

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

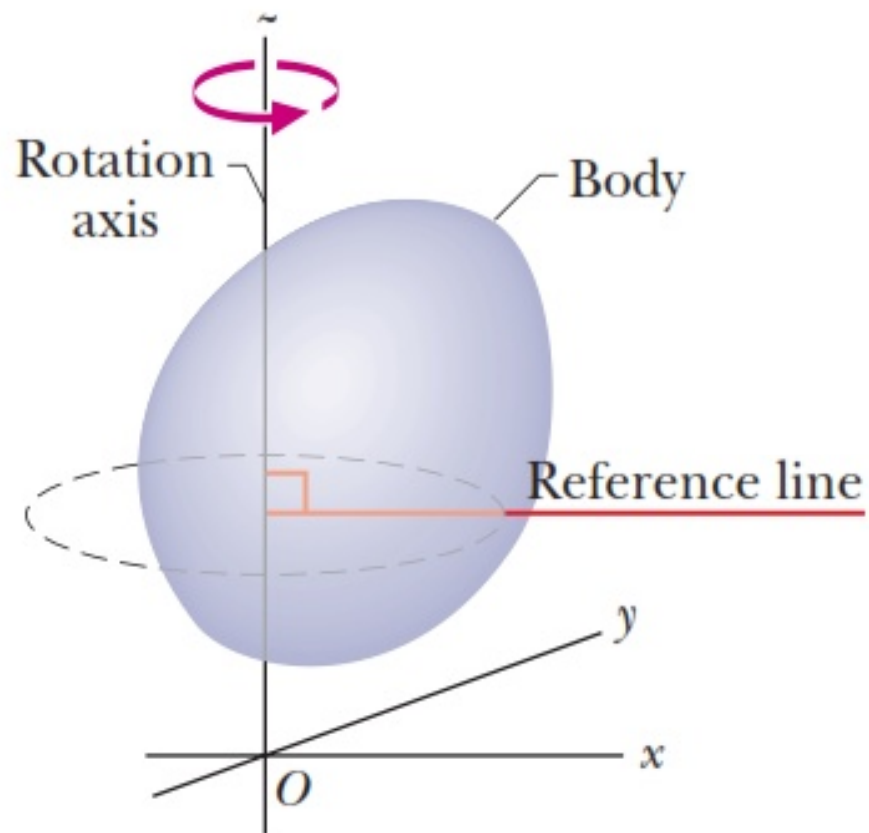
فصل دهم – بخش اول

چرخش

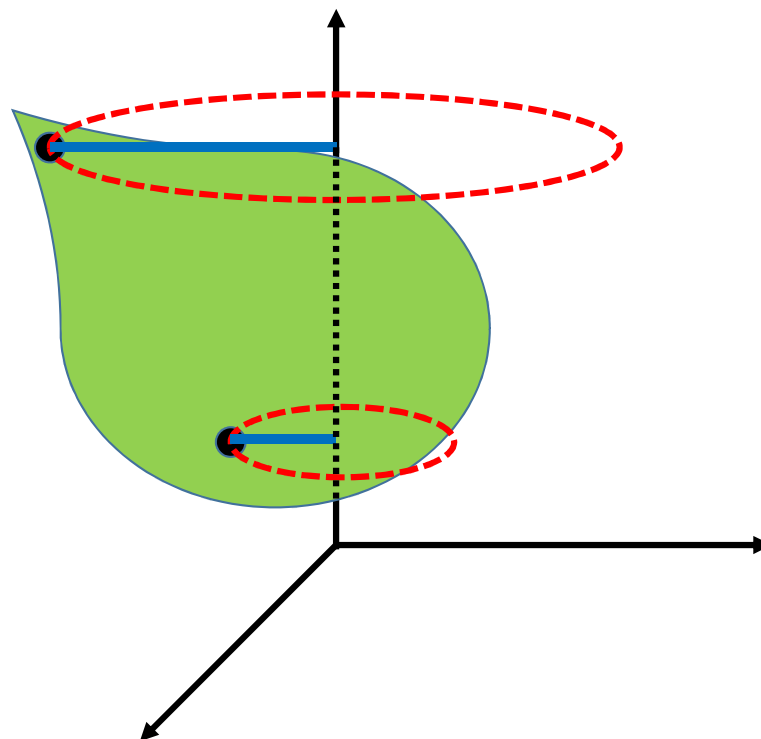
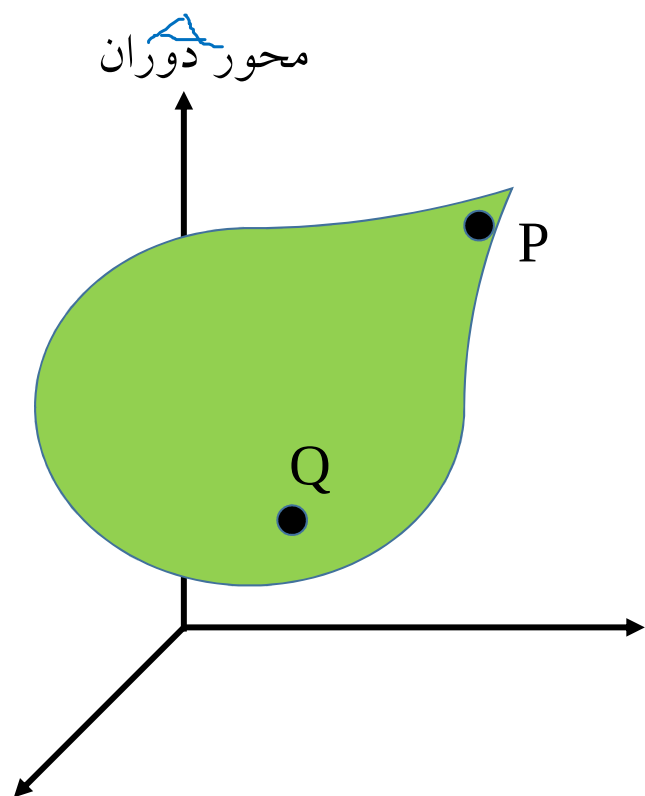
حرکت دایره ای:

دوران محض

غلتش محض

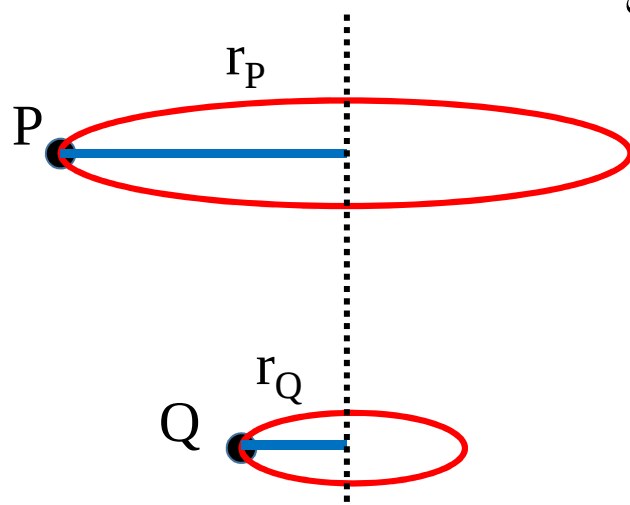


دوران محض: هر گاه همه نقاط جسم حول
یک محور دوران مشخص و ثابت، مسیر دایره
ای را طی می نمایند



نکات:

۱- برای هر نقطه شعاع دایره چرخش حول محور دوران ثابت است



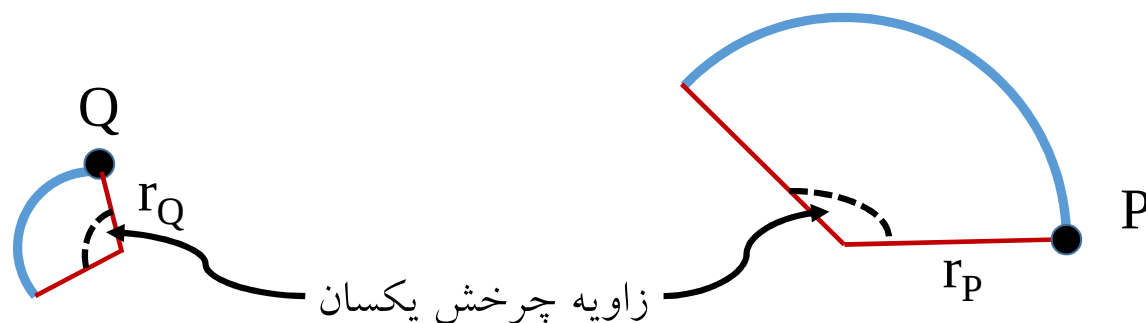
شعاع دایره چرخش؛ پاره خطی است که از هر نقطه به محور دوران عمود می گردد

۲- برای نقاط مختلف از جسم، شعاع چرخش متفاوت است

۳- در یک چرخش مسیری که هر نقطه از جسم طی می کند متفاوت است

۴- حرکت خطی برای نقاط مختلف جسم متفاوت است

۵- در چرخش جسم صلب حول محور دوران؛ زاویه چرخش برای شعاع متصل به همه نقاط یکسان است



۶- حرکت زاویه ای برای همه نقاط جسم صلب یکسان است

۷- بنابراین حرکت کلی یک جسم در حال دوران محض را می توان از دیدگاه حرکت زاویه ای بررسی

پارامترهای حرکت دورانی :

زاویه

جابه جایی زاویه ای

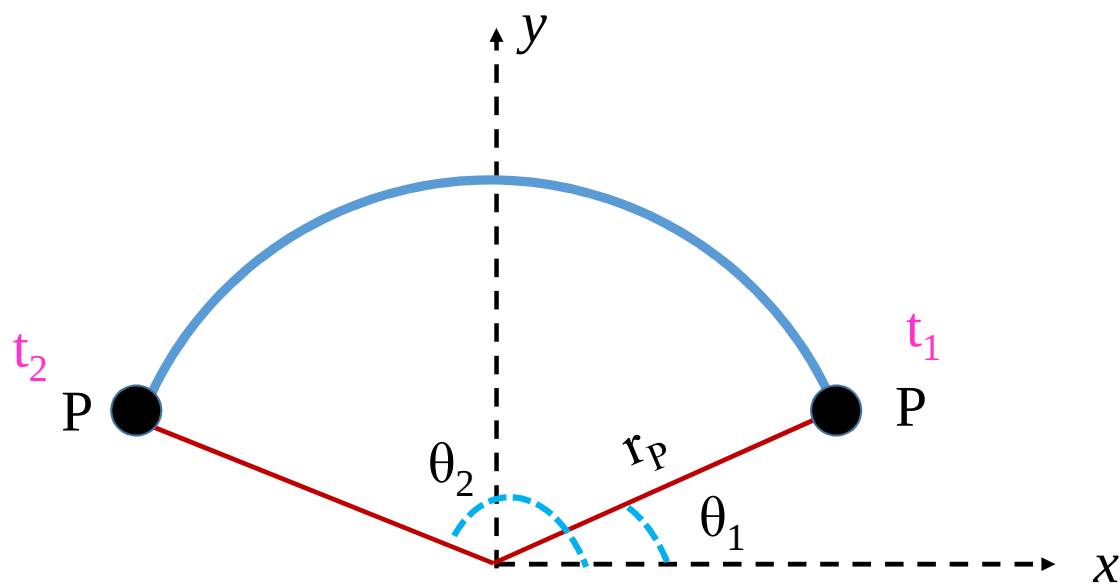
سرعت زاویه ای

شتاب زاویه ای

۱- زاویه:

زاویه ای که شعاع هر نقطه از جسم صلب با محور X ها می سازد (در صفحه عمود بر محور =

صفحه چرخش هر نقطه)



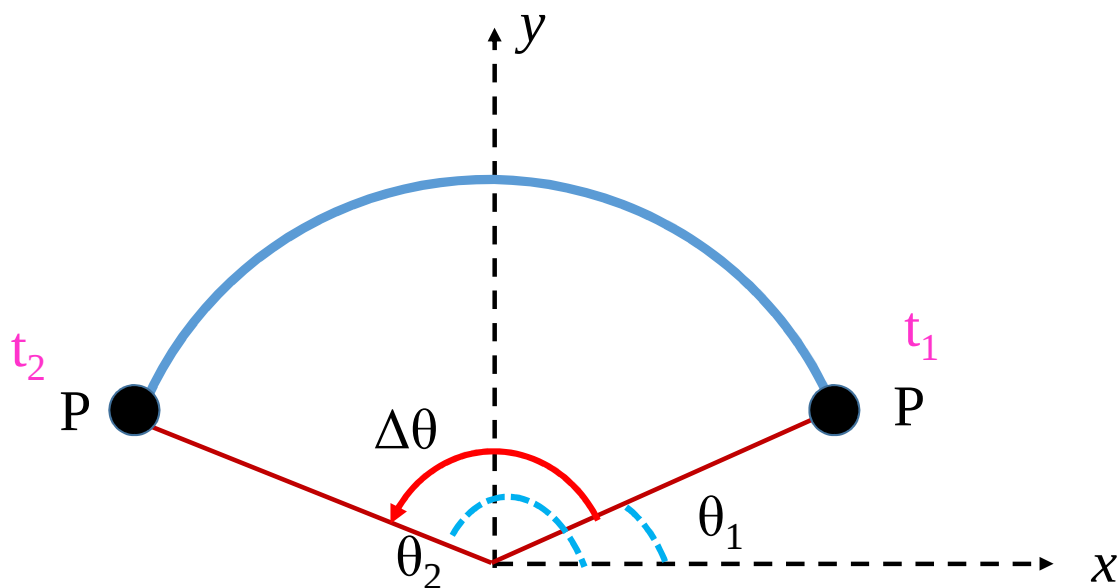
$$t_1 : \theta_1$$

$$t_2 : \theta_2$$

Rad

۲- جابه جایی زاویه:

تغییر زاویه جسم در یک بازه زمانی



$$t_1 : \theta_1$$

$$t_2 : \theta_2$$

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

جابه جایی زاویه ای برای نقاط مختلف جسم یکسان است

۳- سرعت زاویه:

آهنگ تغییر زاویه جسم

سرعت زاویه ای متوسط $\omega_{\text{avg}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

سرعت زاویه ای لحظه ای $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$

سرعت زاویه ای برای نقاط مختلف جسم یکسان است

سرعت خطی نقاط مختلف جسم با شعاع چرخش متفاوت، یکسان نیست

۳- شتاب زاویه:

آهنگ تغییر سرعت زاویه ای جسم

شتاب زاویه ای متوسط

$$\alpha_{\text{avg}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

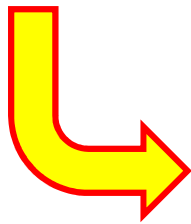
شتاب زاویه ای لحظه ای

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

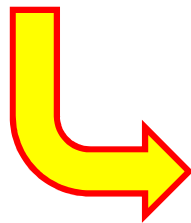
شتاب زاویه ای برای نقاط مختلف جسم یکسان است

شتاب خطی نقاط مختلف جسم با شعاع چرخش متفاوت، یکسان نیست

$$\theta = \theta(t)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$


$$\omega = \omega(t)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\alpha = \alpha(t)$$

مثال:

زاویه ای که چرخ لنگر یک ژنراتور در بازه زمانی t می پیماید توسط رابطه زیر داده می شود.
سرعت و شتاب زاویه ای را بدست آورید

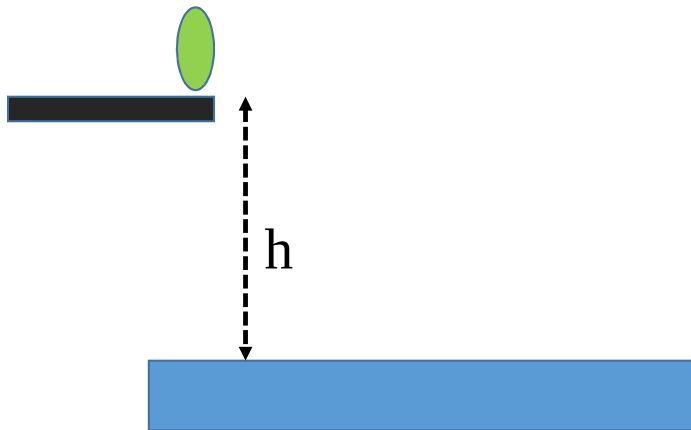
$$\phi(t) = at + bt^3 - ct^4$$

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = a + 3bt^2 - 4ct^3$$

$$\alpha = \frac{d^2\phi}{dt^2} = 6bt - 12ct^2$$

مثال:

یک قهرمان شیرجه در حین فرود از یک تخته شیرجه که 10 m بالاتر از سطح آب است 2.5 دور می زند. با فرض آنکه سرعت اولیه او در امتداد قائم صفر باشد، سرعت زاویه ای متوسط در شیرجه چقدر است



$$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{t} = \frac{\Delta\theta}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

Rad/s
REV/s
REV/min = RPM

دوران با شتاب زاویه ای ثابت

ثابت α

سرعت زاویه ای و زاویه طی شده را می توان از روابط شتاب ثابت بدست آورد

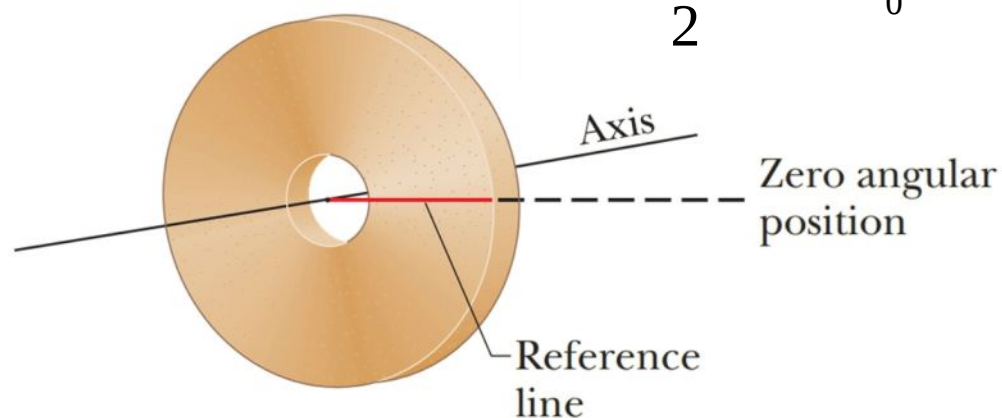
Linear Equation	Missing Variable		Angular Equation
$v = v_0 + at$	$x - x_0$	$\theta - \theta_0$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v	ω	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t	t	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a	α	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$
$x - x_0 = vt + \frac{1}{2}at^2$	v_0	ω_0	$\theta - \theta_0 = \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

مثال:

سنگ سمباده ای در لحظه $t = 0$ با شتاب زاویه ای ثابت $\alpha = 3.2 \text{ rad/s}^2$ از حالت سکون شروع به حرکت می نماید. در $t = 0$ خط مرجع افقی است. جابه جایی زاویه و سرعت زاویه ای را در $t = 3\text{s}$ بدست آورید

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \rightarrow \omega = 0 + 3 \times 3.2 \text{ rad/s}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_0 t \rightarrow \theta = \frac{1}{2} \times 3.2 \times 3^2 \text{ rad}$$

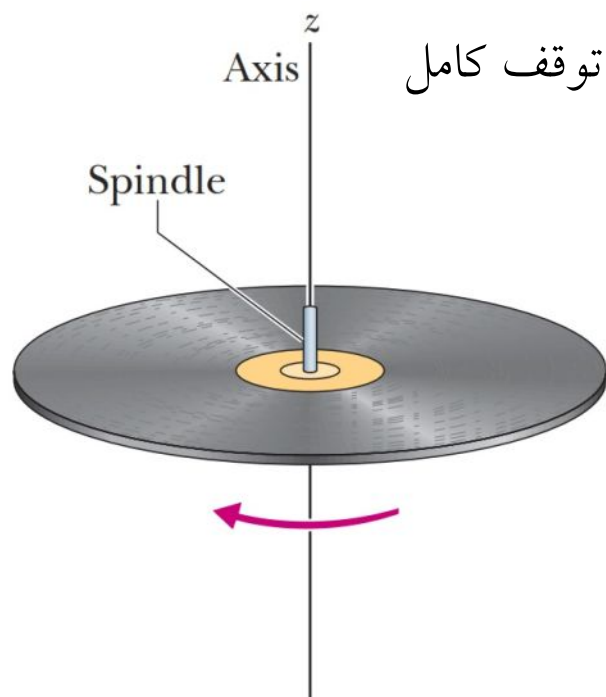


مثال:

صفحه گرامافونی که با سرعت 78 rpm می چرخد. پس از خاموش شدن موتور، کند می شود و سرانجام بعد از 32s متوقف می گردد. مطلوبست:

الف) شتاب زاویه ای صفحه

ب) تعداد دورهایی که صفحه می چرخد از لحظه خاموش شدن موتور تا توقف کامل



$$\omega = \omega_0 + \alpha t \rightarrow 0 = \frac{78}{60} + \alpha \times 32$$

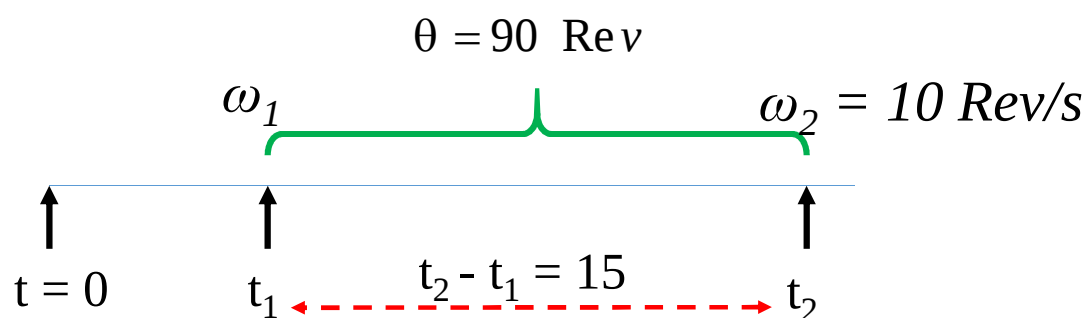
$$\rightarrow \alpha = -\frac{78}{32 \times 60} \text{ Rev/s}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_0 t$$

$$\rightarrow \theta = \frac{1}{2} \times -\frac{78}{32 \times 60} \times 32^2 + \frac{78}{60} \times 32 \text{ rad}$$

مثال:

چرخى در طى ۱۵ ثانيه ۹۰ دور مى زند و سرعت زاويه اى آن در پايان اين مدت به ۱۰ دور بر ثانيه مى رسد. مطلوبست:



الف) شتاب زاويه اى حرکت

ب) زمان بين آغاز حرکت تا بازه ۱۵ ثانيه اى

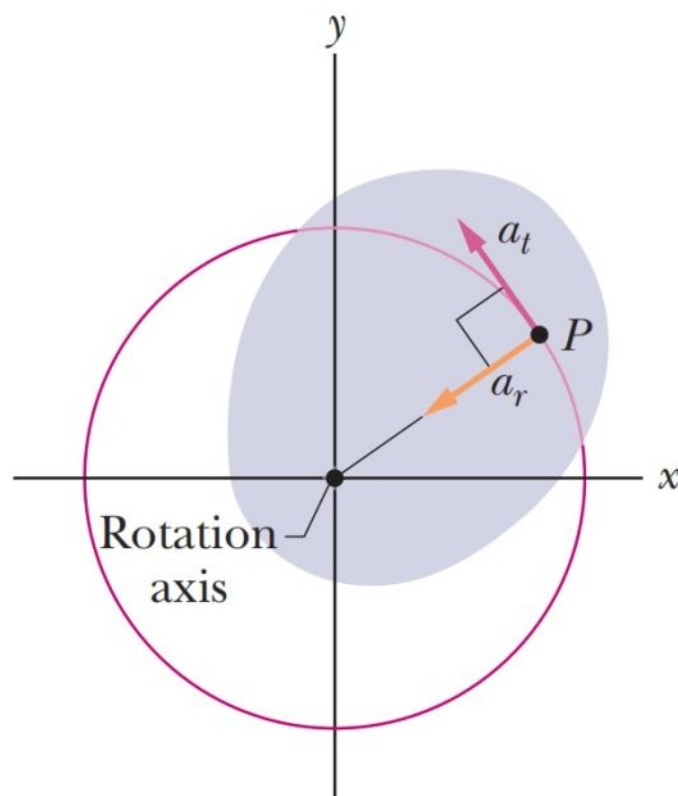
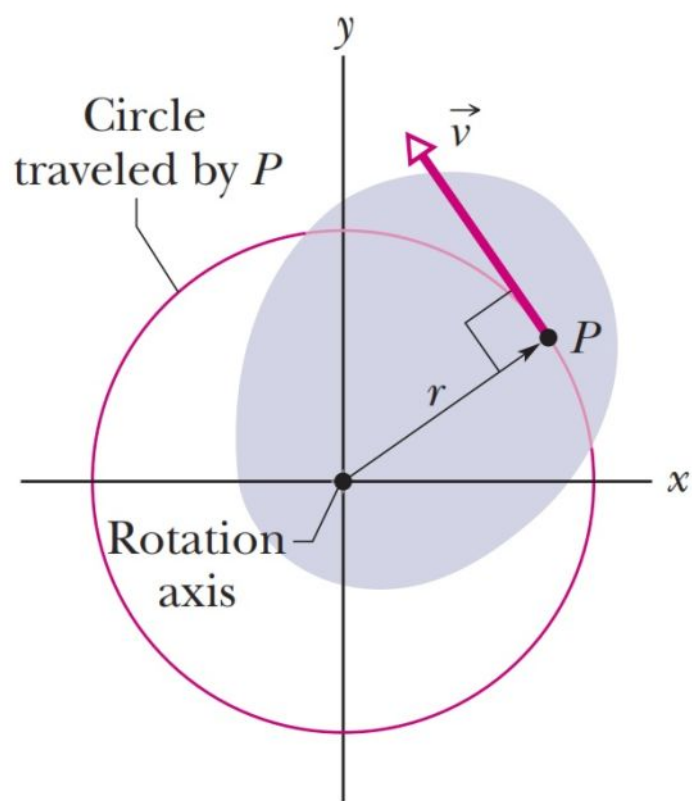
$$\theta = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t \rightarrow 90 = \frac{1}{2}(\omega_1 + 10)15 \rightarrow \omega_1 = 2 \text{ Rev/s}$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \alpha t \rightarrow 10 = 2 + 15\alpha \rightarrow \alpha = \frac{8}{15} \text{ Rev/s}^2$$

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha t \rightarrow 2 = 0 + \frac{8}{15}t \rightarrow t = \frac{30}{8} \text{ s}$$

روابط میان متغیرهای خطی و زاویه ای حرکت دورانی

r = شعاع چرخش - V = سرعت خطی مماس بر مسیر حرکت - a_t = شتاب مماسی - a_r = شتاب شعاعی



پارامترهای حرکت زاویه ای

θ

ω

α

برای کل جسم ثابت هستند

پارامترهای حرکت خطی

s

v

a_t

برای نقاط در شعاع های مختلف
نسبت به محور متفاوت هستند

$$S = r\theta$$

$$\frac{dS}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$

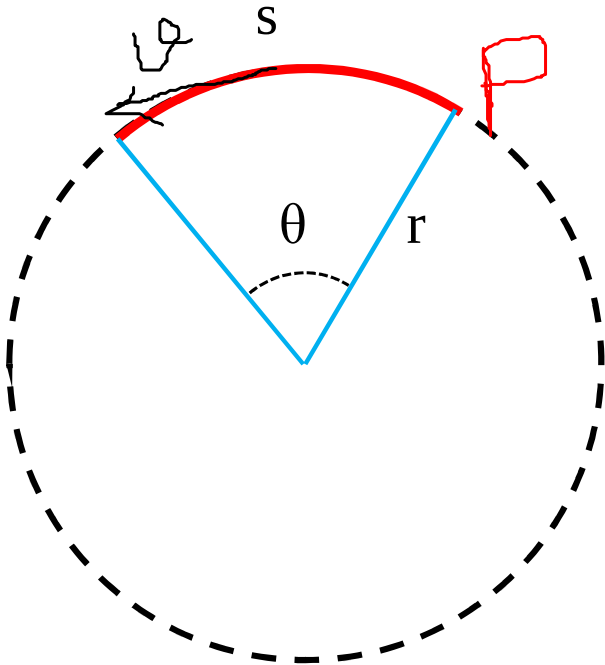


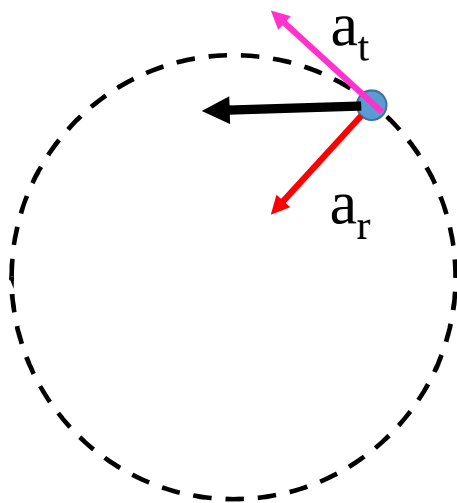
$$v = r\omega$$

$$\frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$$



$$a_t = r\alpha$$





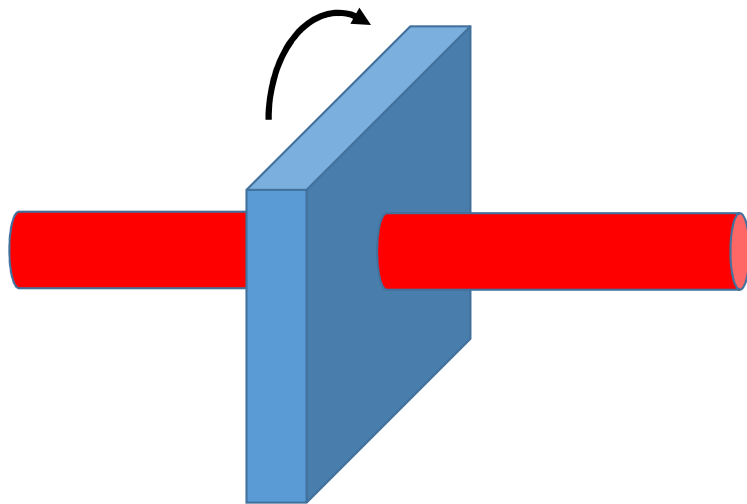
$$a_t = r\alpha$$

$$a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$$

مثال:

یک میله رزوه شده به قطر 1.2 cm و با 12 پیچ در هر سانتی متر به طور افقی قرار دارد. یک تسمه حدیده شده که رزوه‌های آن با پیچ جور است به آن پیچانده می شود. تسمه با سرعت دقیقه/دور 200 می چرخد. چقدر طول می کشد تا تسمه به اندازه 5 cm در امتداد پیچ جابه جا شود



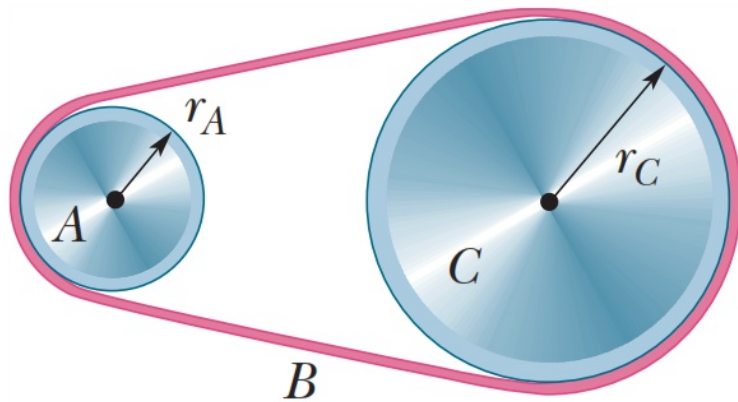
$$\omega = 200 \frac{\text{Rev}}{\text{min}} = \frac{200}{60} \frac{\text{Rev}}{\text{s}} = 3.3 \frac{\text{Rev}}{\text{s}}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ s} \equiv 3.3 \text{ Rev} \equiv \frac{3.3}{12} \text{ cm} \\ t \equiv \equiv 5 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{3.3}{12}} = \frac{t}{5} \quad \rightarrow \quad t = \frac{5 \times 12}{3.3}$$

مثال:

چرخ A به شعاع $r_A = 10 \text{ cm}$ به وسیله تسمه B به چرخ C به شعاع $r_C = 25 \text{ cm}$ مرتبط شده است. سرعت زاویه ای چرخ A با آهنگ ثابت 1.5 Rev/s^2 افزایش می یابد. زمان لازم برای اینکه چرخ C به سرعت دورانی 1000 Rev/min برسد چقدر است.



بدلیل آنکه محیط دو چرخ توسط تسمه به همدیگر ارتباط دارد بنابراین حرکت خطی محیط دو چرخ یکسان است

$$\begin{cases} v_A = v_C \Rightarrow \omega_A r_A = \omega_C r_C \\ a_A = a_C \Rightarrow \alpha_A r_A = \alpha_C r_C \end{cases}$$

$$\omega_C = 1000 \frac{\text{Rev}}{\text{min}} = \frac{1000}{60} \frac{\text{Rev}}{\text{s}}$$

$$\alpha_C = \alpha_A \frac{r_A}{r_C} = 1.5 \frac{10}{25} = 0.6 \frac{\text{Rev}}{\text{s}}$$

$$\omega_C = \omega_{C0} + \alpha_C t \quad \rightarrow \quad \frac{1000}{60} = 0 + 0.6t \quad \rightarrow \quad t = \frac{1000}{60 \times 0.6} \text{ s}$$