

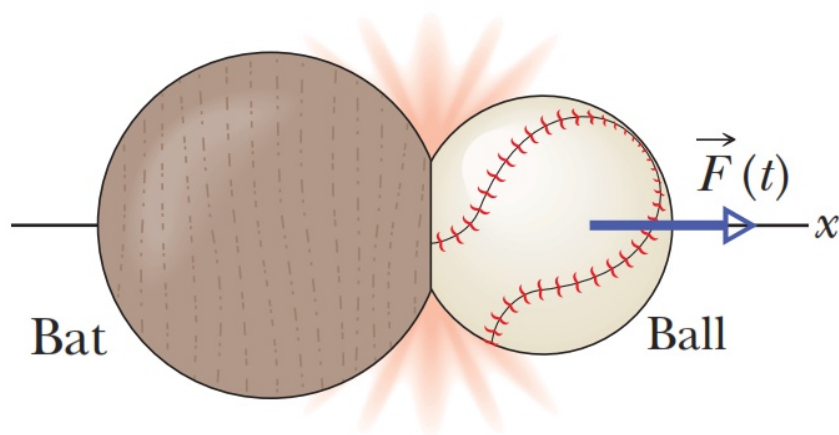


فصل نهم - بخش چهارم

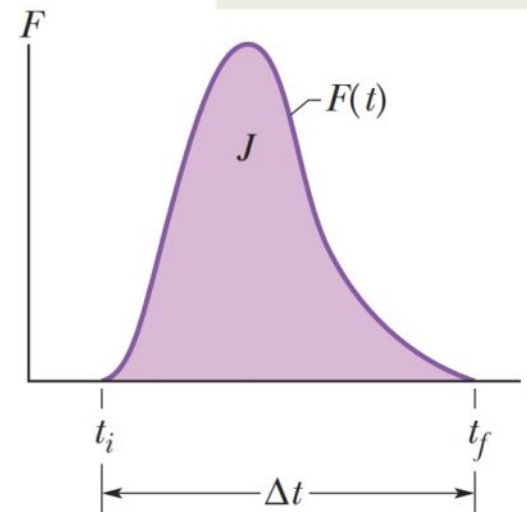
بر خورد و ضربه



در برخورد دو جسم با همدیگر، نیروی بزرگی در مدت زمان بسیار کوتاه بین آن دو جسم رد و بدل می شود (در یک نقطه مکانی ثابت)
این نیرو تابعی از زمان می باشد



The impulse in the collision is equal to the area under the curve.



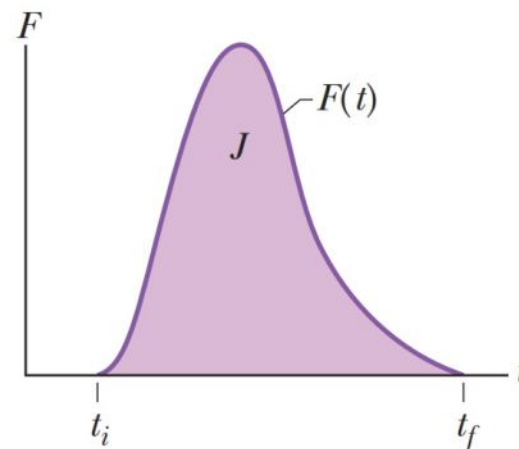
نکات:

۱- در برخورد نیروی بزرگ $\vec{F}$ در مدت کوتاه dt بر جسم اثر می گذارد و موجب تغییر تکانه خطی آن می شود

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \rightarrow \quad d\vec{P} = \vec{F}dt$$

۲- اگر برخورد از t_i شروع و تا t_f ادامه یابد

$$d\vec{P} = \vec{F}dt \quad \rightarrow \quad \Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt$$



۳- تعریف ضربه

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt$$

۴- قضیه ضربه - تکانه: ضربه نیروی خالص وارد بر یک ذره که در یک بازه زمانی معین وارد می شود برابر است با تغییر تکانه آن ذره در آن بازه زمانی

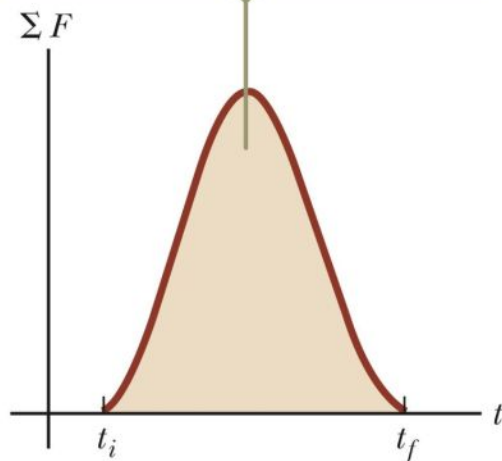
$$\vec{J} = \Delta \vec{P}$$

$$\Delta \vec{P} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt$$

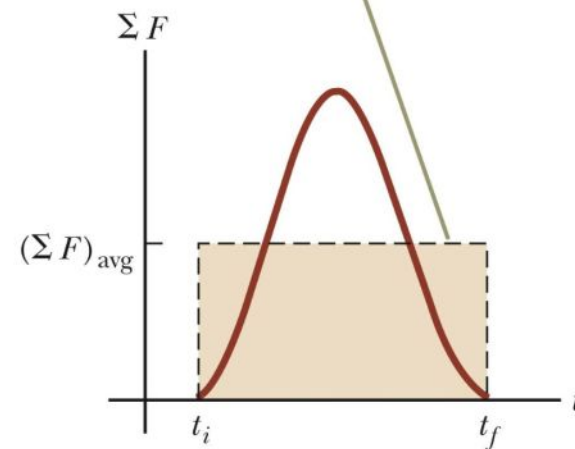
۵- اگر نیروی متوسط در فرآیند برخورد $\vec{F}_{\text{average}}$ باشد

$$\vec{F}_{\text{average}} = \frac{\vec{J}}{\Delta t}$$

The impulse imparted to the particle by the force is the area under the curve.



The time-averaged net force gives the same impulse to a particle as does the time-varying force in (a).



۶- مقایسه قضیه ضربه - تکانه با قضیه کار - انرژی:

$$\text{قضیه کار - انرژی} \quad K_2 - K_1 = W_t = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\text{قضیه ضربه - تکانه} \quad \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \int \vec{F} dt$$

❖ در هر دو معادله در طرف اول سرعت و جرم در دو حالت مختلف داده می شود

❖ قضیه کار - انرژی یک معادله اسکالر و قضیه ضربه - تکانه یک معادله برداری است

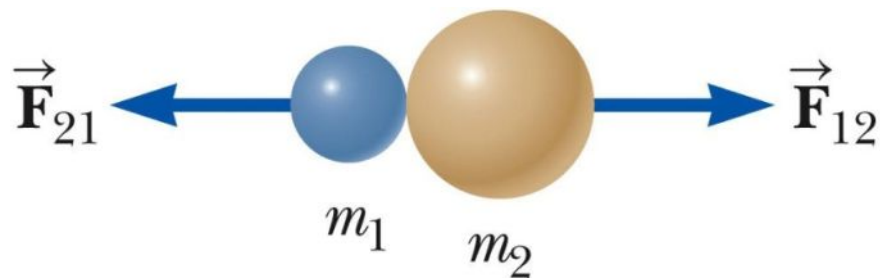
❖ در قضیه کار-انرژی انتگرال فضایی نیرو بین دو وضعیت نوشته می شود ولی در قضیه ضربه-تکانه

❖ انتگرال زمانی محاسبه می شود

❖ انتگرال در قضیه کار - انرژی بین دو نقطه مکانی مختلف محاسبه می شود درحالی که در قضیه ضربه -

تکانه انتگرال در حین برخورد که در یک نقطه رخ می دهد محاسبه می گردد.

۷- در برخورد دو جسم نیروی رد و بدل شده میان دو جسم به صورت نیروهای عمل و عکس العمل به دو جسم مجزا وارد می شود.



$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

۸- پایداری تکانه در حین برخورد

نیروی ضربه: نیرویی که دو جسم در حال برخورد رد و بدل می شود دارای ویژگیهای زیر است:

بسیار بزرگ در برابر دیگر نیروهای وارد شده

مدت زمان عمل بسیار کوتاه (فرآیند آنی در یک نقطه)

نیروی ضربه یک نیروی داخلی است

پس با صرف نظر کردن از نیروهای خارجی؛ تکانه کل سیستم در حین برخورد تغییری نمی کند. یعنی

تکانه دقیقا قبل از برخورد با تکانه دقیقا بعد از برخورد یکسان است

تکانه خطی بعد از برخورد = تکانه خطی قبل از برخورد

$$\vec{P}_t^{(1)} = \vec{P}_t^{(2)}$$

انواع برخوردها

۱- کشسان یا الاستیک

برقراری پایستگی تکانه خطی:

تکانه کل سیستم قبل از برخورد = تکانه کل سیستم بعد از برخورد

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \quad \rightarrow \quad m_1 \vec{V}_{1i} + m_2 \vec{V}_{2i} = m_1 \vec{V}_{1f} + m_2 \vec{V}_{2f}$$

برقراری پایستگی انرژی جنبشی:

انرژی جنبشی کل سیستم قبل از برخورد = انرژی جنبشی کل سیستم بعد از برخورد

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

انواع برخوردها

۲- ناکشسان یا غیرالاستیک

برقراری پایستگی تکانه خطی:

تکانه کل سیستم قبل از برخورد = تکانه کل سیستم بعد از برخورد

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \quad \rightarrow \quad m_1 \vec{V}_{1i} + m_2 \vec{V}_{2i} = m_1 \vec{V}_{1f} + m_2 \vec{V}_{2f}$$

فاقد پایستگی انرژی جنبشی:

انرژی جنبشی کل سیستم قبل از برخورد $\neq$ انرژی جنبشی کل سیستم بعد از برخورد

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 \neq \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

انواع برخوردها

۳- کاملاً ناکشسان: سرعت اجسام بعد از برخورد نسبت بهم دیگر صفر است. یا به عبارتی بعد از برخورد دو جسم به همدیگر متصل شده و باهم حرکت می نمایند

برقراری پایستگی تکانه خطی:

تکانه کل سیستم قبل از برخورد = تکانه کل سیستم بعد از برخورد

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \quad \rightarrow \quad m_1 \vec{V}_{1i} + m_2 \vec{V}_{2i} = (m_1 + m_2) \vec{V}_f$$

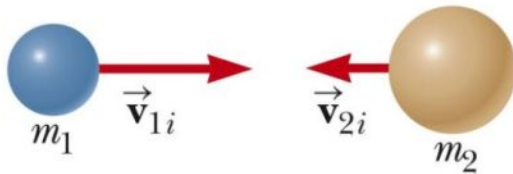
فاقد پایستگی انرژی جنبشی:

انرژی جنبشی کل سیستم قبل از برخورد $\neq$ انرژی جنبشی کل سیستم بعد از برخورد

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 \neq \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2$$

برخورد کاملاً ناکشسان یک بعدی (۱):

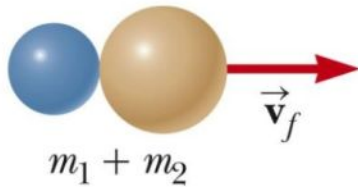
Before the collision, the particles move separately.



a

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \vec{v}_f$$

After the collision, the particles move together.



b

برخورد کاملاً ناکشسان یک بعدی (۲):

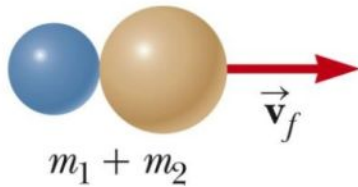
$$v_{2i} = 0$$

Before the collision, the particles move separately.



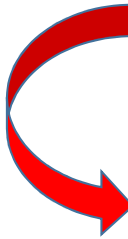
a

After the collision, the particles move together.



b

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) V_f$$


$$V_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

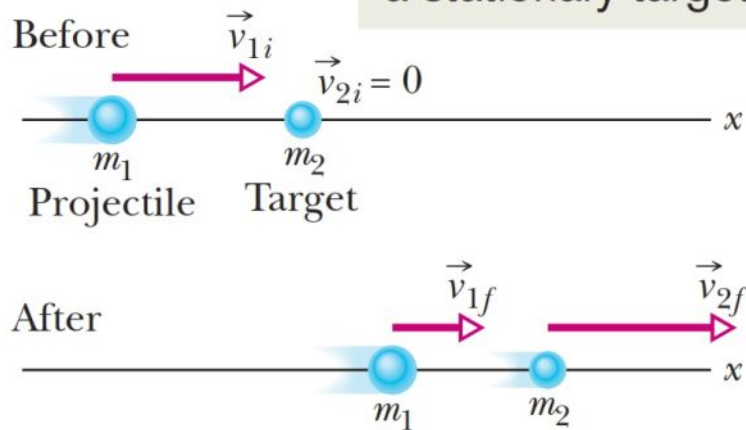
برخورد کشسان یک بعدی (۱):

$$v_{2i} = 0$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

Here is the generic setup for an elastic collision with a stationary target.

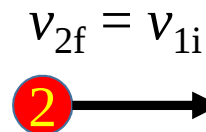
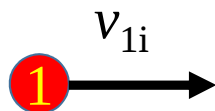


حالت های خاص از برخورد کشسان یک بعدی: $v_{2i} = 0$

الف) هدف و پرتابه دارای جرم یکسان باشند $m_1 = m_2$



$$v_{1f} = 0 \quad \text{and} \quad v_{2f} = v_{1i}$$



حالت های خاص از برخورد کشسان یک بعدی:

ب) هدف خیلی سنگین تر از پرتابه

$$m_2 \gg m_1$$

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \quad \text{and} \quad v_{2f} \approx \left(\frac{2m_1}{m_2} \right) v_{1i}$$

ج) پرتابه خیلی سنگین تر از هدف

$$m_1 \gg m_2$$

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{and} \quad v_{2f} \approx 2v_{1i}$$

برخورد کشسان یک بعدی (۲):

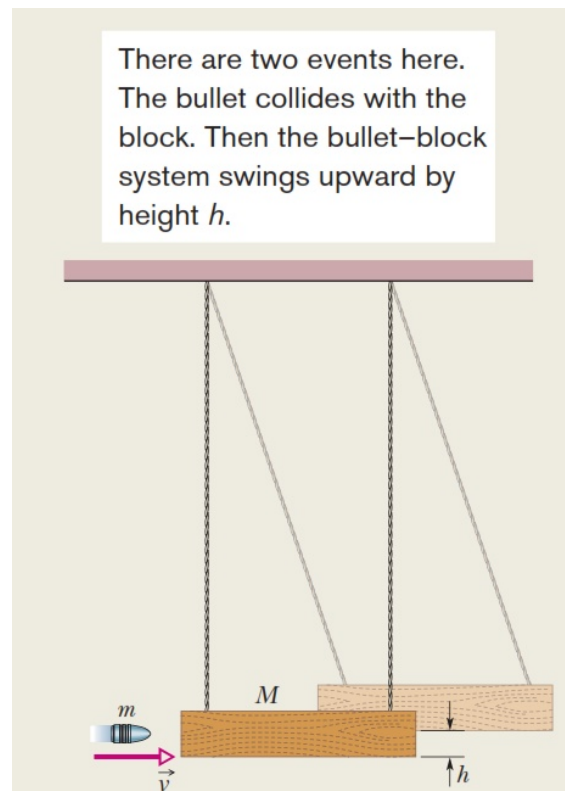
Here is the generic setup for an elastic collision with a moving target.

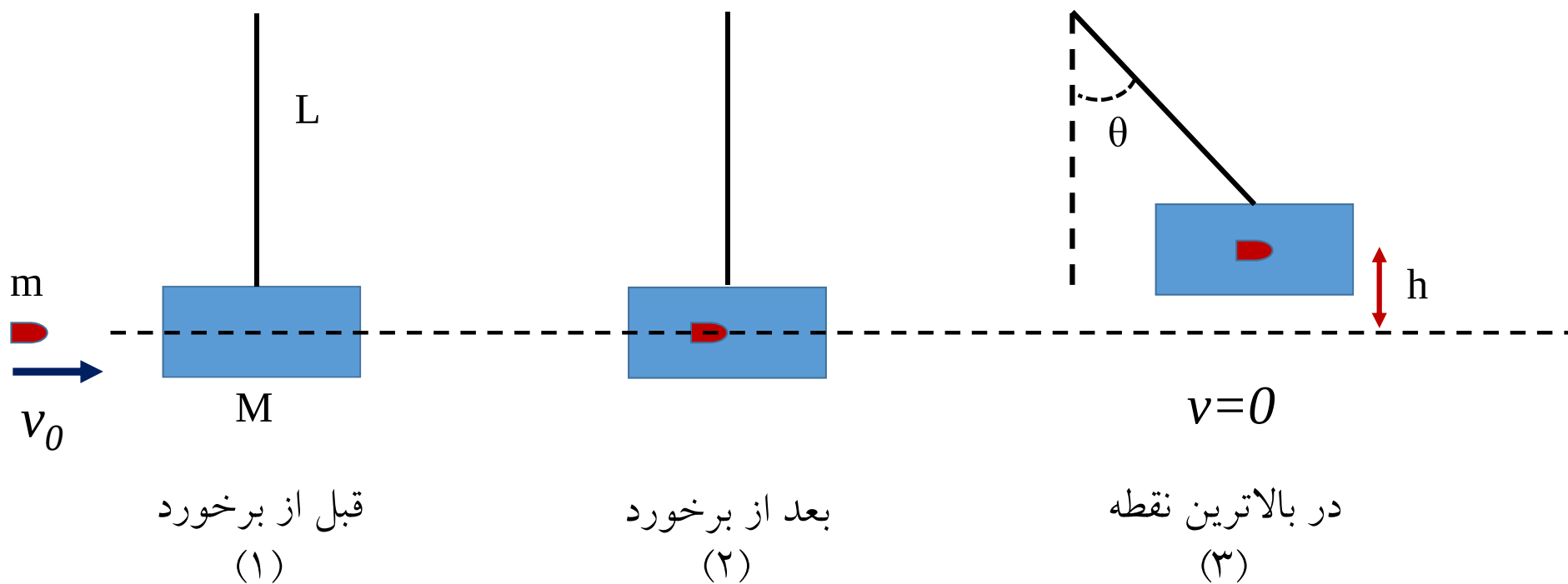


$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$
$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}.$$

آونگ بالستیک:

گلوله با جرم m بعد از برخورد با قطعه چوب با جرم M در آن فرو می رود و مرکز جرم چوب به اندازه h بالا می رود. سرعت گلوله را بدست آورید.





در فرآیند آنی برخورد کاملاً ناکشسان

$$P_t^{(1)} = P_t^{(2)} \rightarrow mv_0 = (m + M)v_f \rightarrow v_f = \frac{mv_0}{m + M} \quad (1)$$

در حرکت جسم کلی به جرم $m+M$ از مرجع پتانسیل به ارتفاع h

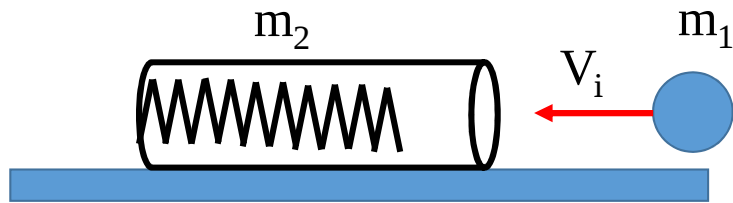
$$E^{(2)} = E^{(3)} \rightarrow \frac{1}{2}(m + M)v_f^2 = (m + M)gh \rightarrow v_f = \sqrt{2gh} \quad (2)$$

(1) (2) 

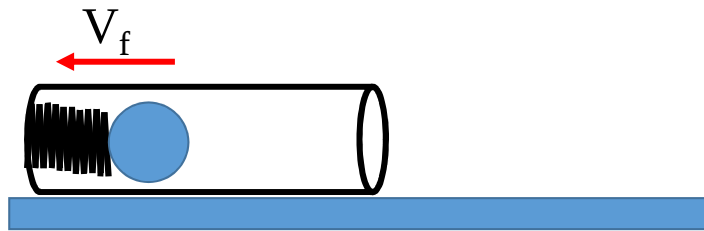
$$v_0 = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh}$$

۵۷۰۰ GO در شکل ۹-۶۱، گلوله‌ای به جرم $m = ۶۰\text{g}$ با تندی $v_i = ۲۲\text{m/s}$ به داخل لوله‌ی یک تفنگ فنی به جرم $M = ۲۴۰\text{g}$ که در ابتدا روی سطح بدون اصطکاکی ساکن است، شلیک می‌شود. فرض کنید افزایش انرژی گرمایی ناشی از اصطکاک بین توپ و لوله ناچیز است. (الف) تندی تفنگ فنی، پس از آنکه گلوله در داخل لوله متوقف شود، چقدر است؟ (ب) چه کسری از انرژی جنبشی اولیه‌ی گلوله در فنر ذخیره شده است؟





$$P_i = m_1 v_i + 0$$



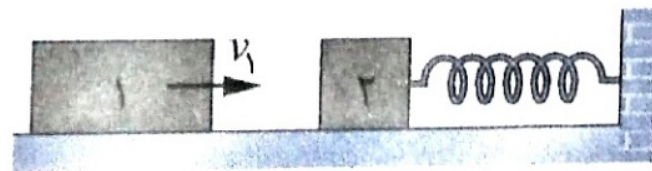
$$P_f = (m_1 + m_2) v_f$$

$$P_i = P_f \quad \rightarrow \quad m_1 v_i = (m_1 + m_2) v_f \quad \rightarrow \quad v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_i$$

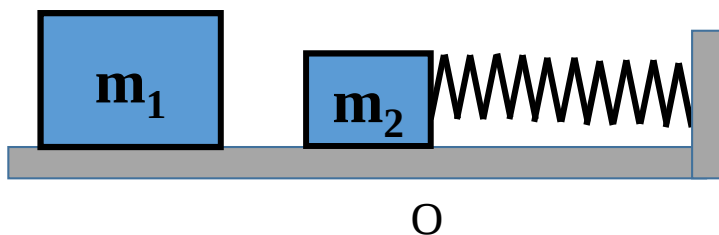
$$K_f - K_i = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 - \frac{1}{2} m_1 v_i^2 \quad \rightarrow \quad K_f - K_i = \frac{1}{2} v_i^2 \left[\frac{m_1^2}{m_1 + m_2} - m_1 \right] < 0$$

$$K_f - K_i = -\frac{1}{2} k x^2$$

۵۸۰۰۰ در شکل ۹-۶۲، قطعه‌ی ۲ (به جرم $1/0 \text{ kg}$) روی سطحی بدون اصطکاک ساکن است و به یک سر فنر کشیده‌نشده‌ای با ثابت فنر 200 N/m متصل شده است. سر دیگر فنر به دیواره‌ای محکم شده است. قطعه‌ی ۱ (به جرم $2/0 \text{ kg}$) که با تندی $v_1 = 4/0 \text{ m/s}$ در حرکت است، به قطعه‌ی ۲ برخورد می‌کند و در نتیجه دو قطعه به هم می‌چسبند. وقتی دو قطعه به توقف لحظه‌ای برسند، فنر چقدر فشرده شده است؟



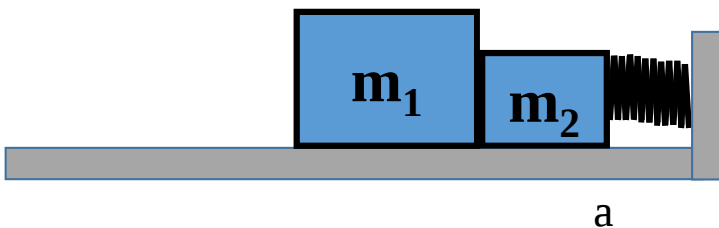
در هنگام برخورد



$$P_i = P_f$$

$$\rightarrow m_1 v_i = (m_1 + m_2) v_f$$

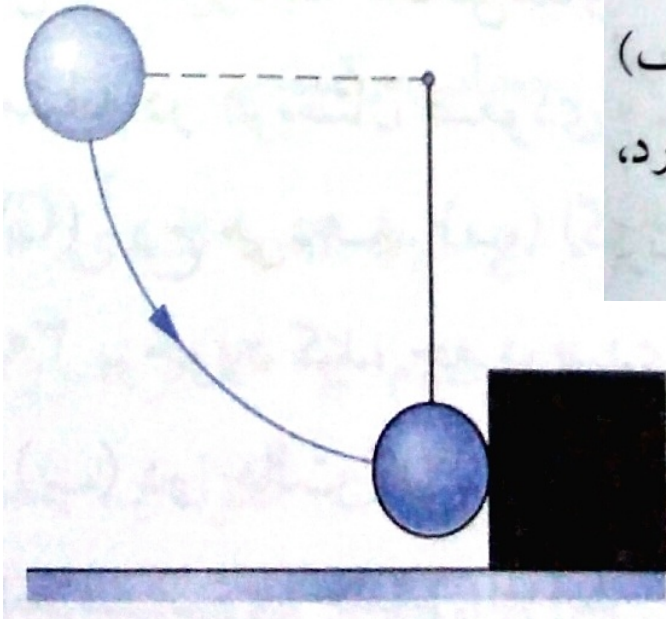
$$\rightarrow v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_i$$

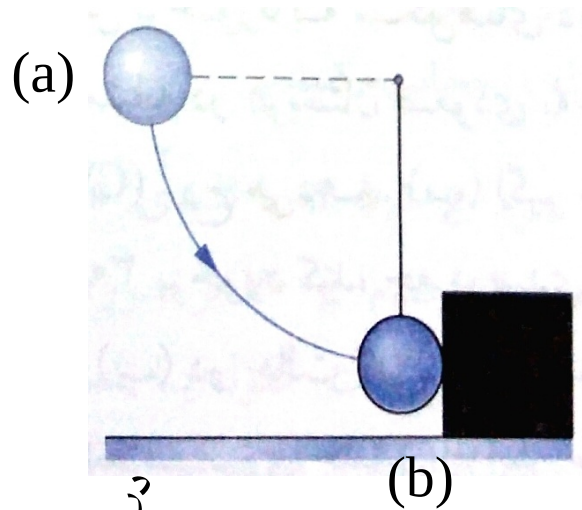


انرژی جنبشی در لحظه تعادل فنر به انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنر تبدیل می شود

$$E_o = E_a \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 = \frac{1}{2}kx^2 \quad \rightarrow \quad x =$$

۶۴۰۰ GO یک گلوله‌ی فولادی به جرم 0.500 kg به ریسمانی به طول 70.0 cm که یک سر آن ثابت است، بسته شده است. سپس وقتی ریسمان به حالت افقی درمی‌آید، گلوله رها می‌شود (شکل ۹-۶۵) و در پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر خود به یک قطعه‌ی فولادی به جرم 2.50 kg برخورد می‌کند که در ابتدا روی سطح بدون اصطکاکی به حالت سکون قرار دارد. برخورد کشسان است. (الف) تندی گلوله و (ب) تندی قطعه را، هر دو درست پس از برخورد، به دست آورید.





در هنگام برخورد

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$



$$E_a = E_b \quad \rightarrow \quad mgL = \frac{1}{2}mv_b^2$$

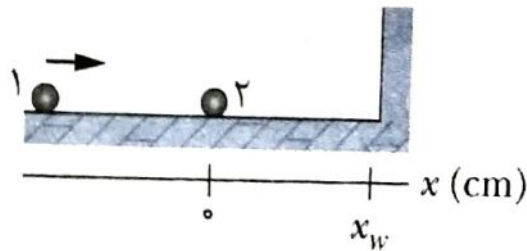
$$\rightarrow v_b = \sqrt{2gL} = \sqrt{2 \times 10 \times 0.7}$$

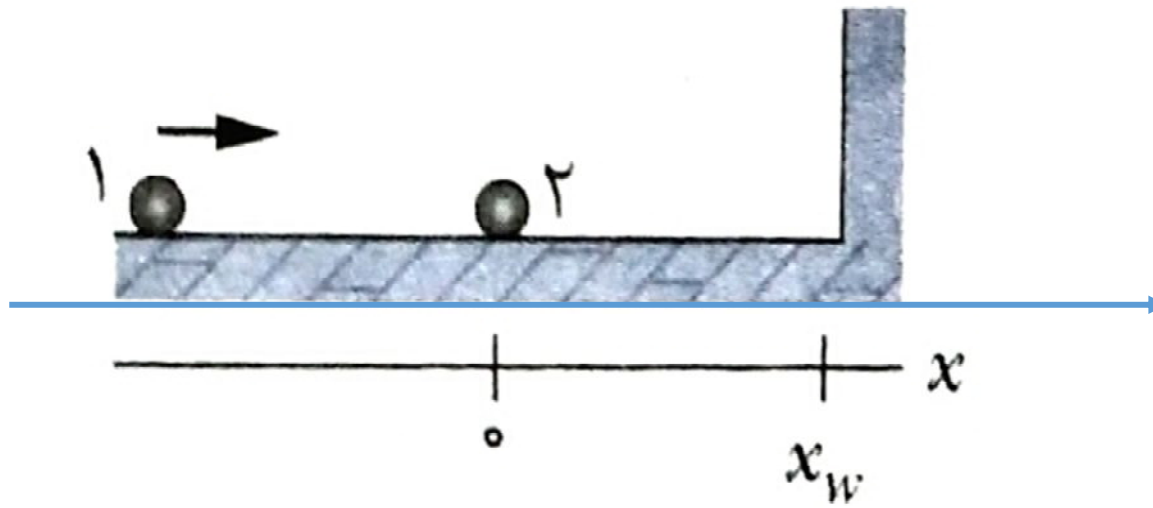
$$\rightarrow v_b = \sqrt{14} \frac{m}{s}$$

$$v_{1f} = \frac{0.5 - 2.5}{0.5 + 2.5} \sqrt{14} = \frac{-2}{3} \sqrt{14}$$

$$v_{2f} = \frac{2 \times 0.5}{0.5 + 2.5} \sqrt{14} = \frac{1}{3} \sqrt{14}$$

۶۷۰۰ در شکل ۹-۶۶، ذره ۱ به جرم $m_1 = 0.30 \text{ kg}$ با تندی 2.0 m/s رو به سمت راست در راستای محور x بر سطح بدون اصطکاکی می لغزد. وقتی این ذره به $x = 0$ می رسد با ذره ۲ به جرم $m_2 = 0.40 \text{ kg}$ برخورد کشسان انجام می دهد. سپس وقتی ذره ۲ در $x_w = 70 \text{ cm}$ به دیواره برسد، بدون هیچ اتلاف سرعتی از آن وامی جهد. در چه مکانی روی محور x ، ذره ۲ با ذره ۱ برخورد می کند؟





در هنگام برخورد

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$



$$v_{1f} = \frac{0.3 - 0.4}{0.3 + 0.4} \times 2 = \frac{-2}{7} \frac{m}{s}$$

$$v_{2f} = \frac{2 \times 0.3}{0.3 + 0.4} \times 2 = \frac{12}{7} \frac{m}{s}$$

m_1 از نقطه صفر و در زمان $t = 0$ در خلاف جهت

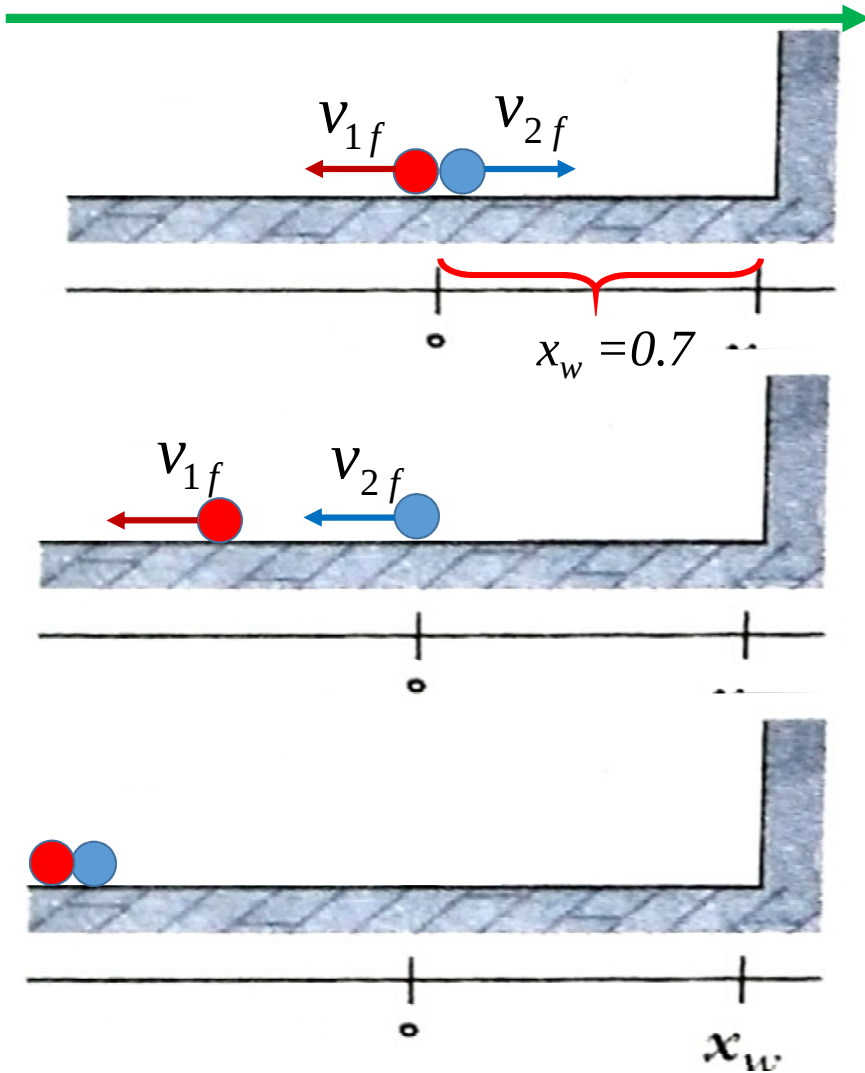
محور X ها با سرعت V_{1f} حرکت می کند

m_2 ابتدا در جهت مثبت محور X ها و با سرعت V_{2f} تا

دیواره حرکت می کند (در مدت t_0) و سپس در همان

مدت و با همان سرعت به مبدا باز می گردد و در

جهت خلاف محور X ها ادامه می دهد



$$x_w = v_{2f} t_0 \rightarrow t_0 = \frac{x_w}{v_{2f}} = \frac{0.7}{\frac{12}{7}} = \frac{4.9}{12} = 0.41s$$

$$x_1 = -|v_{1f}|t = -\frac{2}{7}t$$

$$x_2 = -|v_{2f}|(t - 2t_0) = -\frac{12}{7}(t - 2t_0) = -\frac{12}{7}(t - 0.82)$$

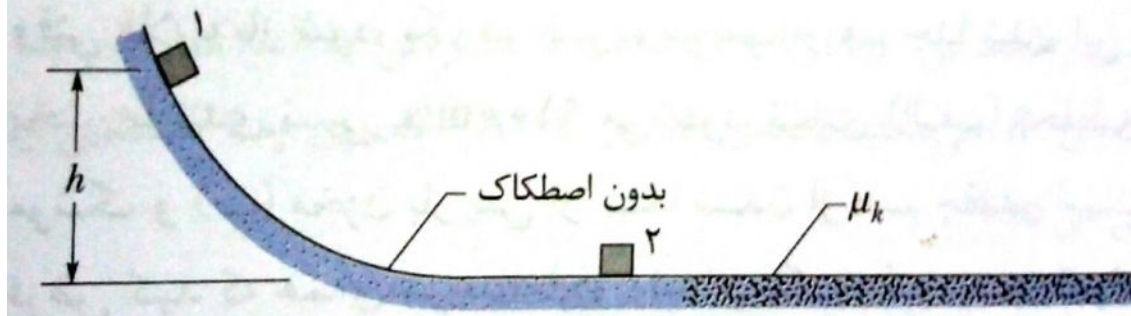
$$x_1 = x_2 \rightarrow -\frac{2}{7}t = -\frac{12}{7}(t - 0.82) \rightarrow t = 6(t - 0.82)$$

$$\rightarrow 5t = 6 \times 0.82 = 4.92 \rightarrow t = 0.984 \text{ s}$$

$$x_1(t = 0.984) = -\frac{2}{7}t \rightarrow x = -0.281 \text{ m}$$

۶۸۰۰ GO در شکل ۹-۶۷، قطعه‌ی ۱ به جرم m_1 از حالت سکون روی شیپراهه‌ی بدون اصطکاکی به ارتفاع $h = ۲٫۵۰\text{m}$ می‌لغزد و سپس با قطعه‌ی ساکن ۲، به جرم $m_2 = ۲٫۰۰m_1$ برخورد می‌کند. پس از این برخورد، قطعه‌ی ۲ به ناحیه‌ای می‌لغزد که در آنجا ضریب اصطکاک جنبشی μ_k برابر $۰٫۵۰۰$ است و در این

ناحیه پس از طی مسافت d ، متوقف می‌شود. اگر برخورد (الف) کشسان و (ب) کاملاً ناکشسان باشد، مقدار مسافت d چقدر است؟



$$E_1 = E_2 \quad \rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv_{1i}^2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{1i} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times 2.5} \approx 7 \text{ m/s}$$

در هنگام برخورد کشسان

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{m_1 - 2m_1}{m_1 + 2m_1} \times 7 = -\frac{7}{3} \text{ m/s}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{2m_1}{m_1 + 2m_1} \times 7 = \frac{14}{3} \text{ m/s}$$

$$E_3 - E_2 = w_{f_k} \quad \rightarrow \quad 0 - \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 = -\mu_k m_2 g x_2 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{v_{2f}^2}{\mu_k g} = \frac{\left(\frac{14}{3}\right)^2}{0.5 \times 10}$$

در هنگام برخورد کاملاً ناکشسان

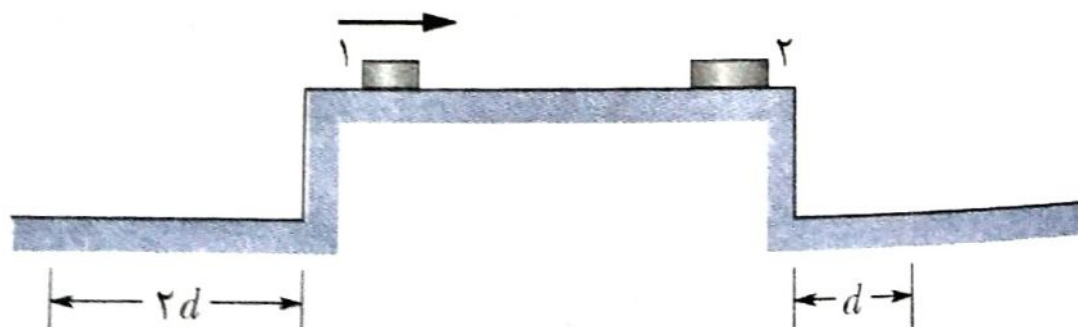
$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f \quad \rightarrow \quad v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} =$$

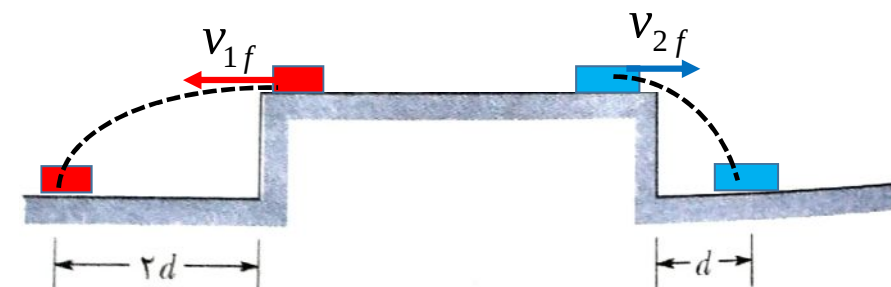
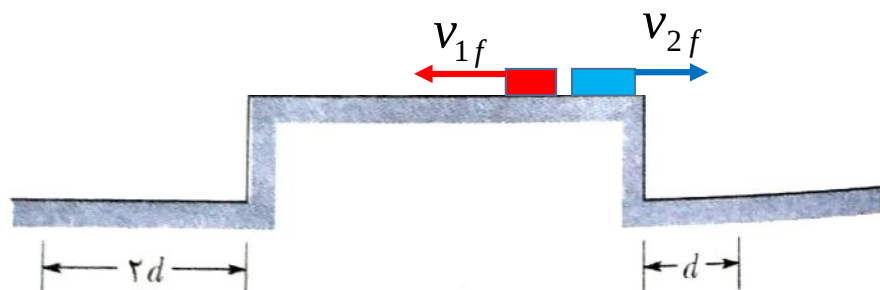
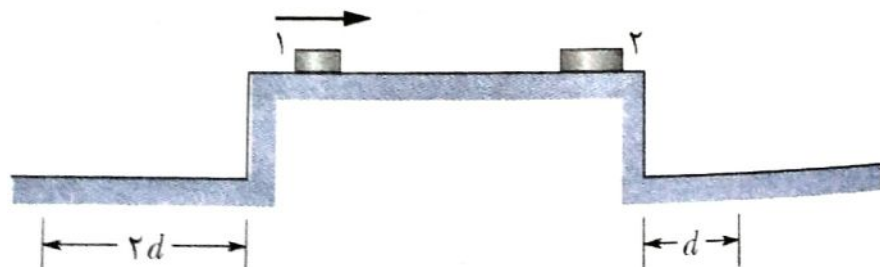
$$\rightarrow \quad v_f = \frac{m_1}{m_1 + 2m_1} \times 7 = \frac{7}{3} \text{ m/s}$$

$$E_3 - E_2 = w_{f_k} \quad \rightarrow \quad 0 - \frac{1}{2} m_2 v_f^2 = -\mu_k m_2 g x_2 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{v_f^2}{\mu_k g} = \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^2}{0.5 \times 10}$$

$$0 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 = -\mu_k (m_1 + m_2) g x_2$$

۷۰۰۰۰ GO در شکل ۹-۶۹، قرص هاکی ۱ به جرم $m_1 = 0.20 \text{ kg}$ روی میز بدون اصطکاکی سُر داده می شود تا با قرص هاکی ساکن ۲ برخورد کشسان یک بُعدی انجام دهد. آنگاه قرص ۲ روی میز سُر می خورد و پس از فرو افتادن از میز، در فاصله d از پایه ی میز فرود می آید. قرص ۱ بر اثر این برخورد وامي جهد و به سمت لبه ی مخالف سُر می خورد و پس از فرو افتادن از میز در فاصله ی $2d$ از پایه ی میز فرود می آید. جرم قرص چقدر است؟ (راهنمایی: به علامت ها دقت کنید.)





در هنگام برخورد کشسان

در حرکت پرتابی با سرعت اولیه افقی

در هنگام برخورد کشسان

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{0.2 - m_2}{0.2 + m_2} v_{1i} \quad (1)$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{2 \times 0.2}{0.2 + m_2} v_{1i} \quad (2)$$

$$y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v^2}$$

در حرکت پرتابی با سرعت اولیه افقی

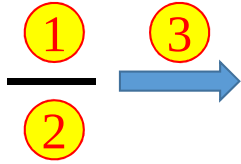
$$h = \frac{1}{2} g \frac{d^2}{v_{2f}^2}$$

$$\frac{1}{2} g \frac{d^2}{v_{2f}^2} = \frac{1}{2} g \frac{(2d)^2}{v_{1f}^2}$$

$$h = \frac{1}{2} g \frac{(2d)^2}{v_{1f}^2}$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{v_{2f}^2} = \frac{(2d)^2}{v_{1f}^2} \rightarrow v_{1f} = \pm 2v_{2f}$$

$$v_{1f} = -2v_{2f} \quad (3)$$



$$\frac{v_{1f}}{v_{2f}} = \frac{m_1 - m_2}{2m_1} = \frac{0.2 - m_2}{2 \times 0.2} = -2$$

$$\rightarrow 0.2 - m_2 = -2 \times 2 \times 0.2 \quad \rightarrow m_2 = 0.2 + 0.8 = 1.0 \text{ kg}$$