



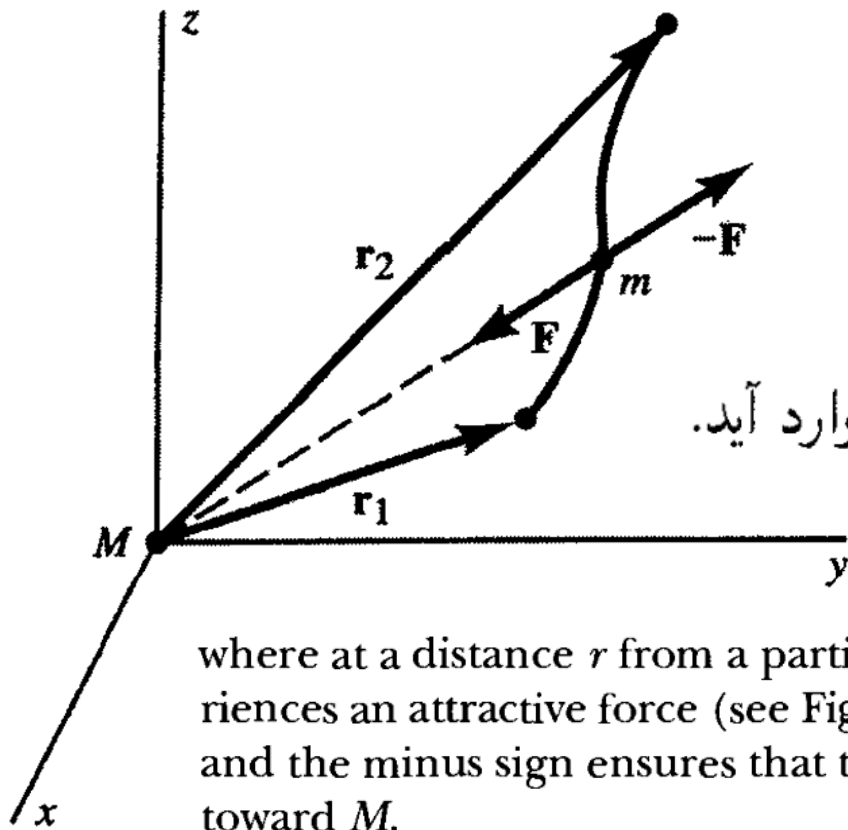
فصل ششم – بخش چهارم

انرژی پتانسیل و پتانسیل گرانشی

۷.۶ انرژی پتانسیل در میدان گرانشی: پتانسیل گرانشی

قانون نیروی عکس مجذور به قانون عکس توان اول برای تابع انرژی پتانسیل می‌انجامد.

کار، W ، لازم را برای به حرکت درآوردن ذرهٔ آزمون به جرم m در امتداد مسیری معلوم در میدان گرانشی ذرهٔ دیگر به جرم M در نظر می‌گیریم.



ذره به جرم M در مبدأ دستگاه مختصات

نیروی، \mathbf{F} ، وارد بر ذره آزمون

$$\mathbf{F} = -(GMm/r^2)\mathbf{e}_r$$

برای غلبه بر این نیرو، باید یک نیروی خارجی $-\mathbf{F}$ وارد آید.

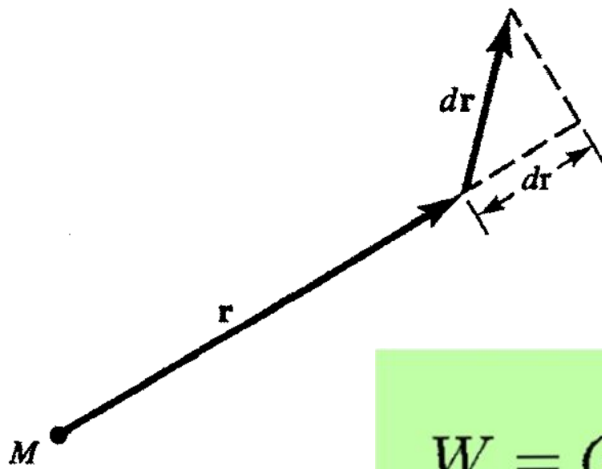
where at a distance r from a particle of mass M a second particle of mass m experiences an attractive force (see Figure 5-1). The unit vector \mathbf{e}_r points from M to m , and the minus sign ensures that the force is attractive—that is, that m is attracted toward M .

A laboratory verification of the law and a determination of the value of G was made in 1798 by the English physicist Henry Cavendish (1731–1810). Cavendish's experiment, described in many elementary physics texts, used a torsion balance with two small spheres fixed at the ends of a light rod. The two spheres were attracted to two other large spheres that could be placed on either side of the smaller spheres. The official value for G is $6.673 \pm 0.010 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$. Interestingly, although G is perhaps the oldest known of the fundamental constants, we know it with less precision than we know most of the modern fundamental constants such as e , c , and \hbar . Considerable research is ongoing today to improve the precision of G .

کار نیروی خارجی

کار dW که هنگام حرکت ذره آزمون در تغییر مکان $d\mathbf{r}$ انجام می‌شود.

$$\text{کار نیروی } -F \quad dW = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{GMm}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r}$$



$$d\vec{r} = d\vec{r}_{\parallel} + d\vec{r}_{\perp}$$

موازی با \mathbf{e}_r (مؤلفه شعاعی)

عمود بر \mathbf{e}_r

$$\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} = dr$$

$$W = GMm \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -GMm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$W = GMm \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -GMm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

انرژی پتانسیل ذره آزمون به جرم m
در میدان گرانشی ذره به جرم M

r_1 و r_2 ، به ترتیب، فواصل شعاعی ذره در آغاز و پایان مسیرند.

کار فقط به نقاط ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد

کار از مسیر خاص پیموده شده مستقل است

قانون عکس مجذور نیرو، که قانون عکس مجذور آن را

مکان مرجع را در $r_1 = \infty$ اختیار می‌کنیم. $r_2 = r$ و $r_1 = \infty$

$$V(r) = GMm \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = -\frac{GMm}{r}$$

انرژی پتانسیل گرانشی ذخیره شده در سیستم دو ذره:

ناشی از برهمکنش آن دو ذره توسط نیروهای وارد برهم = برهمکنش موضعی ماده با میدان موجود

تعریف پتانسیل گرانشی

$$\Phi = \lim_{m \rightarrow 0} \left(\frac{V}{m} \right)$$

پتانسیل گرانشی

Φ انرژی پتانسیل واحد جرم

ذره آزمونی خیلی کوچک $m \rightarrow 0$

تا اطمینان یابیم حضور ذره آزمون بر توزیع سایر مواد تأثیر نمی‌کند

پتانسیل باید فقط به بزرگی سایر جرمها و مکان آنها در فضا بستگی داشته
به خصوصیت ذره‌ای که آن را برای بررسی حضور گرانش به کار می‌بریم، بستگی نداشته باشد

پتانسیل به صورت تابع اسکالری از مختصات فضایی $\Phi = \Phi(x, y, z)$

انرژی پتانسیل ذرهٔ آزمون در میدان Φ $V(x, y, z) = m\Phi(x, y, z)$

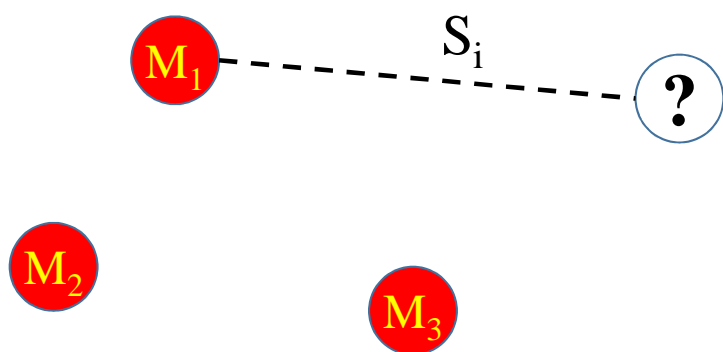
پتانسیل گرانشی در فاصلهٔ r از ذره‌ای به جرم M

$$\Phi = -\frac{GM}{r}$$

هرگاه تعدادی ذره $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots$ داشته باشیم که در مکانهای $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_i, \dots$ واقع باشند، در این صورت پتانسیل گرانشی در نقطه $\mathbf{r}(x, y, z)$ عبارت است از مجموع پتانسیلهای گرانشی تمام ذرات، یعنی

$$\Phi(x, y, z) = \sum \Phi_i = -G \sum \frac{M_i}{s_i}$$

s_i فاصله نقطه میدانی $\mathbf{r}(x, y, z)$ از مکان $\mathbf{r}_i(x_i, y_i, z_i)$ ذره i ام $s_i = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$



شدت میدان گرانشی

$$g = \lim_{m \rightarrow 0} \left(\frac{\mathbf{F}}{m} \right)$$

شدت میدان گرانشی عبارت است از نیروی گرانشی واحد جرم که ذره آزمون به جرم m واقع در نقطه (x, y, z) وارد می‌آید.

$$\mathbf{F} = mg$$

نیروی گرانشی بر ذره آزمون

سایر جرمهای مجاور عامل وجود شدت میدان موضعی g هستند.

رابطه بین شدت میدان و پتانسیل

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi$$

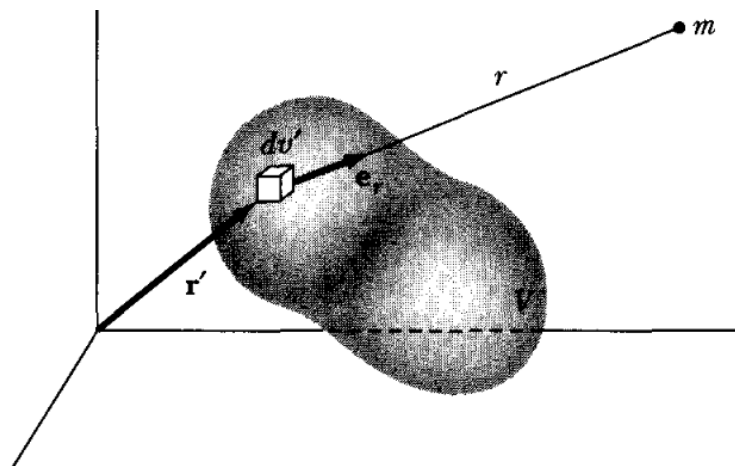
$$\mathbf{F} = -\nabla V$$

$$\Phi(x, y, z) = \sum \Phi_i = -G \sum \frac{M_i}{s_i} \xrightarrow{\mathbf{g} = -\nabla\Phi} \mathbf{g}$$

اگر یک از جسم ها به صورت توزیع گسترده ای از اجرام با چگالی مشخص در فضا باشد نیروی ناشی از کل توزیع روی جسم محاسبه می شود

$$\mathbf{F} = -Gm \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') \mathbf{e}_r}{r^2} dv' \quad (5.2)$$

where $\rho(\mathbf{r}')$ is the mass density and dv' is the element of volume at the position defined by the vector \mathbf{r}' from the (arbitrary) origin to the point within the mass distribution.



پتانسیل گرانشی برای توزیع های مختلف جرم

The potential due to a continuous distribution of matter is

$$\Phi = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} dv' \quad (5.7)$$

Similarly, if the mass is distributed only over a thin shell (i.e., a *surface* distribution), then

$$\Phi = -G \int_S \frac{\rho_s}{r} da' \quad (5.8)$$

where ρ_s is the surface density of mass (or *areal mass density*).

Finally, if there is a *line source* with linear mass density ρ_l , then

$$\Phi = -G \int_\Gamma \frac{\rho_l}{r} ds' \quad (5.9)$$

The **gravitational field vector** \mathbf{g} is the vector representing the force per unit mass exerted on a particle in the field of a body of mass M . Thus

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -G \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (5.3)$$

or

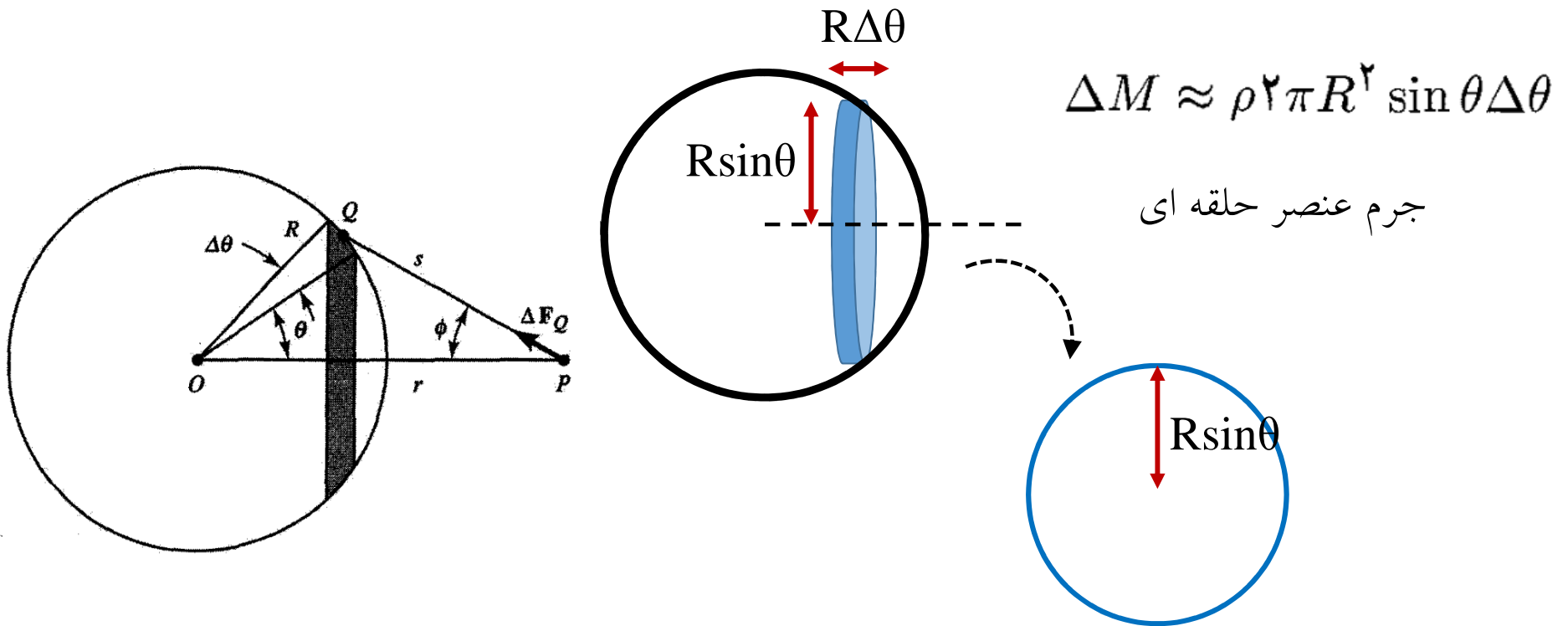
$$\mathbf{g} = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') \mathbf{e}_r}{r^2} dv' \quad (5.4)$$

پیرامون انرژی تشکیل سیاره ها

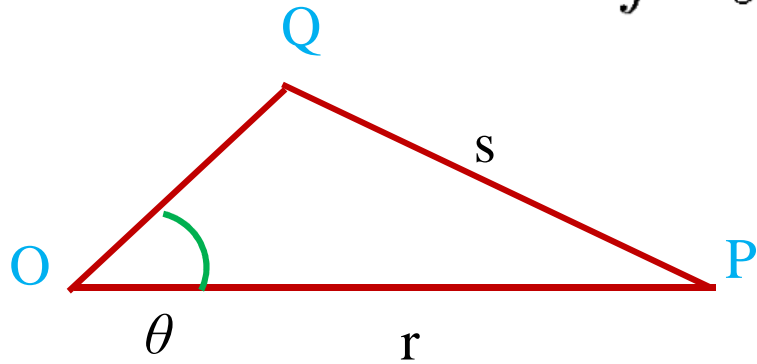
A certain potential energy exists whenever a body is placed in the gravitational field of a source mass. This potential energy resides in the *field*,* but it is customary under these circumstances to speak of the potential energy “of the body.” We shall continue this practice here. We may also consider the source mass itself to have an intrinsic potential energy. This potential energy is equal to the gravitational energy released when the body was formed or, conversely, is equal to the energy that must be supplied (i.e., the work that must be done) to disperse the mass over the sphere at infinity. For example, when interstellar gas condenses to form a star, the gravitational energy released goes largely into the initial heating of the star. As the temperature increases, energy is radiated away as electromagnetic radiation. In all the problems we treat, the structure of the bodies is considered to remain unchanged during the process we are studying. Thus, there is no change in the intrinsic potential energy, and it may be neglected for the purposes of whatever calculation we are making.

مثال ۱.۷.۶ پتانسیل پوستهٔ کروی یکنواخت

برای مثال، تابع پتانسیل را برای پوستهٔ کروی یکنواخت به دست می‌آوریم.



$$\Phi = -G \int \frac{dM}{s} = -G \int \frac{\sqrt{2} \pi \rho R^{\sqrt{2}} \sin \theta d\theta}{s}$$



رابطه بين s و θ

$$rR \sin \theta d\theta = s ds$$

$$\cos \phi = \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2rs}$$

تغيير حدود انتگرال

$$\begin{aligned} \phi &: 0 \rightarrow \pi \\ S &: r-R \rightarrow r+R \end{aligned}$$



$$\Phi = -G \frac{2\pi\rho R^2}{rR} \int_{r-R}^{r+R} ds = -\frac{GM}{r}$$

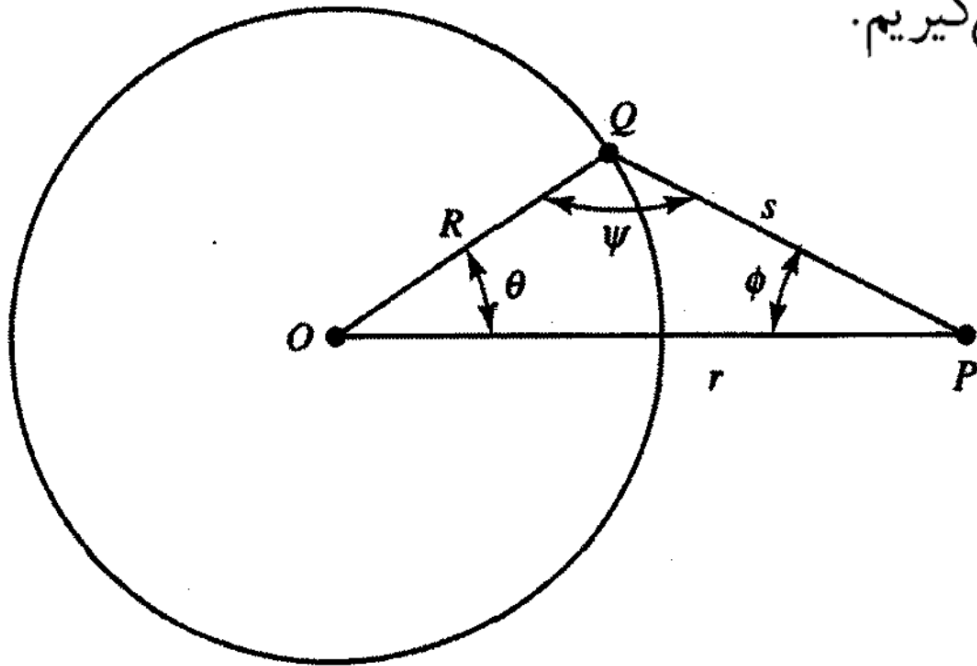
M جرم پوسته

این تابع پتانسیل مانند تابع پتانسیل حاصل از تک ذره به جرم M واقع در O است.
میدان گرانشی خارج از پوسته مثل آن است که تمام جرم را در مرکز پوسته قرار داده باشند.

مثال ۲.۷.۶ پتانسیل و میدان حلقه نازک

تابع پتانسیل و شدت میدان گرانشی را در صفحه حلقه نازک دایره‌ای

شعاع حلقه را R و جرم آن را M می‌گیریم.



برای نقطه‌ای که خارج حلقه و

در صفحه آن واقع باشد

μ چگالی جرم خطی حلقه

$$\Phi = -G \int \frac{dM}{s} = -G \int_0^\pi \frac{\mu R d\theta}{s}$$

$$s^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \Phi &= -2R\mu G \int_0^\pi \frac{d\theta}{(r^2 + R^2 - 2Rr \cos \theta)^{1/2}} \\ &= -\frac{2R\mu G}{r} \int_0^\pi \frac{d\theta}{[1 + (R^2/r^2) - 2(R/r) \cos \theta]^{1/2}} \end{aligned}$$

تقریب میدان دور $r > R$

انتگرال را به سری توانی $x (= R/r)$ بسط می‌دهیم،

$$\begin{aligned}\Phi &= -2x\mu G \int_0^\pi \left[\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + x \cos \theta \right) + \frac{3}{8}(x^2 - 2x \cos \theta)^2 + \dots \right] d\theta \\ &= -2x\mu G \int_0^\pi \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + x \cos \theta + \frac{3}{2}x^2 \cos^2 \theta - \frac{3}{2}x^3 \cos \theta + \frac{3}{8}x^4 + \dots \right) d\theta\end{aligned}$$

اکنون، اگر از تمام جملات مرتبه x^3 یا بالاتر چشم‌پوشیم و توجه کنیم که انتگرال جملات شامل $\cos \theta$ روی نیم‌دور صفر است، می‌رسیم به

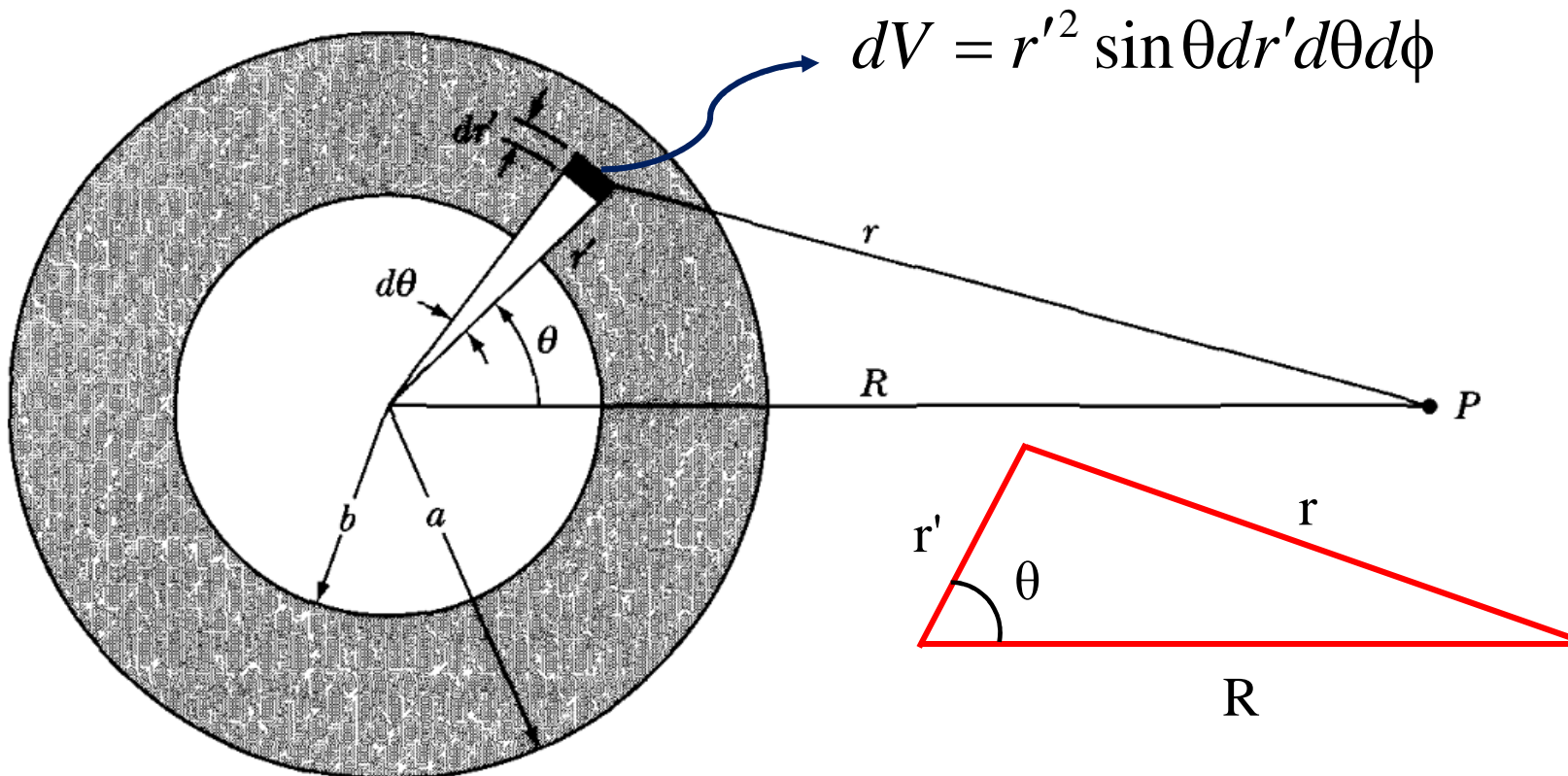
$$\begin{aligned}
\Phi &= -2x\mu G \left(\pi + \pi \frac{x^2}{r} + \dots \right) \\
&= \frac{-2\pi R\mu G}{r} \left(1 + \frac{R^2}{4r^2} + \dots \right) \\
&= -\frac{GM}{r} \left(1 + \frac{R^2}{4r^2} + \dots \right)
\end{aligned}$$

شدت میدان در فاصله r از مرکز حلقه در راستای شعاعی است (چون Φ تابعی از θ نیست)

$$\mathbf{g} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{e}_r = -\frac{GM}{r^2} \left(1 + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^2 + \dots \right) \mathbf{e}_r$$

EXAMPLE 5.1

What is the gravitational potential both inside and outside a spherical shell of inner radius b and outer radius a ?



We consider the shell shown in Figure 5-3 and calculate the potential at point P a distance R from the center of the shell. Because the problem has symmetry about the line connecting the center of the sphere and the field point P , the azimuthal angle ϕ is not shown in Figure 5-3 and we can immediately integrate over $d\phi$ in the expression for the potential. Thus,

$$\begin{aligned}\Phi &= -G \int_V \frac{\rho(r')}{r} dv' \\ &= -2\pi\rho G \int_b^a r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r} d\theta\end{aligned}\quad (5.13)$$

where we have assumed a homogeneous mass distribution for the shell, $\rho(r') = \rho$. According to the law of cosines,

$$r^2 = r'^2 + R^2 - 2r'R \cos \theta \quad (5.14)$$

Because R is a constant, for a given r' we may differentiate this equation and obtain

$$2r dr = 2r'R \sin \theta d\theta \longrightarrow \frac{\sin \theta}{r} d\theta = \frac{dr}{r'R}$$

$$\Phi = -2\pi\rho G \int_b^a r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r} d\theta$$

$$\frac{\sin \theta}{r} d\theta = \frac{dr}{r'R}$$



$$\Phi = -\frac{2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' dr' \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr$$

برای نقاط خارجی از پوسته ($R > a$)

$$\Phi = -\frac{2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' dr' \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr$$



$$\Phi(R > a) = -\frac{2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' dr' \int_{R-r'}^{R+r'} dr$$

$$= -\frac{4\pi\rho G}{R} \int_b^a r'^2 dr'$$

$$= -\frac{4}{3} \frac{\pi\rho G}{R} (a^3 - b^3)$$

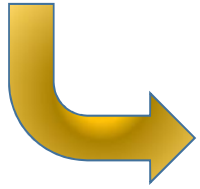
$$M = \frac{4}{3}\pi\rho(a^3 - b^3)$$



$$\Phi(R > a) = -\frac{GM}{R}$$

برای نقاط داخل پوسته ($R < b$)

$$\Phi = -\frac{2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' dr' \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr$$



$$\begin{aligned}\Phi(R < b) &= -\frac{2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' dr' \int_{r'-R}^{r'+R} dr \\ &= -4\pi\rho G \int_b^a r' dr' \\ &= -2\pi\rho G(a^2 - b^2)\end{aligned}$$

The potential is therefore constant and independent of position inside the shell.

برای نقاط درون پوسته ($a < R < b$)

The potential is therefore constant and independent of position inside the shell.

Finally, if we wish to calculate the potential for points *within* the shell, we need only replace the lower limit of integration in the expression for $\Phi(R < b)$ by the variable R , replace the upper limit of integration in the expression for $\Phi(R > a)$ by R , and add the results. We find

$$\begin{aligned}\Phi(b < R < a) &= -\frac{4\pi\rho G}{3R}(R^3 - b^3) - 2\pi\rho G(a^2 - R^2) \\ &= -4\pi\rho G\left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^3}{3R} - \frac{R^2}{6}\right)\end{aligned}\tag{5.21}$$

The results of Example 5.1 are very important. Equation 5.19 states that the potential at any point outside of a spherically symmetric distribution of matter (shell or solid, because solids are composed of many shells) is independent of the size of the distribution. Therefore, to calculate the external potential (or the force), we consider all the mass to be concentrated at the center. Equation 5.20 indicates that the potential is constant (and the force zero) anywhere inside a spherically symmetric mass shell. And finally, at points within the mass shell, the potential given by Equation 5.21 is consistent with both of the previous results.

The magnitude of the field vector \mathbf{g} may be computed from $g = -d\Phi/dR$ for each of the three regions. The results are

$$\left. \begin{aligned} g(R < b) &= 0 \\ g(b < R < a) &= \frac{4\pi\rho G}{3} \left(\frac{b^3}{R^2} - R \right) \\ g(R > a) &= -\frac{GM}{R^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

