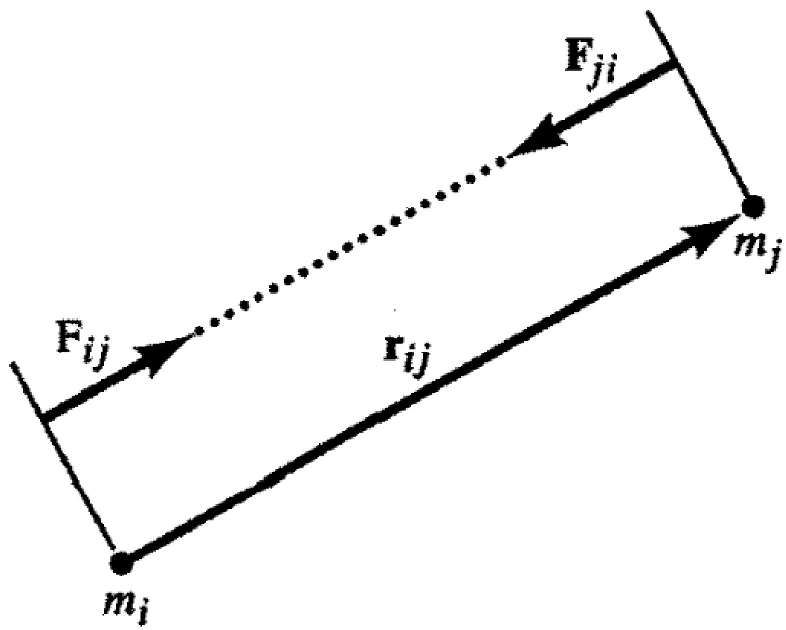
بسم الله الرحمن الرحیم

فصل ششم – بخش اول

نیروی گرانش و قوانین کپلر

قانون گرانش عمومی نیوتون

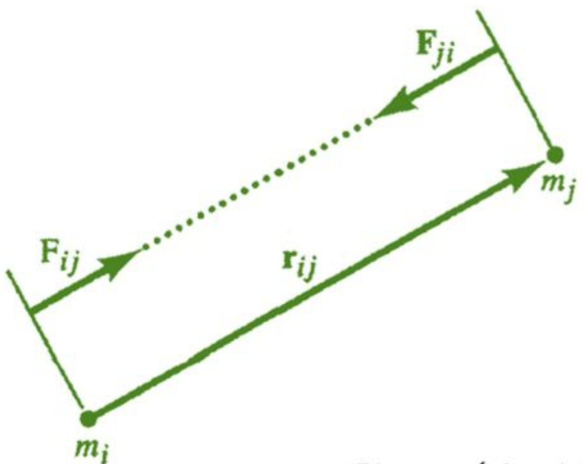
هر ذره در عالم ذرهٔ دیگری را با نیرویی می‌رباید که بزرگی آن با حاصلضرب جرمهای این دو ذره متناسب است و با مجذور فاصلهٔ بین آنها نسبت عکس دارد. راستای این نیرو در امتداد خط مستقیمی است که دو ذره را به هم وصل می‌کند.



شکل برداری

$$\mathbf{F}_{ij} = G\frac{m_i m_j}{r_{ij}^۲}\left(\frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}}\right)$$

$\mathbf{F}_{ij}$ عبارت است از نیروی وارد بر ذرهٔ iام به جرم m_i که ذرهٔ j به جرم m_j وارد می‌آورد



بردار $\mathbf{r}_{ij}$: پاره‌خط جهت‌داری است از ذرهٔ i به سوی ذرهٔ j!

طبق قانون کنش و واکنش $\quad \mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$

ثابت تناسب G را ثابت عمومی گرانش می‌گویند

$$G = (۶٫۶۷۲۵۹ \pm ۰٫۰۰۰۸۵) \times ۱۰^{-۱۱}\mathrm{Nm}^۲\mathrm{kg}^{-۲}$$

این قانون نمونه‌ای از ردهٔ کُلی نیروهایی به‌شمار می‌آید که به آنها نیروهای مرکزی می‌گویند

ویژگیهای نیروی مرکزی:

- نیروهایی که خط کنش آنها از یک نقطه یا مرکز ناشی می‌شود یا به آن خاتمه می‌یابد
- بزرگی این نیرو، مانند بزرگی نیروی گرانش، باید از جهت مستقل باشد: **(نیروی همسانگرد)**
- **تجسم رفتار نیروی مرکزی**

سطحی فرضی و کروی را با ذره‌ای جرم‌دار در مرکز آن، به صورت منبع گرانش فرض کنید.
وقتی کسی روی این سطح گام برمی‌دارد، پی‌می‌برد که همواره تحت تأثیر نیرویی ربایشی به سمت مرکز قرار دارد، که بزرگیش از مکان او بر سطح کره مستقل است.

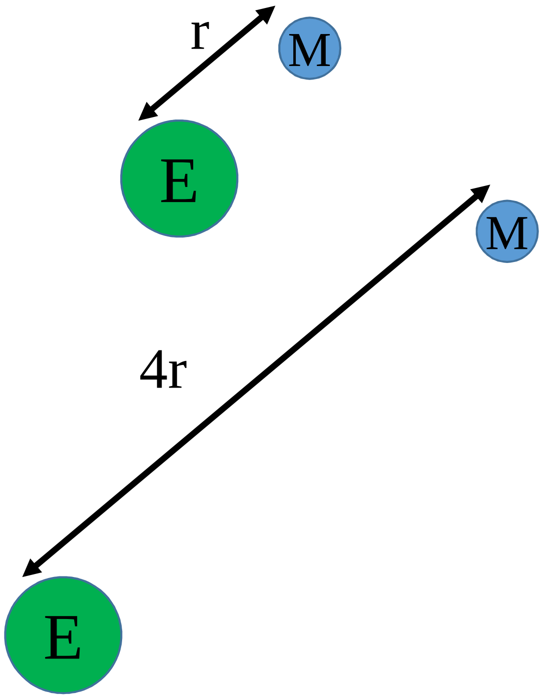
مشکل اساسی نیوتون این بود که پی‌ببرد این نیروی ربایشی چگونه به فاصله تا مرکز زمین بستگی دارد. نیوتون می‌دانست که شدت نیروی ربایشی زمین با شتاب اجسام سقوطی، در هر فاصله‌ای از زمین واقع باشند، متناسب است. شتاب ماه به سمت زمین عبارت است از $a = v^2/r$، که v سرعت ماه و r شعاع مدار دایره‌ای آن است. (این شتاب با مقدار موضعی g برابر است.) نیوتون به کمک قانون سوم کپلر (متناسب‌بودن مجذور زمان تناوب مدار، τ^2، با مکعب فاصله تا مرکز مدار، r^3)، نتیجه گرفت که این شتاب باید به‌صورت $\frac{1}{r^2}$ تغییر کند. مثلاً، اگر فاصلهٔ ماه تا زمین ۴ برابر فاصله‌ای بود که هم‌اکنون با زمین دارد، در این صورت طبق قانون سوم کپلر، زمان تناوب گردش آن می‌بایست ۸ برابر و سرعت مداری آن ۲ بار آهسته‌تر، و در نتیجه، شتاب مرکزگرای آن ۱۶ بار کمتر از مقدار فعلیش می‌بود یا به‌صورت عکس مجذور فاصله ضعیفتر می‌شد.

$$T^2 \propto r^3 \quad \rightarrow \quad T \propto r^{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad T' \propto (4r)^{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad T' = 8T$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \rightarrow \quad \omega' = \frac{2\pi}{8T} \quad \rightarrow \quad \omega' = \frac{1}{8}\omega$$

$$v = r\omega \quad \rightarrow \quad v' = (4r)\frac{1}{8}\omega \quad \rightarrow \quad v' = 2v$$

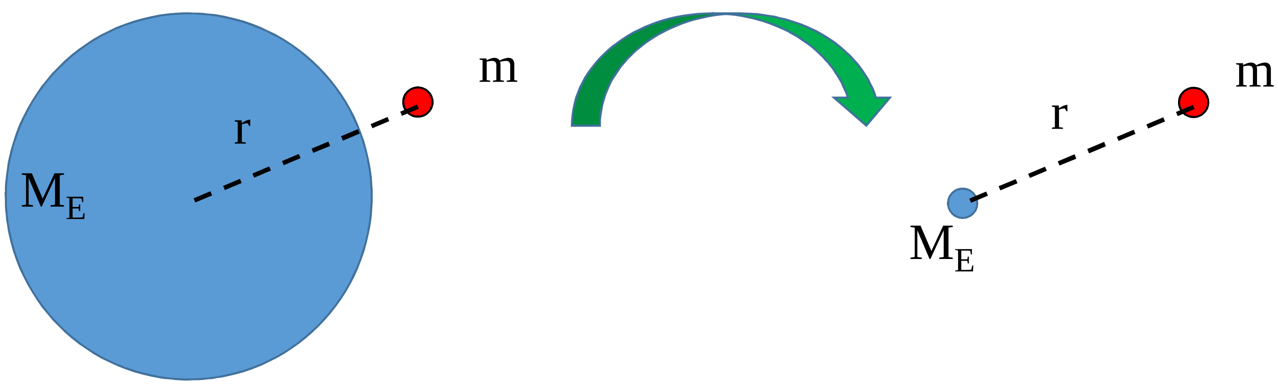
$$a = r\omega^2 \quad \rightarrow \quad a' = (4r)(\frac{1}{8}\omega)^2 \quad \rightarrow \quad a' = \frac{1}{16}a$$



نکته و اثبات:

برای هر جسم کروی یکنواخت یا هرگونه توزیع متقارن کروی، نیروی گرانشی وارد از آن بر هر هر ذرهٔ خارجی را می‌توان صرفاً با این فرض محاسبه کرد که کل جرم این توزیع چنان عمل می‌کند که گویی در مرکز هندسی آن متمرکز شده است.

فقط قانون نیروی عکس مجذور به این صورت کارآمد است.



اثبات:

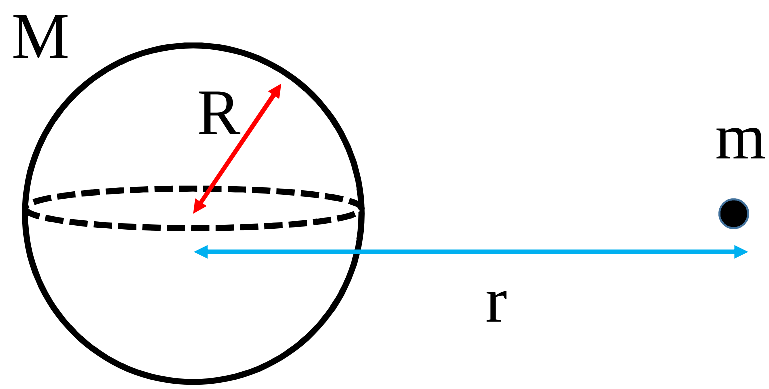
پوستهٔ یکنواخت نازکی به جرم M و شعاع R را در نظر می‌گیریم

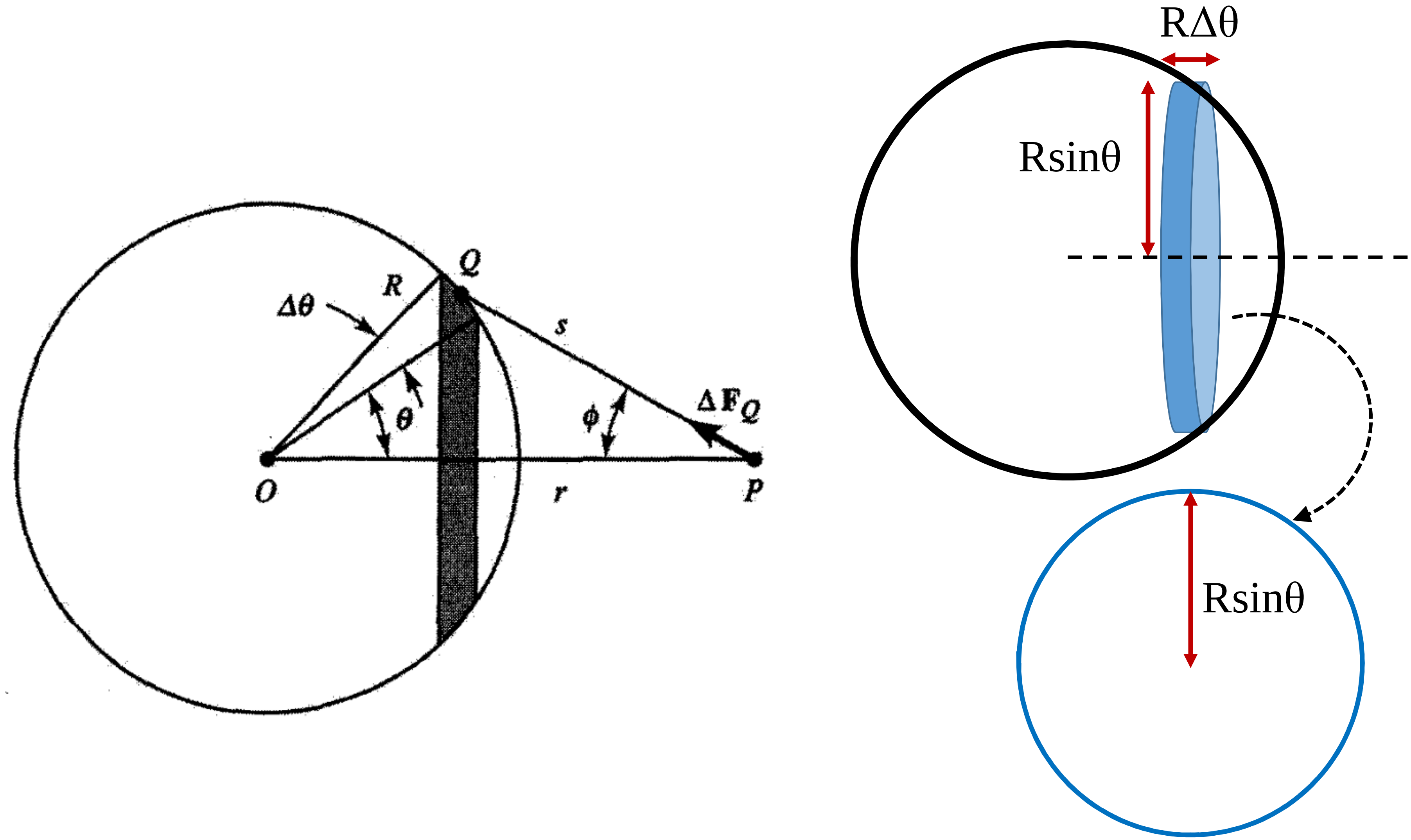
فاصلهٔ ذرهٔ آزمون P به جرم m تا مرکز O را r در می‌گیریم

فرض می‌شود $r > R$. (جسم بیرون از کره)

پوسته را به حلقه‌های دایره‌ای به پهنای $R\Delta\theta$ تقسیم می‌کنیم

زاویهٔ POQ را به θ نمایش می‌دهیم و Q را نقطه‌ای واقع بر حلقه می‌گیریم





Q
R
Δθ
s
θ
φ
ΔF_Q
O
r
P
RΔθ
Rsinθ
Rsinθ

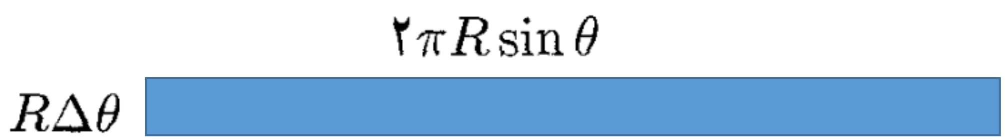
معرفی عنصر حلقه ای

محیط عنصر حلقه‌ای $= 2\pi R\sin\theta$

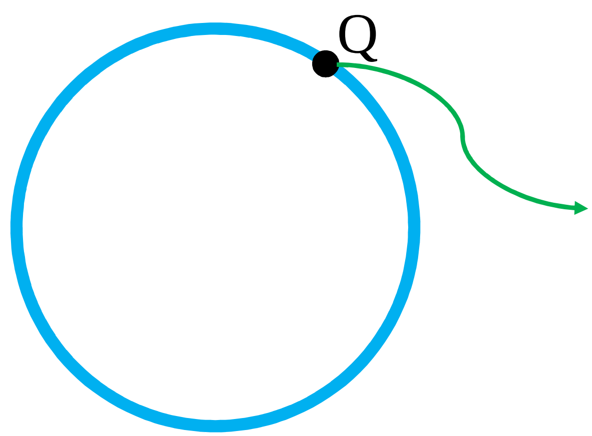
مساحت عنصر حلقه ای $= 2\pi R\sin\theta \times R\Delta\theta$

جرم عنصر حلقه ای $= \Delta M \approx \rho 2\pi R^2 \sin\theta\,\Delta\theta$

ρ جرم واحد مساحت پوسته

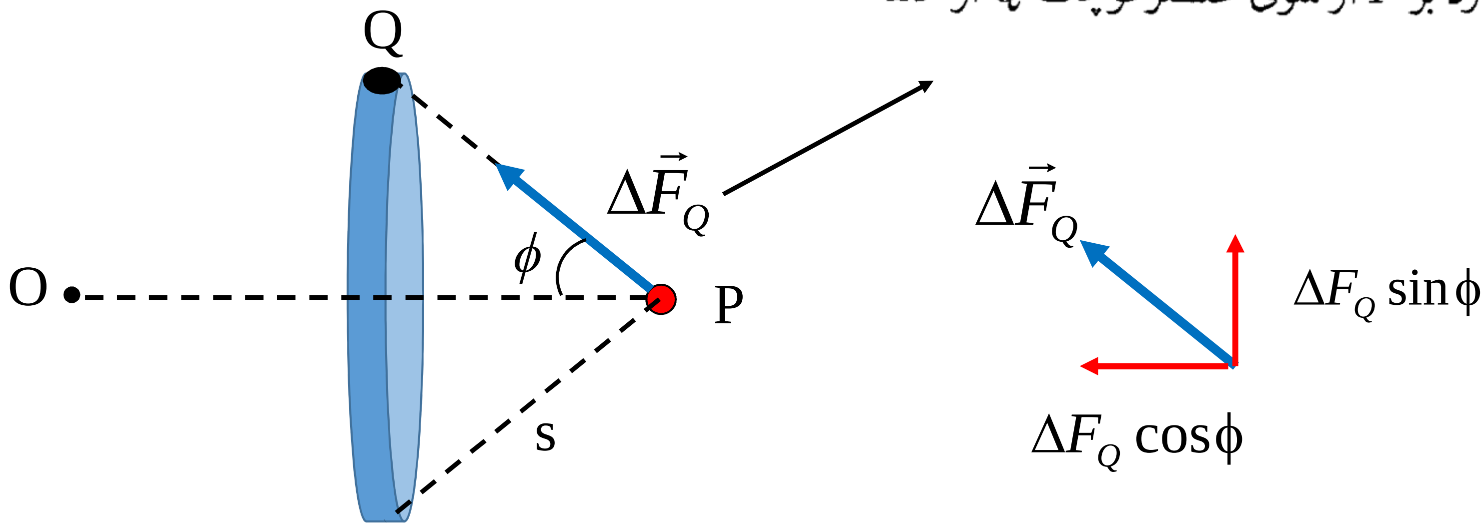


محاسبه نیروی عنصر حلقه ای بر جرم m



۱- بررسی در المان نقطه ای

نیروی گرانشی وارد بر P از سوی عنصرکوچک Q از حلقه



۲- جمع روی همه المانهای نقطه ای عنصر حلقوی

$$\sum \Delta F_Q \sin\phi = 0$$ عمود بر PO

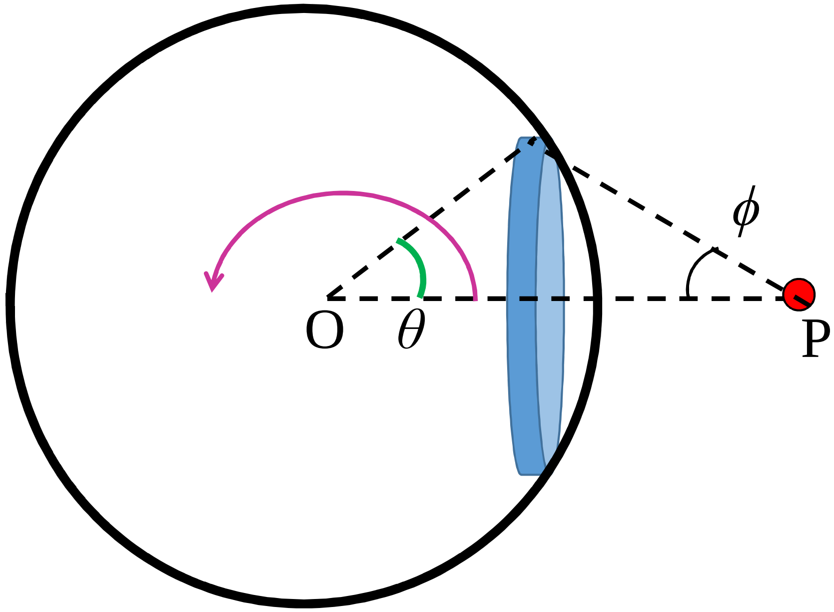
$$\sum \Delta F_Q \cos\phi \neq 0$$ در امتداد PO

نیروی $\mathbf{\Delta F}$ که از جانب تمام حلقه بر ذره وارد می‌آید، در جهت PO است

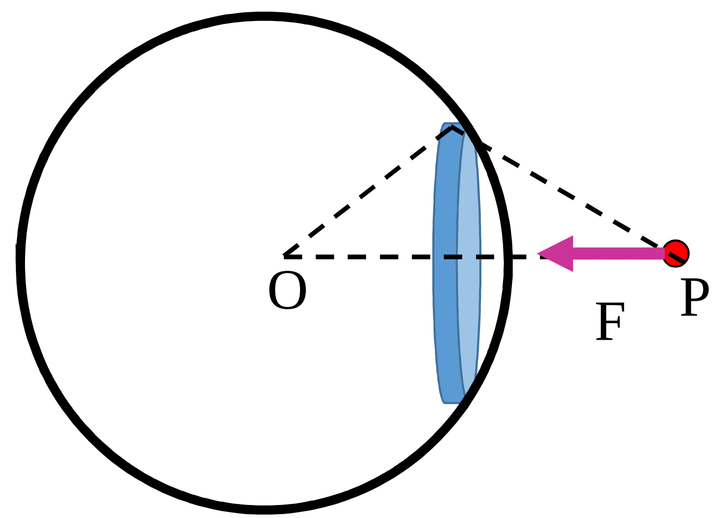
$$\Delta F = \sum \Delta F_Q \cos\phi$$

$$\Delta F = G\frac{m\Delta M}{s^۲}\cos\phi = G\frac{m۲\pi\rho R^۲\sin\theta\cos\phi}{s^۲}\Delta\theta$$

۳- جمع نیرو روی همه حلقه ها (جمع روی کل پوسته)



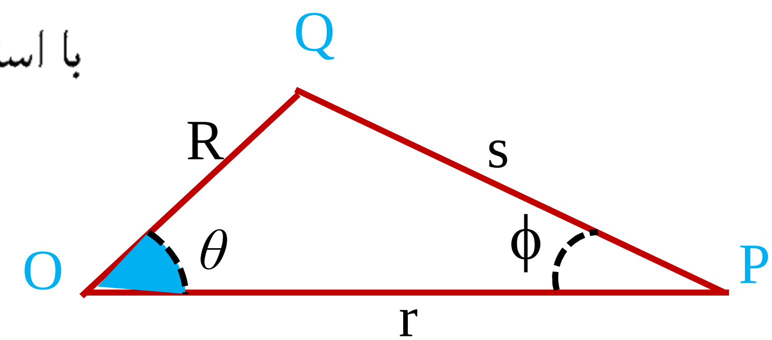
$$F = Gm ۲\pi\rho R^{۲} \int_{۰}^{\pi} \frac{\sin\theta\cos\phi d\theta}{s^{۲}}$$



٤- حل انتگرال با تغییر متغیر از ϕ به s :

$$F = Gm2\pi\rho R^2 \int_0^\pi \frac{\sin\theta\cos\phi d\theta}{s^2}$$

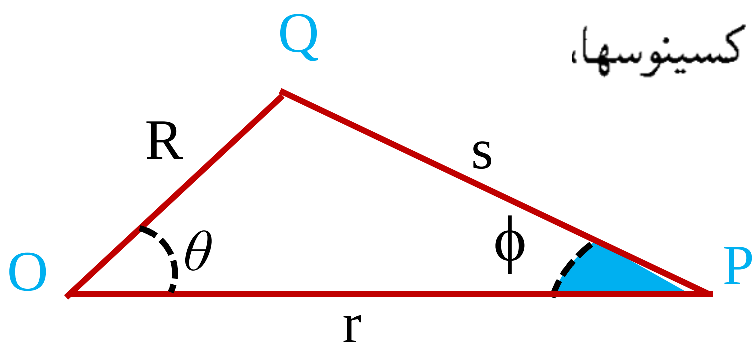
با استفاده از قانون کسینوسها،



$$r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta = s^2$$

دیفرانسیل گیری R و r هر دو ثابت‌اند

$$rR\sin\theta d\theta = sds$$

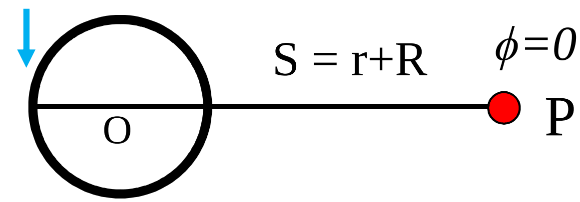


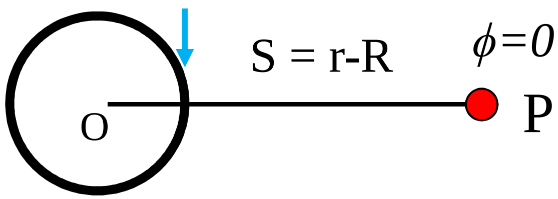
$$s^2 + r^2 - 2rs\cos\phi = R^2$$

$$\cos\phi = \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2rs}$$

با تغییر متغیر و جایگزین نمودن حدود انتگرال:

تغییر حدود انتگرال $S : r-R \rightarrow r+R$





$$\begin{aligned} F &= Gm2\pi\rho R^2 \int_{r-R}^{r+R} \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2Rr^2 s^2} ds \\ &= \frac{GmM}{4Rr^2} \int_{r-R}^{r+R} \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{s^2}\right) ds \\ &= \frac{GmM}{r^2} \end{aligned}$$

جرم پوسته $M = 4\pi\rho R^2$

نکات

بیان برداری $\vec{F} = -G\dfrac{Mm}{r^2}\hat{e}_r$

اندازه: $\dfrac{Mm}{r^2}$

راستا: $\mathbf{e}_r$ بردار یکهٔ شعاعی از مبدأ O

جهت: به سمت مرکز

یک پوسته کروی یکنواخت از ماده، ذرهٔ خارجی را چنان می‌رباید که گویی تمام جرم پوسته در مرکزش متمرکز است

نیروی گرانشی وارد بر ذره‌ای واقع در داخل پوستهٔ کروی یکنواخت صفر است

۳.۶ قوانین حرکت سیاره‌ای کپلر

I. قانونی بیضیها (۱۶۰۹)

مدار هر سیاره یک بیضی است که خورشید در یکی از کانونهای آن قرار دارد.

II. قانون مساحتهای مساوی (۱۶۰۹)

خط واصل بین خورشید و سیاره مساحتهای مساوی را در زمانهای مساوی جارو می‌کند.

III. قانون هماهنگها (۱۶۱۸)

مجذور زمان تناوب نجومی هر سیاره (زمانی که طول می‌کشد تا سیاره خورشید را، از دیدهٔ ناظر ساکن نسبت به ستارگان، به‌طور کامل دور بزند) با مکعب نیم قطر بزرگ مدار سیاره متناسب است.

استنتاج معادلات کپلر توسط اصول اساسی نیوتن

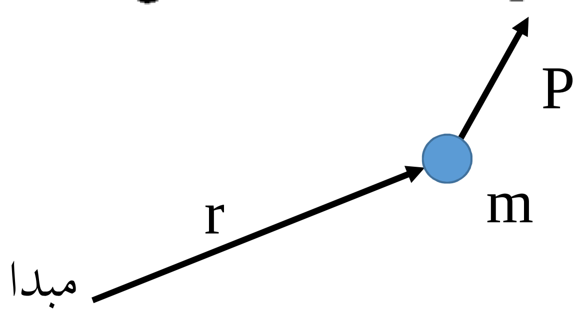
۴.۶ قانون دوم کپلر: مساحتهای مساوی

پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای

قانون دوم کپلر چیزی نیست مگر این گزاره که تکانهٔ زاویه‌ای هر سیاره حول خورشید کمیتی پایسته است.

تعریف تکانه زاویه ای

تکانهٔ زاویه‌ای ذره‌ای واقع در فاصلهٔ $\mathbf{r}$ از مبدأ معلومی، که با تکانهٔ خطی $\mathbf{p}$ حرکت می‌کند



$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

مشتق زمانی تکانه زاویه ای

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = m\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$$

$$\underbrace{\mathbf{r} \times \mathbf{F}}_{\mathbf{N}} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ گشتاور نیروی وارد بر ذره‌ای حول مبدأ دستگاه مختصات

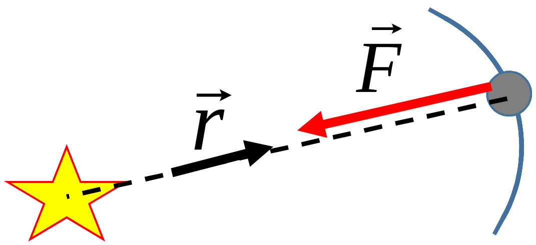
قانون پایستگی تکانه زاویه ای

اگر r و F با همدیگر موازی باشند در این صورت گشتاور نیرو صفر بوده و درنتیجه تکانه زاویه ای ثابت خواهد بود

$$\vec{r} \parallel \vec{F} \quad \rightarrow \quad N = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \rightarrow$$

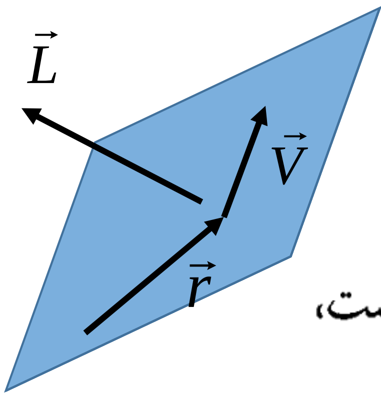
$$\vec{L} = constant$$

واضح است که این حالت در مورد ذره (یا سیاره)ای تحت تأثیر نیروی مرکزی **F** نیز صادق است



هنگامی که طبق پایستگی تکانه زاویه ای، تکانه زاویه ای ثابت است:

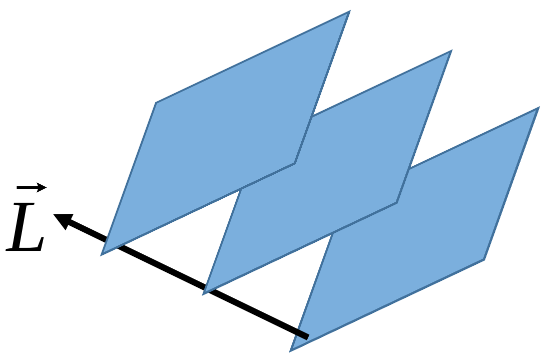
بردارهای **r** و **v** یک صفحهٔ «لحظه‌ای» را مشخص می‌کنند که در آن ذره حرکت می‌کند



$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{V} = constant$$

هم اندازه ثابت
و هم راستا و جهت ثابت

چون بردار تکانهٔ زاویه‌ای **L** بر این صفحه عمود و بزرگی و جهت آن ثابت است، سمتگیری این صفحه در فضا ثابت می‌ماند.



بنابراین، مسئلهٔ حرکت ذره در میدان مرکزی، در واقع مسئله‌ای دوبعدی است

تکانهٔ زاویه‌ای و سرعت سطحی ذرهٔ متحرک در میدان مرکزی

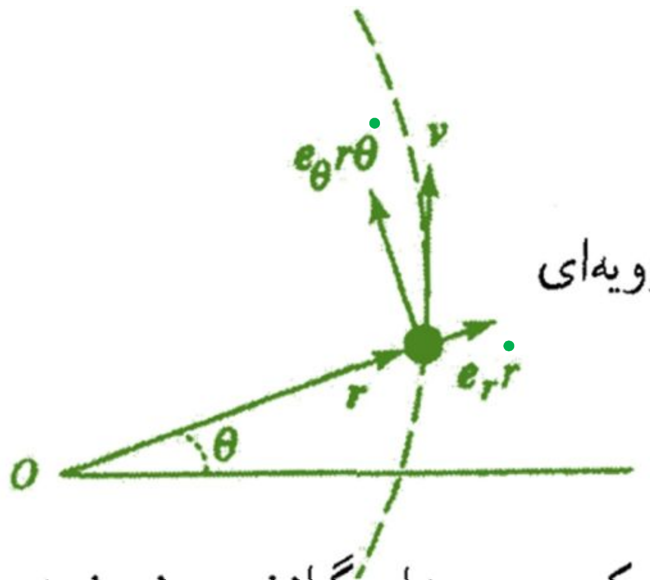
قانون دوم کپلر، یعنی ثابت‌بودن سرعت سطحی، $\dot{A}$ هر سیاره حول خورشید، فقط به ماهیت مرکزی نیروی گرانشی بستگی دارد و به چگونگی تغییر شدت نیرو با فاصلهٔ شعاعی از خورشید بستگی ندارد

می توان اثبات نمود عبارت بالا با عبارت زیر معادل است:

تکانهٔ زاویه‌ای هر ذرهٔ متحرک در میدان نیروی مرکزی پایسته است

محاسبه بزرگی تکانهٔ زاویه‌ای ذره‌ای متحرک در میدان مرکزی

سرعت ذره در دستگاه مختصات قطبی $\mathbf{v} = \mathbf{e}_r \dot{r} + \mathbf{e}_\theta r \dot{\theta}$



$\mathbf{e}_r$ بردار یکهٔ شعاعی و $\mathbf{e}_\theta$ بردار یکهٔ عرضی

بزرگی تکانهٔ زاویه‌ای $L = |\mathbf{r} \times m\mathbf{v}| = |r\mathbf{e}_r \times m(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta)|$

$|\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r| = ۰$ و $|\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta| = ۱$

برای هر ذرهٔ متحرک در میدان نیروی مرکزی، از جمله سیارهٔ متحرکی در میدان گرانشی خورشید:

$$L = mr^۲\dot{\theta} = \text{ثابت}$$

ثابت دیگر

انرژی مکانیکی

نیروی مرکزی نیروی پایستار

$$E = K + V(r) = constsnt$$

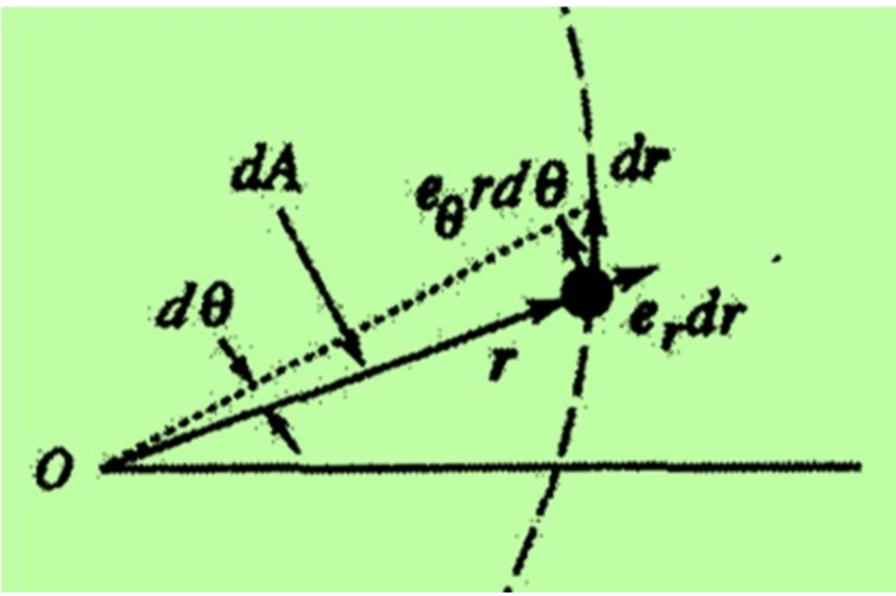
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r)$$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2) + V(r) = constsnt$$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{mr^2}) + V(r) = constsnt$$

محاسبه «سرعت سطحی» ذره $\dot{A}$

مساحت مثلث، dA، که بردار شعاعی $\mathbf{r}$ آن را در هنگامی جارو می‌کند که سیاره فاصلهٔ برداری $d\mathbf{r}$ را در مدت‌زمان dt در طول مسیرش نسبت به مبدأ میدان مرکزی می‌پیماید



$$dA = \frac{۱}{۲}|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| =$$

$$\frac{۱}{۲}|r\mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta)| =$$

$$dA = \frac{۱}{۲} r(r d\theta)$$

سرعت سطحی، یا آهنگی که با آن بردار شعاعی سطح را جارو می‌کند

$$dA = \frac{۱}{۲} r (r d\theta)$$

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A} = \frac{۱}{۲} r^{۲} \dot{\theta} = \frac{L}{۲m} = \text{ثابت}$$

سرعت سطحی، $\dot{A}$، ذرهٔ متحرک در میدان مرکزی با تکانهٔ زاویه‌ایش تناسب مستقیم دارد

$\dot{A}$ ثابت حرکت هم هست

دقیقاً همان‌طور که کپلر برای سیارات متحرک در میدان گرانشی مرکزی خورشید دریافت

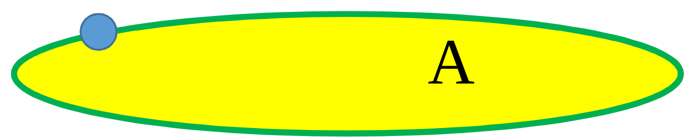
$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = constant$$

$$dA = \frac{L}{2m}dt \quad \rightarrow \quad \int dA = \int \frac{L}{2m}dt$$

$$A = \frac{L}{2m}T$$

مساحت کل

مدت زمان یک چرخش کامل



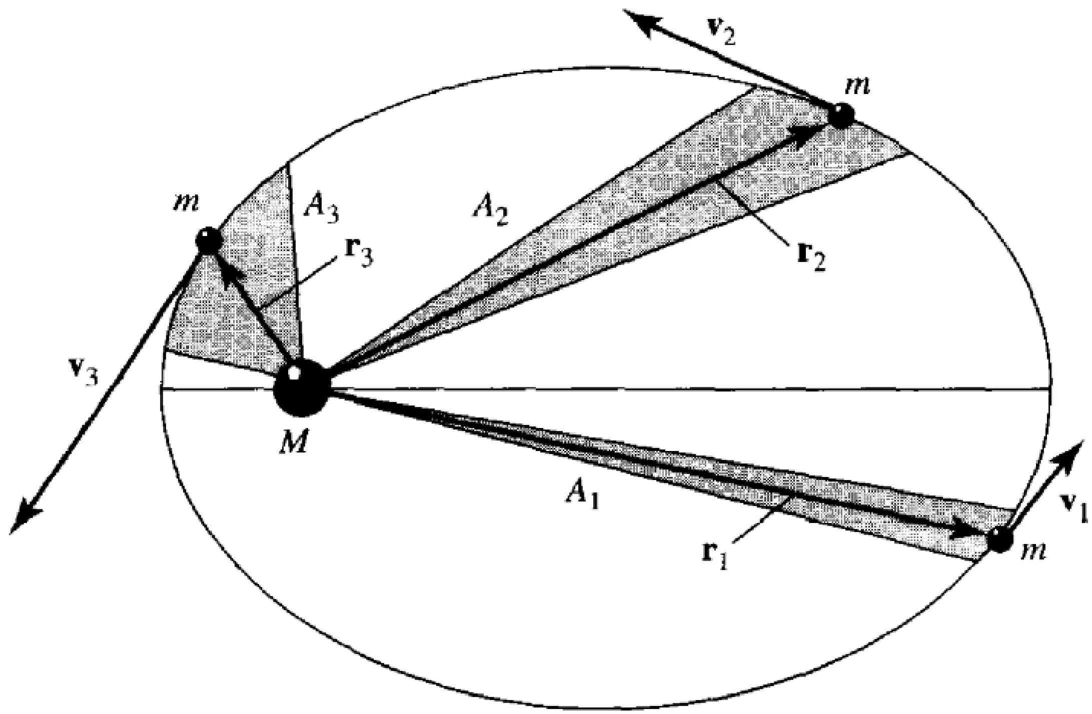


Figure 7.8 Kepler's second law, that is, the law of equal areas: $A_1 = A_2 = A_3$.

مثال ۱.۴.۶

ذره‌ای تحت تأثیر نیروی مرکزی ربایشی به شکل $f(r)$ قرار دارد که r فاصلهٔ بین ذره و مرکز نیروست. اگر تمام مدارهای دایره‌ای سرعتهای سطحی یکسان $\dot{A}$ داشته باشند، $f(r)$ را بیابید.