\ddot{z}' = mg + \frac{(l - z')}{l}S + 2m\omega \dot{x}' \cos \lambda$$

دو فرض برای ساده سازی:

حالت نوسان کم دامنه را در نظر می‌گیریم، به طوری که بزرگی کشش S تقریباً ثابت و مساوی mg

در مقایسه با \dot{y}' از \dot{z}' چشم می‌پوشیم



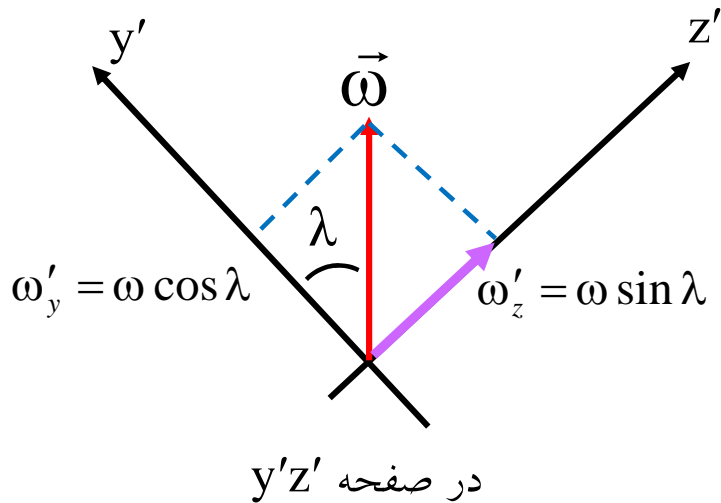
مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل حرکت

$$m\ddot{x}' = \frac{-x'}{l}S - 2m\omega(\dot{z}' \cos \lambda - \dot{y}' \sin \lambda)$$

$$m\ddot{y}' = \frac{-y'}{l}S - 2m\omega\dot{x}' \sin \lambda$$



$$\begin{aligned}\ddot{x}' &= -\frac{g}{l}x' + 2\omega'\dot{y}' \\ \ddot{y}' &= -\frac{g}{l}y' - 2\omega'\dot{x}'\end{aligned}$$



مؤلفه قائم محلی سرعت زاویه‌ای زمین

$$\omega' = \omega \sin \lambda = \omega_{z'}$$

حل معادلات حرکت

$$\ddot{x}' = -\frac{g}{l}x' + \underline{2\omega'y'}$$

$$\ddot{y}' = -\frac{g}{l}y' - \underline{2\omega'x'}$$

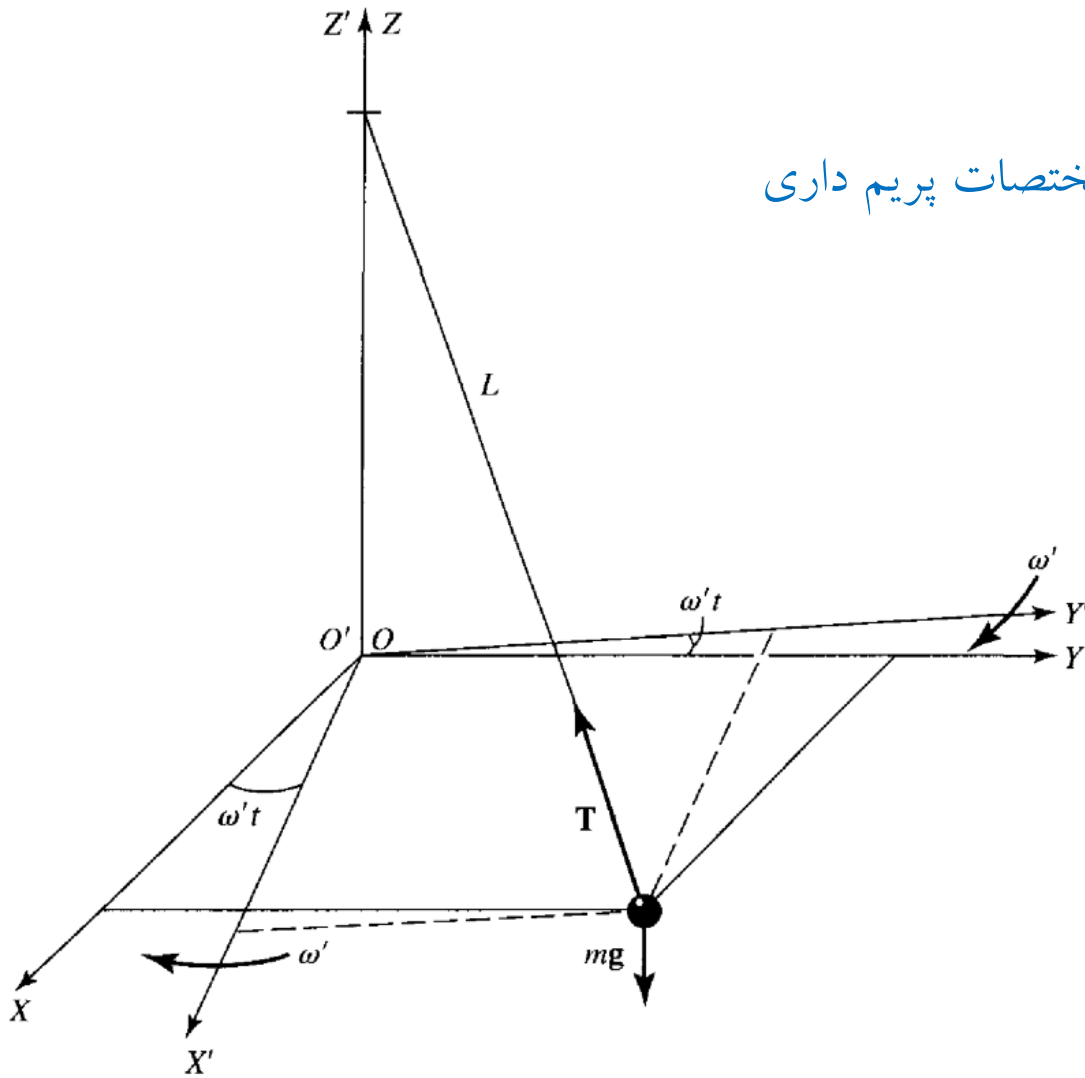
مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل حرکت که به شکل مجزا نیستند.

یکی از روشهای حل سرانگشتی این معادلات از آن قرار است که تبدیلی به دستگاه مختصات جدید $Oxyz$ صورت گیرد که این دستگاه جدید نسبت به دستگاه پریم‌دار چنان بچرخد که مؤلفهٔ قائم چرخش زمین حذف شود بنابراین جمله دوم در معادلات بالا حذف می‌شود

$$\omega' = 0$$

سرعت زاویه‌ای چرخش آن حول محور قائم نسبت به دستگاه پریم‌دار ω' - باشد.
دستگاه بدون پریم چرخشی حول محور قائم ندارد.

بررسی حرکت آونگ فوکو در دستگاه مختصات پریم داری
که با سرعت زاویه ای ω' می چرخد



$$\ddot{x}' = -\frac{g}{l}x'$$

$$\ddot{y}' = -\frac{g}{l}y'$$

جواب معادلات

$$x' = x \cos \omega' t + y \sin \omega' t$$

$$y' = -x \sin \omega' t + y \cos \omega' t$$

$$\omega_x^2 = \frac{g}{L} \quad \text{and} \quad \omega_y^2 = \frac{g}{L}$$

★ اینها، معادلات دیفرانسیل نوسانگر هماهنگ دوبعدی‌اند

★ شامل دو حرکت هارمونیک ساده عمود برهم

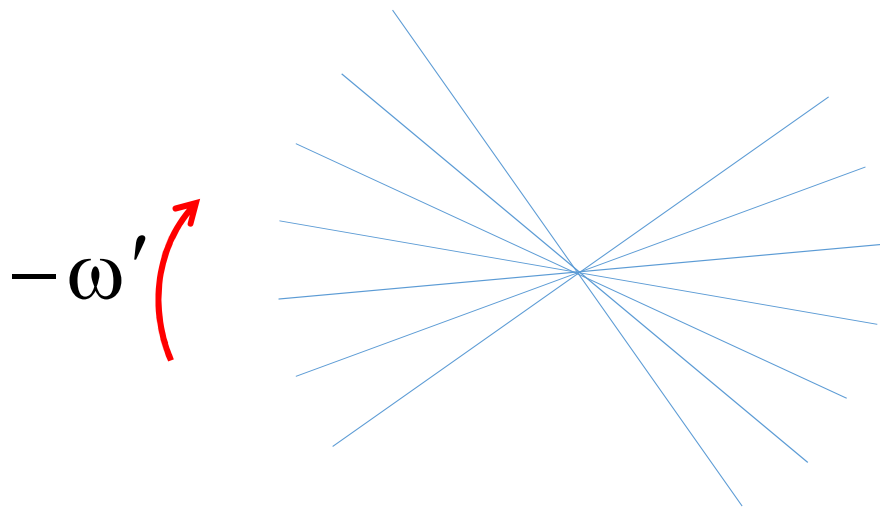
★ مسیر، که بر صفحه xy تصویر شده است، یک بیضی با سمتگیری ثابت را در دستگاه بدون پریم تشکیل می‌دهد.

★ در دستگاه پریم‌دار مسیر عبارت است از یک بیضی که حرکت تقدیمی دائمی با سرعت زاویه‌ای $\omega' = \omega \sin \lambda$ انجام می‌دهد.

★ سوی حرکت تقدیمی چرخشی در نیمکره شمالی ساعتگرد و در نیمکره جنوبی پادساعتگرد

★ دوره تناوب آن عبارت است از $2\pi/\omega' = 2\pi/(\omega \sin \lambda) = (24/\sin \lambda) \text{ h}$

★ در عرض جغرافیایی 45° ، زمان تناوب عبارت خواهد بود از $(24/\sin 45^\circ) \text{ h} = 33,94 \text{ h}$



تصویر حرکت جسم در صفحه xy
افق (دستگاه بدون پریم)

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\omega \sin \lambda} = \frac{T_0}{\sin \lambda} = \frac{24 \text{ h}}{\sin \lambda}$$

$$\lambda = 45^\circ \quad T_p \simeq 34 \text{ h}$$

$$\omega = 90^\circ \text{ (north pole)} \quad T_p = 24 \text{ h}$$

$$\lambda = 0^\circ \text{ (equator)} \quad T_p = \infty$$