

بِسْمِ
الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

فصل نهم – قسمت دوم

حرکت مرکز جرم

حرکت دستگاه ذرات

بررسی سینماتیکی و دینامیکی حرکت مرکز جرم $M = \sum m_i$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i \quad \rightarrow \quad M \vec{r}_{cm} = \sum m_i \vec{r}_i$$

$$M \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad \rightarrow \quad M \vec{v}_{cm} = \sum m_i \vec{v}_i$$

$$M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \quad \rightarrow \quad M \vec{a}_{cm} = \sum m_i \vec{a}_i$$

$$M\vec{r}_{cm} = \sum m_i \vec{r}_i \quad \rightarrow \quad \vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i$$

$$M\vec{v}_{cm} = \sum m_i \vec{v}_i \quad \rightarrow \quad \vec{v}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{v}_i$$

$$M\vec{a}_{cm} = \sum m_i \vec{a}_i \quad \rightarrow \quad \vec{a}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{a}_i$$

نکات

۱- در روابط بالا پارامترهای طرف دوم معادلات (r_i ، v_i و a_i) مربوط به ذرات واقعی در سیستم ذرات است

۲- در روابط بالا پارامترهای طرف اول معادلات (r_{cm} ، v_{cm} و a_{cm}) مربوط به نقطه مرکز جرم بوده که حاصل از محاسبه بوده و می تواند درون یا بیرون از جسم باشد

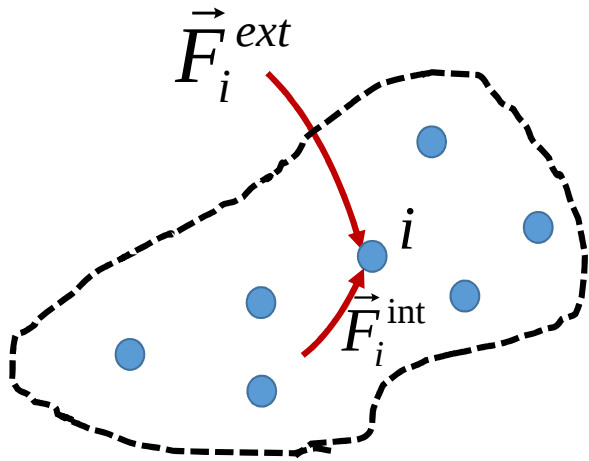
۳- r_{cm} ، v_{cm} و a_{cm} معدل مکان، سرعت و شتاب ذرات می باشد

۴- حرکت مرکز جرم معدلی از حرکت تمامی ذرات سیستم است

۵- ارتباط شتاب مرکز جرم با برآیند نیروها

$$M\vec{a}_{cm} = \sum m_i \vec{a}_i \quad \rightarrow \quad M\vec{a}_{cm} = \sum \vec{F}_i \quad -۵$$

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}$$



$$\sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N$$

$$\sum \vec{F}_i = \underbrace{\sum \vec{F}_i^{ext}}_{\text{برآیند نیروهای خارجی}} + \underbrace{\sum \vec{F}_i^{int}}_{\text{برآیند نیروهای داخلی}}$$

برآیند نیروهای خارجی

برآیند نیروهای داخلی

$$\sum \vec{F}_i^{\text{int}} \stackrel{?}{=} 0$$

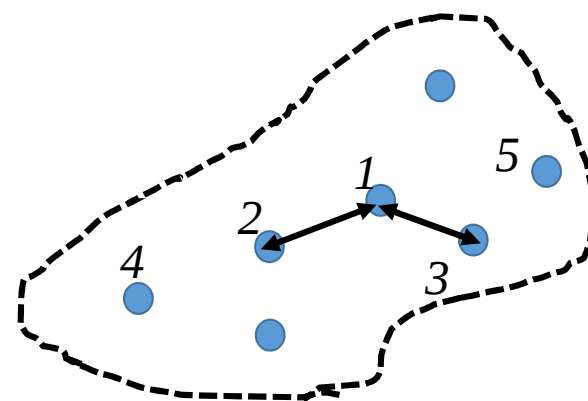
۶- برآیند نیروهای داخلی صفر است

$$\vec{F}_1^{\text{int}} = \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq 1}}^N \vec{F}_{j \rightarrow 1} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{3 \rightarrow 1} + \dots$$

$$\vec{F}_2^{\text{int}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^N \vec{F}_{j \rightarrow 2} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{3 \rightarrow 2} + \dots$$

$$\vec{F}_3^{\text{int}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^N \vec{F}_{j \rightarrow 3} = \vec{F}_{1 \rightarrow 3} + \vec{F}_{2 \rightarrow 3} + \dots$$

$$\sum \vec{F}_i^{\text{int}} = \vec{F}_1^{\text{int}} + \vec{F}_2^{\text{int}} + \vec{F}_3^{\text{int}} + \dots = 0$$



$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

۷- شتاب مرکز جرم فقط تابعی از برآیند نیروهای خارجی است بدون وابستگی به نیروهای داخلی

$$M\vec{a}_{cm} = \sum \vec{F}^{ext}$$

۸- مشابهت با قانون دوم نیوتن برای سیستم ذرات:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}$$

برای جرم واقعی به جرم m

$$M\vec{a}_{cm} = \sum \vec{F}^{ext}$$

برای نقطه مرکز جرم محاسبه شده

می توان گفت که : «حرکت انتقالی یک سیستم از ذرات را با توجه به قوانین نیوتن اینگونه می توان تحلیل نمود که کل جرم سیستم ذرات در مرکز جرم آن متمرکز شده و کل نیروی خارجی به آن نقطه اعمال می شود

۹- اگر برآیند نیروهای خارجی وارد بر سیستم ذرات صفر باشد آنگاه مرکز جرم این سیستم تمایل به حفظ وضعیت حرکتی خود دارد

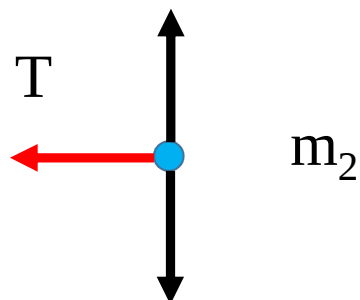
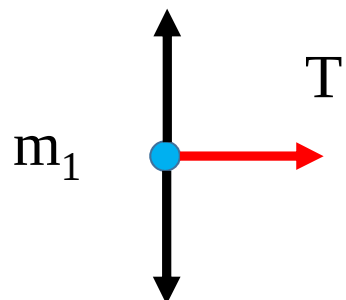
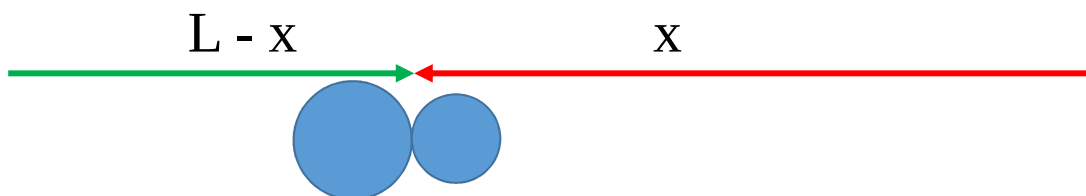
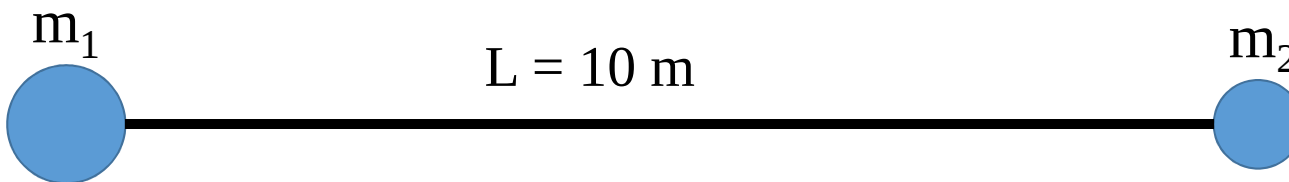
$$\vec{F}^{ext} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{a}_{cm} = 0$$

- مرکز جرم اگر ساکن بوده ساکن می ماند
- مرکز جرم اگر حرکت داشته همان حرکت خود را ادامه می دهد با همان سرعت و راستا و جهت

۱۰- اگر در ابتدا مرکز جرم ساکن باشد و برآیند نیروهای خارجی وارد بر سیستم ذرات در راستایی صفر باشد آنگاه در آن راستا مرکز جرم بدون تغییر می ماند (هرچند ذرات سیستم حرکت نمایند)

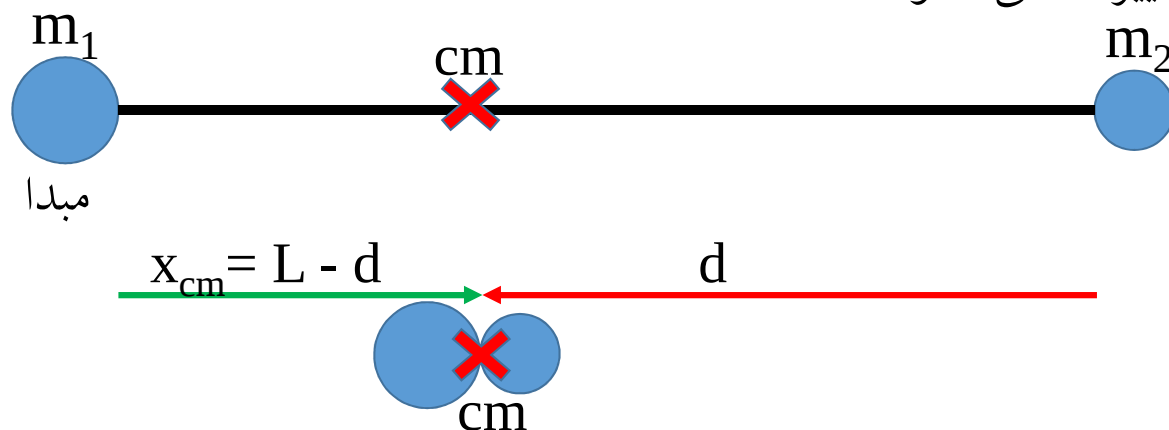
$$F_x = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta x_{cm} = 0 \quad \rightarrow \quad x_{cm}^1 = x_{cm}^2$$

۱۲۰ دو اسکیت‌باز، یکی به جرم 65kg و دیگری به جرم 40kg در حالی که روی میدان یخی اسکیت‌سواری ایستاده‌اند، دو سر تیری به طول 10m و جرم ناچیز را گرفته‌اند. با شروع از دو انتهای تیر، اسکیت‌بازها خودشان را در راستای تیر به جلو می‌کشند تا به هم برسند. اسکیت‌باز 40 کیلوگرمی چه مسافتی را می‌پیماید؟



سیستم: دو اسکیت باز
نیروهای وارد بر اجزای سیستم:
نیروهای خارجی
نیروی های داخلی

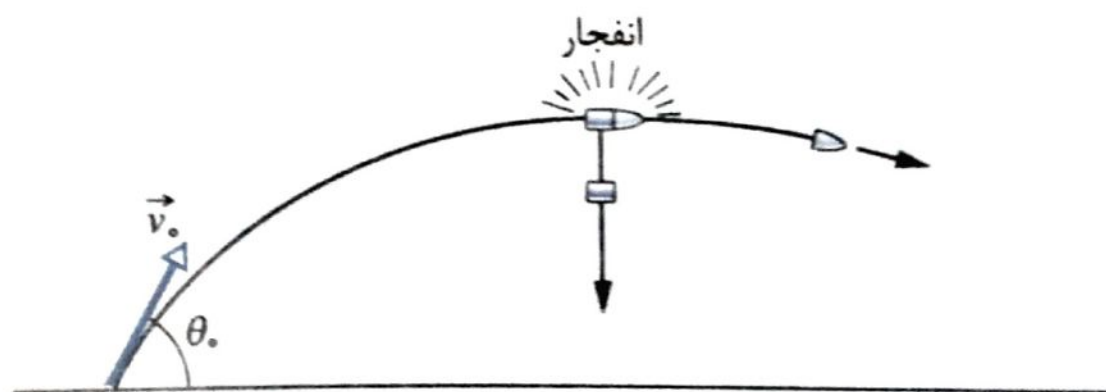
برآیند نیروهای خارجی در راستای افق صفر است پس با توجه به سکون اولیه مرکز جرم، مرکز جرم با حرکت اسکیت بازها (ذرات سیستم) تغییر مکانی نخواهد داشت

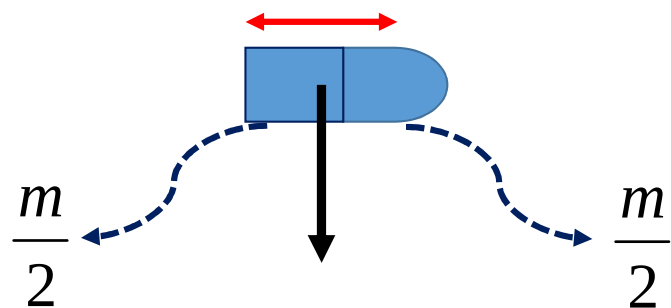


$$x_{cm}^{(1)} = x_{cm}^{(2)}$$

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \rightarrow x_{cm} = \frac{65 \times 0 + 40 \times 10}{65 + 40}$$

۱۳۰۰ گلوله‌ای با سرعت اولیه‌ی $\vec{v}_0$ برابر 20 m/s تحت زاویه‌ی $\theta_0 = 60^\circ$ نسبت به افق، شلیک شده است. در بالای مسیر، گلوله منفجر و به دو تکه‌ی هم جرم تقسیم می‌شود (شکل ۹-۴۲). یک تکه، که تندی آن درست پس از انفجار صفر است، به‌طور قائم سقوط می‌کند. با فرض آنکه زمین مسطح باشد و بتوان از نیروی پس‌کشی [مقاومت] هوا چشم‌پوشی کرد، تکه‌ی دیگر در چه فاصله‌ای از تفنگ بر زمین فرود می‌آید؟





۱- سیستم ذرات: دو قطعه ای که از هم جدا می شوند

۲- نیروهای وارد بر سیستم ذرات:

در راستای افق: نیروی انفجار $\leftarrow$ نیروی داخلی

در راستای عمودی: نیروی وزن



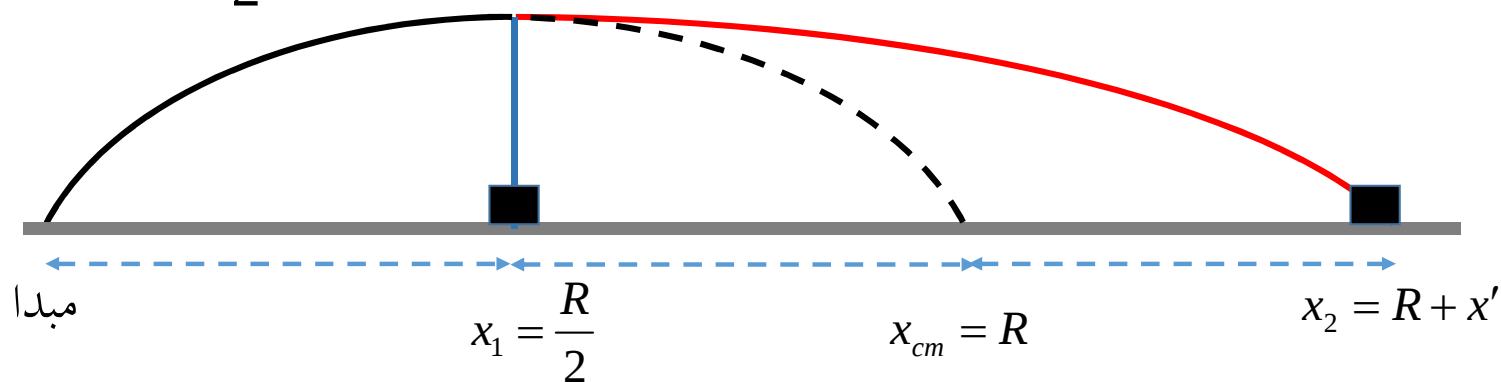
چون نیرویی در راستای افق به مرکز جرم وارد نمی شود لذا مرکز جرم همان حرکتی که پیش از جدایی داشته را ادامه خواهد داد

$$x_{cm}^i = x_{cm}^f$$

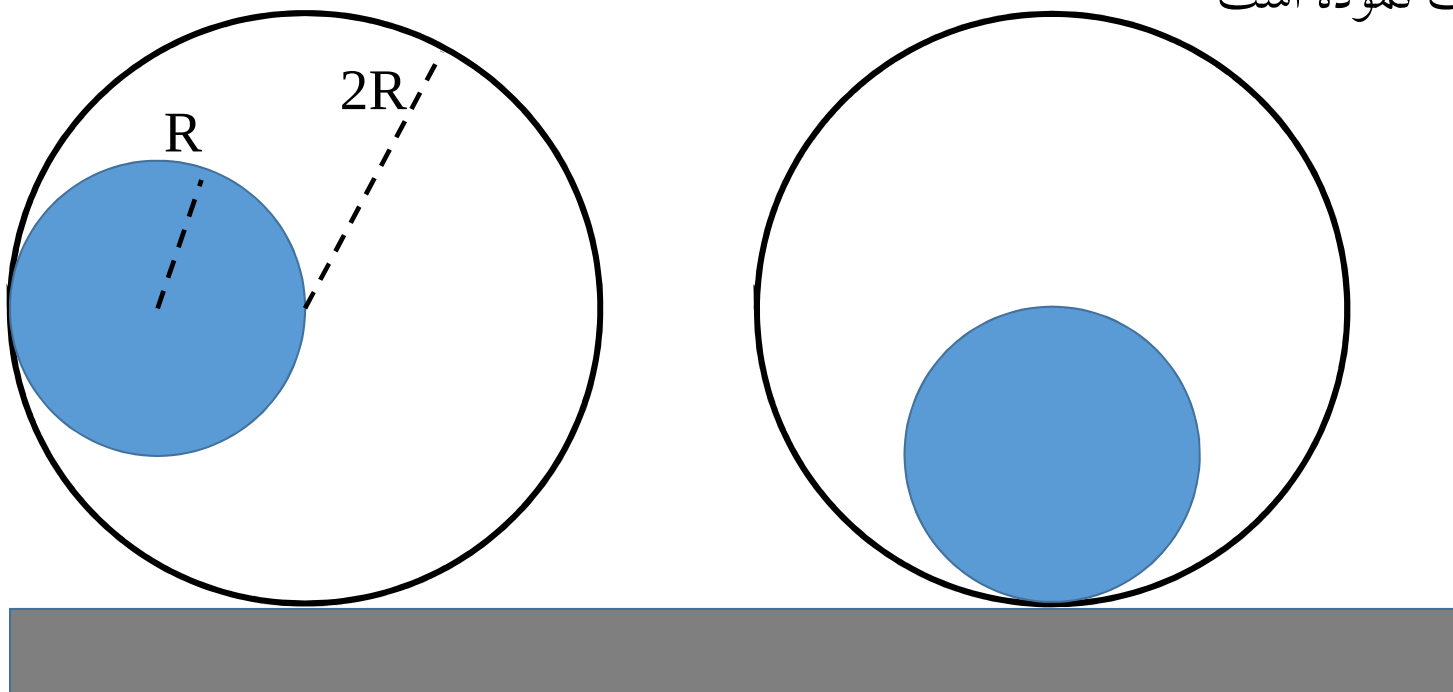
$$x_{cm}^f = \frac{m_1 \times x_1 + m_2 \times x_2}{m_1 + m_2}$$

$$R = \frac{1}{m} \left(\frac{m}{2} \times \frac{R}{2} + \frac{m}{2} \times (R + x) \right)$$

$$\rightarrow x = \frac{R}{2}$$

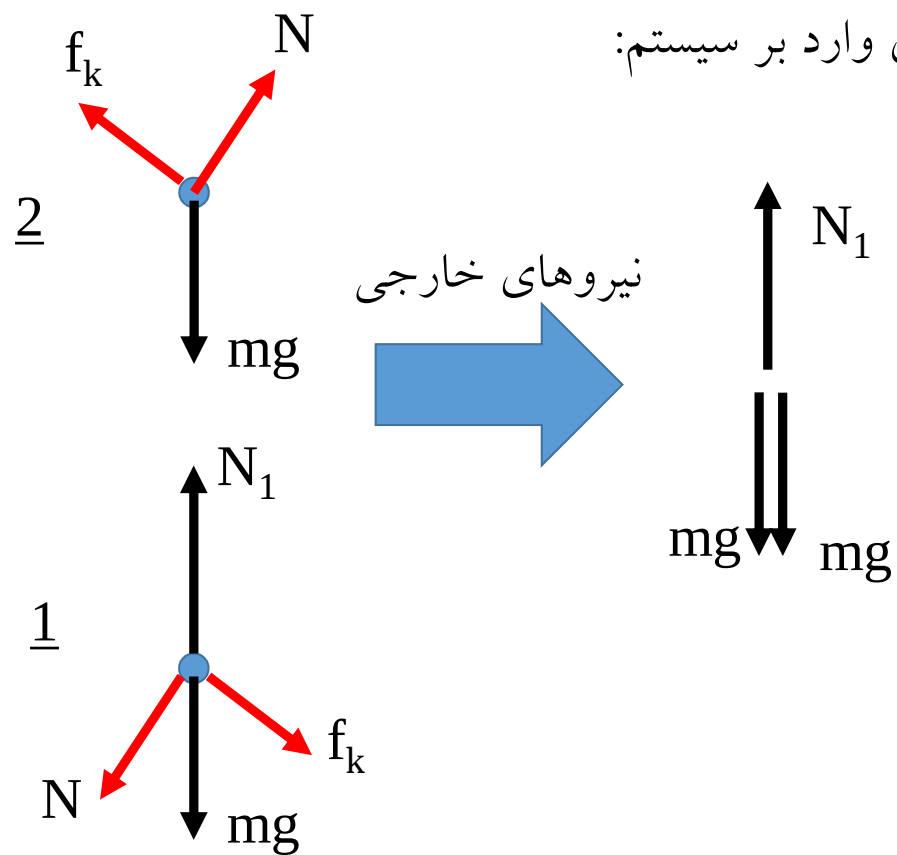
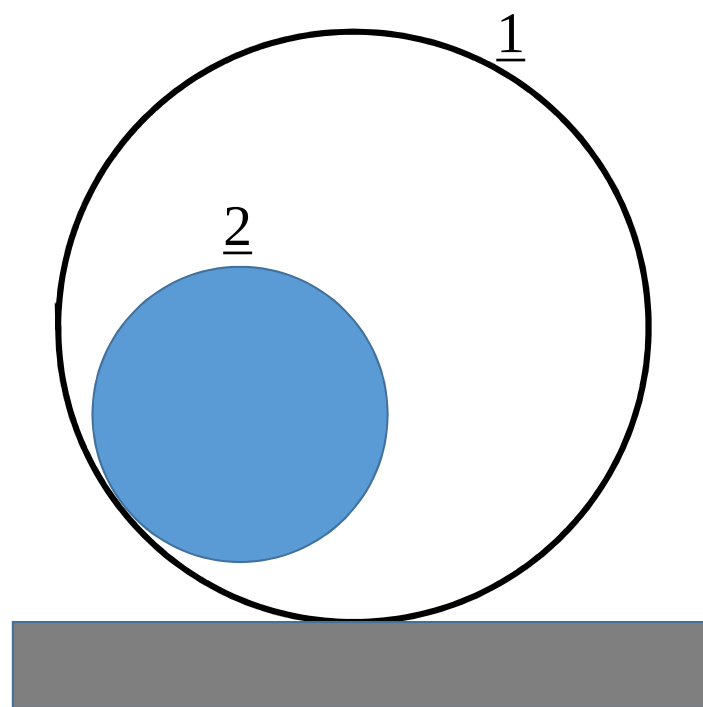


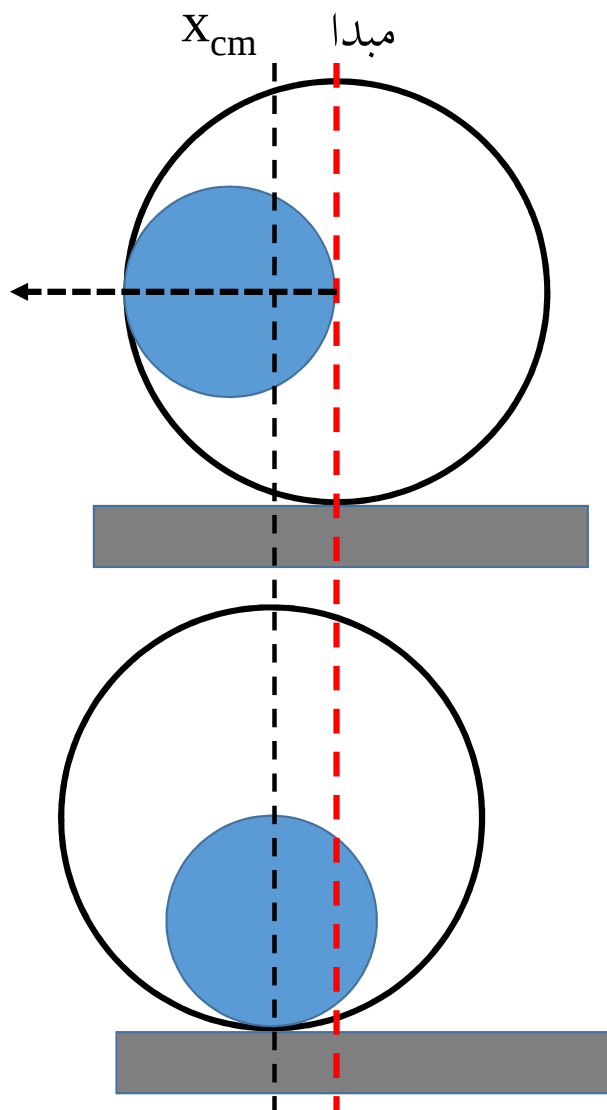
مثال: گلوله ای به جرم m و شعاع R در داخل یک کره توخالی به شعاع $2R$ و جرم m قرار دارد. این مجموعه روی سطح بدون اصطکاک مطابق شکل به حال سکون قرار دارد. گلوله داخلی رها می شود و در داخل کره توخالی می غلتد و سرانجام در پایین ترین قسمت کره متوقف می گردد. در طی این فرآیند کره توخالی چقدر حرکت نموده است



سیستم: کره ۱ و ۲

نیروهای وارد بر سیستم:





$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad x_{cm}^1 = rest \quad \rightarrow \quad x_{cm}^1 = x_{cm}^2$$

$$m_1 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad m_2 \begin{vmatrix} R \\ 0 \end{vmatrix}$$

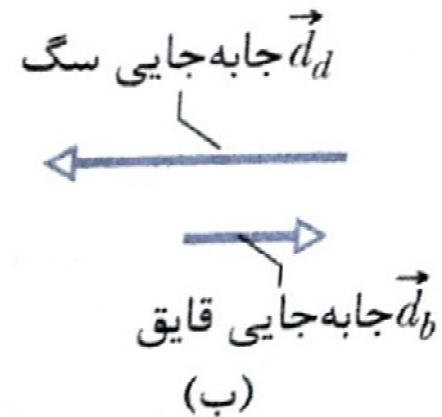
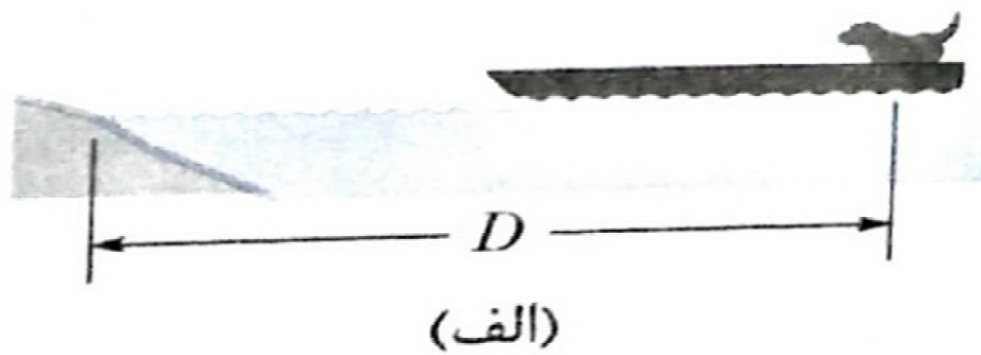
$$x_{cm}^1 = \frac{m \times 0 + m \times R}{2m} = \frac{1}{2} R$$

$$\rightarrow x = \frac{R}{2}$$

$$m_1 \begin{vmatrix} x \\ 0 \end{vmatrix}, \quad m_2 \begin{vmatrix} x \\ -R \end{vmatrix}$$

$$x_{cm}^2 = \frac{m \times x + m \times x}{2m} = x$$

۱۷۰۰۰ GO در شکل ۹-۴۵ الف، سگی به جرم 4.5 kg روی قایقی به جرم 18 kg در فاصله $D = 6.1 \text{ m}$ از ساحل ایستاده است. سگ 2.4 m روی قایق به سمت ساحل راه می‌رود و سپس می‌ایستد. با فرض آنکه هیچ اصطکاکی بین قایق و آب وجود نداشته باشد، سگ در آن لحظه در چه فاصله‌ای از ساحل قرار دارد؟ (راهنمایی: شکل ۹-۴۵ ب را ببینید.)



سیستم: سگ + قایق

نیروهای وارد بر سیستم:

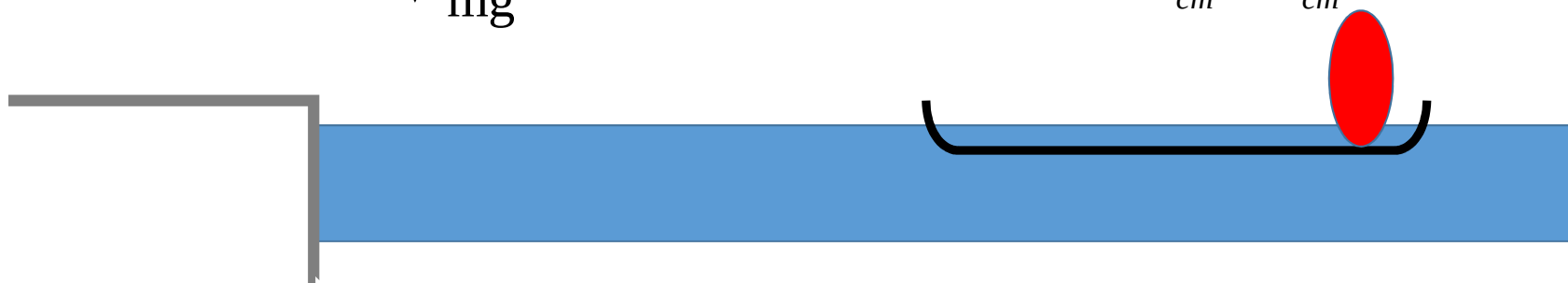
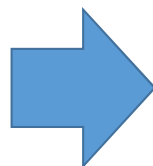
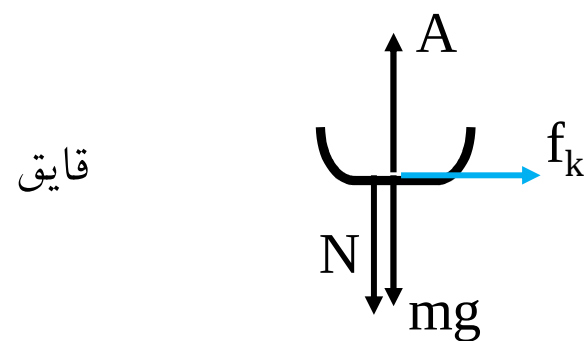
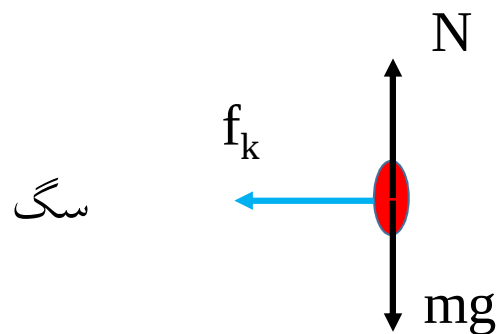
داخلی: عمودی سطح و اصطکاک

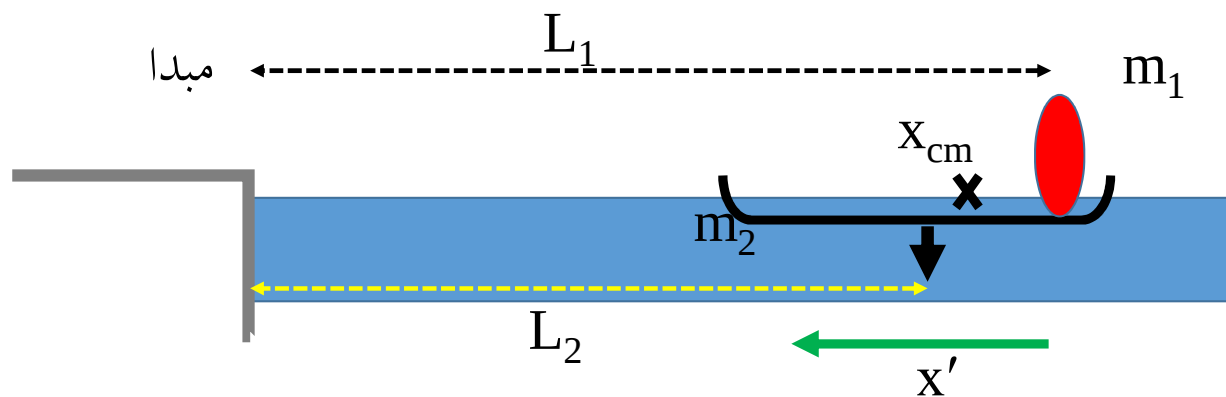
خارجی: وزن و شناوری A

$$\sum F_x = 0$$

$$\rightarrow x_{cm}^1 = rest$$

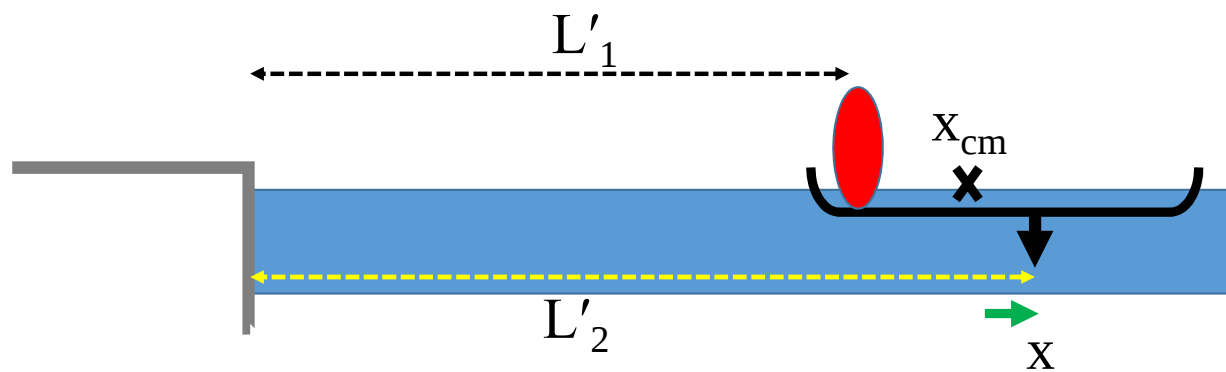
$$\rightarrow x_{cm}^1 = x_{cm}^2$$





$$m_1 : x_1^{(1)} = L_1$$

$$m_2 : x_2^{(1)} = L_2$$



$$m_1 : x_1^{(2)} = L'_1 = L_1 - x' + x$$

$$m_2 : x_2^{(2)} = L'_2 = L_2 + x$$

$$x_{cm}^{(1)} = \frac{m_1 \times x_1^{(1)} + m_2 \times x_2^{(1)}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \times L_1 + m_2 \times L_2}{m_1 + m_2}$$

$$x_{cm}^{(2)} = \frac{m_1 \times x_1^{(2)} + m_2 \times x_2^{(2)}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \times (L_1 - x' + x) + m_2 \times (L_2 + x)}{m_1 + m_2}$$

$$x_{cm}^{(1)} = x_{cm}^{(2)} \quad \rightarrow$$

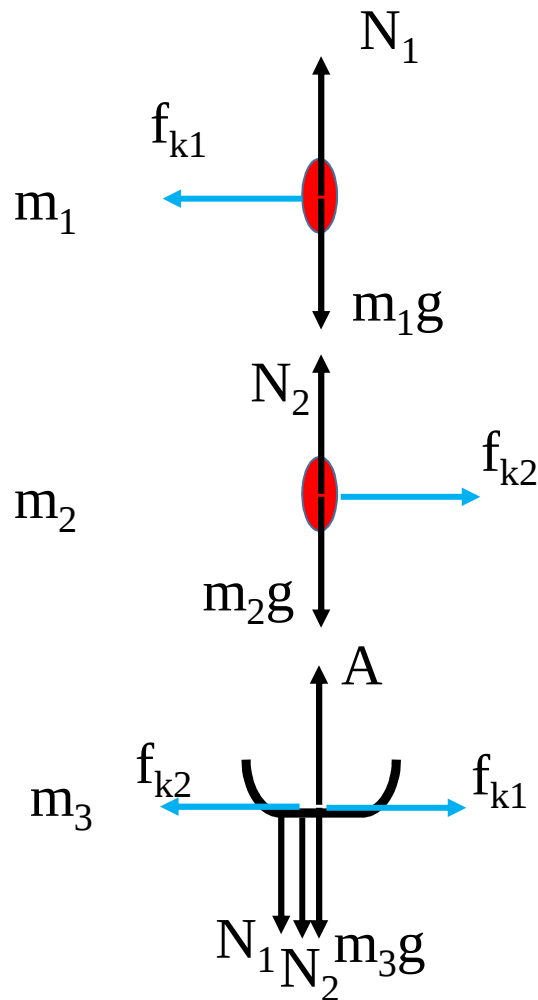
۱۶۰۰۰ GO شخصی به جرم 80 kg همراه با شخص دیگری که سبک‌تر است با یک قایق پارویی به جرم 30 kg در دریاچه‌ای قایقرانی می‌کند. وقتی قایق در آب آرام ساکن است آن‌ها صندلی‌های خود را که 3.0 m از هم فاصله دارند و نسبت به مرکز جرم قایق متقارن‌اند، عوض می‌کنند. اگر قایق 40 cm به‌طور افقی نسبت به ساحل حرکت کند، جرم شخص سبک‌تر چقدر است؟

سیستم: m_1 (80 kg) و m_2 (? kg) و m_3 (30 kg) و قایق

نیروهای وارد بر سیستم:

خارجی: وزن و شناوری

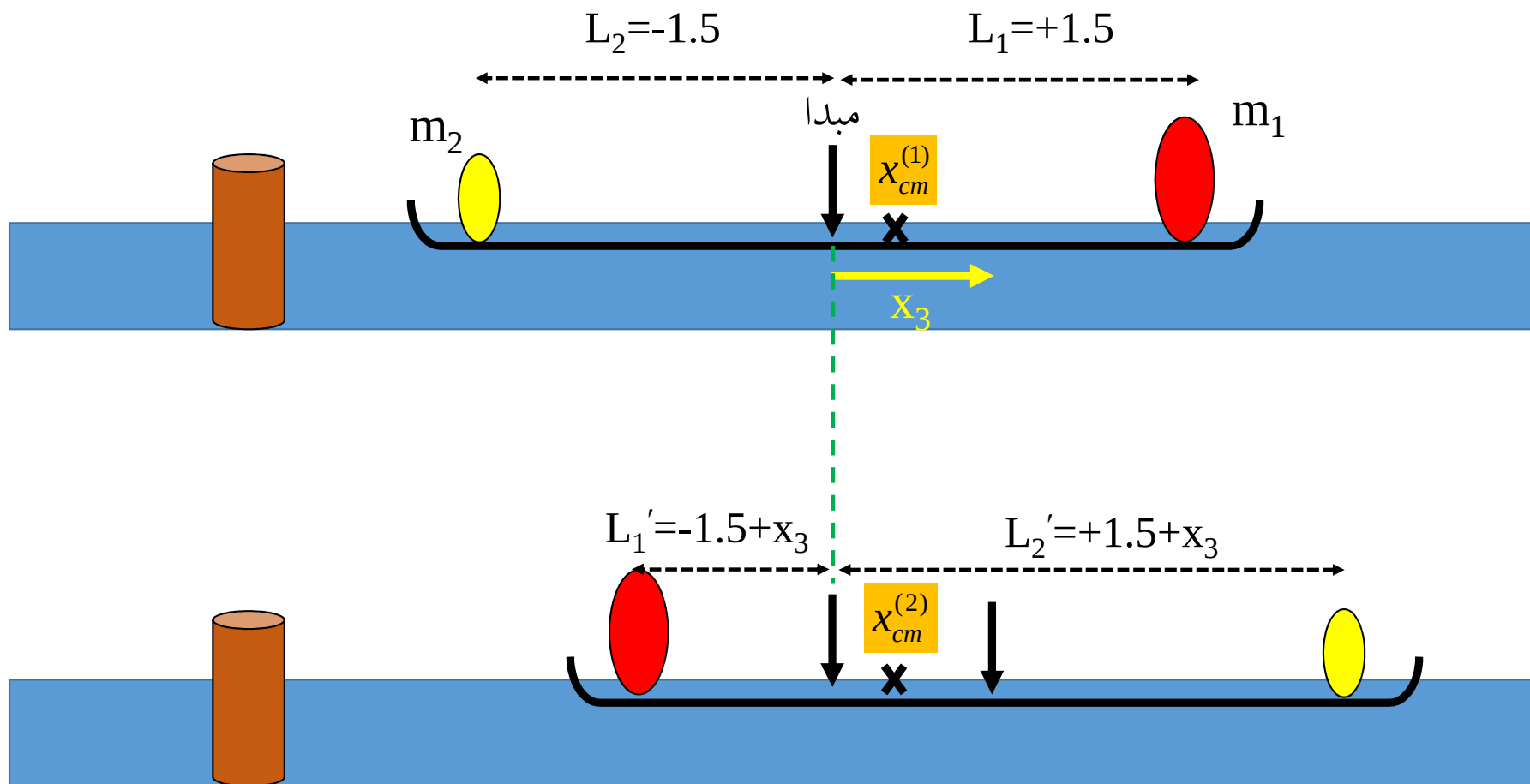
داخلی: اصطکاک و عمودی سطح ها



$$\sum F_x = 0$$

$$\rightarrow x_{cm}^1 = rest$$

$$\rightarrow x_{cm}^1 = x_{cm}^2$$



$$x_{cm}^{(1)} = \frac{m_1 \times x_1^{(1)} + m_2 \times x_2^{(1)}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 \times L_1 + m_2 \times L_2}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{80 \times (1.5) + m_2 \times (-1.5)}{80 + m_2 + 30}$$

$$x_{cm}^{(2)} = \frac{m_1 \times x_1^{(2)} + m_2 \times x_2^{(2)}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 \times L'_1 + m_2 \times L'_2}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{80 \times (-1.5 + x_3) + m_2 \times (+1.5 + x_3)}{80 + m_2 + 30}$$

$$x_3 = 0.4 \text{ m} \quad , \quad x_{cm}^{(1)} = x_{cm}^{(2)} \quad \rightarrow$$