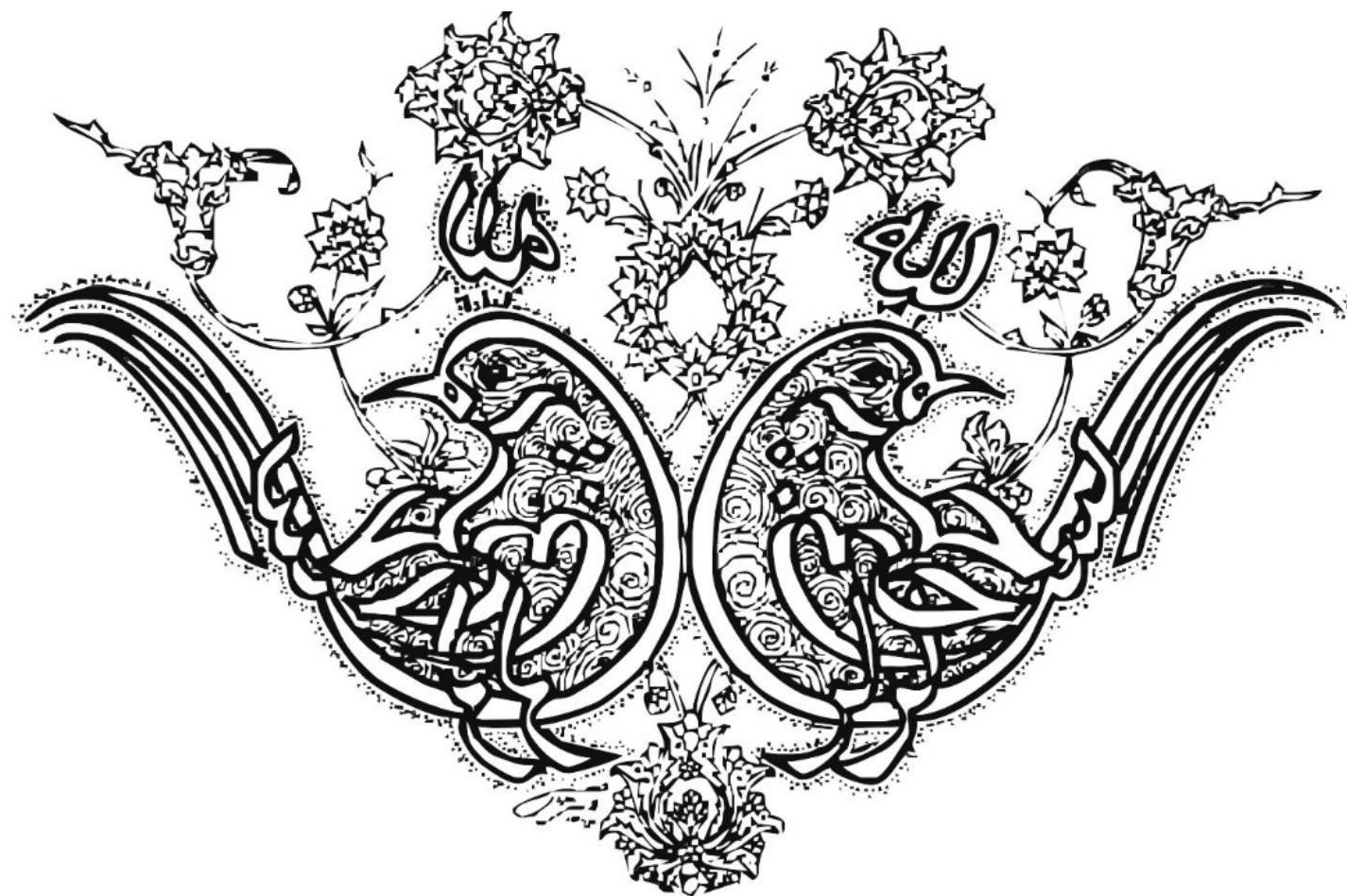




فصل نهم – بخش سوم

تکانه خطی و قانون پایستگی تکانه خطی

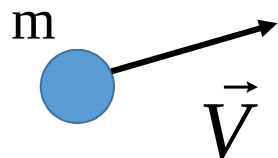
تکانه خطی

کمیت های قبلی: سرعت، شتاب، نیرو، کار و انرژی

کمیت تازه: تکانه

تکانه خطی ذره:

برای یک ذره به جرم m و سرعت $\vec{V}$



kg.m/s

نکات

۱- تکانه خطی قابلیت جسم برای تکان دادن اجسام دیگر یا ضربه زدن به اجسام دیگر است

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \text{ kg} , 2\text{m/s} \\ 1 \text{ kg} , 2\text{m/s} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0.5 \text{ kg} , 2\text{m/s} \\ 0.5 \text{ kg} , 10\text{m/s} \end{array} \right.$$

۲- آهنگ تغییر تکانه خطی هر جسم (مشتق تکانه نسبت به زمان) برابر با نیروی برآیند وارد بر آن جسم است

$$\vec{P} = m\vec{V} \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a} \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}$$

۳- تغییر تکانه خطی در راستای نیروی برآیند است

$$\Delta \vec{P} \parallel \sum \vec{F}$$

۴- بیان انرژی جنبشی توسط تکانه خطی

$$P = mV \rightarrow V = \frac{P}{m} \Rightarrow K = \frac{P^2}{2m}$$
$$K = \frac{1}{2} mV^2$$

۵- تکانه خطی یک کمیت وابسته به چارچوب ناظر است

۶- تکانه خطی سیستم ذرات

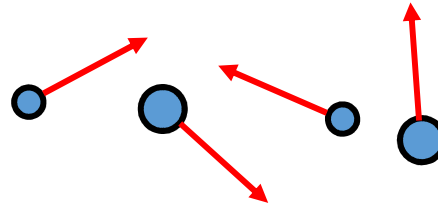
$$\vec{P}_1 = m_1 \vec{v}_1$$

$$\vec{P}_2 = m_2 \vec{v}_2$$

$\vdots$

$$\vec{P}_t = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots$$

$$\vec{P}_t = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots = \sum m_i \vec{v}_i$$



۷- تکانه خطی سیستم ذرات و سرعت مرکز جرم

تکانه خطی سیستم	$\vec{P}_t = \sum m_i \vec{v}_i$
تعریف مرکز جرم	$M\vec{v}_{cm} = \sum m_i \vec{v}_i$

$$\vec{P}_t = M\vec{v}_{cm}$$

تکانه خطی سیستم ذرات برابر است با حاصل ضرب جرم کل سیستم در سرعت مرکز جرم آن

۸- آهنگ تغییر تکانه کل سیستم ذرات

$$\vec{P}_t = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots = \sum m_i \vec{v}_i$$

$$\frac{d\vec{P}_t}{dt} = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} + \dots = \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

$$\frac{d\vec{P}_t}{dt} = \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum m_i \vec{a}_i$$

$$\frac{d\vec{P}_t}{dt} = \sum \vec{F}^{ext}$$

$$\frac{d\vec{P}_t}{dt} = M \vec{a}_{cm}$$

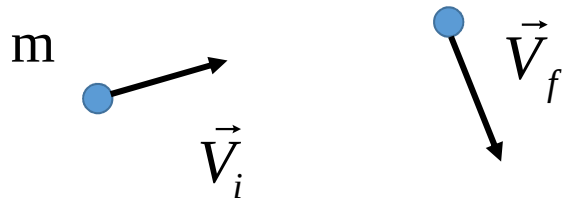
تغییر تکانه کل یک سیستم فقط ناشی از نیروهای خارجی وارد بر سیستم ذرات است

۹- تغییر تکانه خطی ذره

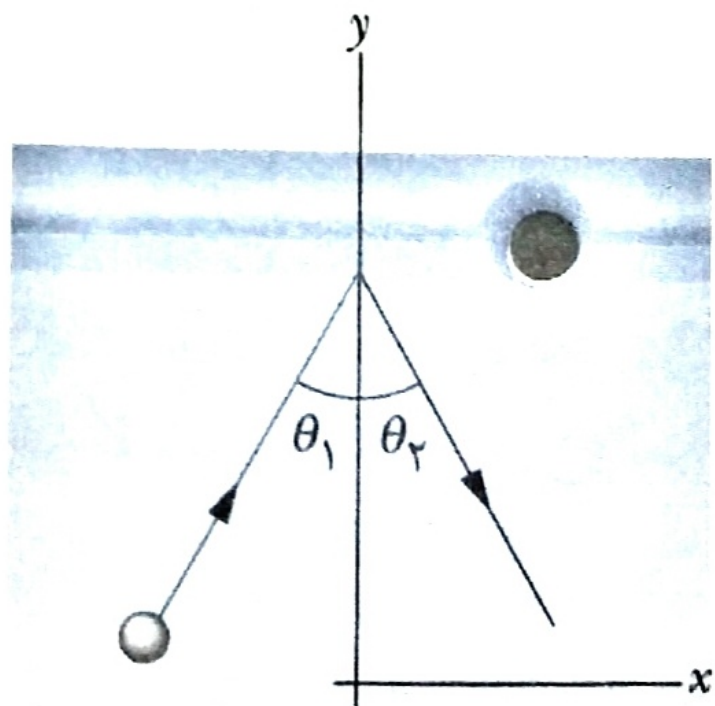
$\vec{P}_i = \text{initial linear momentum}$

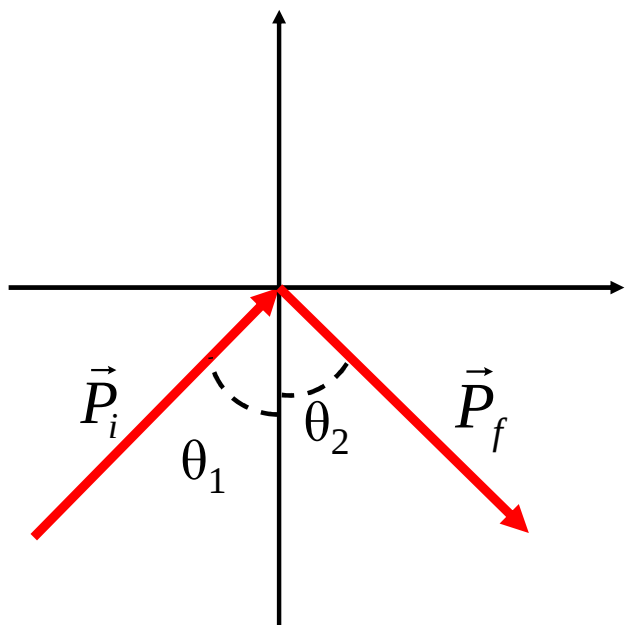
$\vec{P}_f = \text{final linear momentum}$

$$\Delta \vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = m(\vec{V}_f - \vec{V}_i)$$



۲۲۰۰ شکل ۹-۴۷ نمای دید از بالای مسیر طی شده توسط گوی بیلیاردی به جرم 0.165 kg را نشان می‌دهد که از لبه‌ی یک میز بیلیارد واجهیده است. تندی اولیه‌ی گوی 2.00 m/s و زاویه‌ی θ_1 برابر با 30.0° است. بر اثر این واجهیدن، مؤلفه‌ی y ی سرعت توپ تغییر می‌کند، ولی مؤلفه‌ی x آن بدون تغییر باقی می‌ماند. (الف) زاویه‌ی θ_2 و (ب) تغییر تکانه‌ی خطی گوی برحسب نمادگذاری بردارهای یک‌ه‌چست؟ (این واقعیت که گوی می‌غلتد، در این مسئله وارد نمی‌شود.)





$$\theta_1 = \theta_2$$

$$\vec{P}_i = m\vec{v}_i = \begin{cases} P_{ix} = mv_0 \sin\theta_1 \\ P_{iy} = mv_0 \cos\theta_1 \end{cases}$$

$$\vec{P}_f = m\vec{v}_f = \begin{cases} P_{fx} = mv_0 \sin\theta_1 \\ P_{fy} = -mv_0 \cos\theta_1 \end{cases}$$

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = \begin{cases} P_{fx} - P_{ix} = 0 \\ P_{fy} - P_{iy} = -2mv_0 \cos\theta_1 \end{cases}$$

قانون پایستگی تکانه خطی

$$\frac{d\vec{P}_t}{dt} = \sum \vec{F}^{ext}$$

$$\sum \vec{F}^{ext} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \text{constant} \quad \vec{P}_i = \vec{P}_f$$

۱- تکانه کل یک سیستم (تک ذره یا شامل مجموعه ای از ذرات) فقط توسط نیروهای خارجی وارد بر اجزاء سیستم تغییر می کند.

۲- نیروهای داخلی میان ذرات سیستم نمی توانند تغییری در تکانه کل سیستم ایجاد نمایند.

۳- در سیستم ذرات، اگر برآیند نیروهای خارجی وارد بر سیستم ذرات صفر باشد آنگاه تکانه خطی کل

ثابت است

$$\sum \vec{F}^{ext} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\vec{P}_t = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots = cons \tan t$$

البته ممکن است تکانه ذرات درون سیستم تغییر نماید ولی تکانه کل ثابت است

$$\vec{P}_t = cons \tan t$$

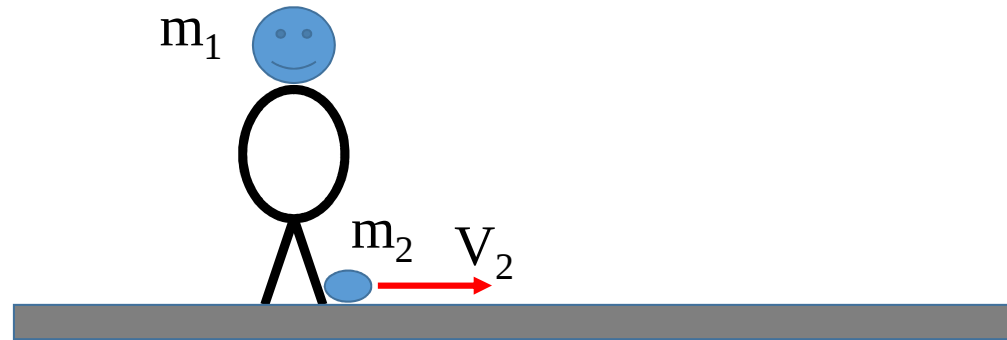
$$\begin{cases} P_x = cons \tan t \\ P_y = cons \tan t \\ P_z = cons \tan t \end{cases}$$

۴- اگر برآیند نیروهای خارجی در یک راستا صفر باشد (مثلا در راستای X) آنگاه تکانه خطی در آن راستا پایسته (ثابت) خواهد ماند

$$\sum F^{ext} \Big|_x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$P_t \Big|_x = P_1 \Big|_x + P_2 \Big|_x + \cdots = \text{const} \tan t$$

مثال: مردی به جرم m_1 روی سطح بدون اصطکاک ایستاده است. مرد به یک سنگ به جرم m_2 ضربه می زند به گونه ای که سرعت سنگ به V_2 می رسد. در نتیجه این ضربه، مرد با چه سرعت و در چه جهتی حرکت خواهد نمود.

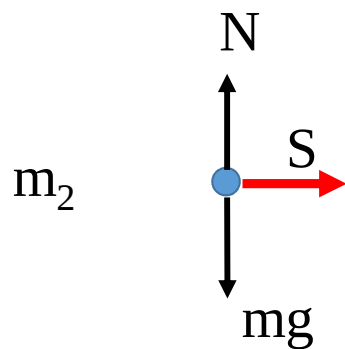
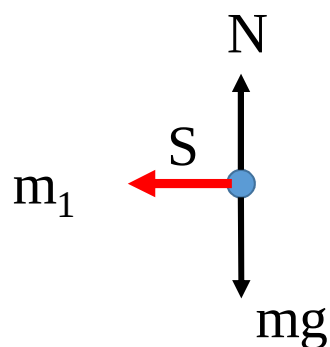


سیستم: m_1 و m_2

نیروها

خارجی: N و mg

داخلی: نیروی ضربه S



$$\sum F^{ext} |_x = 0$$

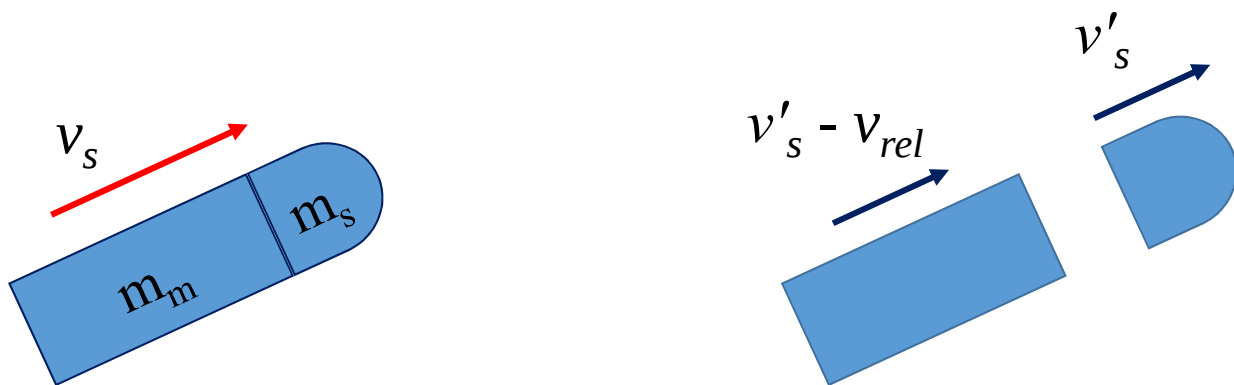
$$P_t^i = P_t^f$$

$$P_t^i = P_1^i + P_2^i = 0 + 0 = 0$$

$$P_t^f = P_1^f + P_2^f = m_1 V_1 + m_2 V_2$$

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = -\frac{m_2}{m_1} V_2$$

مثال: فضاپیمایی با سرعت $v_s = 3860 \text{ km/h}$ نسبت به زمین در حال حرکت است. موتور موشک آن که سوختش تمام شده از سفینه فرمان جدا می گردد و با سرعت $v_{rel} = 125 \text{ km/h}$ نسبت به سفینه عقب رانده می شود. جرم موتور m_m چهار برابر جرم سفینه m_s است. سرعت سفینه فرمان پس از جدا شدن موتور چقدر است.



سیستم: موتور + سفینه فرمان

$$\sum \vec{F}^{ext} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_t = \text{const} \tan t$$

نیروها

$$P_t^i = P_t^f$$

خارجی: -

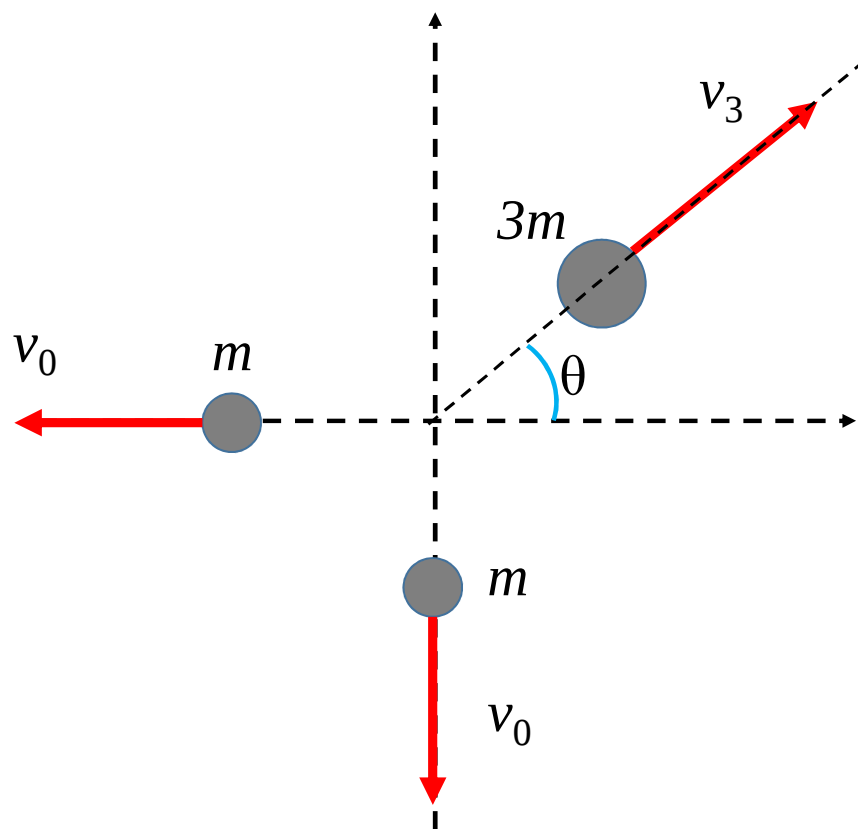
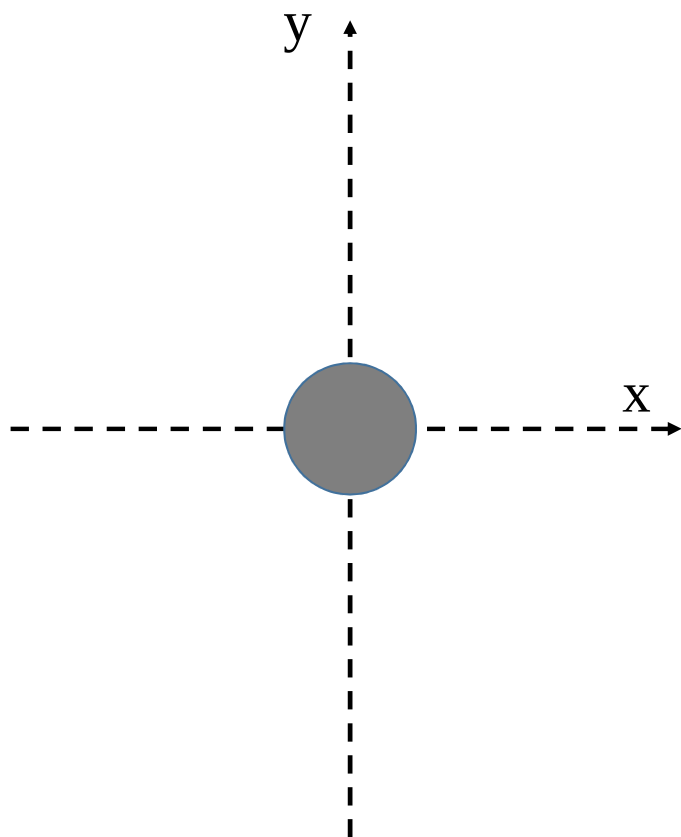
داخلی: نیروی جدایش

$$P_t^i = P_s^i + P_m^i = (m_s + m_m)v_s$$

$$\vec{P}_t^f = \vec{P}_s^f + \vec{P}_m^f = m_s v'_s + m_m (v'_s - v_{rel})$$

$$\rightarrow (m_s + m_m)v_s = m_s v'_s + m_m (v'_s - v_{rel}) \quad \rightarrow \quad v'_s = v_s + \frac{m_m}{m_s + m_m} v_{rel}$$

۴۷۰۰ ظرف ساکنی واقع در مبداء دستگاه مختصات به سه تکه تقسیم می شود. درست پس از انفجار، یک تکه به جرم m ، با سرعت $\hat{i}(-30m/s)$ و تکه ی دوم، آن نیز به جرم m ، با سرعت $\hat{j}(-30m/s)$ حرکت می کند. جرم تکه ی سوم برابر $3m$ است. درست پس از انفجار (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت تکه ی سوم چیست؟



سیستم: سه قطعه

نیروها

$$\sum \vec{F}^{ext} |_{x-y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_t |_{x-y} = \text{const} \tan t$$

خارجی: وزن و عمودی سطح (عمود)

داخلی: نیروی جدایش (افقی)

$$\Rightarrow \quad \vec{P}_t^i |_{x-y} = \vec{P}_t^f |_{x-y}$$

$$\vec{P}_t^i |_{x-y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_t^f |_{x-y} = 0$$

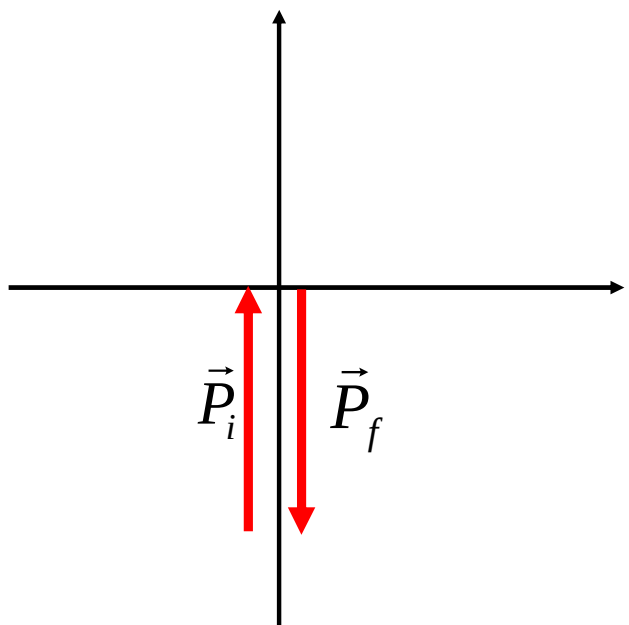
در صفحه افق هیچ نیروی خارجی وجود ندارد

$$\vec{P}_t^f = \begin{cases} -mv_0 + 3mv_3 \cos\theta = 0 \\ -mv_0 + 3mv_3 \sin\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mv_0 = 3mv_3 \cos\theta \\ mv_0 = 3mv_3 \sin\theta \end{cases}$$

$$\frac{3mv_3 \sin\theta}{3mv_3 \cos\theta} = \frac{mv_0}{mv_0} \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$mv_0 = 3mv_3 \sin\theta \Rightarrow v_3 = \frac{1}{3\sin\frac{\pi}{4}} v_0 \Rightarrow v_3 = \frac{\sqrt{2}}{3} v_0$$

۲۹۰ فرض کنید جنایتکاری مسلسل وار گلوله‌هایی به جرم $3g$ را با آهنگ دقیقه / گلوله ۱۰۰، که تندی هر گلوله $500m/s$ است، به سینه‌ی سوپرمن شلیک می‌کند. همچنین فرض کنید گلوله‌ها بدون تغییر تندی، مستقیماً رو به عقب وامی‌جهند. بزرگی نیروی متوسط وارد بر سینه‌ی سوپرمن چقدر است؟



$$\Delta \vec{P}_1 = \vec{P}_f - \vec{P} = -2mv_0 \cos \theta \quad , \quad \theta = 0$$

$$\Delta \vec{P}_1 = -2mv_0 \hat{j}$$

$$\vec{F}_1 = \frac{\Delta \vec{P}_1}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_{man} = -n\vec{F}_1$$

$$\vec{F}_{man} = n(2mv_0 \hat{j})$$



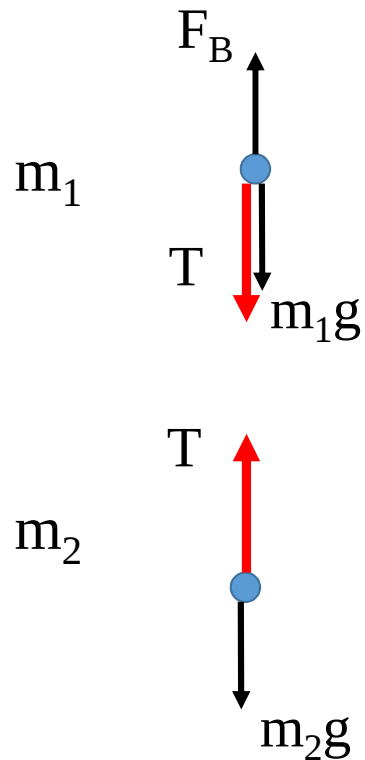
۱۰۲ در شکل ۹-۷۹، مردی به جرم 80 kg روی نردبانی قرار دارد که از بالونی به جرم 320 kg (همراه با سبد مسافر) آویزان است. بالون در ابتدا نسبت به زمین ساکن است. اگر این مرد با تندی 2.5 m/s نسبت به نردبان، از آن بالا رود، بالون (الف) در چه جهتی و (ب) با چه تندی ای حرکت می کند؟ (پ) آنگاه اگر مرد از بالا رفتن باز ایستد، تندی بالون چقدر می شود؟

سیستم: بالون و متعلقات (m_1) + مرد (m_2)

نیروها

خارجی: وزن و نیروی ارشمیدوسی

داخلی: نیروی کشش



در حالت تعادل اولیه (مرد ساکن) همه نیروها با هم در تعادلند پس
برآیند نیروی خارجی صفر است و سیستم در تکانه صفر

بعد از حرکت مرد، بالون به گونه ای باید جابه جا شود تا باز تکانه کل
صفر باشد

$$\vec{P}_t^i = \vec{P}_t^f$$

سرعت پایین آمدن
بالون نسبت به زمین $\leftarrow \vec{V}_1 = -V_1 \hat{j} = ?$

$$\vec{P}_t^i = \vec{P}_1^i + \vec{P}_2^i = 0 + 0 + = 0$$

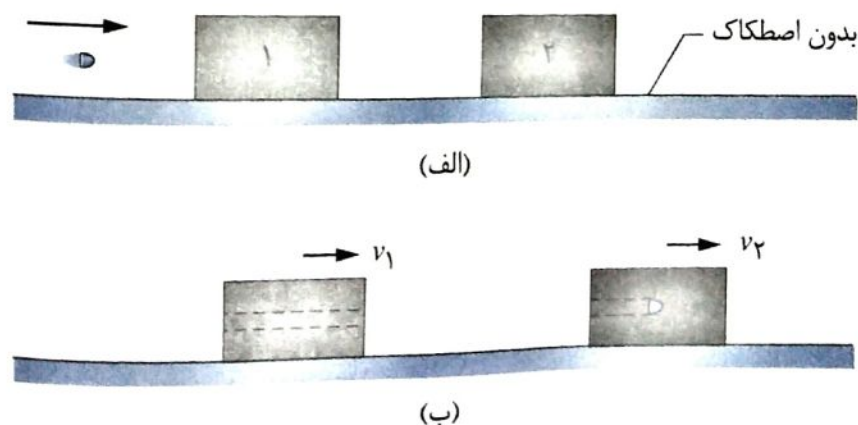
$$\vec{P}_t^f = \vec{P}_1^f + \vec{P}_2^f = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2$$

$\vec{V}_2 = (V' - V_1) \hat{j}$
سرعت بالا رفتن
مرد نسبت به زمین
سرعت بالا رفتن مرد
نسبت به بالون (پله)

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad -m_1 V_1 + m_2 (V' - V_1) = 0$$

$$\rightarrow \quad V_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} V'$$

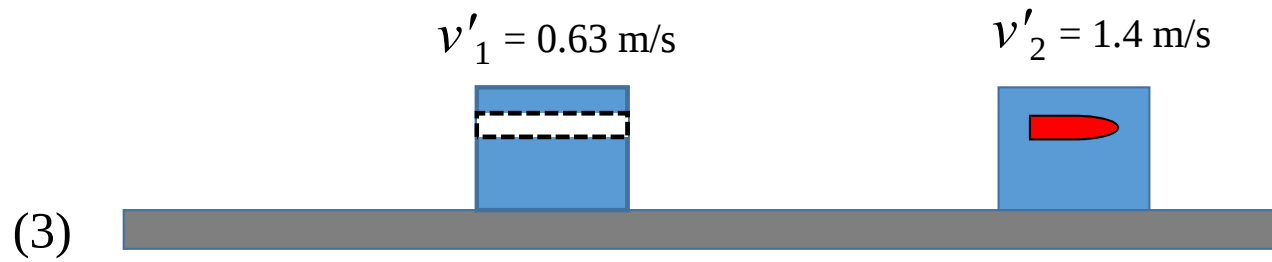
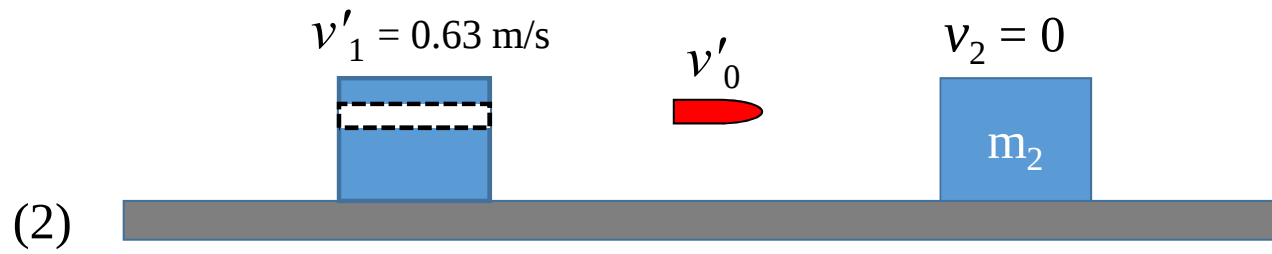
۵۱۰۰ GO در شکل ۹-۵۸ الف، گلوله‌ای به جرم $3/50\text{ g}$ به‌طور افقی به دو قطعه که روی میز بدون اصطکاکی قرار دارند شلیک شده است. گلوله با عبور از قطعه‌ی ۱ (به جرم $1/20\text{ kg}$) به داخل قطعه‌ی دوم (به جرم $1/8\text{ kg}$) فرو می‌رود. تندی‌هایی که دو قطعه به آن می‌رسند عبارت‌اند از $v_1 = 0/630\text{ m/s}$ و $v_2 = 1/40\text{ m/s}$ (شکل ۹-۵۸ ب). با چشم‌پوشی از جرمی که از قطعه‌ی ۱ بر اثر عبور گلوله کنده می‌شود، تندی گلوله را وقتی (الف) از قطعه‌ی ۱ بیرون می‌آید و (ب) وقتی وارد آن می‌شود، به‌دست آورید.





$$v_0 = ?$$

$$v'_0 = ?$$



$$P_1 = m_0 v_0 + 0 + 0 \quad \textcircled{1}$$

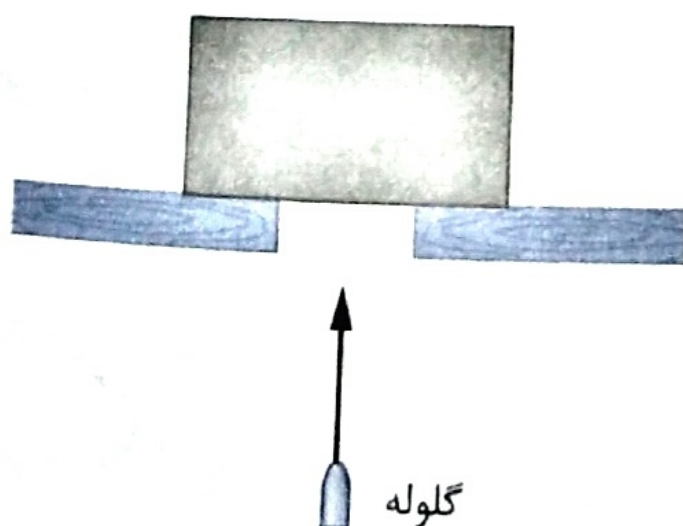
$$P_2 = m_0 v'_0 + m_1 v'_1 + 0 \quad \textcircled{2}$$

$$P_3 = m_0 v'_2 + m_1 v'_1 + m_3 v'_2 \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \quad \textcircled{3} \longrightarrow v_0$$

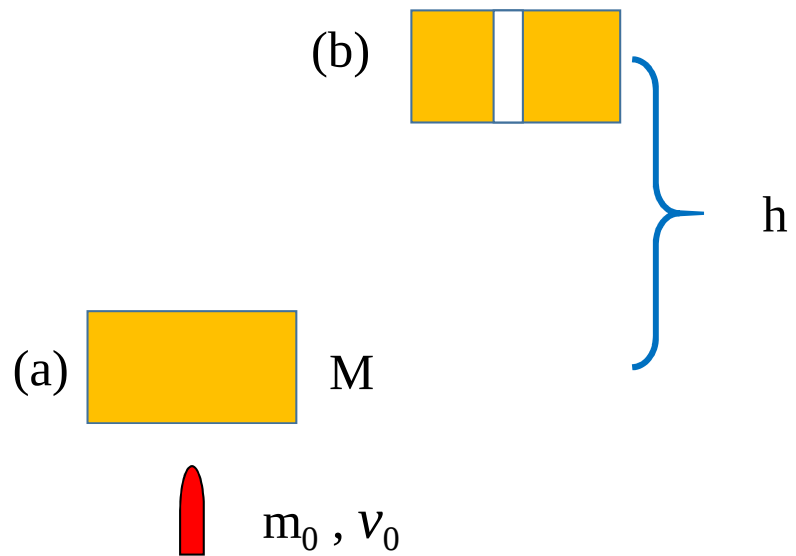
$$\textcircled{2} \quad \textcircled{3} \longrightarrow v'_0$$

۵۲۰۰ GO در شکل ۹-۵۹، گلوله‌ای به جرم 10 g که با تندی 1000 m/s در حرکت است مستقیماً رو به بالا به قطعه‌ای به جرم 5 kg که در ابتدا ساکن است برخورد می‌کند و از میان مرکز جرم



شکل ۹-۵۹ مسئله‌ی ۵۲

آن می‌گذرد. گلوله در حالی که با تندی 400 m/s ، مستقیماً رو به بالا در حرکت است از قطعه خارج می‌شود. قطعه تا چه ارتفاع بیشینه‌ای بالای مکان اولیه‌ی خود بالا می‌رود؟



$$P_1 = P_2 \quad \rightarrow \quad m_0 v_0 = m_0 v'_0 + MV$$

$$E_a = E_b \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} MV^2 = Mgh$$