بسم الله الرحمن الرحيم

فصل ششم – بخش سوم

قانون عکس مجذوری

قانون عکس مجذور (بررسی دقیق تر)

حل معادلهٔ برای مدار ذره‌ای تحت تأثیر نیروی گرانشی

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{1}{ml^2u^2} f(u^{-1})$$

$$f(r) = -\frac{k}{r^2}$$ نیروی عکس مجذوری

$k = GMm$ ثابت

$M \gg m$ و در فضا ثابت باقی می‌ماند.

جرم کوچک m همان جرمی است که مدارش را محاسبه می‌کنیم.

وقتی $M \approx m$، یا M دست‌کم خیلی از m بزرگتر نباشد؛ محاسبهٔ ما یک اصلاح لازم دارد.

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{ml^2}$$

شکل معادله‌ای را دارد که نوسانگر هماهنگ ساده را توصیف می‌کند

از یک ثابت اضافه هم برخوردار است.

جواب عمومی این معادله $$u = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{k}{ml^2}$$

$$r = \frac{1}{u} \longrightarrow r = \frac{1}{k/ml^2 + A\cos(\theta - \theta_0)}$$

$$r = \frac{1}{k/ml^2 + A\cos(\theta - \theta_0)}$$

ثابتهای انتگرال‌گیری، A و θ_0، از روی شرایط اولیه یا با توجه به مقادیر مکان و سرعت ذره در لحظهٔ خاصی از زمان تعیین می‌شوند.

$$r = \frac{ml^2/k}{1 + (Aml^2/k)\cos\theta} \qquad \theta_0 = 0,$$

این معادله، یک بیضی را توصیف می‌کند که مبدأ در یکی ازکانونهای آن واقع است

معادل با تعریف اساسی بیضی

در این حالت، حرکت ذره مقید است.

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + A\frac{ml^2}{k}\cos\theta}{\frac{ml^2}{k}} = \frac{k}{ml^2} + A\cos\theta$$

$$\theta = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{r_1} = \frac{k}{ml^2} + A$$

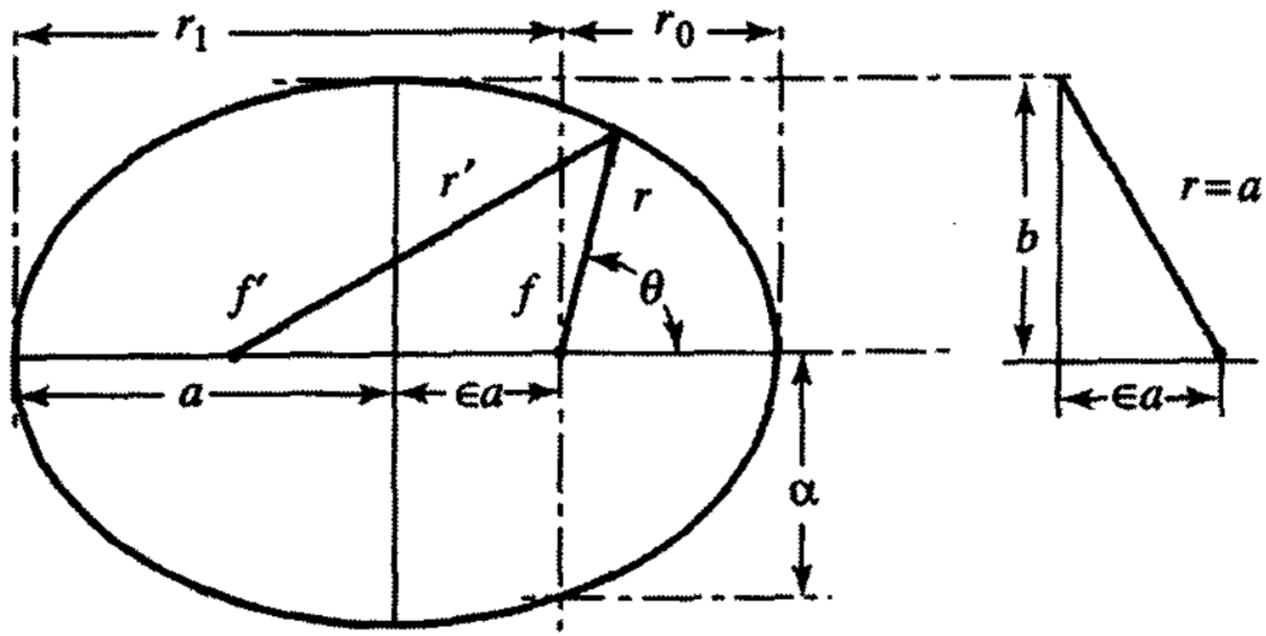
$$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{r} = \frac{k}{ml^2}$$

$$\theta = \pi \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{r_2} = \frac{k}{ml^2} - A$$

تعریف بیضی:

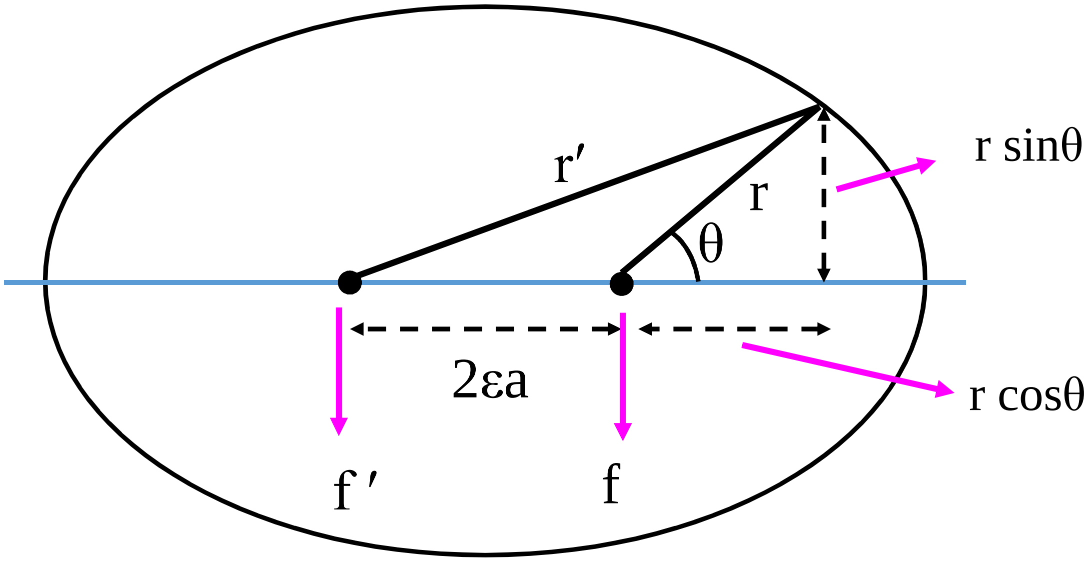
بیضی، بنا بر تعریف، عبارت است از مکان هندسی نقاطی که فاصلهٔ کل آنها از دو کانون f و f' مقداری ثابت است، یعنی

$$r + r' = \text{ثابت} = ۲a$$



f, f'	دو کانون بیضی
a	نیم‌قطر بزرگ
b	نیم‌قطر کوچک
ϵ	خروج از مرکز: هر کانون به اندازهٔ ϵa از مرکز فاصله دارد
α	ضلع قائم: فاصلهٔ کانون از نقطه‌ای واقع بر محیط بیضی و واقع بر خطی که از کانون می‌گذرد و بر قطر بزرگ عمود است: $\alpha = (۱ - \epsilon^۲)a$
$r_۰$	فاصلهٔ کانون تا نزدیکترین نقطهٔ محیط بیضی به آن: $r_۰ = (۱ - \epsilon)a$
$r_۱$	فاصلهٔ کانون تا دورترین نقطهٔ محیط بیضی از آن: $r_۱ = (۱ + \epsilon)a$
ϵa	فاصلهٔ هر یک از دو کانون تا مرکز بیضی

رابطه‌ای بین r و r' با به‌کاربردن قضیهٔ فیثاغورس



$$r'^۲ = r^۲ \sin^۲ \theta + (۲\epsilon a + r \cos \theta)^۲$$

$$= r^۲ + ۴\epsilon a(\epsilon a + r \cos \theta)$$

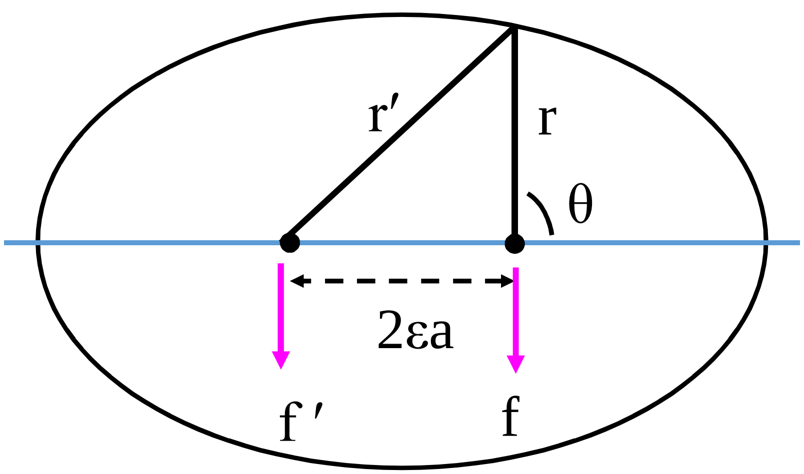
$$r'^2 = r^2 + 4\epsilon a(\epsilon a + r\cos\theta)$$

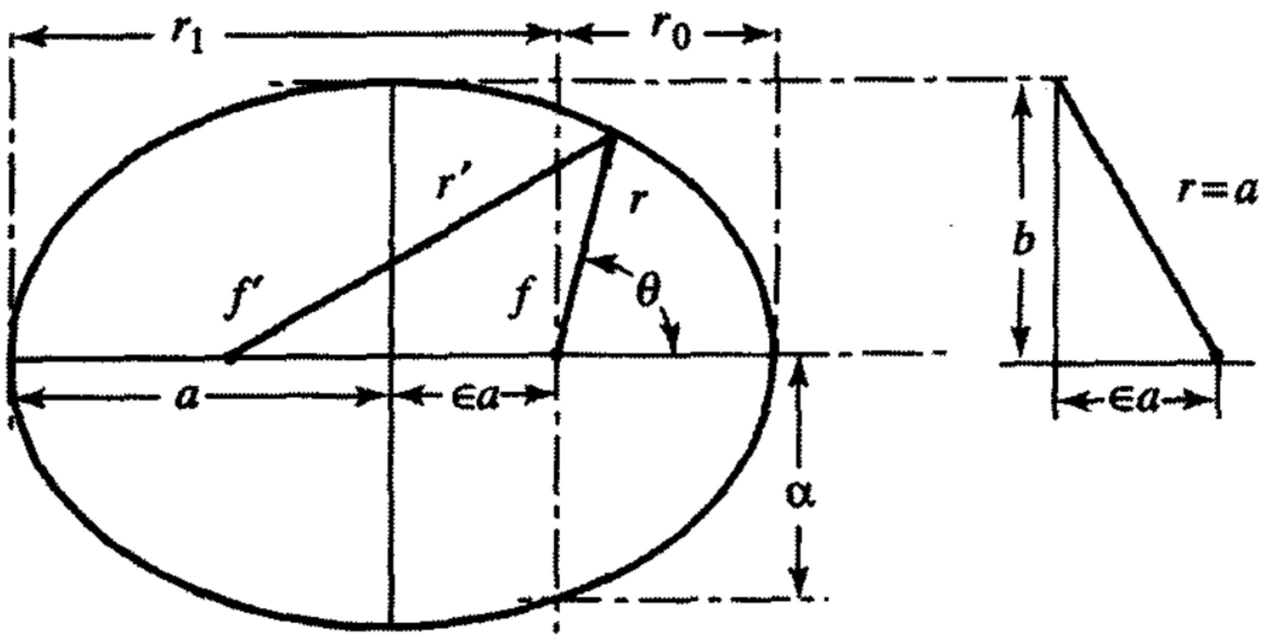
$$r' = 2a - r$$ ،

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\theta}$$

در $\theta = \pi/2$، داریم $r = a(1-\epsilon^2) = \alpha$ که پارامتر مسیر بیضی است.

$$r = \frac{\alpha}{1+\epsilon\cos\theta}$$





a قطر کوچک بیضی و b قطر بزرگ

$$r_0 = (1-\varepsilon)a$$

$$b = a\left(1-\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

مقایسه معادلات

مدار ذره‌ای تحت تأثیر نیروی گرانشی $$r = \frac{ml^2/k}{1 + (Aml^2/k)\cos\theta}$$

معادل با تعریف اساسی بیضی $$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon\cos\theta}$$

$$\alpha = \frac{ml^2}{k} \qquad \epsilon = \frac{Aml^2}{k}$$

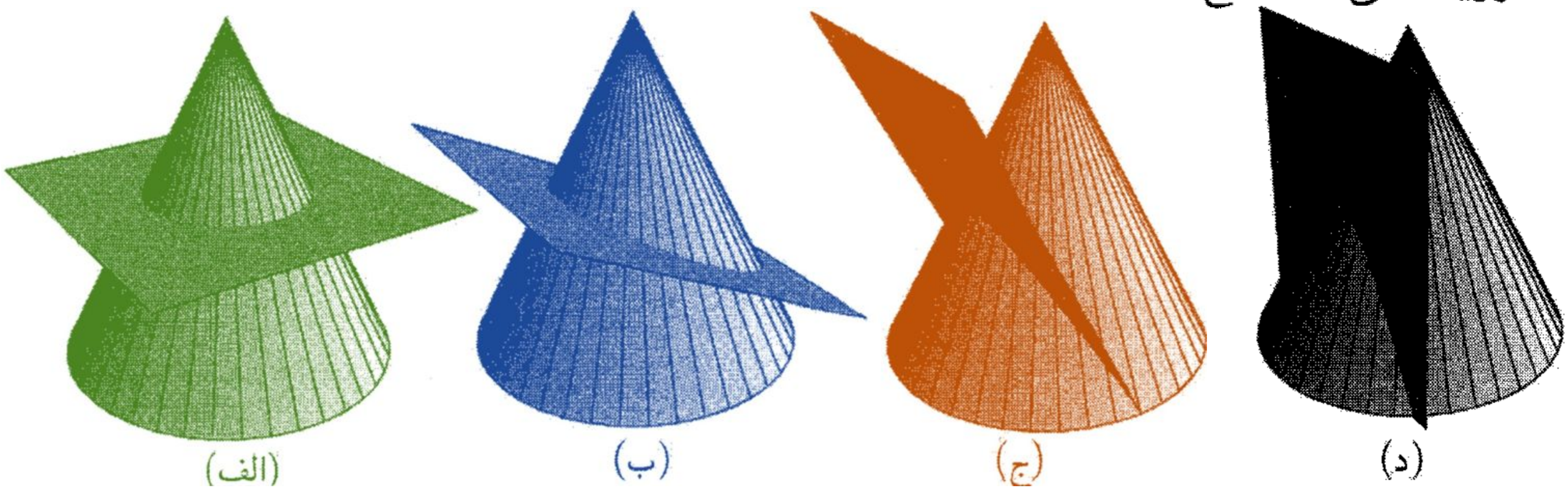
این معادلات هر مقطع مخروطی و تمام مدارهای ممکن، غیر از بیضی، پیرامون منبع گرانشی را توصیف می‌کنند.

مقاطع مخروطی

هر مقطع مخروطی بر اثر تقاطع یک صفحه و یک مخروط تشکیل می‌شود

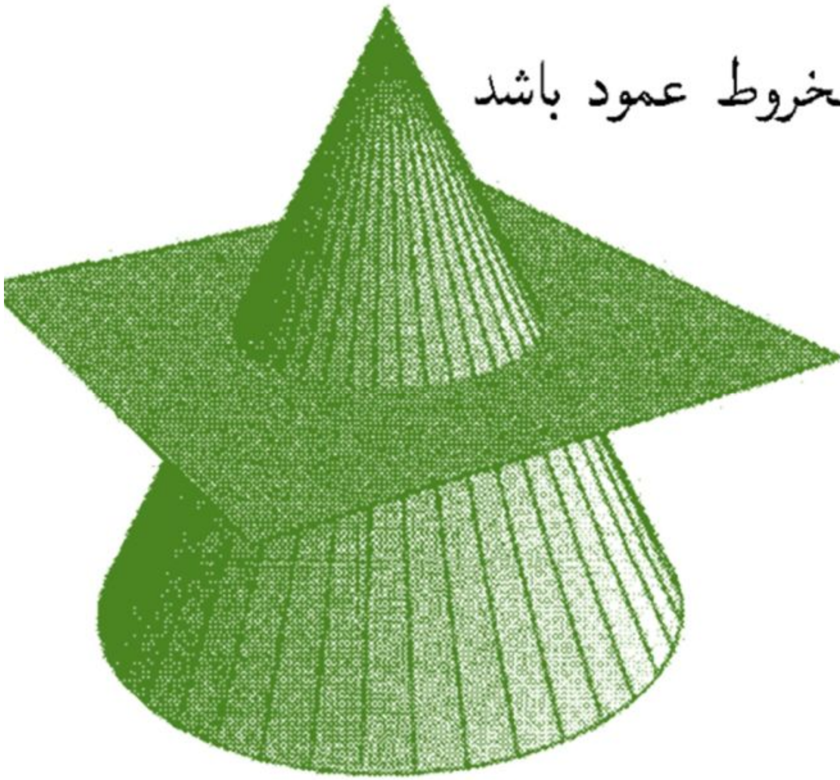
زاویهٔ کجی (اریب) بین این صفحه و محور مخروط، ماهیت مقطع حاصل را تعیین می‌کند.

زاویهٔ کجی به خروج از مرکز، ϵ، در معادلات مربوط می‌شود



$\epsilon = ۰$ دایره

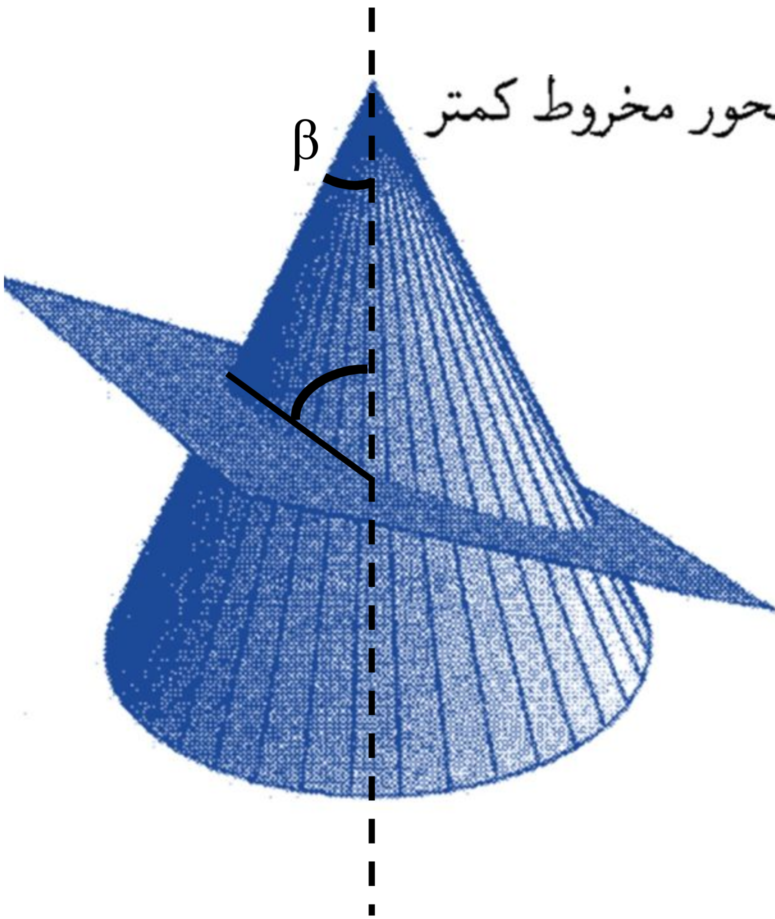
دایره وقتی تشکیل می‌شود که این صفحه بر محور مخروط عمود باشد



$$r = \frac{\alpha}{۱ + \epsilon \cos\theta}$$

$$\boxed{r(\theta) = r = a}$$

بیضی $0 < \epsilon < 1$



بیضی وقتی تشکیل می‌شود که زاویهٔ بین این صفحه و محور مخروط کمتر

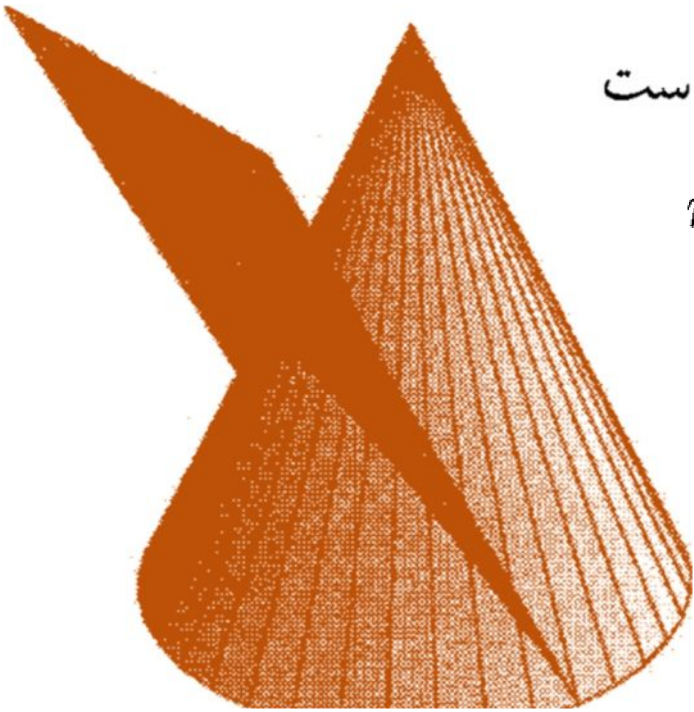
از $\pi/2$ ولی بزرگتر از β باشد.

β زاویهٔ مولد مخروط است

به‌ازای $\epsilon \rightarrow 1$، داریم $a \rightarrow \infty$

اما حاصلضرب $\alpha = a(1 - \epsilon^2)$ متناهی می‌ماند

سهمی $\epsilon = ۱$



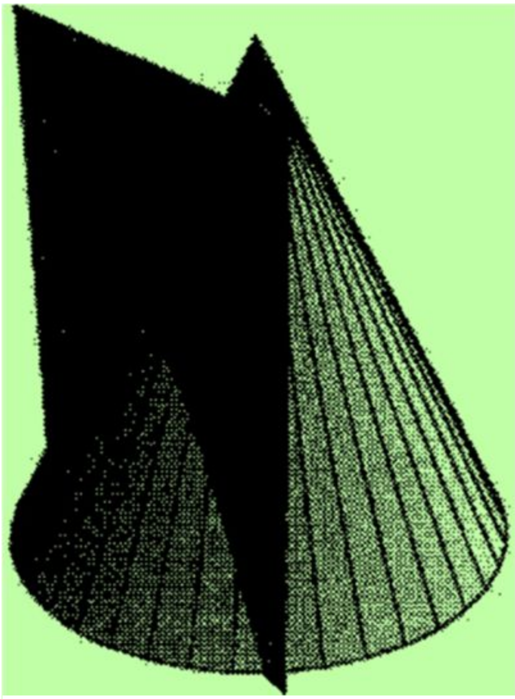
زاویهٔ بین این صفحه و محور مخروط در این حالت β است

$$r = \frac{\alpha}{۱ + \epsilon \cos\theta}$$

$$r = \frac{\alpha}{1 + \cos\theta}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\cos\theta}{\alpha} \quad : \quad \frac{1}{r} = B + A\cos\theta$$

Case (*d*) *Parabola*: A parabola is a curve traced by a point so that its distance from a fixed point, called the *focus F*, is always equal to its distance from a fixed line, called the *directrix*. The resulting equation—which may be obtained from Eq. (7.97) by substituting $e = 1$ and assuming r is minimum when $\theta = \pi$—is

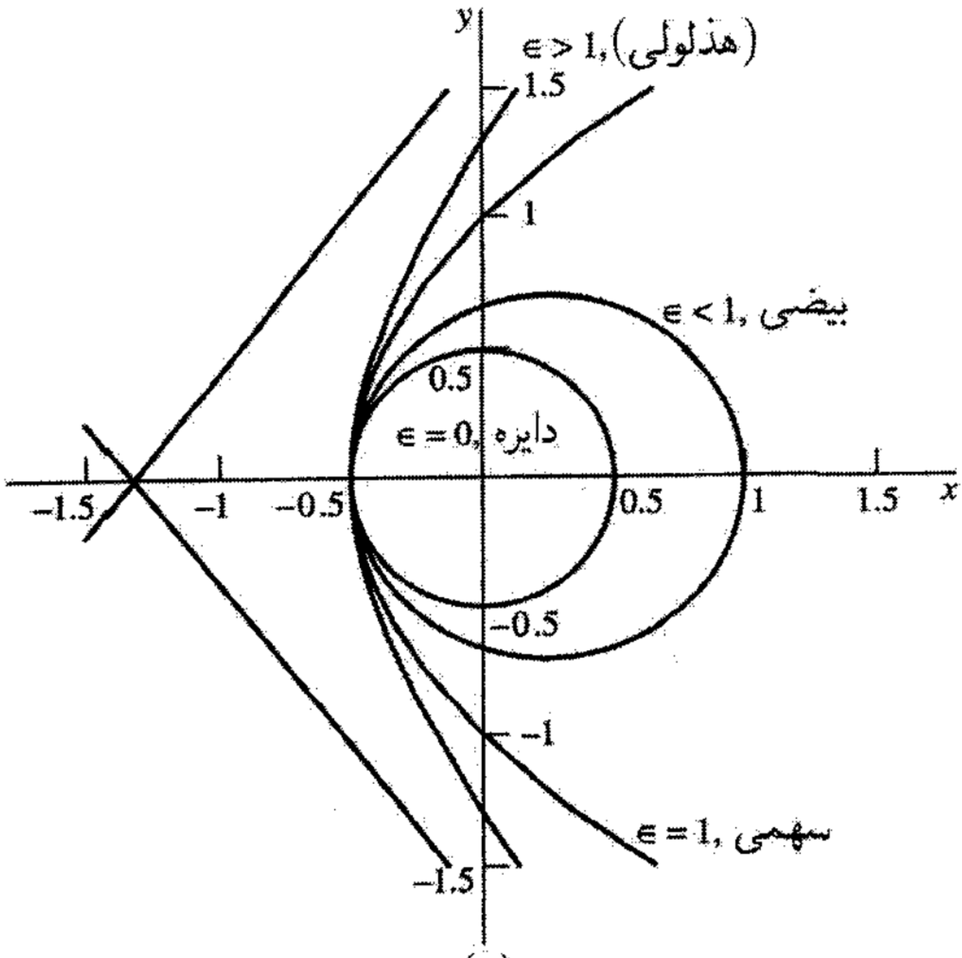


$\epsilon > ۱$ هذلولی

زاویهٔ کجی بین صفر و β قرار می‌گیرد

Case (c) *Hyperbola*: A hyperbola is a curve traced by a point such that the difference of its distances from two fixed points F and F', called the *foci*, is constant. The hyperbola has two branches

$$r' - r = 2a, \qquad (+\text{branch to the left})$$
$$r' - r = -2a, \qquad (-\text{branch to the right})$$



(ه)

مقاطع مخروطی گوناگون آن‌طور که ناظر،

در راستای عمود بر این صفحه

مشاهده می‌کند

$\varepsilon > 1,$	$E > 0$	Hyperbola
$\varepsilon = 1,$	$E = 0$	Parabola
$0 < \varepsilon < 1,$	$V_{\min} < E < 0$	Ellipse
$\varepsilon = 0,$	$E = V_{\min}$	Circle

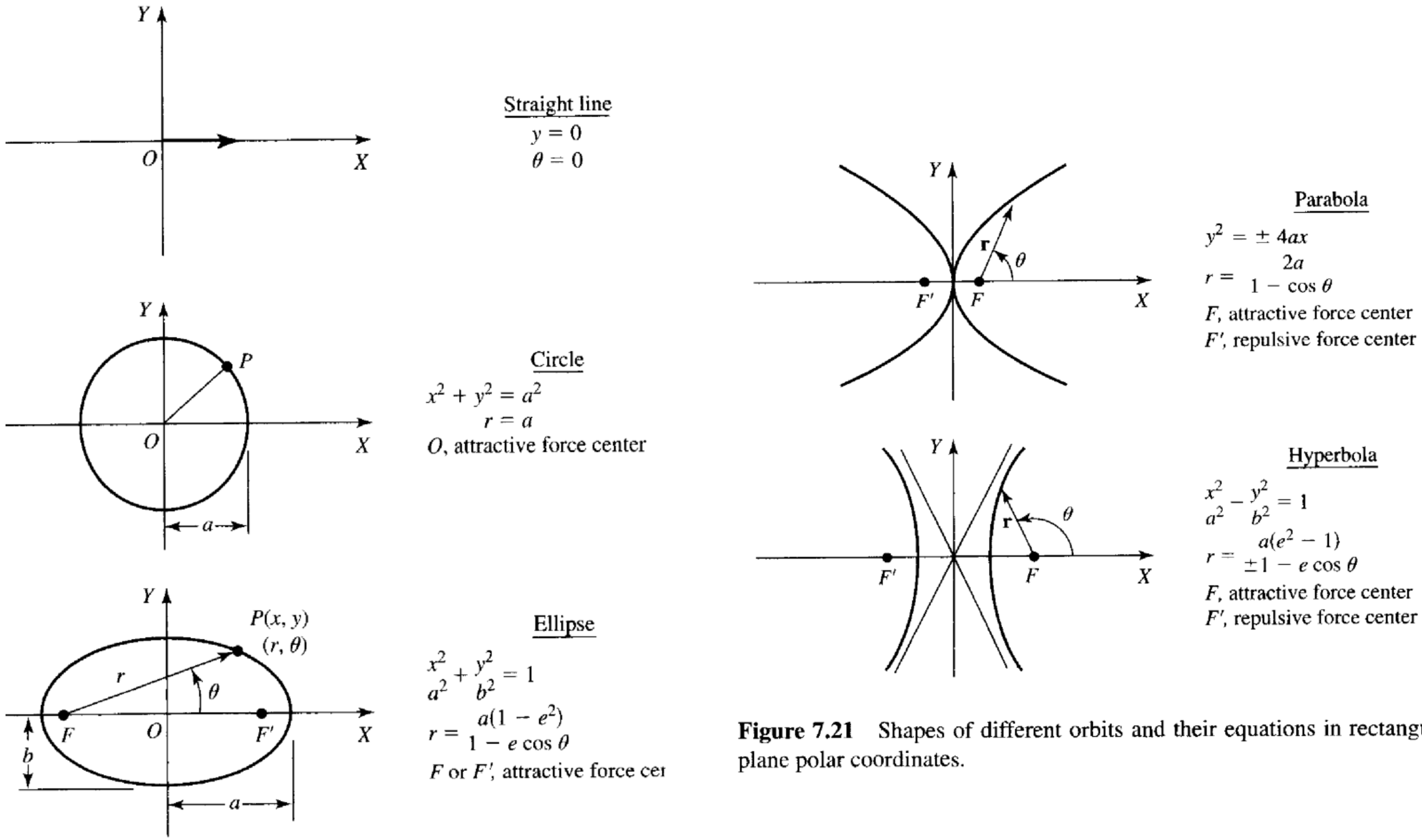
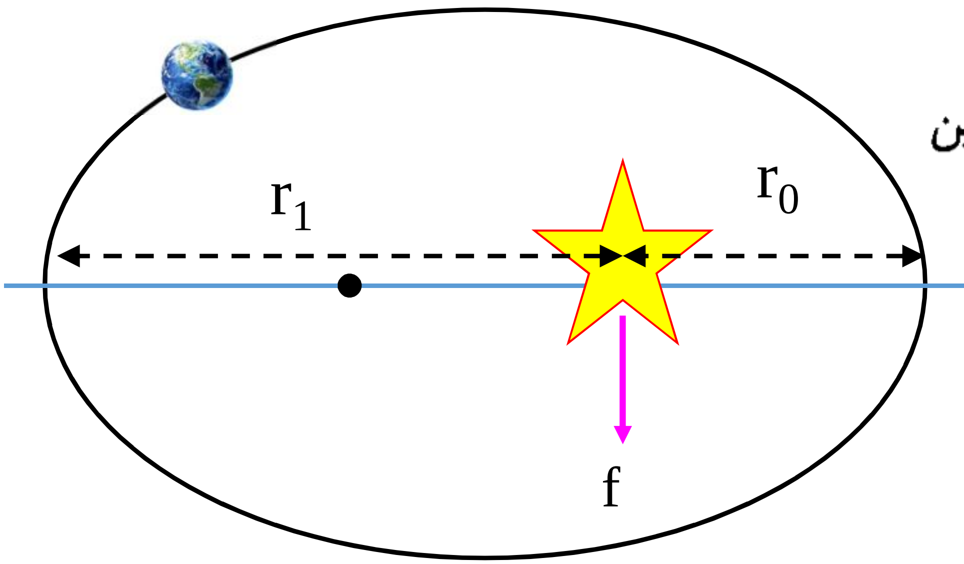


Figure 7.21 Shapes of different orbits and their equations in rectangular and plane polar coordinates.

مدارهای بیضی سیارات حول خورشید

r_0، فاصلهٔ نزدیکترین نقطهٔ مدار تا خورشید را حضیض خورشیدی

r_1، فاصلهٔ دورترین نقطهٔ مدار تا خورشید را اوج



فواصل متناظر با آنها در مورد مدار ماه به دور زمین

و برای مدار ماهواره‌ها

را، به‌ترتیب، فواصل حضیض و اوج می‌نامند.

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\theta} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{lcl} \theta = 0 & \longrightarrow & r_0 = \dfrac{\alpha}{1+\epsilon} \\[2ex] \theta = \pi & \longrightarrow & r_1 = \dfrac{\alpha}{1-\epsilon} \end{array}$$

خروج از مرکز مداری سیارات خیلی کوچک‌اند (جدول ۱.۵.۶)

مدار زمین $\epsilon = 0.017$، $r_0 = 91,000,000\,\mathrm{mi}$ و $r_1 = 95,000,000\,\mathrm{mi}$.

از سوی دیگر، خروج از مرکز مداری ستاره‌های دنباله‌دار عموماً بزرگ است

ستارهٔ دنباله‌دار هالی 0.967 و فاصلهٔ حضیض خورشیدی آن فقط $55,000,000\,\mathrm{mi}$

در صورتی که در اوج خورشیدی مدار آن فراتر از مدار نپتون است

مدار بسیاری از ستاره‌های دنباله‌دار سهمی یا هذلولی (از نوع برنگشتنی) است.

	زمان تناوب		مکعب نیم‌قطر بزرگ		خروج از مرکز
سیاره	τ (به سال)	مربع $\tau^{۲}$ (سال)^{۲}	قطر $a(AU)$	$a^{۳}(AU)^{۳}$	ϵ
عطارد	۰٫۲۴۱	۰٫۰۵۸۱	۰٫۳۸۷	۰٫۰۵۸۰	۰٫۲۰۶
زهره	۰٫۶۱۵	۰٫۳۷۸	۰٫۷۲۳	۰٫۳۷۸	۰٫۰۰۷
زمین	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۰٫۰۱۷
مریخ	۱٫۸۸۱	۳٫۵۳۸	۱٫۵۲۴	۳٫۵۴۰	۰٫۰۹۳
مشتری	۱۱٫۸۶	۱۴۰٫۷	۵٫۲۰۳	۱۴۰٫۸	۰٫۰۴۸
زحل	۲۹٫۴۶	۸۶۷٫۹	۹٫۵۳۹	۸۶۸٫۰	۰٫۰۵۶
اورانوس	۸۴٫۰۱	۷۰۵۸	۱۹٫۱۸	۷۰۵۶	۰٫۰۴۷
نپتون	۱۶۴٫۸	۲۷۱۶۰	۳۰٫۰۶	۲۷۱۶۰	۰٫۰۰۹
پلوتون	۲۴۷٫۷	۶۱۳۶۰	۳۹٫۴۴۰	۶۱۳۵۰	۰٫۲۴۹

استخراج قانون سوم

مساحت کل　　　　مدت زمان یک چرخش کامل

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = constant \quad \rightarrow \quad A = \frac{L}{2m} T$$

$$\rightarrow \quad T = \frac{2m}{L} A = \frac{2m}{L}(\pi ab)$$

$$a = \frac{\alpha}{1-\varepsilon^2} \quad , \quad b = \frac{\alpha}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \Longrightarrow \quad b = \sqrt{\alpha a}$$

$$T^2 = \frac{4m^2}{L^2}\alpha\pi^2 a^3 \quad \Longrightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2 m^3}{k} a^3$$